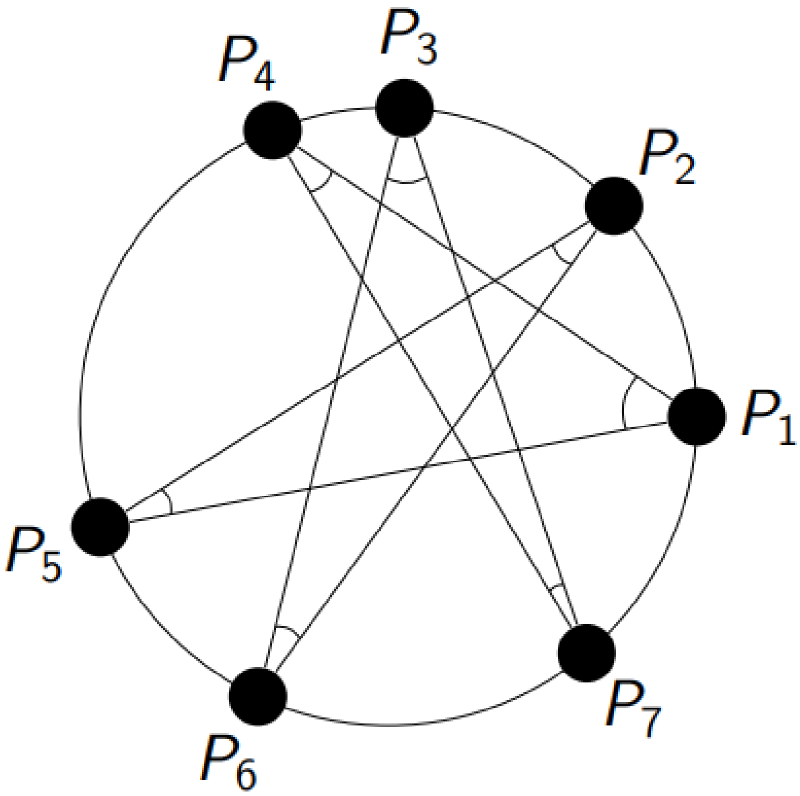
Jahrgang 40 | Heft 142 | Juni 2020

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **28.08.2020**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Vorwort

der Redaktionsleitung

Liebe L(o)eserinnen und L(o)eser,

dieses Jahr 2020 ist für uns alle in vielerlei Hinsicht anders als andere Jahre. Denn es wird maßgeblich geprägt durch die Covid-19-Pandemie. Dadurch kam es seit März zu gravierenden Einschränkungen des öffentlichen und privaten Lebens in Deutschland: Großveranstatungen wurden untersagt, Schulen geschlossen, allgemeine Kontaktbegrenzungen beschlossen.
Neben Schulen sind aber natürlich auch Universitäten betroffen. Und MONOID wird, wie Ihr sicher wisst, an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz herausgegeben. Seit März gibt es hier auch nur noch einen Notbetrieb.
Seit vielen Jahren erscheint regelmäßig alle drei Monate ein neues MONOID-Heft – zuverlässig immer im März, Juni, September und Dezember eines Jahres. So hatten wir im März das Heft 141 gerade fertig und an die Druckerei geschickt, als es hieß: Die Druckerei muss geschlossen werden. Daher kam es zu Verzögerungen und wir konnten das Heft erst am Ende Mai verschicken. Deshalb hatten wir Euch das Heft schon im März als PDF auf unsere Internetseite gestellt und Euch für die Zeit der Schulschließungen wöchentlich neue Aufgaben im Rahmen des MONOID-Mathe-Mittwochs gestellt. So konnten wir Euch die Zeit hoffentlich etwas angenehmer gestalten.

Doch auf das neue Heft hat die Corona-Pandemie Auswirkungen. Die Redaktionsmitglieder arbeiten alle ehrenamtlich an MONOID mit. Die meisten von uns sind hauptberuflich Lehrer oder Universitätsdozenten. Die Umstellung auf und die Durchführung von digitaler Lehre (egal ob an Schule oder Universität) beansprucht – so wie Ihr das ja auch selbst von der anderern Seite kennt – viel Nerven und besonders Zeit. Zeit, die dann leider für andere Dinge fehlt, zum Beispiel die Arbeit an MONOID. So sehr jeder von uns das auch bedauert. Erschwerend kommt hinzu, dass viele Materialien und Unterlagen in physischer Form in unseren Büros an der Universität, die sich noch immer im Notbetrieb befindet, liegen. Daher kommen wir in Heimarbeit nicht daran.
Deshalb ist dieses Heft etwas anders als gewohnt. Es gibt weniger Artikel, dafür findet Ihr aber noch einmal alle MONOID-Mathe-Mittwoch-Aufgaben samt Lösungen. So können sich auch diejenigen, die sich bisher noch nicht mit den Aufgaben beschäftigt haben, diese nun lösen. Und alle können ihre Ergebnisse kontrollieren. Leider haben wir es auch nicht geschafft, neue Aufgaben für den Computerfan

oder für die Mathematischen Entdeckungen zu stellen. Auch das tut uns sehr leid. Daher haben wir den Einsendeschluss der Aufgaben des letzten Heftes um drei Monate verlängert, sodass Ihr Euch länger und intensiver mit diesen beschäftigen könnt.
Bei den Mathematischen Entdeckungen haben wir es auch noch nicht geschafft, die Ergebnisse zusammenzustellen, sodass Ihr hier noch etwas warten müsst. Wir bitten um etwas Geduld und werden die Ergebnisse noch nachreichen.

Wie sich die Corona-Pandemie weiterentwickeln wird, steht noch in den Sternen. Und so können wir noch nicht genau abschätzen, welche Auswirkungen dies auf Monoid haben wird. Wir werden aber alles daran setzen, dass wir Monoid pünktlich und so gut es geht im gewohnten Umfang fertigstellen. Es ist uns eine Herzensangelegenheit! Sämtliche Überlegungen und Entscheidungen werden wir bestmöglich in Eurem Sinn und zu Eurem Wohl treffen.
Wir werden Euch über alles Wichtige und über Neuigkeiten auf unserer Internetseite informieren. Schaut dort gerne vorbei:

`https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`

Aufgrund der derzeitig unkalkulierbaren Situation ist es leider auch noch nicht ganz klar, ob dieses Jahr eine Monoid-Feier in gewohnter Form stattfinden kann. Wir sind guter Dinge, können aber nichts versprechen. Versprechen können wir nur, dass Ihr selbstverständlich die Preise für Eure Leistungen bekommen sollt und werdet. Im schlimmsten Fall müssen wir diese per Post versenden.

Der Worte sind genug geschrieben, lasst uns auch endlich Mathematik sehn! Wir wünschen Euch Gesundheit, Frohmut, Geduld und Durchhaltevermögen. Alles hat ein Ende, auch Corona.

Im Namen der gesamten Monoid-Redaktion wünschen wir Euch viel Spaß beim Lesen und Knobeln!

Dr. Cynthia Hog-Angeloni   Marcel Gruner
Redaktionsleitung

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis."

Jean-Baptist le Rond d'Alembert
*16. November 1717 in Paris, †29. Oktober 1783 ebefalls in Paris;
Mathematiker, Physiker und Philosoph.

MONOID-Mathe-Mittwoch
Aufgaben

Aufgrund des Corona-Notstandes mussten wir in der vergangenen Zeit alle daheim bleiben. Um Euch die Zeit etwas zu verkürzen, haben wir Euch unter dem Titel *MONOID-Mathe-Mittwoch* wöchentlich Aufgaben auf unserer Internetseite zur Verfügung gestellt:
`https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/monoidmathemittwoch.php`.
Auch diese Aufgaben möchten wir natürlich auflösen. Hier aber zunächst noch einmal die Aufgabenstellungen.

Mathespielereien

I. Vertauschte Ziffern

In der Rechnung rechts stimmt zwar das Ergebnis, aber in einem der Summanden sind zwei Ziffern vertauscht.
Welche Ziffern sind das? (WJB)

$$\begin{array}{r} 1784 \\ +\ 8246 \\ +\ 3678 \\ +\ 5259 \\ \hline 19147 \end{array}$$

II. Lauter verschiedene Jahreszahlenziffern

Die Jahreszahl 2019 hat vier verschiedene Ziffern.

a) Wie alt wird jemand, der in dem Jahr geboren wurde, als die Jahreszahl das letzte Mal aus vier verschiedenen Ziffern bestand, in dem Jahr, in dem es das nächste Mal so sein wird?

b) Die Jahreszahl 2020 hat hingegen nur zwei verschiedene Ziffern. Wie alt wird jemand, der in dem Jahr geboren wurde, als die Jahreszahl das letzte Mal aus zwei verschiedenen Ziffern bestand, in dem Jahr, in dem es das nächste Mal so sein wird?

(MG)

III. Zahlenknobelei

$$\begin{array}{ccccccccc} \ast & \ast & \ast & - & \ast & \ast & = & \ast & \ast \\ & & : & & & - & & & + \\ & \ast & \ast & - & & \ast & = & & \ast \\ & & = & & & = & & & = \\ & \ast & \ast & \cdot & & \ast & = & \ast & \ast \end{array}$$

Jedes Symbol $\ast$ bedeutet eine Ziffer; ein Komplex aus n Symbolen $\ast$ ($n = 1, 2, 3$) ist eine natürliche Zahl (ohne führende Ziffer 0). Bei horizontalem und vertikalem Lesen ergeben sich sechs Gleichungen.

Es gibt genau eine Antwort auf die Frage: Wie heißen die in den sechs Gleichungen vorkommenden Zahlen? (H.F.)

IV. Teilbarkeit durch 10

Zeige: Ist a eine natürliche Zahl nicht von der Form $a = 5n+1$, so ist $a+a^2+a^3+a^4$ durch 10 teilbar. (WJB)

V. Teilbarkeit durch 5

Zeige: Ist n nicht durch 5 teilbar, so ist $n^{2020} - 1$ durch 5 teilbar. (WJB)

VI. Dreieck im Viereck

Im Innengebiet eines Rechtecks vom Flächeninhalt 1 liegen

a) 33 Punkte,

b) 7 Punkte,

von denen jeweils keine drei in einer Geraden liegen.
Zeige: Drei dieser Punkte bilden ein Dreieck, dessen Flächeninhalt im Fall a) höchstens $\frac{1}{16}$, im Fall b) höchstens $\frac{1}{3}$ ist. (H.F.)

VII. Nur die Sieben

a) Finde eine Darstellung der Zahl 105, in der nur die 7, die vier Grundrechenoperationen ($+$, $-$, $\cdot$, $:$) und Klammern verwendet werden.

b) Finde zwei solche Darstellungen für die Zahl 10,5.

c) Zeige, dass sich jede rationale Zahl entsprechend darstellen lässt. (WJB)

VIII. Zahl gesucht

Eine 4-ziffrige natürliche Zahl $xyyz$ in Ziffernschreibweise hat die Primfaktorzerlegung

$$xyyz = p \cdot p \cdot xxp.$$

Dabei sind x, y, z, p (paarweise) verschieden, p eine 1-ziffrige, xxp eine 3-ziffrige Primzahl.
Wie heißt die Zahl $xyyz$?

IX. Verbindungslinien

a) Zeichne sechs Punkte und verbinde einige Punkte so miteinander, dass es von jedem der Punkte genau drei Verbindungslinien zu anderen Punkten gibt.

b) Erkläre, warum das mit sieben Punkten nicht möglich ist.

X. Primzahlen gesucht

Bestimme die kleinste natürliche Zahl n sowie die kleinste natürliche Zahl m, für die jeweils gilt:

a) Wenn man der Reihe nach n durch 2, n durch 3, ..., n durch 11 und n durch 12 teilt, dann bleibt stets ein Rest 1.

b) Wenn man m durch 2 teilt, dann bleibt ein Rest 1,
wenn man m durch 3 teilt, dann bleibt ein Rest 2,
$\vdots$
wenn man m durch 11 teilt, dann bleibt ein Rest 10 und
wenn man m durch 12 teilt, dann bleibt ein Rest 11. (H.F.)

Neue Aufgaben

Aufgabe 1: Vielfache von 100

Es sei m eine ungerade natürliche Zahl und $n = 10m + 1$.
Zeige: Dann ist $n^5 - 51$ ein Vielfaches von 100. (H.F.)

Aufgabe 2: Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks

Zeige: Für den Flächeninhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und b und der Hypotenusenlänge c gilt

$$F = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}.$$

(H.F.)

Aufgabe 3: Zwei verwandte Gleichungen

Julia behauptet: „Ich kenne zwei positive ganze Zahlen a und b mit $a < b$, für welche sowohl die Gleichung $x^2+ax+b=0$ als auch die Gleichung $x^2+bx+a=0$ jeweils zwei ganzzahlige Lösungen besitzt.“ – Wie heißen diese Gleichungen und ihre Lösungen?

Bemerkung: Die Lösungen der beiden Gleichungen sind aber nicht gleich. (H.F.)

Aufgabe 4: Konstruktion mit beschränkten Mitteln

Zwei Zirkel sind so eingerostet, dass man mit ihnen und mit einem Lineal einen Winkel von 13° zeichnen kann.
Ist es dann möglich, mit diesen drei Instrumenten allein ein regelmäßiges 15-Eck zu konstruieren? (H.F.)

Aufgabe 5: Eine ungewöhnliche Zahlen-Eigenschaft

Es sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl.
Zeige: Dann ist $5^{n+4} - 5^n$ durch 390 000 teilbar. (H.F.)

Aufgabe 6: Abundante Quadratzahlen

Eine natürliche Zahl n heiße *abundant**, wenn für die Summe $\sigma(n)$ ihrer Teiler $\sigma(n) > 2n$ gilt.
Beispiel: $n = 12$ ist abundant, weil $\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28 > 24 = 2 \cdot 12$ ist.
Es sei nun a eine solche abundante Zahl.
Zeige: Dann ist auch a^2 abundant. (H.F.)

Aufgabe 7: Teilbarkeit der 7. Potenz

Zeige: Ist die Differenz zweier natürlicher Zahlen durch 7 teilbar, dann ist auch die Differenz ihrer 7. Potenzen durch 7 teilbar. (WJB)

Aufgabe 8: Bemerkenswerter Primzahl-Term

P und Q seien Primzahlen mit $5 \leq P < Q$.
Zeige, dass dann $P^2Q^2 - (P^2 + Q^2) + 1$ ein Vielfaches von 576 ist. (H.F.)

Aufgabe 9: Lösung gesucht

Es sei c eine reelle Zahl. Stelle fest, ob die Gleichung $x^4 + x^3 + (cx)^2 + x + 1 = 0$ reelle Lösungen besitzt.
Falls ja, finde diese Löungen. (WJB)

Aufgabe 10: Zweimal ein Quadrat

Gib mindestens zwei verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für ein Quadrat an, dessen Diagonalen die Länge 8 cm haben. (WJB)

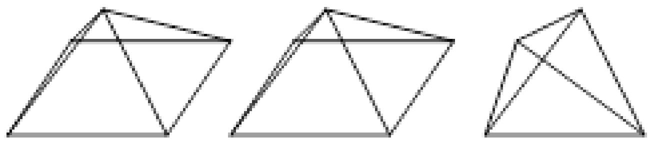
Die Lösungen findest Du im Heft ab Seite 33,
die weiteren Aufgaben werden im nächsten Heft aufgelöst.

* abundant – etwa: überfließend

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Lucia hat große Freude daran, mit gleich langen Strohhalmen Kantenmodelle von Körpern zu basteln. Für die Haltbarkeit in den Ecken sorgen je nach Vorrat Knete oder Kaugummi. Die Figur zeigt ihre ersten, einfachen Modelle: zwei quadratische Pyramiden und einen Tetraeder.



Eine quadratische Pyramide hat 5 Ecken, 8 Kanten und 5 Seitenflächen. Ein Tetraeder hat 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Seitenflächen. Lucia legt beide quadratischen Pyramiden mit den Quadratflächen aneinander. Dann legt sie auf eine beliebige Dreiecksfläche den Tetraeder und klebt alles fest. So erhält sie einen neuen Körper, denn die Flächen passen genau aneinander.

Wie viele Ecken, Kanten und Seitenflächen besitzt dieser neue Körper? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung der Aufgabe aus Heft 140

In Heft 140 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Der König war alt geworden und wollte sein Erbe verteilen. In dem großen rechteckigen Wald hatte er seinen beiden Söhnen das Jagen beigebracht, und dieser Wald sollte durch eine gerade Linie zu gleichen Teilen auf die Söhne verteilt werden. Allerdings gab es in dem Wald eine kleine rechteckige Lichtung. Sie lag nicht in der Mitte, ihre Ränder waren nicht parallel zu den Rändern des Waldes, und auch das Verhältnis ihrer Seitenlängen entsprach nicht dem des ganzen Waldes. Die Söhne liebten diese Lichtung und daher sollte auch sie zu gleichen Teilen jedem der beiden gehören.

Ist es möglich, den Wald mit der Lichtung durch eine einzige Gerade in jeweils zwei gleich große Gebiete zu teilen? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Jedes Rechteck wird von einer beliebigen Geraden durch den Schnittpunkt seiner Diagonalen in zwei kongruente Teilflächen zerlegt. Daher muss der König diesen Mittelpunkt für den Wald und für die Lichtung bestimmen und anschließend eine Gerade durch die beiden Mittelpunkte ziehen. Diese zerlegt wie gewünscht beide Rechtecke in jeweils gleich große Teilflächen. Da zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade bestimmen und da im Falle, dass Wald und Lichtung denselben Mittelpunkt haben, jede Gerade durch diesen Punkt geeignet ist, wird die Bedingung stets erfüllt.

Richtige Lösungen haben Jasmin Borrmann, Nico Brockmeier, Jonas Glockmann, Josefine Kaßner, Philipp Lörcks, Marlene Maager, Martin Schanne, Sönke Schneider, Luca Sindel, Oscar Su und Clemens Zabel eingereicht.

Als der Wald schließlich aufgeteilt werden sollte, stellte sich heraus, dass die Lichtung mittlerweile nicht mehr rechteckig war. Sie hatte sogar überhaupt keine symmetrische Form mehr. Die Gehilfen des Königs hätten gerne gewusst, ob trotzdem eine gewünschte Aufteilung möglich war. Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Entdeckungen

Aufgrund der aktuellen Notlage können wir Euch diesmal leider keine neue Mathematische Entdeckung stellen. Daher haben wir den Einsendeschluss der Aufgabe aus Heft 141 um drei Monate, also bis zum 28. August 2020 verlängert.

Hier noch einmal die Aufgabenstellung:

Teilbarkeit durch 3

Gegeben sei eine nicht abbrechende Folge von Differenzen

$$a - 1, a^2 - 1, a^3 - 1, \dots$$

wobei a eine der Zahlen 2, 3, 4, ... sei und $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, und so weiter bedeutet. Untersuche, welche der Differenzen durch 3 teilbar sind. Beginne Deine Untersuchungen mit dem Fall $a = 2$, danach betrachte den Fall $a = 3$ und so weiter – so weit Du möchtest.
Versuche Deine Ergebnisse zu begründen. (HF)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 28. August 2020 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Aufgrund der aktuellen Notlage können wir Euch diesmal leider keine neue Aufgabe für den Computerfan stellen. Daher haben wir den Einsendeschluss der Aufgabe aus Heft 141 um drei Monate, also bis zum 28. August 2020 verlängert.

Hier noch einmal die Aufgabenstellung:

Zahlenirrgarten

Wir sind in einem Zahlenirrgarten gefangen. Zu Beginn befinden wir uns auf der Zahl $s \in \mathbb{N}$, der Ausgang ist bei der Zahl $z \in \mathbb{N}$ und wir versuchen, möglichst schnell den Ausgang zu erreichen. Dabei dürfen wir stets nur einen der folgenden Schritte durchführen:

- Multiplizieren der aktuellen Zahl mit 2.
- Dividieren der aktuellen Zahl durch 2, falls sie durch 2 teilbar ist.
- Addieren von 2 zur aktuellen Zahl.

Beispiel: Von $s = 13$ zu $z = 4$ kommt man durch die folgenden Schritte:

$$13 \xrightarrow{*2} 26 \xrightarrow{+2} 28 \xrightarrow{/2} 14 \xrightarrow{+2} 16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{/2} 4$$

$$13 \xrightarrow{*2} 26 \xrightarrow{+2} 28 \xrightarrow{+2} 30 \xrightarrow{+2} 32 \xrightarrow{/2} 16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{/2} 4$$

a) Schreibe ein Programm/eine Funktion, das/die für zwei Zahlen $s, z \in \mathbb{N}$ eine Folge von Schritten ausgibt, um von s nach z zu gelangen (oder eventuell feststellt, dass das nicht möglich ist).

b) Liefert Dein Programm die *minimale* Anzahl von Schritten? Begründe!

c) Erweitere Dein Programm so, dass es für beliebige Zahlen a, b, $c \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Schritten funktioniert:

- Multiplizieren der aktuellen Zahl mit a.
- Dividieren der aktuellen Zahl durch b, falls sie durch b teilbar ist.
- Addieren von c zur aktuellen Zahl.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 28. August 2020 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 140

In Heft 140 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

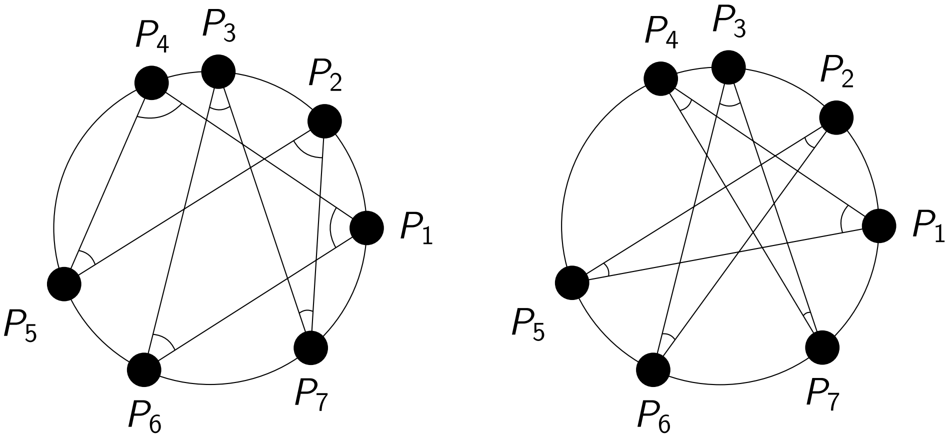
Innenwinkelsumme

Gegeben seien ein Kreis K mit beliebigem Radius sowie eine *ungerade* Anzahl n von paarweise verschiedener Punkte $P_1, \dots, P_n$ auf K. Es sei weiterhin T ein Vieleck mit genau den Eckpunkten $P_1, \dots, P_n$ *in beliebiger Reihenfolge*, das heißt T entspricht den Strecken $\overline{P_{i_1}P_{i_2}}, \overline{P_{i_2}P_{i_3}}, \dots, \overline{P_{i_{n-1}}P_{i_n}}, \overline{P_{i_n}P_{i_1}}$, wobei in der Folge $\{i_1, \dots, i_n\}$ jede Zahl aus $\{1, \dots, n\}$ genau einmal vorkommt.

Wir interessieren uns für die Summe der *Innenwinkel* an jedem der Eckpunkte, also

$$S = \sphericalangle P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3} + \sphericalangle P_{i_2}P_{i_3}P_{i_4} + \dots + \sphericalangle P_{i_n}P_{i_1}P_{i_2}.$$

Beachte, dass das Vieleck „überschlagen“ sein kann, das heißt die verschiedenen Strecken des Vielecks können einander schneiden (siehe auch die Abbildung).



Beispiel für $n = 7$ Punkte mit eingezeichneten Innenwinkeln für die Reihenfolgen $(i_1, \dots, i_7) = (1, 4, 5, 2, 7, 3, 6)$ (links) und $(i_1, \dots, i_7) = (1, 4, 7, 3, 6, 2, 5)$ (rechts).

a) Schreibe ein Programm, welches zufällig eine gegebene Anzahl an Punkten auf einem Kreis anordnet und für eine gegebene (oder ebenfalls zufällige) Reihenfolge die Innenwinkelsumme S berechnet.

b) Versuche nun, eine Reihenfolge der Punkte so festzulegen, dass die Innenwinkelsumme möglichst klein wird. Was beobachtest Du? (Hinweis: Die in der linken Abbildung gezeigte Reihenfolge hat *nicht* die kleinst mögliche Innenwinkelsumme, die in der rechten Abbildung aber schon.)

c) Versuche, Deine Beobachtung auch formal zu beweisen.

Lösung

a) Für diese Aufgabe benötigen wir als erstes ein Programm, das zufällig n Punkte auf dem Einheitskreis bestimmt und dann für eine gegebene Reihenfolge die Summe der Innenwinkel der entsprechenden Tour bestimmt. Da die Punkte eindeutig durch ihren Winkel $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 2\pi)$ bestimmt sind, ist der erste Teil recht einfach:

```
from random import random
from math import pi
n = 5
punkte = [2*pi*random() for _ in range(n)]
```

Da die Punkte selbst zufällig sind, ist die Tour $P_1, P_2, \dots, P_n$ natürlich auch zufällig.

Als nächstes müssen wir die Innenwinkel bestimmen. Für drei aufeinander folgende Punkte P_{i-1}, P_i, P_{i+1} erkennen wir, dass auf Grund des Zentriwinkelsatzes der Winkel in P_i nur von den Positionen von P_{i-1} und P_{i+1} abhängt, und damit nur von den Differenzen der entsprechenden Winkel $\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}$. Ein wenig müssen wir hier aufpassen, denn dieser Differenzwinkel soll natürlich nicht negativ sein. Das erreichen wir dadurch, dass wir zu dieser Differenz, sollte sie negativ sein, einfach 2π addieren (wie rechnen gewissermaßen „modulo 2π“). Anschließend müssen wir noch darauf achten, ob der mittlere Punkt P_i im oder gegen den Uhrzeigersinn „zwischen“ P_{i-1} und P_{i+1} liegt. Insgesamt können wir den Innenwinkel also zum Beispiel wie folgt berechnen

```
def innenwinkel(p1, p2, p3):
    # Abstand zwischen P1 und P3
    d = p3 - p1
    if d < 0:
        d += 2*pi
    # Abstand zwischen P1 und P2
    m = p2 - p1
    if m < 0:
        m += 2*pi
    # Uhrzeigersinn testen
    if m < d:
        return pi - d / 2
    else:
        return d / 2
```

Um die Länge einer Tour zu bestimmen, müssen wir nun die Innenwinkel aufsummieren.

```
def laenge(punkte, tour):
    n = len(tour)
    l = 0
    for j in range(n):
        i = (j - 1) % n
        k = (j + 1) % n
        l += innenwinkel(punkte[tour[i]],
                         punkte[tour[j]],
                         punkte[tour[k]])
    return l
```

Zum Schluss bleibt die Aufgabe, die beste Reihenfolge zu finden. Hier hilft zum Beispiel die Funktion `itertools.permutations`, welche alle Permutationen über eine Menge zurückliefert. Dann berechnen wir für jede Reihenfolge die Innenwinkelsumme und zeigen die kleinste Summe an.

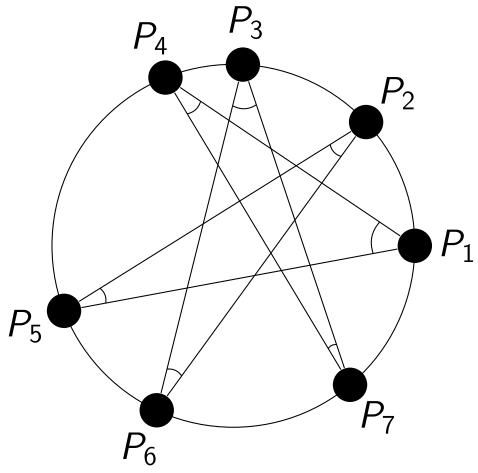
```
from itertools import permutations

min_l = 2*pi*n
for tour in permutations(range(n)):
    l = laenge(punkte, tour)
    min_l = min(l, min_l)
print("Minimale Laenge: {}".format(min_l))
```

Für kleine n, etwa $n = 3, 5, 7, 9$, beobachtet man, dass die kürzeste Tour stets die Länge π hat.

b) Schaut man sich eine Optimallösung an, so fällt auf, dass in einer optimalen Tour stets zu einem „gegenüberliegenden“ Punkt (in der Reihenfolge) gegangen wird (da die Anzahl der Punkte ungerade ist, gibt es natürlich keinen „genau“ gegenüberliegenden Punkt). Etwas formaler: Ist die Anzahl der Punkte gerade $n = 2k - 1$, $k \in \{2, 3, \dots\}$ so, dass $P_1, \dots, P_n$ im Urzeigersinn in dieser Reihenfolge auf dem Kreis liegen, so ist der Nachfolger $P_{n(i)}$ von P_i auf der Tour gerade

$$n(i) := \begin{cases} i + k, & i < k, \\ i + k - n, & i \geq g. \end{cases}$$

Also zum Beispiel für $n = 7$ ist die Tour $(P_1, P_4, P_7, P_3, P_6, P_2, P_5)$.



c) Stellen wir uns eine Person vor, die entlang der Tour läuft und sich in jedem Punkt stets im Uhrzeigersinn weiterdreht, dann erkennen wir, dass sich die Person entlang der Tour insgesamt ℓ mal um die eigene Achse drehen muss. Sei β_i der Drehwinkel im Punkt P_i, dann gilt

$$2\pi\ell = \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Seien $U \subseteq \{1, \dots, n\}$ die Indizes der Punkte, in denen die sich die Person um weniger als π dreht. Dann gilt für die Innenwinkel α_i gerade

$$\alpha_i = \begin{cases} \pi - \beta_i, & i \in U, \\ \beta_i - \pi, & i \notin U, \end{cases}$$

also

$$2\pi\ell = \sum_{i \in U}(\pi - \alpha_i) + \sum_{i \notin U}(\pi + \alpha_i) = n\pi + \sum_{i \notin U} \alpha_i - \sum_{i \in U} \alpha_i$$

und es folgt mit $|a + b| \geq |a - b|$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \left| \sum_{i \notin U} \alpha_i + \sum_{i \in U} \alpha_i \right| \geq \left| \sum_{i \notin U} \alpha_i - \sum_{i \in U} \alpha_i \right| = |(2\ell - n)\pi| \geq \pi,$$

weil $2k - n$ stets eine ungerade ganze Zahl ist.

In der Tour aus b) dreht sich die Person in jedem Punkt um weniger als π, also ist $U = \{1, \dots, n\}$, und insgesamt genau $\ell = k - 1$ mal um die eigene Achse, also ist $\sum_{i=1}^{n} \beta_i 2\pi\ell = 2\pi(k-1) = (n-1)\pi$ und für die Innenwinkelsumme folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(\pi - \beta_i) = (n - (n-1))\pi = \pi.$$

Die in b) angegebene Tour ist also optimal.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 141

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Maximale Summe

Das Produkt von 2020 natürlichen Zahlen sei 2020.
Was ist die größtmögliche Summe, die diese Zahlen haben können? (H.F.)

Lösung:
Das Produkt von 2019 Zahlen 1 und der Zahl 2020 ist 2020. Folglich ist

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{2019 Summanden 1}} + 2020 = 4039$$

die gesuchte größtmögliche Summe.

II. Ein magischer quadratischer Ring

15			12
14			13

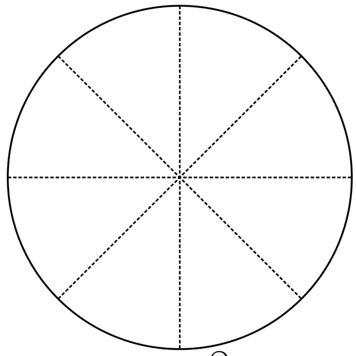
Fülle die leeren Felder so mit verschiedenen (natürlichen) Zahlen von 16 bis 23, dass die Summe jeder Seite des Quadrats gleich ist. (H.F.)

Lösung:
Eine mögliche Lösung ist

15	20	19	12
16			23
21			18
14	17	22	13

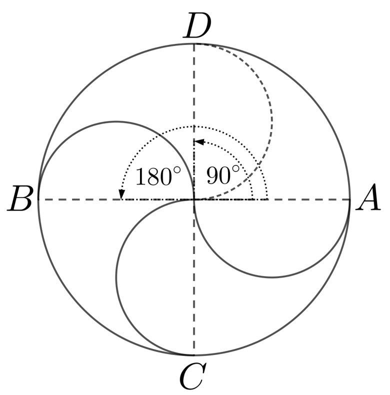
III. Kreisteilungen

Es ist leicht, einen Kreis durch Strecken – nämlich Durchmesser – in 2, 4, 8, 16, ... kongruente Teile zu zerlegen.
Kann man einen Kreis auch durch gekrümmte Linien in 2, 4, 8, 16, ... kongruente Teilfiguren zerlegen? (H.F.)



$n = 8$

Lösung:



Zweiteilung eines Kreises k
Konstruiere einen Halbkreis *h* mit dem Durchmesser *AM* und drehe *h* um *M* um den Drehwinkel 180°.
Die gekrümmte Linie *AMB* bewirkt eine Zweiteilung des Kreises *k* in zwei kongruente Teile.

Vierteilung eines Kreises k
Man drehe die Linie *AMB* um *M* mit dem Drehwinkel $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Dann erhält man durch die Linien *AMB* und *CMD* eine Vierteilung des Kreises *k*.

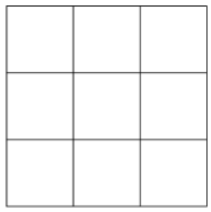
Entsprechend ergibt sich durch Drehung des viergeteilten Kreises *k* um *M* mit dem Drehwinkel $\frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$ eine Achtteilung von *k* und so weiter.

IV. Zerlegung eines Quadrats

Untersuche, in wie viele Quadrate ein gegebenes Quadrat zerlegt werden kann – wobei die Teilquadrate gleich oder verschieden groß sein dürfen.

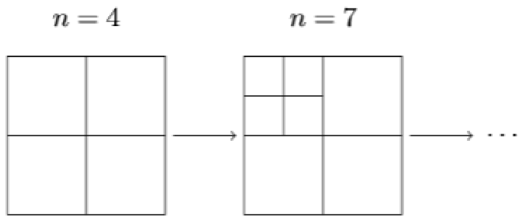
Beispiel:

Das nebenstehende Quadrat ist in neun Quadrate zerlegt. Deshalb kann es auch in 36 Quadrate zerlegt werden. (H.F.)

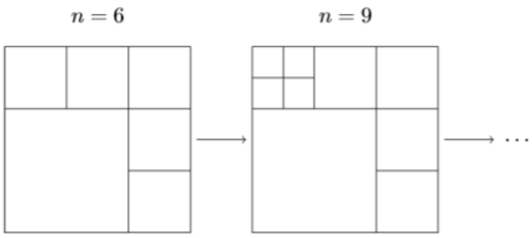


Hinweis: Versuche es zunächst in vier oder sechs Quadrate zu zerlegen. Findest Du ein Muster?

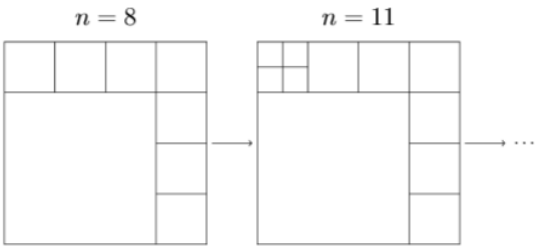
Lösung:



Ein Quadrat kann in $n = 4, 7, 10, \ldots$ Quadrate zerlegt werden.



Ein Quadrat kann in $n = 6, 9, 12, \ldots$ Quadrate zerlegt werden.

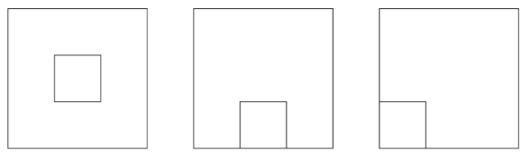


Ein Quadrat kann in $n = 8, 11, 14, \ldots$ Quadrate zerlegt werden.

Zusammenfassung: Ein Quadrat kann in $n = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$ Quadrate zerlegt werden.

Ein Quadrat kann nicht in $n = 2$ und $n = 3$ Quadrate zerlegt werden.

Es sei $n = 2$. Mögliche Positionen des ersten Teilquadrats:



In allen drei Positionen des ersten Teilquadrats sind noch zwei oder mehr weitere Teilquadrate zur vollständigen Zerlegung des Ausgangsquadrats erforderlich.
Also ist $n \neq 2$.
Eine analoge Überlegung führt zu $n \neq 3$.

Erstaunlicherweise ist der Fall $n = 5$ offen – zumindest ist uns nicht bekannt, ob ein Quadrat in fünf Quadrate zerlegt werden kann oder nicht.

V. Buchstaben-Rätsel

$$\begin{array}{cccccccc} & E & L & E & F & A & N & T \\ + & & & T & I & G & E & R \\ \hline & G & I & R & A & F & F & E \end{array}$$

Ersetze jeden Buchstaben durch eine Ziffer, sodass eine richtige Addition entsteht. Verschiedene Buchstaben sollen dabei durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.
Hinweis: Setze $E = 7$. (Andy Liu)

Lösung:
Die Spalten der Buchstabenfigur seien von links nach rechts mit Spalte 1, Spalte 2 und so weiter bezeichnet.
Spalte 1: Wegen $E \neq G$ ist $E + 1 = G$.

Spalte 2: Von Spalte 2 findet ein Übertrag von 1 in Spalte 1 statt. Daher ist $L = 9$, $I = 0$ und es findet ein Übertrag von Spalte 3 in Spalte 2 statt.
Spalte 4: Wegen $F \neq A$ und $I = 0$, gibt es einen Übertrag 1 von Spalte 5 in Spalte 4. Mithin ist $F + I + 1 = A$, also $F + 1 = A \leq 9$.
Spalte 5: Es gibt für Spalte 5 zwei Möglichkeiten: Es gab einen Übertrag von Spalte 6 in Spalte 5 oder es gab keinen solchen Übertrag.
Ohne Übertrag gälte $A + G = F + 10$ (wegen Übertrag 1 nach Spalte 4). Daraus folgte wegen Spalte 4 (siehe oben) $F + 1 + G = F + 10$ und daraus $G = 9 = L$, ein Widerspruch.
Mit Übertrag von Spalte 6 gilt $A + G + 1 = F + 10$. Mit Spalte 4 folgt $F + 1 + G + 1 = F + 10$ und daraus $G = 8$.
Aus Spalte 1 erhält man damit $E = 7$.
Spalte 7: Wegen $L = 9$, $G = 8$, $E = 7$ folgt $T + R = 7$ mit $T \leq 6$ und $R \leq 6$.
Spalte 3: Von Spalte 4 findet kein Übertrag nach Spalte 3 statt. Daher ist unter Beachtung von $R \leq 6$: $7 + T = R + 10$. Aus den beiden Gleichungen $T + R = 7$ und $7 + T = R + 10$ erhält man $R = 2$ und $T = 5$.
Mit den bisherigen Ergebnissen lautet die erste Zeile: $797F(F + 1)N5$.
Die beiden noch nicht verbrauchten aufeinander folgenden Ziffern sind 3 und 4. Folglich ist $F = 3$ und $F + 1 = 4 = A$.
Spalte 6: Aus $N + 7 = 3 + 10$ folgt $N = 6$.
Die Zahlenaufgabe lautet

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & 9 & 7 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ + & & 5 & 0 & 8 & 7 & 2 \\ \hline 8 & 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}$$

VI. Bruchgleichung

Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{10}.$$

(H.F.)

Lösung:
$\frac{1}{x} = \frac{1}{10} + \frac{1}{y} = \frac{y+10}{10y} \Rightarrow x = \frac{10y}{y+10} = \frac{10(y+10)-100}{y+10} = 10 - \frac{100}{y+10}$
Nun ist $\frac{100}{y+10}$ ganzzahlig für jedes y wenn gilt: $y + 10$ teilt 100.

$y = 10 \Rightarrow x = 5$,

$y = 15 \Rightarrow x = 6$,

$y = 40 \Rightarrow x = 8$,

$y = 90 \Rightarrow x = 9$.

VII. Wer war der Täter?

Als Professor Quaoar seine Studienstube betritt, muss er feststellen, dass die Scheibe eines Fensters durch einen Fußball, der in einer Ecke des Zimmers liegt, zertrümmert wurde. Es ist klar, dass einer der vier Buben Fr$x$do, mit x = a, e, i, o, die vor dem Haus stehen, den Ball ins Fenster gekickt hat.
Prof. Quaoar sagt zu den Jungen: „Ich gebe euch den Ball nur dann zurück, wenn ich weiß, wer der Täter war.“ Darauf antworten die Buben:

Frado (A): „Frido war es nicht.“
Fredo (E): „Ich war es nicht.“
Frido (I): „Frodo war es nicht.“
Frodo (O): „Frido hat gelogen.“

Der listige Frodo, der Quaoars Vorliebe für logische Rätsel kennt, sagt dann noch: „Genau eine der vier Behauptungen A, E, I, O ist wahr.“

Kann das stimmen? Begründe Deine Antwort. (H.F.)

Lösung:

Prof. Quaoar entwirrt die logischen Verwicklungen durch eine sogenannte Wahrheitswert-Tabelle, in der *w* „wahr“ und *f* „falsch“ bedeutet.

Der Täter	Dann ist die Aussage von			
war	Frado	Fredo	Frido	Frodo
Frado	*w*	*w*	*w*	*f*
Fredo	*w*	*f*	*w*	*f*
Frido	*f*	*w*	*w*	*f*
Frodo	*w*	*w*	*f*	*w*

Egal wer der Täter war, nie stimmt nur eine Aussage. Frodos Aussage, dass nur eine der vier Behauptungen A, E, I, O wahr sei, stimmt also nicht.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Quader aus Holzwürfeln

Sarah hat 2020 kleine Holzwürfel der Kantenlänge 1 cm. Aus diesen Holzwürfeln baut sie einen großen Quader, in dem sie alle Holzwürfel verbaut.

a) Wie viele verschiedene Quader kann sie bauen und welche Abmessungen haben diese? (Zwei Quader sind gleich, wenn sich einer der Quader durch Drehen, Kippen oder ähnlichen Operationen aus dem anderen erzeugen lässt.)

b) Welcher unter diesen Quadern hat den kleinsten Oberflächeninhalt und wie groß ist dieser? (MG)

II. Quersumme und -produkt

a) Gib die kleinste Zahl an, deren Quersumme 2020 ist.

b) Begründe: Warum gibt es keine Zahl, deren Querprodukt (also das Produkt aller ihrer Ziffern) 2020 ist. (MG)

III. Ein ganz besonderes Datum

Karin schaut auf den Kalender und stutzt: „Heute ist Sonntag, der 02.02.2020. Das ist ja ein ganz besonderes Datum.“ – Warum? Wenn Du das Datum rückwärts liest, dann kannst Du wieder die selbe Ziffernfolge lesen. Ein solches Datum heißt *palindromisch*. Und 02.02.2020 war sowohl in unserer Schreibweise (Tag, Monat dann Jahreszahl) palindromisch als auch in anderen Schreibweisen: Zum Beispiel im amerikanischen Englisch wird zuerst der Monat, dann der Tag und dann das Jahr geschrieben, in vielen asiatischen Ländern und Kanada wird das Datum in der Reihenfolge Jahr, Monat, Tag geschrieben.

Daten, die in allen diesen Schreibweisen palindromisch sind, gibt es wirklich nur ganz selten.

a) Wann war der letzte in allen drei Schreibweisen palindromische Tag? Wie alt wäre jemand, der damals geboren wurde am jetzigen palindromischen Tag?

b) Wann wird der nächste in allen drei Schreibweisen palindromische Tag sein? Wie alt wird jemand, der am jetzigen palindromischen Tag geboren wurde, dann sein?

c) Welches waren das letzte und wird das nächste palindromisches Datum sein, wenn nur unsere Schreibweise berücksichtigt wird? (MG)

IV. Sssenk ju for trewweling wiss Deutsche Bahn

Zum Jahresbeginn wurde die Mehrwertsteuer für Bahnfahrkarten im Fernverkehr von 19 % auf den reduzierten Mehrwertsteuersatz gesenkt, der nun von der Regierung auf 5 % herabgesetzt wurde. Herr Richard freut sich: „Das ist ja super, dann sind die Fahrkarten jetzt um 14 % günstiger!"

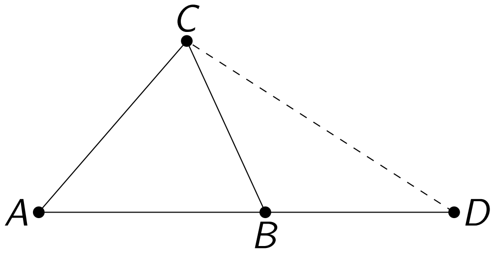
a) Begründe, dass Herr Richard sich irrt. (Gehe davon aus, dass der Grundpreis der Fahrkarte ohne Mehrwertsteuer sich nicht geändert hat.)

b) Die Ersparnis kann sich ändern, wenn sich der Grundpreis der Fahrkarte ändert. Um wie viel Prozent wurde der Preis der Fahrkarte erhöht, wenn sie jetzt mit dem niedrigeren Mehrwertsteuersatz genau so viel kostet wie vorher?

c) Ziel der Mehrwertsteuersenkung ist es, dass mehr Menschen mit der Bahn fahren. Um wie viel Prozent müssten die Einnahmen der Bahn bei Fernverkehrsfahrten (bezogen auf die Grundpreise) zunehmen, damit die Mehrwertsteuereinnahmen des Staates trotz der Senkung gleich bleiben?

(MG)

V. Zwei Winkel



In der Figur gelte $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ und $|\overline{BC}| = |\overline{BD}|$.
Zeige: Dann ist $\sphericalangle ACD = 3 \cdot \sphericalangle CDA$.

(H.F.)

VI. Keine Null

Zeige, dass sich die Zahl 8 000 000 auf genau eine Weise als Produkt zweier Zahlen schreiben lässt, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 0 nicht vorkommt!

(WJB)

VII. Was in der Zeitung steht

In einer Zeitschrift (Das Stadtjournal, Ausgabe 2/2016, S. 5f.) stand:

> Das mittlere Alter der aktiven Hausärzte [...] beträgt 56 Jahre. Dies bedeutet, dass die Hälfte der praktizierenden Hausärzteschaft älter als 55 Jahre ist[...].

Was ist von dieser Aussage zu halten, ist sie korrekt? Begründe. (MG)

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

Aufgabe 1267: Würfel aus Holzwürfeln
Sarah hat 2020 kleine Holzwürfel der Kantenlänge 1 cm.

a) Sarah baut aus diesen Holzwürfeln einen möglichst großen Würfel, dabei bleiben einige kleine Holzwürfel übrig.
Wie groß ist der große Würfel?

b) Nachdem Sarah diesen Würfel gebaut hat, bleiben noch kleine Holzwürfel übrig. Aus diesen übrig gebliebenen Holzwürfeln baut sie wiederum einen möglichst großen Würfel, aus den dann übrig gebliebenen wieder einen möglichst großen und so weiter, bis sie alle Würfel verbaut hat. Evtl. sind die letzen Würfel solche der Kantenlänge 1 cm.
Wie viele Würfel hat sie letztendlich gebaut und welche Größe haben diese?

(MG)

Aufgabe 1268: Ganzzahlige Lösungen gesucht
Man bestimme alle ganzen Zahlen x und y, für die gilt:

$$x + y = x \cdot y.$$

(H.F.)

Aufgabe 1269: Teilbarkeit durch 7
Es sei *abcde* die Dezimaldarstellung einer fünfziffrigen natürlichen Zahl.
Begründe dann die Regel:
Wenn *abcde* durch 7 teilbar ist, dann ist auch $abcd - 2 \cdot e$ durch 7 teilbar. (H.F.)

Aufgabe 1270: Désirées verlorener Dominostein
Désirée hat ein Schachbrett und 32 Dominosteine von der Form und Größe zweier benachbarter Felder des Schachbretts. Sie kann damit das Schachbrett auf viele verschiedene Arten bedecken. Als sie eines Tages einen Dominostein verliert, bemalt sie zwei Felder rot und versucht, die verbleibenden Felder mit den 31 Dominos zu bedecken. Begründe:

a) Liegen die beiden roten Felder direkt nebeneinander, so hat sie Erfolg.

b) Hatten die beiden Felder ursprünglich die gleiche Farbe, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

c) Hatten die beiden roten Felder ursprünglich nicht die gleiche Farbe, so lässt sich das Schachbrett ohne diese beiden Felder mit den 31 Dominos überdecken.

(WJB)

Aufgabe 1271: Benachbarte Lottozahlen

Beim Lotto „6 aus 49“ sind seit Jahresbeginn 2019 bei etwa der Hälfte der Ziehungen benachbarte Zahlen aufgetreten, so zum Beispiel am 09.01.2019 mit den Zahlen

7, **8**, 14, 22, 29, 44.

Die 7 und die 8 sind benachbart.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass bei einer Lottoziehung eine oder mehr benachbarte Zahlen auftreten.

b) Um die Lottogeräte zu überprüfen, soll die tatsächliche relative Häufigkeit h von Ziehungen mit Zahlenpaaren untersucht werden, etwa in den 522 Ziehungen der Jahre 2014 bis 2018. Liegt h weit von p entfernt, so muss davon ausgegangen werden, dass die Lottomaschine nicht korrekt arbeitet.
Bei den 522 Ziehungen der Jahre 2014 bis 2018 traten bei 261 Ziehungen benachbarte Zahlen auf. Kann man auf dem Konfidenzniveau 5% behaupten, dass die Lottomaschine nicht korrekt arbeitet?

(A. Klenke, Johannes Gutenberg-Universität Mainz)

Aufgabe 1272: Eine Rechenregel

Für jede reelle Zahl a gilt $a \cdot 0 = 0$. Kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Aufgabe 1273: Untersuchung einer Reihenentwicklung

Sei n eine natürliche Zahl. Betrachte die Reihenentwicklung

$$\left(x^3 + \tfrac{1}{x}\right)^n$$
$$= a_{-n}x^{-n} + a_{-n+1}x^{-n+1} + \ldots + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{3n} x^{3n}.$$

Die Zahlen a_{-n}, a_{-n+1}, ... bekommt man, indem man die linke Seite ausmultipliziert. Für welche $k = 0, 1, \ldots, 3n$ ist $a_k \neq 0$? (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 141

Klassen 9–13

Aufgabe 1260: Ein Gleichungssystem mit Quadratzahlen

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 2+3+4 &= 3^2 \\ 3+4+5+6+7 &= 5^2 \\ 4+5+6+7+8+9+10 &= 7^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man denke sich das Gleichungssystem nach dem Muster der vier gegebenen Gleichungen beliebig weit fortgesetzt.

a) Gibt es dann eine Gleichung, deren rechte Seite 2019^2 ist? Falls ja, wie heißt die Gleichung?

b) Wie lautet das Bildungsgesetz des Gleichungssystems? (H.F.)

Lösung:

Der erste Summand der n-ten Zeile ist n.

Eine Inspektion der letzten Summanden der 4 ersten und eventuell weiteren Gleichungen führt zu der Vermutung, dass der letzte Summand der n-ten Zeile stets $3n - 2$ ist.

Für den Nachweis benutzen wir die Formel $1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{1}{2}m(m + 1)$.

Für die linke Seite der n-ten Gleichung gilt, falls die Vermutung zutrifft:

$$\begin{aligned}
&n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (3n - 2)\\
=&1 + 2 + 3 + ... + (3n - 2) - (1 + 2 + 3 + ... + n - 1)\\
=&\frac{1}{2}(3n - 2)(3n - 1) - \frac{1}{2}(n - 1)n\\
=&\frac{1}{2}(8n^2) - \frac{1}{2}(8n) + \frac{1}{2} \cdot 2\\
=&4n^2 - 4n + 1.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der n-ten Gleichung $(2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$ ist, gilt die Voraussetzung und das Bildungsgesetz des Gleichungssystems lautet:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (3n - 2) = (2n - 1)^2, \text{ mit } n = 1, 2, 3, ...$$

Setzt man $(2n - 1)^2 = 2019^2$, so folgt $n = 1010$, und für dieses n gilt die Gleichung $1010 + 1011 + 1012 + ... + 3028 = 2019^2$.

Aufgabe 1261: Wie viele Ecken?

Die Innenwinkel – gemessen in Grad – eines konvexen n-Ecks*, n eine gerade Zahl, bilden eine Folge von Zahlen:

Die kleinste Zahl ist 120 und die Differenz der Gradzahlen benachbarter Innenwinkel (abgesehen vom ersten und vom letzten Innenwinkel) ist stets 5. Gibt es ein solches n-Eck und wenn ja, wie viele Ecken hat es? (H.F.)

* Ein n-Eck ist konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt

Lösung:
Ein konvexes n-Eck hat die Innenwinkelsumme $S = (n-2) \cdot 180$.
Nach Voraussetzung ist aber auch – falls das n-Eck existiert:

$$\begin{aligned} S &= 120 + (120 + 1 \cdot 5) + (120 + 2 \cdot 5) + ... + (120 + (n-1) \cdot 5) \\ &= 120 \cdot n + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) \\ &= 120 \cdot n + 5 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \text{ (alle Zahlen sind Gradzahlen!)} \end{aligned}$$

Es gilt daher $180n - 360 = 120n + \frac{5}{2}(n-1)n$.
Daraus erhält man nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}n^2 + 60n + \frac{5}{2}n &= 360 \\ n^2 - 25n + 144 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $n = 9$ oder $n = 16$. Da n geradzahlig vorausgesetzt ist, ist das gesuchte Polygon ein 16-Eck, dessen Existenz durch die Rechnungen nachgewiesen ist.

Aufgabe 1262: Explosionsgefahr

Der Sprengmeister in einem Steinbruch löst die Sprengung mit Hilfe einer Lunte aus, bei der das Feuer pro Sekunde $a = 5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ vorankommt. Er selbst geht mit einer Geschwindigkeit von $b = 7{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, um sich im Abstand von $d = 30\,\text{m}$ in Sicherheit zu bringen.

a) Wie lang muss er die Lunte mindestens machen, um rechtzeitig zum Zeitpunkt der Sprengung in Sicherheit zu sein?

b) Wie lang muss die Lunte sein, wenn er nach Zünden der Lunte noch $u = 2\,\text{s}$ braucht, um aus der knieenden Stellung aufzustehen, und seine „Flucht“ zu beginnen? (WJB)

Lösung:

a) Zunächst schreiben wir a, b und d um, sodass sie vergleichbar werden: $a = 0{,}05\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $b = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $d = 30\,\text{m}$. Die Länge der Lunte sei L. Dann ist die Zeit bis zur Zündung $t = \frac{L}{a}$. Diese soll gleich der Zeit sein, die der Sprengmeister braucht, um die Strecke $d - L$ zurückzulegen, also $t = \frac{(d-L)}{b}$.
Daraus folgern wir $\frac{L}{(d-L)} = \frac{a}{b}$ und hieraus durch korrespondierende Addition $\frac{L}{d} = \frac{a}{(b+a)}$, das heißt $L = \frac{da}{(b+a)}$, also $L = 30\,\text{m} \cdot \frac{0{,}05}{2{,}05} = 0{,}732\,\text{m}$. Die Lunte muss also 73,2 cm lang sein.

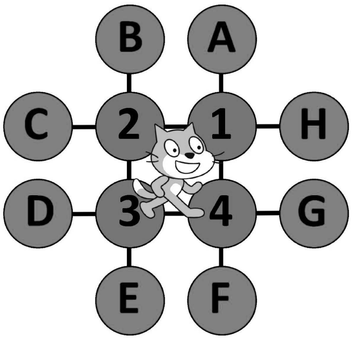
b) In der Zeit u kann der Sprengmeister $b \cdot u = 4\,\text{m}$ zurücklegen. Berechnen wir $\overline{L}$ mit $\overline{d} = d + 4\,\text{m} = 34\,\text{m}$ statt mit $d = 30$, so gleichen wir die fehlenden zwei Sekunden aus. Damit ergibt sich dann $\overline{L} = \frac{\overline{d}a}{(b+a)} = 82{,}9\,\text{cm}$.

Bemerkungen:

1. Der Sprengmeister wird sicher nicht auf mm genau die Lunte abmessen, sondern a) mindestens 75 cm beziehungsweise b) mindestens 85 cm wählen.

2. Addiert man in zwei Brüchen mit gleichem Wert jeweils zum Nenner den Zähler, so bleibt die Gleichheit erhalten: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{(b+a)} = \frac{c}{(d+c)}$, außer wenn $b = -a$ und $d = -c$. Dies nennt man korrespondierende Addition. Entsprechend gilt auch die Regel der korrespondierenden Subtraktion.

Aufgabe 1263: Die Katze im kleinen Karree



Die Katze bewegt sich auf den eingekreisten Feldern nach folgender Regel: Steht sie auf einem Zahlenfeld, so wählt sie sich zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$) eines der vier Nachbarfelder (egal ob Zahl oder Buchstabe). Dies wiederholt sie so lange, bis sie auf einem Buchstabenfeld landet. Steht sie auf einem Buchstabenfeld, so bleibt sie dort stehen.

Wenn die Katze auf dem Feld 1 startet, mit welcher Wahrscheinlichkeit $p(x)$ landet sie schließlich auf dem Buchstabenfeld x mit $x = A, B, ..., H$?

Hinweis: Lasse die Katze zunächst auf einem zufälligen Feld starten und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jedes Zahlenfeld. Hier bekommst Du die Wahrscheinlichkeiten leicht heraus. Lasse die Katze nun mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in 2 starten, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in 4 und rechne die Wahrscheinlichkeiten $r(x)$ für ein Ende in Feld x aus.
Überlege Dir nun, wie Du die $p(x)$ aus den $r(x)$ ausrechnest. Überlege Dir dann, wie Du die $p(x)$ aus den $r(x)$ ausrechnest. (AKI)

Lösung:

Bei Start in einem gleichverteilten zufälligen Feld kommt die Katze mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ in jedem Buchstabenfeld an.

Startet die Katze in 2 oder 4 mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$, so steht sie nach einem Schritt

- in B, C, F oder G jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$,
- in in 1 oder 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.

Nach Schritt 2 steht sie

- in B, C, F oder G (immer noch) mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{8}$,
- in A, D, E oder H mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$,
- in 2 oder 4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$.

Nach zwei Schritten haben wir also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ wieder die Ausgangssituation. Zu den Buchstabenfeldern erhöhen sich ab jetzt in jedem Durchgang die Wahrscheinlichkeiten mit denselben Verhältnissen, das heißt doppelt so hohe

Wahrscheinlichkeiten für B, C, F und G wie für A, D, E und H. Insgesamt gilt also $r(B) = r(c) = r(F) = r(G) = 2 \cdot r(A) = 2 \cdot r(D) = 2 \cdot r(E) = 2 \cdot r(H)$. Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 sein muss, erhalten wir:

$$r(B) = r(c) = r(F) = r(G) = \frac{1}{6},\ r(A) = r(D) = r(E) = r(H) = \tfrac{1}{12}.$$

Nun lassen wir die Katze aber wirklich im Feld 1 starten. Nach einem Schritt ist sie

- in A oder H jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$,
- in 2 oder 4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ liegt also die Situation „Start in 2 oder 4“ vor. Wir bekommen:

$$p(x) = \frac{r(x)}{2} \text{ für } x = B, C, D, E, F, G \text{ und}$$
$$p(x) = \frac{r(x)}{2} + \frac{1}{4} \text{ für } x = A, H.$$

Also

$$p(x) = \frac{1}{12} \text{ für } x = B,\ C,\ F,\ G,$$
$$p(x) = \frac{7}{24} \text{ für } x = A,\ H,$$
$$p(x) = \frac{1}{24} \text{ für } x = D, E.$$

Alternative Lösung:
Die Wahrscheinlichkeiten für die Buchstabenfelder ändern sich nicht, wenn die Regeln nur für die Felder 2 und 4 folgendermaßen geändert werden: In 2 oder 4 entscheidet sich die Katze mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ dafür, nicht zu springen. Ansonsten macht sie einen Sprung zu einem der vier Nachbarfelder mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Ist sie nicht gesprungen, so entscheidet sie sich im nächsten Schritt wiederum mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ nicht zu springen und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ zu springen, und so fort.

Die Katze startet in 1. Nach einem Schritt ist sie

- in A oder H jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$,
- in 2 oder 4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Nach zwei Schritten ist die Katze

- in A oder H (immer noch) mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{4}$,
- in B, C, F oder H mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$,
- in 2 oder 4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$,

- in 1 oder 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Falls die Katze bis Schritt 2 nicht auf einem Buchstabenfeld ist (Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{3}$), ist sie also auf jedem Zahlenfeld mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Wir erhalten

$$\begin{aligned} p(A) = p(H) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} &&= \frac{7}{24}, \\ p(B) = p(C) = p(F) = p(H) &= \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} &&= \frac{1}{12}, \\ p(D) = p(E) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} &&= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1264: Summen von Potenzen

Seien $A(n)$ die Summe der dritten Potenzen der fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen $n, n+1, ..., n+4$ und $B(n)$ die Summe von sechs aufeinander folgenden dritten Potenzen beginnend mit n^3.

a) Finde die kleinste Primzahl der Form $A(n)$.

b) Zeige, dass $B(n)$ für jedes n durch 3 teilbar, also keine Primzahl, ist.

c) Zeige, dass $B(n)$ sogar durch 9 teilbar ist. (WJB)

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} A(n) &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + (n+4)^3 \\ &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &\qquad + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 + n^3 + 12n^2 + 48n + 64 \\ &= 5n^3 + 30n^2 + 90n + 100 \\ &= 5 \cdot (n^3 + 6n^2 + 18n + 20) \end{aligned}$$

Da die Klammer größer als 1 ist, ist $A(n)$ immer ein Vielfaches von 5 und daher niemals eine Primzahl.

b) Es ist

$$\begin{aligned} B(n) &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + (n+4)^3 + (n+5)^3 \\ &= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 3 \cdot 2n^2 + 3 \cdot 2^2 n + 2^3) \\ &\qquad + ... + (n^3 + 3 \cdot 5n^2 + 3 \cdot 5^2 n + 5^3) \\ &= 6n^3 + 3n^2(1+2+3+4+5) + 3n(1+4+9+16+25) \\ &\qquad + (1+8+27+64+125) \\ &= 3(2n^3 + ...) + 225 = 3(2n^3 + ...) + 3 \cdot 75 \end{aligned}$$

und daher für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

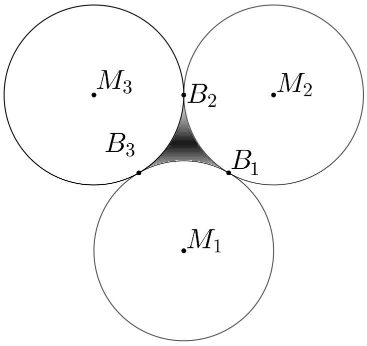
c) $B(1) = 441$ ist durch 9 teilbar, und für alle n gilt:

$$B(n+1) - B(n) = (n+6)^3 - n^3 = n^3 + 3 \cdot 6n^2 + 3 \cdot 6^2 n + 6^3 - n^3.$$

Die Differenz ist deshalb durch 9 teilbar. Also sind auch alle $B(n)$ durch 9 teilbar.

(Oscar Su, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, Klasse 7; WJB; MG)

Aufgabe 1265: Drei Kreise



Drei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 und alle mit dem Radius $r = 1$ berühren sich von außen in den Punkten B_1, B_2 und B_3. Berechne den Flächeninhalt der gefärbten Figur $B_1B_2B_3$. (H.F.)

Lösung:

Wenn sich zwei Kreise berühren, dann liegen ihre Mittelpunkte und der Berührpunkt in einer Geraden. Verbindet man daher die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 der gegebenen Kreise, dann ergibt sich ein Dreieck $M_1M_2M_3$ mit den Eigenschaften: $M_1M_2M_3$ ist gleichseitig; die Punkte B_1, B_2 und B_3 liegen in den Strecken M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 und sie sind Mittelpunkte dieser Strecken.

Nun gilt:

$$|\text{schraffierte Figur } B_1B_2B_3| = |\triangle M_1M_2M_3| - 3 \cdot |\text{Sektor } M_1B_1B_3|.$$

Es sind

$$|\triangle M_1M_2M_3| = \frac{1}{2}|M_1M_2| \cdot |\text{Höhe } B_1M_3| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ und}$$

$$|\text{Sektor } M_1B_1B_3 \text{ mit } 60^\circ\text{-Winkel bei } M_1| = \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{\pi}{6}.$$

Daraus folgt: Die Fläche der schraffierten Figur $B_1B_2B_3$ ist $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}16$, da $M_1M_2M_3$ gleichschenklig ist.

Aufgabe 1266: Gemeinsamer Teiler benachbarter Zahlen

Zwei aufeinander folgende positive ganze Zahlen haben nur den gemeinsamen Teiler 1. Du weißt es – kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Lösung:

Jeder gemeinsame Teiler zweier verschiedener positiver ganzer Zahlen m und n, $m < n$, ist auch ein Teiler von $n - m$.

Sind nun m und n aufeinander folgende Zahlen, also $n = m + 1$, dann ist jeder Teiler von m und n auch ein Teiler von $n - m = m + 1 - m = 1$. Da 1 nur den Teiler 1 besitzt, ist auch 1 der einzige m und n gemeinsame Teiler.

Divergenz der Reihe aus den Kehrwerten der Primzahlen

von Hans-Jürgen Schuh

Der Artikel „Harmonische Reihen", MONOID-Heft 122 (Juni 2015), Seiten 34–38, handelt davon, dass für die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

und für ihre Verwandten $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$ gelten.

Speziell wurde gezeigt, dass $s \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{s}}} \leq s+1$ für alle positiven reellen s ist.

Es liegt nahe zu fragen, wie weit und auf welche Art man die harmonische Reihe „ausdünnen" kann, ohne dass sie konvergiert.

Hierzu betrachten wir die Primzahlen durchnummeriert in aufsteigender Folge:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$$

Die Reihe ihrer reziproken Werte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ divergiert ebenfalls, wie Leonhard Euler 1736 als erster herausgefunden hat. (In MONOID 126 (Juni 2016), Seiten 25–30, kann man nachlesen, wie er 1735 nach über 90-jähriger vergeblicher Suche vieler bekannter Mathematiker nach dem Reihenwert von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ diesen als $\frac{\pi^2}{6}$ nachgewiesen hat, und dadurch „über Nacht" weltberühmt wurde.).

Zunächst betrachten wir die *Riemannsche Zeta-Funktion* $\zeta(t) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$, welche nach obigen Bemerkungen für alle reellen $t > 1$ endlich ist,

$$\frac{1}{t-1} \leq \zeta(t) \leq \frac{t}{t-1}, \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Diese Funktion wird nun als unendliches Produkt dargestellt, welches über die Menge der Primzahlen indiziert wird. Solche unendlichen Produkte heißen nach ihrem Erfinder Euler-Produkte. Wir zeigen, dass

$$(*) \quad \zeta(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j^t}} \text{ für alle reellen } t > 1.$$

Hierzu folgen wir der Beweisidee von Leonhard Euler.

Wir benötigen das Beweisverfahren der *vollständigen Induktion*, das sich die Entwicklung der natürlichen Zahlen N durch sukzessives Weiterzählen zu Nutze macht: $A(n)$ sei eine Aussage, die auf alle natürlichen Zahlen n angewandt werden kann.

a) Induktionsanfang: Zuerst ist die Richtigkeit von $A(1)$ zu zeigen.

b) Induktionsschluss: Unter der Annahme, dass $A(n)$ für ein $n \in N$ korrekt ist, muss gezeigt werden, dass dann auch $A(n+1)$ gilt.

Sind a) und b) gezeigt, dann gilt die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n.

Betrachten wir nun eine Teilmenge $T \subset N$ und eine Primzahl p, sodass $1 \in T$ und $pT \subset T$, das heißt ist $n \in T$, so ist ebenfalls $p \cdot n \in T$, dann gilt:

$(**)$ $\quad (1 - \frac{1}{p^t}) \sum\limits_{n \in T} \frac{1}{n^t} = \sum\limits_{n \in T} \frac{1}{n^t} - \sum\limits_{n \in T} \frac{1}{(pn)^t} = \sum\limits_{n \in T \setminus pT} \frac{1}{n^t}$.

Es sei T_k die Menge *aller natürlichen Zahlen*, die *nicht* durch $p_1, ..., p_k$ teilbar sind, zum Beispiel ist $T_1 = \{1, 3, 5, 7 ...\}$ die Menge der ungeraden Zahlen.
Außerdem setzen wir $T_0 = N$
Dann hat jedes T_k die Eigenschaft $(**)$ mit der „nächsten“ Primzahl p_{k+1}.
Da $T_{k+1} = T_k \setminus p_{k+1} T_k$, folgt aus $(**)$: $(1 - \frac{1}{p^t_{k+1}}) \sum\limits_{n \in T_k} \frac{1}{n^t} = \sum\limits_{n \in T_{k+1}} \frac{1}{n^t}$.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich nun

$$(1 - \frac{1}{2^t})(1 - \frac{1}{3^t})(1 - \frac{1}{5^t}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p^t_k}) \sum_{n \in T_0} \frac{1}{n^t} = \sum_{n \in T_k} \frac{1}{n^t}$$

oder

$$\prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p^t_j}) \sum_{n \in N} \frac{1}{n^t} = \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p^t_j}) \zeta(t) = \sum_{n \in T_k} \frac{1}{n^t}.$$

Da $N = T_0 \supset T_1 \supset ...$ und $\zeta(t) = \sum\limits_{n \in N} < \infty$ sind auch alle $\sum\limits_{n \in T_k} < \infty$.

Weiter ist $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} T_k = \{1\}$, da 1 als einzige natürliche Zahl durch keine Primzahl teilbar ist. Damit ergibt sich, dass $\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n \in T_k} \frac{1}{n^t} = 1$, und weiter, dass das Produkt

$\prod\limits_{j=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p^t_j}) \zeta(t) = 1$, womit $(*)$ gezeigt ist.

Schließlich zur *Reihe aus den Kehrwerten der Primzahlen*: Nach den Vorbemerkungen und $(*)$ ist $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^t_j}} \geq \frac{1}{t-1}$ für alle $t > 1$.

Da $p_j < p^t_j$ für alle $t > 1$ ergibt sich folglich $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} \geq \frac{1}{t-1} \to \infty$ für $t \downarrow 1$ (t von oben gegen 1).

$\frac{1}{p_j} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} = 1 + \frac{\frac{1}{p_j}}{1 - \frac{1}{p_j}} \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{p_j} \leq e^{2 \cdot \frac{1}{p_j}}$ für alle $j \in N$

$\Rightarrow \infty = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} \leq \prod\limits_{j=1}^{\infty} e^{2 \cdot \frac{1}{p_j}} = e^{2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j}} \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j} = \infty,$ q.e.d.

Monoid-Mathe-Mittwoch
Lösungen

Auf den nächsten Seiten findet ihr die Lösungen der Aufgaben zum Monoid-Mathe-Mittwoch, die wir hier im Heft ab Seite 5 abgedruckt haben.

Lösungen der Mathespielereien

I. Vertauschte Ziffern

Die Addition der Summanden, so wie sie in der Aufgabe stehen, ergibt 18 967. Der Unterschied zur richtigen Summe ist 180.
Die letzte Ziffer ist also an der Vertauschung nicht beteiligt.
Die Vertauschung der ersten mit einer der anderen Ziffern ergibt mindestens 900.
Also müssen die Hunderter- und die Zehnerziffern vertauscht sein und der Unterschied der beiden Ziffern muss 2 sein, da $180 = 2 \cdot 90$ ist.
Also sollte 8426 statt 8246 in der Aufgabe stehen.

II. Lauter verschiedene Jahreszahlenziffern

a) Zuletzt war es im Jahr vorher, also 2018, so und das nächste Mal wird es 2031 so sein. Also wird jemand dann $2031 - 2018 = 13$ Jahre alt.

b) Das letzte Mal war es 2002 so und das nächste Mal wird es 2022 so sein. Also wird jemand dann $2022 - 2002 = 20$ Jahre alt.

III. Zahlenknobelei

Wir schreiben die Aufgabe mit Buchstaben

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & B & C & - & D & E & = & F & G \\
 & & : & & & - & & & + \\
 & H & J & - & & K & = & & L \\
 & & = & & & = & & & = \\
 & M & N & \cdot & & P & = & Q & R
\end{array}$$

(1) $ABC - DE = FG \Longrightarrow A = 1$

(2) $DE - K = P \Longrightarrow D = 1$

(1') $1BC - 1E = FG \leq 99 \Longrightarrow B = 1$

(3) $HJ - K = L \Longrightarrow H = 1$

(4) $1BC : 1J = MN \Longrightarrow M = 1$

(1'') $11C - 1D = FG \Longrightarrow F = 9$

(5) $9G + L = QR \Longrightarrow Q = 9$

(4') $11C = 1J \cdot 1N$. Nur $110 = 10 \cdot 11$ hat die Darstellung $110 = 1J \cdot 1N$. Daraus folgen $C = 0$ und $1J = 10$ und $1N = 11$ oder $1J = 11$ und $1N = 10$. Wäre $1N = 10$, so wäre $10 \cdot P = 9R$, also $R = 0$. Dann wäre $9G + L = 90$ und somit $L = 0$ im Widerspruch zu $1J - K0L$. Daher ist $1N = 11$ und $HJ = 10$, also $N = 1$ und $J = 0$.

(6) Aus $11 \cdot P = 9R$ folgen $P = 9$ und $R = 9$.

Aus (1), (2), (3) und (5) erhält man unter Berücksichtigung der bereits bestimmten Zahlenwerte für die jeweiligen Buchstaben

$$\begin{array}{lcccccc}
(1) & \Longrightarrow & E & + & G & = & 10 \\
(2) & \Longrightarrow & K & - & E & = & 1 \\
(3) & \Longrightarrow & K & + & L & = & 10 \\
(5) & \Longrightarrow & L & + & G & = & 9
\end{array}$$

Aus diesem System ergibt sich $E = 5$, $G = 5$, $K = 6$, $L = 4$.

Die eindeutige Lösung heißt daher

$$\begin{array}{ccccc}
110 & - & 15 & = & 95 \\
: & & - & & + \\
10 & - & 6 & = & 4 \\
= & & = & & = \\
11 & \cdot & 9 & = & 99.
\end{array}$$

IV. Teilbarkeit durch 10

In der folgenden Tabelle stehen die Einerziffern von a, a^2, a^3, a^4 und von $a + a^2 + a^3 + a^4 = c$.

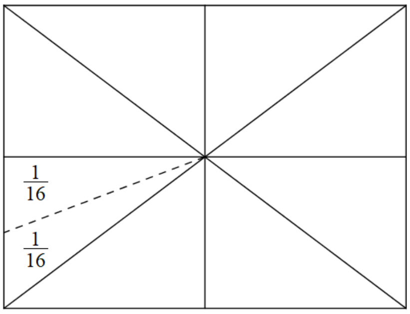
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
a^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
a^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
c	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0

V. Teilbarkeit durch 5

Betrachtung der letzten Ziffer von n, n^2, n^3, ... zeigt, dass die letzte Ziffer von n^4, und damit von n^8, n^{12}, ..., n^{2020} immer entweder 1 oder 6 ist, außer wenn die letzte Ziffer von n entweder 0 oder 5 ist.

VI. Dreieck im Viereck

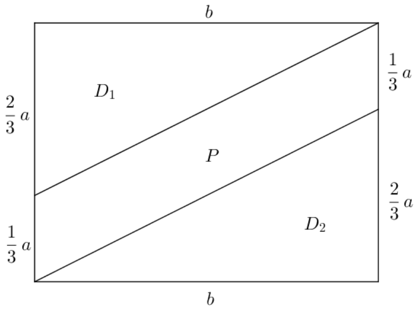
a)



Man zerlege das Rechteck duch seine Diagonalen und seine Mittellinien in 8 Dreiecke, von denen jedes den Flächeninhalt $\frac{1}{8}$ hat. Jedes dieser 8 Dreiecke halbiert man. Jedes der 16 Teildreiecke hat dann die Fläche $\frac{1}{16}$.

Wenn man nun 33 Punkte auf 16 Dreiecke verteilt, dann gibt es ein Dreieck, in dem 3 Punkte liegen. Diese drei Punkte sind dann Eckpunkte eines Dreiecks, dessen Flächeninhalt $\leq \frac{1}{16}$ ist.

b)



Zerlegt man die Rechteckseiten so wie in der Figur im Verhältnis $1 : 2$, so erhält man die Dreiecke D_1 und D_2 und das Parallelogramm P. D_1, D_2 und P haben jeweils die Fläche $\frac{1}{3}$. Da 7 Punkte auf die drei Polygone D_1, D_2, P zu verteilen sind, enthält ein Vieleck drei Punkte, die die Eckpunkte eines Dreiecks mit einer Fläche $\leq \frac{1}{3}$ sind.

VII. Nur die Sieben

a) Zum Beispiel $105 = 7 \cdot 15 = 7 \cdot (2 \cdot 7 + 1) = 7 \cdot (7 + 7 + 7 : 7)$.

b) Zwei mögliche Darstellungen sind

$$10{,}5 = 105 : 10 = 7 \cdot (7 + 7 + 7 : 7) : (7 + (7 + 7 + 7) : 7)$$

und

$$10{,}5 = 21 : 2 = (7 + 7 + 7) : ((7 + 7) : 7).$$

c) Jede rationale Zahl x lässt sich als Bruch $\frac{m}{n}$ schreiben. Daraus ergibt sich die (nicht unbedingt eleganteste) Darstellung

$$x = \frac{m}{n} = \frac{m \cdot 7}{n \cdot 7} = \frac{\overbrace{7 + 7 + \ldots + 7}^{m \text{ Summanden } 7}}{\underbrace{7 + 7 + 7 + \ldots + 7}_{n \text{ Summanden } 7}}.$$

Damit ist gezeigt, dass es immer eine Lösung gibt. In vielen Fällen gibt es aber auch elegantere Darstellungen, zum Beispiel durch Zusammenfassung von sieben Summanden 7 zu $7 \cdot 7$ und andere Vereinfachungen.

(MG)

VIII. Zahl gesucht

1. Es ist $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.
   Wäre $p = 2$ oder $p = 5$, dann wäre xxp keine Primzahl.
   Sei $p = 7$. Wäre nun $x \geq 2$, so wäre $xyyz \geq 7 \cdot 7 \cdot 227$, aber $7 \cdot 7 \cdot 227$ ist 5-stellig; wäre $x = 1$, dann wäre $xxp = 117$ keine Primzahl. Folglich ist $p = 7$ nicht möglich.
   Also muss $p = 3$ sein.

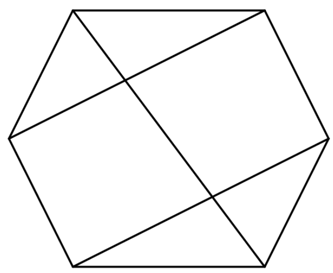
2. Aus $3 \cdot 3 \cdot xx3 = xyyz$ folgt $z = 7$.

3. Mit 1. und 2. folgt $x, y \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$.
   Es ist $xyyz = 1000x + 10yy + 7 = 3 \cdot 3 \cdot xx3 = 900x + 90x + 27$, also insbesondere
   $$1000x + 10yy + 7 = 900x + 90x + 27.$$
   Daraus erhalten wir $10x + 10yy = 20$ und somit $x + yy = 2$. Das ist nur möglich für $y = 0$ und dann $x = 2$.

4. Es ist also $xyyz = 2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$.

IX. Verbindungslinien

a) Zum Beispiel:



b) Von jedem der sieben Punkte gehen drei Verbindungen aus, das ergibt $3 \cdot 7 = 21$ Verbindungen. Dabei ist jede Verbindung doppelt gezählt, aber $\frac{21}{2}$ ist keine ganze Zahl.

X. Primzahlen gesucht

Die kleinste Zahl, die ohne Rest durch 2, durch 3, ..., durch 11 und durch 12 teilbar ist, ist $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11$.

a) Die Zahl $n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11 + 1 = 83161$ ist der Reihe nach durch 2, 3, ..., 11 und 12 mit Rest 1 teilbar.

b) Wir setzen $M = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11$.
   Dann gilt $M - 2$ ist ohne Rest und $M - 1$ mit Rest 1 durch 2 teilbar;

$M - 3$ ist ohne Rest und $M - 1$ mit Rest 2 durch 3 teilbar;
$M - 4$ ist ohne Rest und $M - 1$ mit Rest 3 durch 4 teilbar;
$\vdots$
$M - 12$ ist ohne Rest und $M - 1$ mit Rest 11 durch 12 teilbar.
Somit ist die gesuchte Zahl m offenbar $M - 1 = 83159$.

Lösungen der Neuen Aufgaben

Aufgabe 1: Vielfache von 100

Es gilt

$$\begin{aligned} n^5 &= (10m^+1)^5 \\ &= (10m)^5 + 5(10m)^4 + 10(10m)^3 + 10(10m)^2 + 5 \cdot 10m + 1 \\ &= (\text{Vielfaches von } 1000) + 50m + 1. \end{aligned}$$

Da m ungerade ist, können wir $m = 2k+1$ mit $k \geq 0$ setzen. Damit ist $50m+1 = 50(2k+1)+1 = 100k+51$.
Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} n^5 - 51 &= (\text{Vielfaches von } 1000) + 50m + 1 - 51 \\ &= (\text{Vielfaches von } 1000) + 100k + 51 - 51 \\ &= (\text{Vielfaches von } 1000) + (\text{Vielfaches von } 100) \\ &= (\text{Vielfaches von } 1000). \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks

Aufgrund des rechten Winkels ist Seite b die Höhe auf die Seite a. Deshalb ist $F = \frac{1}{2}ab$ und daher $4F = 2ab$.
Nach der binomischen Formel gilt $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$, woraus wegen $2ab = 4F$ folgt: $4F = (a + b)^2 - \left(a^2 + b^2\right)$.
Nach dem Satz des Pythagoras ist $a^2+b^2 = c^2$ und damit folgt $4F = (a+b)^2-c^2$, also

$$F = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}.$$

Q.e.d.

Aufgabe 3: Zwei verwandte Gleichungen

Wenn die beiden Gleichungen jeweils zwei ganzzahlige Lösungen besitzen, dann seien diese $-r$ und $-s$ sowie $-t$ und $-u$. Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= (x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs, \\ x^2 + bx + a &= (x + t)(x + u) = x^2 + (t + u)x + tu. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

(1) $a = (r + s) = tu$ und $b = (t + u) = rs$.

Aus (1) ergibt sich wegen $a > 0$ und $b > 0$, dass $rs > 0$ und $r + s > 0$ gilt. Daher sind wegen $rs > 0$ entweder r und s beide positiv oder beide negativ. Aber da sie beide wegen $r + s > 0$ nicht negativ sein können, folgt $r > 0$ und $s > 0$.
Ganz entsprechend zeigt man, dass $t > 0$ und $u > 0$ ist. Aus der Ganzzahligkeit von r, s, t und u folgt somit

(2) $r \geq 1$ und $s \geq 1$ sowie $t \geq 1$ und $u \geq 1$.

Aus (2) ergibt sich wegen $a < b$, dass $tu < t + u$ ist.
Falls nun $t \geq 2$ und $u \geq 2$ wäre, dann wäre $tu \geq 2 \cdot \max(t, u) \geq t + u$: ein Widerspruch. Also: Eine der Zahlen t und u ist 1; zum Beispiel sei $t = 1$.
Für $t = 1$ erhält man nun aus (1): $r + s = u$ und $r \cdot s = u + 1$. Also gilt.

(3) $r \cdot s = r + s + 1$.

Wären nun r und s beide ≥ 3, so wäre

$$r \cdot s = \min(r, s) \cdot \max(r, s) \geq 3 \cdot \max(r, s) > r + s + 1$$

im Widerspruch zu Gleichung (3).

Eine der Zahlen r und s muss also ≤ 2 sein.
Sei $r \leq 2$. Für $r = 1$ erhält man aus Gleichung (3) den Widerspruch $s = s + 2$.
Folglich ist $r = 2$ und daher $s = 3$ gemäß Gleichung (3) und $u = 5$ nach (1) wegen $t = 1$. Aus (1) ergibt sich damit: $a = 5$ und $b = 6$ und die Gleichungen lauten daher

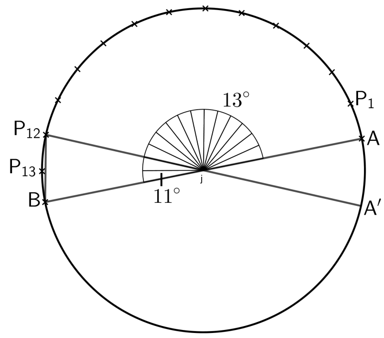
$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ mit den Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$,
$x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$ mit den Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -5$.

Aufgabe 4: Konstruktion mit beschränkten Mitteln

Die Radien der beiden Zirkel seien r und R mit $r < R$.

(1) Zeichne nun um M einen Kreis mit Radius R. Sei A ein Punkt auf der Kreislinie und trage von diesem aus den Radius r gegen den Uhrzeigersinn 13 Mal ab.

Mit den Punkten P_1, P_2, ..., P_{13} erhält man die 13°-Winkel $\sphericalangle AMP_1$, $\sphericalangle P_1MP_2$, ..., $\sphericalangle P_{12}MP_{13}$.
Dann ist $\sphericalangle P_{13}MB$ offenbar $180° - 13 \cdot 13° = 11°$ groß. Also ist $\sphericalangle P_{12}MB = 24°$ groß, so dass BP_{12} eine Seite eines regelmäßigen 15-Ecks ist. Man verlängere nun die Strecke $P_{12}M$ zur Strecke $P_{12}A'$.



(2) Von MA' aus wiederholt man die Konstruktion (1).

Man erhält so eine weitere Seite des 15-Ecks und so weiter. Nach insgesamt 14 Konstruktionen vom Typ (1) hat man 14 aneinanderhängende Seiten des 15-Ecks konstruiert.
Die letzte Seite ergibt sich als Verbindung der freien Endpunkte des bereits konstruierten 14-teiligen Streckenzugs.

Aufgabe 5: Eine ungewöhnliche Zahlen-Eigenschaft

Es ist

$$\begin{aligned} 5^{n+4} - 5^n &= 5^n(5^4 - 1) = 5^n \cdot 624 \\ &= 5^n \cdot 39 \cdot 2^4 = 5^{n-4} \cdot 39 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \\ &= 5^{n-4} \cdot 390\,000 \end{aligned}$$

und somit $5^{n+4} - 5^n$ durch $390\,000$ teilbar.

Aufgabe 6: Abundante Quadratzahlen

Die (positiven) Teiler von a seien t_1, t_2, t_3, ..., t_k mit $k > 1$ und alle Teiler seien paarweise verschieden. Dann gilt nach Voraussetzung $\sigma(a) = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_k > 2a$.
Die Zahlen a^2 hat mindestens die Teiler at_1, at_2, at_3, ..., at_k, die alle paarweise verschieden sind. Wegen $\sigma(a) > 2a$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma(a^2) &\geq at_1 + at_2 + at_3 + ... + at_k \\ &= a \cdot \sigma(a) \\ &> a \cdot 2a = 2a^2. \end{aligned}$$

Also ist $\sigma(a^2) > 2a^2$ und daher ist auch a^2 abundant.

Aufgabe 7: Teilbarkeit der 7. Potenz

Es gilt

$$a^7 - b^7 = \left(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6\right) \cdot (a - b).$$

Ist also $a - b$ durch 7 teilbar, so ist es auch $a^7 - b^7$. q.e.d.

Aufgabe 8: Bemerkenswerter Primzahl-Term

1. Zunächst ist – weil nach Vielfachen gefragt ist – der additive Term in einen multiplikativen Term zu transformieren. Es gilt: $P^2Q^2 - (P^2 + Q^2) + 1 = (P^2 - 1)(Q^2 - 1)$.
2. Wir zeigen: Für jede Primzahl $P \geq 5$ ist $P^2 - 1$ ein Vielfaches von 24.
   Jede Primzahl $P \geq 5$ ist von der Form $6n \pm 1$ mit einer natürlichen Zahl n.
   Wenn P von der Form $P = 6n+1$ ist, dann gilt $P^2 - 1 = 36n^2 + 12n + 1 - 1 = 12n(3n + 1)$.
   Analog folgt für $P = 6n - 1$, dass $P^2 - 1 = 36n^2 - 12n + 1 - 1 = 12n(3n - 1)$ ist.

In beiden Fällen ist $n(3n+1)$ ein Vielfaches von 2 und somit ist P^2-1 ein Vielfaches von $12 \cdot 2 = 24$. Entsprechendes gilt für Q^2-1.

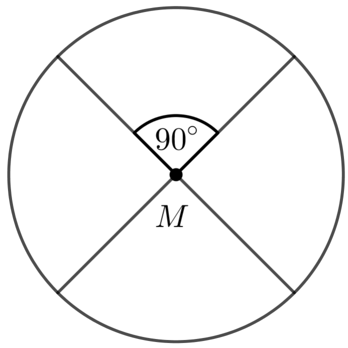
3. Da P^2-1 und Q^2-1 beide Vielfaches von 24 sind, ist ihr Produkt also ein Vielfaches von $24^2 = 576$.

Aufgabe 9: Lösung gesucht

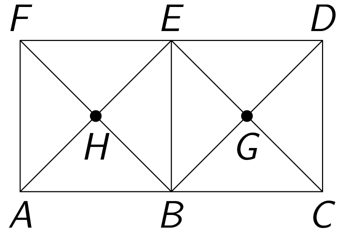
Es ist $x^4+x^3+(cx)^2+x+1 = x^3(x+1)+(x+1)+(cx)^2 = (x^3+1)(x+1)+(cx)^2$. Die beiden Faktoren x^3+1 und $x+1$ haben das gleiche Vorzeichen, sowohl für $x > -1$, als auch für $x < -1$. Also ist $(x^3+1)(x+1)>0$ für $x \neq -1$. Ferner ist $(cx)^2 > 0$, falls $c \neq 0$. Eine reelle Lösung, und zwar $x = -1$, gibt es also nur dann, wenn $c = 0$.

Aufgabe 10: Zweimal ein Quadrat

1. Die Schnittpunkte zweier aufeinander senkrechten Durchmesser eines Kreises mit Radius 4 cm mit diesem Kreis sind die Ecken eines solchen Quadrats.



2. Konstruiere zunächst zwei aneinander liegende Quadrate mit Seitenlänge 8 cm und in jedem der beiden Quadrate die Schnittpunkte der Diagonalen (siehe Skizze).



Das Quadrat $BGEH$ hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 140

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Anton Krempl 11, Marek Moldehn 3, Philipp Reis 11, Jill Marie Simon 5;
Kl. 6: Anna Lena Drescher 13, Gabriel Faber 5, Mya Fuchs 13, Johannes Greis 11;
Kl. 7: Oscar Su 75, Kevin Tran 35, Jan Christian Weber 27;
Kl. 8: Lars Schall 16;
Kl. 10: Lukas Born 27;
Kl. 12: Torben Bürger 36.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:
Kl. 9: Oliver Bill 7.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 5: Linus Salloch 9, Mika Schäfer 11;
Kl. 11: Marvin Wenzel 40.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Konstantin Herbst 39;
Kl. 10: Nico Brockmeier 32, Aleksandra Herbst 23.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 11: Sönke Schneider 38;

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 6: Jabir Aouzi 11, Lia Boyanova 8, Mark Garkuscha 6, Eva Hovadikova 2, Iwais Karimi 11, Sarah Markhof 13, Nam-anh Pham 20;

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 11: Dennis Mayle 31.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 6: Daniel Waldek 3;
Kl. 9: Simon Waldek 10.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 5: Anna Salaru 12.

Mainz, Martinus-Schule:
Kl. 3: Johannes Wünstel 1,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 8: Gregor Salaru 33;
Kl. 10: Raphael Mayer 9.

Mainz, Theresianum:
Kl. 11: Clemens Zabel 38.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 7: Jona Richartz 5.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 12: Johannes Kerhberger 8.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jasmin Borrmann 15, Leonard Köhler 4, Leon David Mayer 2, Lotta Pietschmann 9;
Kl. 6: Klara Backmann 25, Luis Brinkmann 19, Annika Giebitz 19, Louisa Lukowiak 20, Dora Meszaros 22, Marvin Weber 11;
Kl. 7: Emilie Borrmann 24;
Kl. 9: Elisabeth Budimann 6, Annika Etz 7, Martin Daniel Schanne 6;
Kl. 10: Kathrin Borrmann 21, Paulina Herber 26, Josefine Kaßner 39;
Kl. 11: Jonas Glückmann 42.

Schifferstadt, Paul-von-Denis-Gymnasium:
Kl. 12: Marlene Maager 12.

Schondorf, Burg-Gymnasium:
Kl. 10: Christian Carda 10.

Schrobenhausen, Gymnasium
Kl. 6: Luca Sindel 27.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 5: Mai Linh Dang 10;
Kl. 8: Tu Sam Dang 36;
Kl. 10: Miriam Büttner 37.

Tettnang:
Katharina Bauer 12.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 8: Philipp Lörcks 79.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Lilith Gorecki 3,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 9: Mareike Bühler 9.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 7: Jan Wickenheiser 10;
Kl. 8: Alexander Haun 13;
Kl. 10: Lukas Emmel 7, Marco Klein 12.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 10 € für das Schuljahr 2020/21 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahrsabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Mainzer Mathematik-Akademie:** Die für dieses Jahr geplante Mainzer Mathematik-Akademie muss leider ausfallen. Aufgrund der Corona-Pandemie bleibt das Übernachtungshaus, in dem die Teilnehmer hätten schlafen sollen und in dem auch Teile des Rahmenprogramms stattgefunden hätten, bis Ende September geschlossen. Daher kann die MMA (geplant vom 9. bis 13. September 2020) nicht stattfinden. Die nächste Mainzer Mathematik-Akademie findet im Herbst 2021 statt.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Ruß
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 40 | Heft 142 | Juni 2020

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid