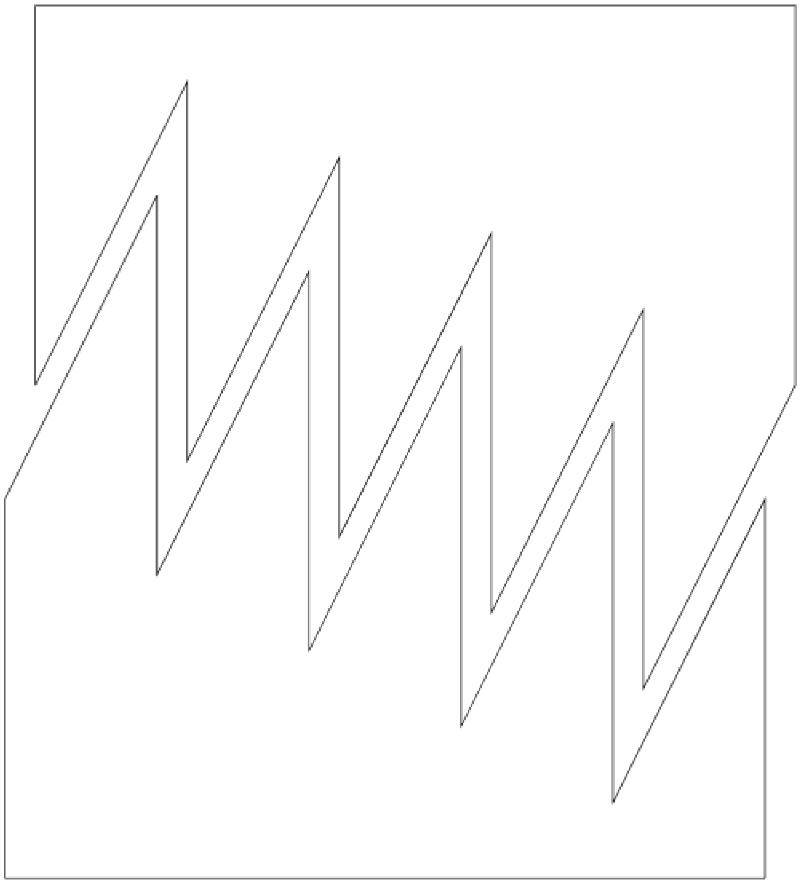
Jahrgang 40 Heft 143 Oktober 2020

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **30.11.2020.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Monoid-Mathe-Mittwoch
Aufgaben
Teil 2

Während der (teilweisen) Schulschließung aufgrund des Corona-Notstandes hatten wir Euch von April bis zu den Sommerferien unter dem Titel *Monoid-Mathe-Mittwoch* wöchentlich Aufgaben auf unserer Internetseite zur Verfügung gestellt. Die ersten Lösungen findet Ihr bereits im Monoid-Heft 142. Auch die übrigen Lösungen möchten wir Euch nicht vorenthalten. Doch zunächst noch einmal die Aufgabenstellungen.

Mathespielereien

XI. Englische Multiplikation
Ersetze in der Gleichung

$$ONE \cdot 9 = NINE$$

jeden Buchstaben durch eine Ziffer 0, 1, 2 bis 8, sodass Du eine korrekte Zahlengleichung erhältst. Ersetze dabei gleiche Buchstaben mit gleichen Ziffern und verschiedene Buchstaben mit verschiedenen Ziffern. (H.F.)

XII. Einerziffer gesucht
Wenn man die 1000000 Zahlen $z^1, z^2, z^3, ..., z^{100000}$, wobei $z = 1, 2, 3, ..., 10$ ist, addiert – wie heißt dann die Einerziffer dieser Summe? (HF)

XIII. Winkelsumme im Stern
Wie groß ist die Summe der Winkel in den Zacken eines fünfzackigen Sterns?

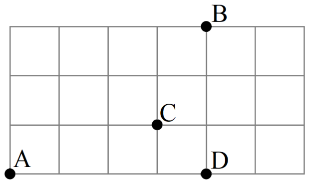
XIV. Victorias Kinder
Bei der Feier 20 Jahre nach dem Abitur erzählt Victoria ihrer Freundin Jasmin, dass sie inzwischen drei Kinder hat. Auf die Frage nach deren Alter sagt Victoria: „Das Produkt ihrer Alter ist 36 und die Summe ist gleich der Nummer der Buslinie, mit der wir damals zur Schule gefahren sind.“
Nach kurzem Nachdenken antwortet Jasmin: „Diese Informationen reichen mir nicht.“
Victoria ergänzt: „Das älteste Kind ist ein Mädchen.“
Jetzt kennt Jasmin die Alter der drei Kinder – Du auch? (WJB)

Neue Aufgaben

Aufgabe 11: Bestimmung einer Zahl

Für eine positive reelle Zahl x gelte $x + \frac{1}{x} = 3$.
Bestimme die Zahl $a > 0$, welche die Gleichung $x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = a$ erfüllt. (H.F.)

Aufgabe 12: Winkel im Rechteckgitter



In einem 6×3-Gitter aus Quadraten der Seitenlängen 1 seien die Punkte A, B, C, D markiert.
Zeige: Es ist $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$. (H.F.)

Aufgabe 13: Niemals eine Quadratzahl

Es sei p_1, p_2, p_3, ... die Folge aller nach zunehmender Größe geordneten Primzahlen mit $p_1 = 2$ und es sei $P_n + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$.
Für $n = 1, 2, 3, ...$ gilt dann: $P_n + 1$ ist keine Quadratzahl. (H.F.)

Aufgabe 14: Schnittwinkel von Sechseckdiagonalen

Zeige: In jedem konvexen Sechseck gibt es zwei Diagonalen, die sich in einem Winkel von höchstens 20° schneiden. (WJB)

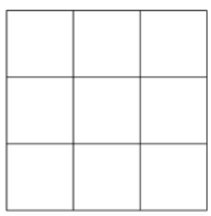
Die Lösungen findest Du im Heft ab Seite 36.

Zerlegung eines Quadrats
Ergänzung für den Fall $n = 5$

von Achim Klenke

In Monoid 141 stellten wir Euch folgende Aufgabe als neue Mathespielerei (Seite 23):

> **Zerlegung eines Quadrats**
> Untersuche, in wie viele Quadrate ein gegebenes Quadrat zerlegt werden kann – wobei die Teilquadrate gleich oder verschieden groß sein dürfen.
>
> Beispiel:
> Das nebenstehende Quadrat ist in neun Quadrate zerlegt. Deshalb kann es auch in 36 Quadrate zerlegt werden. (H.F.)



Im letzten Heft haben wir in der Lösung gezeigt (Monoid 142, Seite 17 f.), dass sich das Quadrat nicht in $n = 2$ und $n = 3$ kleinere Quadrate zerlegen lässt, für $n = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$ Quadrate aber Zerlegungen existieren. Es blieb das Problem, warum ein Quadrat nicht in fünf Quadrate zerlegt werden kann. Das geht so.

Angenommen, wir können ein großes Quadrat G in fünf Quadrate A, B, C, D und E zerlegen. Wir nennen die Seitenlängen der Quadrate g, a, b, c, d und e. In jeder der vier Ecken des großen Quadrats stößt genau eines der Zerlegungsquadrate an. Nehmen wir an, dass die Zerlegungsquadrate so benannt sind, dass A rechts oben anstößt, B links oben, C links unten und D rechts unten. Das Quadrat E stößt an keiner Ecke des Außenquadrats an.

Damit B und D nicht überlappen, muss

(1) $b + d \leq g$

gelten. Ebenso gilt

(2) $a + c \leq g$.

E kann nicht an zwei benachbarte Kanten von G anstoßen, weil es sonst auch in der verbindenden Ecke anstoßen müsste.

Es gilt $e < g$, sonst würde E das Außenquadrat G ganz ausfüllen. Also stößt E nicht an zwei gegenüberliegende Kanten von G an.

Es gibt also mindestens drei Kanten von G, an die E nicht anstößt. Wir nehmen an, dass dies die rechte, die obere und die linke Kante sind. Es stoßen also D und A aneinander (rechte Kante), A und B (obere Kante) und B und C (linke Kante). Für die aneinanderstoßenden Quadrate gilt

(3) $g = d + a$,

(4) $g = a + b$ und

(5) $g = b + c$.

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

(6) $d = b$.

Zusammen mit Ungleichung (1) folgt $2b = b + d \leq g$, also

(7) $d = b \leq \frac{g}{2}$.

Ebenso folgt aus (4), (5) und (2)

(8) $c = a \leq \frac{g}{2}$.

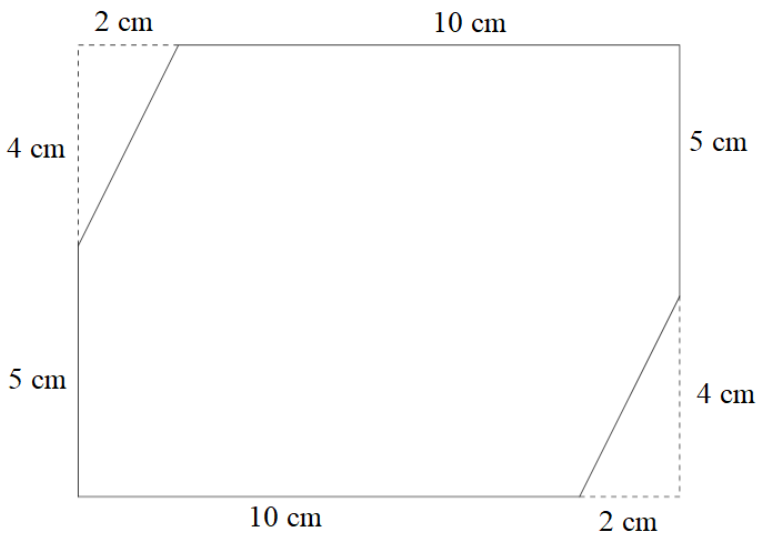
Gälte $b < \frac{g}{2}$ oder $a < \frac{g}{2}$, so bekämen wir

$$a + d = a + b < g$$

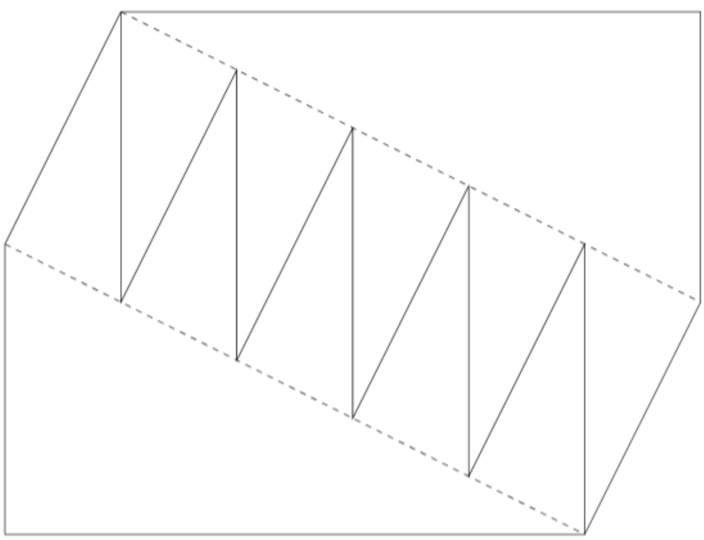
im Widerspruch zu Gleichung (3). Es folgt $a = b = c = d = \frac{g}{2}$. Also sind A, B, C und D vier gleichgroße Quadrate, die G vollständig ausfüllen und es bleibt kein Platz für das fünfte Quadrat E.

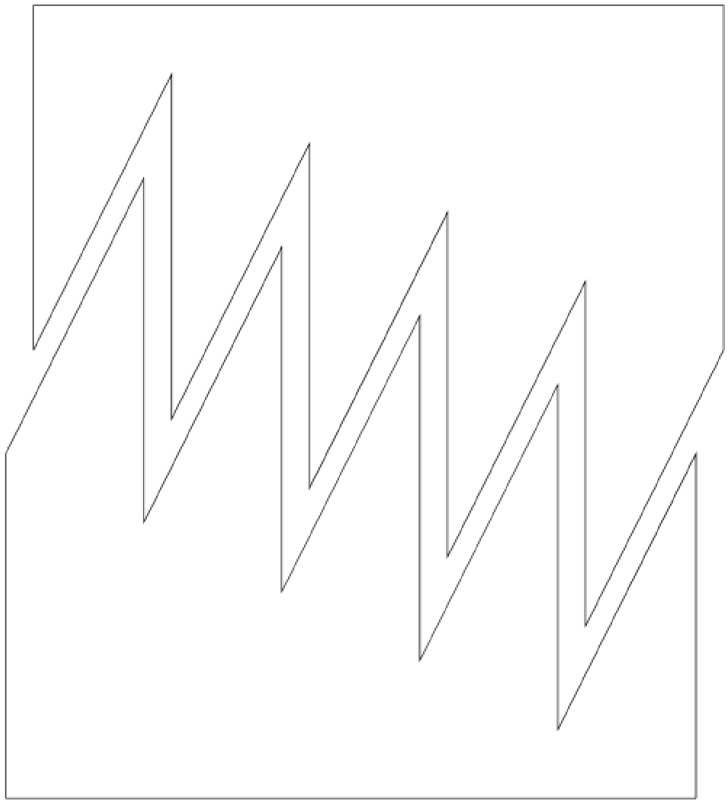
Die besondere Aufgabe
Quadratur eines Sechsecks
von Christoph Sievert

Schneide das Sechseck so in zwei Teile, dass sich beide Teile zu einem Quadrat zusammenlegen lassen.



Lösung





Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

$$\begin{array}{ccccccc}
M & O & N & \cdot & O & I & D \\
\hline
 & D & D & O & N & & \\
 & & & M & O & N & \\
 & & & & X & N & N \\
\hline
 & D & Y & N & M & N & N
\end{array}$$

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine korrekte Multiplikation zweier dreiziffriger Zahlen entsteht. Dabei sollen gleichen (verschiedenen) Buchstaben gleiche (verschiedene) Ziffern zugeordnet werden.

Lösung

Aus der Summe $N + N = N$ ergibt sich in der 6. Spalte $N = 0$. Aus dem Produkt $MON \cdot I = MON$ folgt $I = 1$.

Das Produkt $MON \cdot O = DDON$ kann wegen $N = 0$ vereinfacht werden zu $MO \cdot O = DDO$. Daraus folgt: $(10 \cdot M + O) \cdot O = 10 \cdot M \cdot O + O^2 = 10 \cdot DD + O$. Deshalb haben O^2 und O die gleiche Einerziffer; also ist $O = 0$, 1, 5 oder 6.

$O = 0$ und $O = 1$ scheiden wegen $N = 0$ und $I = 1$ aus.

Es sei $O = 6$. Dann gilt (Spalte 4): $6 + M = 10$, also ist $M = 4$. Dann aber ist $MON \cdot O = 460 \cdot 6 = 2760 = DDON$ – ein Widerspruch. Es gilt also $O = 5$.

Wäre nun (Spalte 5) $N + O + X = M < 10$, so folgte aus der vierten Spalte $O + M = 10$ und daher $M = O = 5$. Somit ist $N + O + X \geq 10$.

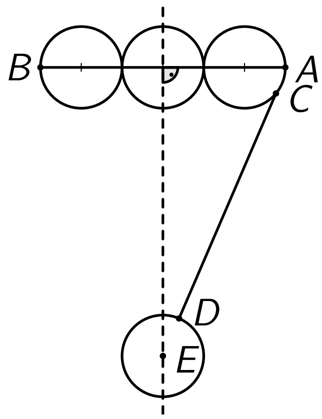
Also erfolgt aus Spalte 5 ein Übertrag in Spalte 4. Es gilt dann $O + M + 1 = 10$. Daher ist $M = 4$.
Aus $MON \cdot D = XNN$ und somit $450 \cdot D = X \cdot 100$ folgt $D = 2$, $X = 9$ und schließlich $Y = 3$.

Die eindeutige Lösung lautet also: $450 \cdot 512 = 230400$.

Was uns so über den Weg gelaufen ist...

Vergleich der Längen zweier Strecken

von Hartwig Fuchs



Welche der beiden Strecken AB und CD in der angegebenen Figur ist die längere, wenn C beliebig auf einem der äußeren unteren Halbkreise gewählt wird und D der Schnittpunkt der Strecke zwischen C dem Kreismittelpunkt E des unteren Kreises ist, der so konstruiert ist, dass $|CE| = \frac{7}{6}|AB|$ ist?

Lösung

Beide Strecken sind gleich lang.
Begründung für die angegebene Figur: Gegeben seien drei einander berührenden Kreise mit gleich großen Radien r und das Mittellot der Strecke AB mit $|AB| = 6r$.

Es sei nun C auf einem der äußeren Kreise so wie in der Figur beliebig gewählt. Der Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $7r$ schneidet das Mittellot in einem Punkt E. Dann schneidet die Strecke CE den Kreis mit Mittelpunkt E und Radius r in einem Punkt D.
Für die Strecke CD gilt

$$|CD| = |CE| - r = 7r - r = 6r = |AB|.$$

Also sind AB und CD gleich lang – wer es anders sieht, ist Opfer einer optischen Täuschung.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Isabel, Jana und Katja stehen am Fuß der Treppe in ihrer neuen Schule. Die Treppe hat bis zum ersten Absatz 13 Stufen.
Isabel sagt: „Ich nehme immer zwei Stufen auf einmal und am Ende noch eine Stufe.“ Jana entgegnet: „Ich nehme erst zwei Stufen einzeln, dann viermal zwei Stufen auf einmal und schließlich noch drei Stufen einzeln.“ Katja berichtet: „Ich nehme erst eine Stufe und dann sechsmal zwei Stufen auf einmal.“
Isabel fragt: „Wenn das schon drei verschiedene Möglichkeiten sind, die Treppe mit Einer- oder Zweierschritten hinaufzugehen: Wie viele solcher Möglichkeiten gibt es wohl insgesamt?“ – Ratlos schauen sich die drei an.
Auf wie viele verschiedene Arten kann man eine Treppe von 13 Stufen hinaufgehen, wenn nur Einer- oder Zweierschritte erlaubt sind? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 30. November 2020 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 141

In Heft 141 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Jan hat mit seinen Eltern eine ungewöhnliche Art der Taschengeldberechnung ausgemacht. In jedem Monat, in dem er eine Arbeit mit einer 4 oder einer schlechteren Note schreibt, verliert er einen festen Betrag von seinem Taschengeld. In jedem anderen Monat wird der normale Taschengeldsatz um einen ebenfalls festen Satz erhöht.

Nach mehreren Monaten zieht er gemeinsam mit seinen Eltern Bilanz. „Betrachtet man jeweils sieben aufeinanderfolgende Monate, so ist deine Bilanz immer negativ“, sagt der Vater. „Wenn wir aber jeweils elf aufeinanderfolgende Monate betrachten, so ist meine Bilanz immer positiv“, entgegnet Jan.
Welches ist die größte Anzahl von Monaten, für die beide Aussagen richtig sind? Oder geht das gar nicht? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Die größte Anzahl von Monaten, für die beide Aussagen richtig sind, ist 16.
Das Beispiel folgender sechzehn Euro-Beträge: $+5$, $+5$, -13, $+5$, $+5$, $+5$, -13, $+5$, $+5$, -13, $+5$, $+5$, $+5$, -13, $+5$, $+5$ zeigt, dass für jeweils sieben aufeinanderfolgende Monate die Summe -1 ist, während sie für jeweils elf aufeinanderfolgende Monate $+1$ beträgt.

Nun müssen wir zeigen, dass für mehr als 16 Monate nicht beide Bedingungen gleichzeitig erfüllbar sind. Wir betrachten 17 aufeinanderfolgende Monate und nennen die Zuschläge für die einzelnen Monate z_1, z_2, ..., z_{17}, wobei diese Zuschläge aus der Sicht von Jan positiv oder negativ sein können. Wegen $z_1+z_2+\ldots+z_{11} > 0$ sowie $z_1 + z_2 + \ldots + z_7 < 0$ und $z_5 + z_6 + \ldots + z_{11} < 0$ gilt $z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11} > 0$ und $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 > 0$.
Wegen $z_2 + z_3 + \ldots + z_{12} > 0$ sowie $z_2 + z_3 + \ldots + z_8 < 0$ und $z_6 + z_7 + \ldots + z_{12} < 0$ gilt $z_9 + z_{10} + z_{11} + z_{12} > 0$ und $z_2 + z_3 + z_4 + z_5 > 0$.
Entsprechend ergeben sich $z_{10} + z_{11} + z_{12} + z_{13} > 0$ und $z_3 + z_4 + z_5 + z_6 > 0$, $z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} > 0$ und $z_4 + z_5 + z_6 + z_7 > 0$, $z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} > 0$ und $z_5 + z_6 + z_7 + z_8 > 0$, $z_{13} + z_{14} + z_{15} + z_{16} > 0$ und $z_6 + z_7 + z_8 + z_9 > 0$ sowie $z_{14} + z_{15} + z_{16} + z_{17} > 0$ und $z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} > 0$.

Also sind dann alle Summen der Zuschläge für vier aufeinanderfolgende Monate positiv. Wegen $z_1+z_2+\ldots+z_8 = (z_1+\ldots+z_4)+(z_5+\ldots+z_8) > 0$, $z_1+\ldots+z_7 < 0$ und $z_2 + \ldots + z_8 < 0$ gelten $z_8 > 0$ und $z_1 > 0$. Entsprechend gelten $z_9 > 0$ und $z_2 > 0$, $z_{10} > 0$ und $z_3 > 0$, und so weiter. Daher müssen alle Zuschläge positiv sein, im Widerspruch zu $z_1 + z_2 + \ldots + z_7 < 0$. Deshalb ergibt sich für mehr als 16 Monate eine falsche Aussage, so dass 16 die größtmögliche Anzahl ist.

Zu dieser schweren Aufgabe hat nur Sönke Schneider eine vollständig richtige Lösung eingereicht.

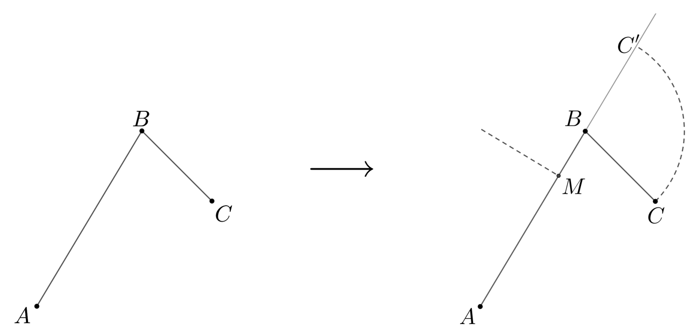
In dem Dialog zwischen Jan und seinen Eltern könnten auch andere Anzahlen von Monaten genannt werden als sieben und elf. Wie sieht dann die Lösung aus? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

Man konstruiere den Punkt M auf dem abgewinkelten Streckenzug ABC mit $|AB| > |BC|$, der halbwegs zwischen den Punkten A und C liegt – für den also gilt: $|AM| = |MB| + |BC|$.

Lösung ohne Worte



Eine tolle Beweis-Methode

von Hartwig Fuchs

Die beiden Mathematiker Professor Quaoar und Professor Prin begegnen sich auf der Straße.
Quaoar zu Prin: „Ich bin auf dem Weg zu unserem Kollegen Klytz."
Prin zu Quaoar: „Den habe ich gerade eben getroffen – er will in ein Lokal gehen. Und er sagte mir:

(1) Wenn ich nicht im *Adler* bin, so bin ich im *Bären*.

(2) Wenn ich nicht im *Bären* bin, so bin ich im *Hirschen*.

Quaoar nach einigem Nachdenken: „Ich weiß jetzt, wo ich Klytz finde."
Wie ist Quaoar darauf gekommen und in welchem Lokal wird er Klytz treffen?

Um Quaoars logischen Gedankengang nachvollziehen zu können, sei zunächst an zwei Grundsätze des logischen Schließens erinnert:

(G_1) Aus einer wahren Aussage sind nur wahre Aussagen herleitbar.

(G_2) Ist eine Aussage A falsch, so ist ihre Verneinung $\neg A$ wahr.

Mit (G_1) und (G_2) lässt sich eine wichtige Herleitungsregel der Logik begründen, welche die Logiker des Mittelalters in der Gelehrtensprache ihrer Zeit – dem Latein – als *modus tollendo tollens** bezeichneten.

Der modus tollens**

Es gelte die Hypothese: Aus einer Aussage A sei die Aussage B herleitbar, in Zeichen: $A \longrightarrow B$.
Wenn dann die Verneinung $\neg B$ von B wahr und daher B falsch ist (G_2), dann folgt aus (G_1), dass die Voraussetzung A in $A \longrightarrow B$ nicht wahr sein kann – also falsch ist.
Diese logische Argumentation nennt man *modus tollens*.

Beispiel

Hypothese $A \longrightarrow B$ mit den Aussagen A : Das Kind ist in den Brunnen gefallen und B : Das Kind ist nass.
Nun gelte: Das Kind ist nicht nass ($\neg B$). Mit dem modus tollens folgt dann: Das Kind ist nicht in den Brunnen gefallen ($\neg A$).

* modus (lateinisch) – die Art und Weise, wie etwas geschieht, Regel; tollere (lateinisch) – von mehreren unterschiedlichen Bedeutungen des Verbs ist hier gemeint: ablehnen, für ungültig erklären; insgesamt also etwa die Regel des Aufhebens.

** Heute sagt man kürzer: modus tollens.

Schema eines modus tollens:

$$\begin{array}{rcr|l} A & \longrightarrow & B & \text{Hypothese mit Voraussetzung } A \\ & & \neg B & \text{zweite Voraussetzung } B \text{ falsch} \\ \hline & & \neg A & \text{Folgerung: } A \text{ falsch} \end{array}$$

Bemerkung

Der Name der Herleitungsregel beruht auf dem Wort lateinischen tollere. Die Verneinung und damit Ablehnung von B (tollendo) führt zur Ablehnung der Hypothese $A \longrightarrow B$.

Warum? Zum einen ist $A \longrightarrow B$ überflüssig, denn wenn $\neg B$ wahr ist, bedarf es keiner Herleitung der Falschaussage B; zum anderen ist $A \longrightarrow B$ wertlos, wenn A falsch ist, denn aus einer Falschaussage A kann man oft sowohl B also auch $\neg B$ folgern – vergleiche die folgende

Fortsetzung des Beispiels

Das Kind sei nicht in den Brunnen gefallen ($\neg A$). Dann gilt: Entweder es ist nicht nass ($\neg B$) oder es ist nass (B) – weil es zum Beispiel in einen Bach gefallen ist.

Zurück zu den Professoren Quaoar und Prin. Quaoar, der als Mathematiker auch fit in Logik ist, hat den Aufenthalt von Klytz so bestimmt: Zunächst geht Quaoar davon aus, dass Klytz tatsächlich in einem der drei Biergärten anzutreffen ist und er sich auch an seine Aussagen (1) und (2) hält. Dann macht er die

(3) *Annahme A*: Klytz befindet sich im *Adler*.

(4) Folglich gilt die Aussage $\neg B$: Klytz ist nicht im *Bären*.

(5) Wegen (2) ist dann die Aussage C: Klytz ist im *Hirschen* aus $\neg B$ herleitbar.

(6) Aus (3) folgt jedoch, dass $\neg C$ gilt: Klytz ist nicht im *Hirschen*.

$$\begin{array}{lrcr} (5) & \neg B & \longrightarrow & C \\ (6) & & & \neg C \\ \hline (7) & & & B \end{array}$$

Damit haben wir die nebenstehende logische Situation, aus der sich mit dem modus tollens ergibt, dass $\neg B$ falsch ist. Es gilt also B: Klytz ist im *Bären*. Dies jedoch widerspricht der Annahme A.

Also ist die Annahme A falsch – es gilt $\neg A$. Dann aber erhält man die Aussage B aus (2): $\neg A \longrightarrow B$.

Quaoar zu Prin: „Ich finde Klytz im *Bären*.“ – Sprach's und ging fröhlich seines Weges.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Ziffernquadrate

Sei $n = N_1 \dots N_k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit den Ziffern $N_1, \dots, N_k \in \{0, \dots, 9\}$. Wir definieren $f(n) = \sum_{i=1}^{k} N_i^2$, also $f(n)$ ist die Summe der Quadrate der Ziffern von n. Sei nun eine Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten die Folge der Zahlen $n_{i+1} = f(n_i)$ für $i = 1, 2, \dots$.

a) Schreibe ein Programm, welches für eine gegebene Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$ die Folge (n_i), mit $i = 1, 2, \dots$, berechnet und ausgibt. (Brich die Folge nach hinreichend vielen Schritten ab. Es kann stets abgebrochen werden, wenn sich die Folge nicht mehr ändert oder ein Folgenelement erneut vorkommt, also es $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$ gibt mit $n_i = n_j$.)

b) Für einige Zahlen enthält die Folge nur endlich viele verschiedene Zahlen, das heißt eine Zahl in der Folge tritt erneut auf (zum Beispiel für $n_1 = 13$ mit 13, 10, 1, 1, ...). Gibt es andere Zahlen, für die diese Folge endlich ist?

c) Hast Du eine Vermutung, wie die Folgen allgemein aussehen?

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 30. November 2020 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden. Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 141/142

In Heft 141 und 142 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Zahlenirrgarten

Wir sind in einem Zahlenirrgarten gefangen. Zu Beginn befinden wir uns auf der Zahl $s \in \mathbb{N}$, der Ausgang ist bei der Zahl $z \in \mathbb{N}$ und wir versuchen, möglichst schnell den Ausgang zu erreichen. Dabei dürfen wir stets nur einen der folgenden Schritte durchführen:

- Multiplizieren der aktuellen Zahl mit 2.
- Dividieren der aktuellen Zahl durch 2, falls sie durch 2 teilbar ist.
- Addieren von 2 zur aktuellen Zahl.

Beispiel: Von $s = 13$ zu $z = 4$ kommt man durch die folgenden Schritte:

$$13 \xrightarrow{*2} 26 \xrightarrow{+2} 28 \xrightarrow{/2} 14 \xrightarrow{+2} 16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{/2} 4$$

$$13 \xrightarrow{*2} 26 \xrightarrow{+2} 28 \xrightarrow{+2} 30 \xrightarrow{+2} 32 \xrightarrow{/2} 16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{/2} 4$$

a) Schreibe ein Programm/eine Funktion, das/die für zwei Zahlen $s, z \in \mathbb{N}$ eine Folge von Schritten ausgibt, um von s nach z zu gelangen (oder eventuell feststellt, dass das nicht möglich ist).

b) Liefert Dein Programm die *minimale* Anzahl von Schritten? Begründe!

c) Erweitere Dein Programm so, dass es für beliebige Zahlen a, b, $c \in N$ mit den folgenden Schritten funktioniert:

- Multiplizieren der aktuellen Zahl mit a.
- Dividieren der aktuellen Zahl durch b, falls sie durch b teilbar ist.
- Addieren von c zur aktuellen Zahl. (FF)

Ergebnisse

Der grundlegende Algorithmus für diese Art von Suche ist die sogenannte *Breitensuche*: Man beginnt bei der Startzahl, wendet auf diese alle erlaubten Operationen an und merkt sich alle Zahlen, die man jetzt erreichen kann. Falls man eine der Zahlen zuvor schon einmal gesehen hat, dann weiß man, dass man früher höchstens genauso viele Operationen gebraucht hatte, man merkt sich also nur neu gefundene Zahlen. Erreicht man irgendwann die Zielzahl, hat man die gesuchte Folge von Operationen gefunden.

In Python bietet es sich an, eine sogenannte Warteschlange oder `deque` zu verwenden: in dieser Liste merkt man sich die neu gefundenen Zahlen und entnimmt sie wieder in der gleichen Reihenfolge, also die Zahlen, die zuerst gefunden wurden, werden auch als erste wieder entnommen.

```
from collections import deque
```

Wir schreiben eine Funktion, die die gesuchte Folge von Operationen für die Zahlen s, z, a, b, c ausgibt (wobei in Aufgabe a) jeweils $a = b = c = 2$ gelten soll).

```
def suche(s, z, a=2, b=2, c=2):
  # in ‘vorgaenger‘ merken wir uns,
  # welche die vorherige Zahl der Folge
  # und die angewandte Operation war
  vorgaenger = dict()
  vorgaenger[s] = "Start"
  queue = deque()
  queue.append(s) # wir beginnen die Suche bei s
```

Solange es noch eine unbesuchte Zahl gibt, entnehmen wir diese der Warteschlange und testen, ob es die gesuchte Zielzahl ist.

```
  while len(queue) > 0:
    x = queue.popleft()
    if x == z:
      break # x ist die gesuchte Zielzahl
```

Anschließend wenden wir jede der drei möglichen Operationen auf x an und testen, ob das Ergebnis eine bisher unbekannte Zahl ist.

```
    # Multiplikation mit a
    y = x*a
    if y not in vorgaenger:
      pred[y] = (x, "*{}".format(a))
      queue.append(y)
    # Addition mit c
    y = x+c
    if y not in vorgaenger:
      pred[y] = (x, "+{}".format(c))
      queue.append(y)
    # Division durch b
    y = x // b # Division ohne Rest
    if y*b == x and y not in vorgaenger:
      pred[y] = (x, "/{}".format(b))
      queue.append(y)
```

Abschließend geben wir die Folge der Zahlen und Operationen aus, wobei wir beginnend bei z die Folge rückwärts durchlaufen, indem wir immer zum jeweiligen Vorgänger gehen bis wir s erreicht haben.

```
  x = z
  while x != s:
    print("{} = {}{}".format(x, pred[x][0], pred[x][1]))
    x = pred[x][0]
  print("Start: {}".format(s))
```

Die Folge von Operationen für $s = 1023$ und $z = 57$ sieht zum Beispiel wie folgt aus:

```
solve(1023, 57)
```

mit der Ausgabe:

```
57 = 114/2
114 = 112+2
112 = 56*2
56 = 28*2
28 = 14*2
14 = 12+2
12 = 10+2
10 = 8+2
8 = 16/2
16 = 32/2
32 = 64/2
```

```
64 = 128/2
128 = 256/2
256 = 512/2
512 = 1024/2
1024 = 2048/2
2048 = 2046+2
2046 = 1023*2
Start: 1023
```

Das dieses Programm tatsächlich die kürzeste Folge von Operationen findet, sieht man induktiv über die verwendete Suchstrategie. Wir zeigen, dass der Algorithmus für jede Zahl, die mit höchstens k Operationen erreichbar ist, auch eine Folge von höchstens k Operationen findet:

- Induktionsanfang: Für die Zahl $z = s$ findet der Algorithmus die Folge mit 0 Operationen.

- Induktionsvoraussetzung: Der Algorithmus findet eine minimale Folge für alle Zahlen, die mit höchstens k Operationen erreichbar sind.

- Induktionsschritt: Sei z eine beliebige Zahl, die mit höchstens $k + 1$ Operationen erreichbar ist. Sei z' ihr Vorgänger in einer minimalen Folge von Operationen, also $z = z' \cdot a$ oder $z = \frac{z'}{b}$ oder $z = z' + c$. Dann ist z' durch eine Folge von maximal k Operationen erreichbar und die Folge wird vom Algorithmus nach Induktionsvoraussetzung auch gefunden. Also findet der Algorithmus auch für z eine Folge von maximal $k + 1$ Operationen, wenn er z' durchprobiert.

Ebenso interessant ist die Frage, ob es denn für beliebige Zahlen s, z stets eine solche Folge gibt. Für $a = b = c = 2$ ist die Antwort ja:

- Sei $k \geq 1$ so groß, dass $z \cdot 2^k > 2s$.

- Da sowohl $2s$ also auch $z \cdot 2^k$ beides gerade Zahlen sind, gibt es sicher eine natürliche Zahl ℓ, so dass $2s + 2\ell = z \cdot 2^k$ ist.

- Also ist $z = \frac{(2s+2\ell)}{2^k}$ von s aus erreichbar (wobei das natürlich keine kürzeste Folge sein muss).

Allerdings gilt das nicht für beliebige Zahlen a, b, c. Zum Beispiel ist für $a = b = 3$ und $c = 2$ die Zahl 2 nicht von 1 aus erreichbar: Beginnt man nämlich bei einer ungeraden Zahl x, so sind $3x$, $\frac{x}{3}$ und $x+2$ ebenfalls ungerade Zahlen. Das bedeutet aber, dass man von einer ungeraden Zahl niemals eine gerade Zahl erreichen kann.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 142

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Quader aus Holzwürfeln

Sarah hat 2020 kleine Holzwürfel der Kantenlänge 1 cm. Aus diesen Holzwürfeln baut sie einen großen Quader, in dem sie alle Holzwürfel verbaut.

a) Wie viele verschiedene Quader kann sie bauen und welche Abmessungen haben diese? (Zwei Quader sind gleich, wenn sich einer der Quader durch Drehen, Kippen oder ähnlichen Operationen aus dem anderen erzeugen lässt.)

b) Welcher unter diesen Quadern hat den kleinsten Oberflächeninhalt und wie groß ist dieser? (MG)

Lösung:

a) Die Primfaktorzerlegung von 2020 ist $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.
Daher kommen folgende Kombinationen für die Seitenlängen des Quaders infrage:

- 4 cm, 5 cm und 101 cm,
- 2 cm, 10 cm und 101 cm,
- 2 cm, 5 cm und 202 cm sowie
- 2 cm, 2 cm und 505 cm.

Werden auch Quader mit Kantenlänge 1 cm zugelassen (was in der Aufgabenstellung nicht ausgeschlossen wurde), so kommen noch folgende Quaderkombinationen hinzu:

- 1 cm, 1 cm und 2020 cm,
- 1 cm, 2 cm und 1010 cm,
- 1 cm, 5 cm und 404 cm,
- 1 cm, 101 cm und 20 cm,
- 1 cm, 4 cm und 505 cm sowie
- 1 cm, 10 cm und 202 cm.

Sarah kann zehn verschiedene Quader bauen.

b) Die Oberflächeninhalte dieser Quader betragen

- Seitenlängen 4 cm, 5 cm und 101 cm $\Longrightarrow O = 1\,858\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 2 cm, 10 cm und 101 cm $\Longrightarrow O = 2\,464\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 2 cm, 5 cm und 202 cm $\Longrightarrow O = 2\,848\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 2 cm, 2 cm und 505 cm $\Longrightarrow O = 4\,048\,\text{cm}^2$;

- Seitenlängen 1 cm, 1 cm und 2020 cm $\Longrightarrow O = 8\,082\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 1 cm, 2 cm und 1010 cm $\Longrightarrow O = 6\,064\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 1 cm, 5 cm und 404 cm $\Longrightarrow O = 4\,858\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 1 cm, 101 cm und 20 cm $\Longrightarrow O = 4\,282\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 1 cm, 4 cm und 505 cm $\Longrightarrow O = 5\,058\,\text{cm}^2$,
- Seitenlängen 1 cm, 10 cm und 202 cm $\Longrightarrow O = 4\,464\,\text{cm}^2$.

Den kleinsten Oberflächeninhalt hat also der Quader mit den Kantenlängen 4 cm, 5 cm und 101 cm.

II. Quersumme und -produkt

a) Gib die kleinste Zahl an, deren Quersumme 2020 ist.

b) Begründe: Warum gibt es keine Zahl, deren Querprodukt (also das Produkt aller ihrer Ziffern) 2020 ist. (MG)

Lösung:

a) Es ist $2020 = 224 \cdot 9 + 4$. Die gesuchte Zahl beginnt also mit einer Ziffer 4 gefolgt von 224 Ziffern 9, also $4\,\underbrace{999\ldots9}_{224\text{ Stellen}}$.

b) Die Zahl 2020 hat die Primfaktorzerlegung $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Daher müsste eine Zahl mit Querprodukt 2020 die Ziffern 2, 5 und 101 (oder Produkte dieser Zahlen) haben. Aber 101 ist keine Ziffer.

III. Ein ganz besonderes Datum

Karin schaut auf den Kalender und stutzt: „Heute ist Sonntag, der 02.02.2020. Das ist ja ein ganz besonderes Datum." – Warum? Wenn Du das Datum rückwärts liest, dann kannst Du wieder die selbe Ziffernfolge lesen. Ein solches Datum heißt *palindromisch*. Und 02.02.2020 war sowohl in unserer Schreibweise (Tag, Monat dann Jahreszahl) palindromisch als auch in anderen Schreibweisen: Zum Beispiel im amerikanischen Englisch wird zuerst der Monat, dann der Tag und dann das Jahr geschrieben, in vielen asiatischen Ländern und Kanada wird das Datum in der Reihenfolge Jahr, Monat, Tag geschrieben.

Daten, die in allen diesen Schreibweisen palindromisch sind, gibt es wirklich nur ganz selten.

a) Wann war der letzte in allen drei Schreibweisen palindromische Tag? Wie alt wäre jemand, der damals geboren wurde am jetzigen palindromischen Tag?

b) Wann wird der nächste in allen drei Schreibweisen palindromische Tag sein? Wie alt wird jemand, der am jetzigen palindromischen Tag geboren wurde, dann sein?

c) Welches war das letzte und welches wird das nächste palindromische Datum sein, wenn nur unsere Schreibweise berücksichtigt wird? (MG)

Lösung:

a) Das letzte solche palindromische Datum war der 11.11.1111 (dieser Samstag war zudem ein sehr närrisches Datum). Wer damals geboren wurde, wäre jetzt 908 Jahre alt.
b) Der nächste solche palindromische Tag wird am 12.12.2121 sein (ein Freitag). Wer jetzt geboren wurde, wird dann 101 Jahr alt sein – nicht ganz unmöglich.
c) In unserer Schreibweise war das letzte palindromische Datum der 21.02.2012 und der nächste palindromische Tag wird schon der 12.02.2021 sein.

IV. Sssenk ju for trewweling wiss Deutsche Bahn

Zum Jahresbeginn wurde die Mehrwertsteuer für Bahnfahrkarten im Fernverkehr von 19 % auf den reduzierten Mehrwertsteuersatz gesenkt, der nun von der Regierung auf 5 % herabgesetzt wurde. Herr Richard freut sich: „Das ist ja super, dann sind die Fahrkarten jetzt um 14 % günstiger!“

a) Begründe, dass Herr Richard sich irrt. (Gehe davon aus, dass der Grundpreis der Fahrkarte ohne Mehrwertsteuer sich nicht geändert hat.)
b) Die Ersparnis kann sich ändern, wenn sich der Grundpreis der Fahrkarte ändert. Um wie viel Prozent wurde der Preis der Fahrkarte erhöht, wenn sie jetzt mit dem niedrigeren Mehrwertsteuersatz genau so viel kostet wie vorher?
c) Ziel der Mehrwertsteuersenkung ist es, dass mehr Menschen mit der Bahn fahren. Um wie viel Prozent müssten die Einnahmen der Bahn bei Fernverkehrsfahrten (bezogen auf die Grundpreise) zunehmen, damit die Mehrwertsteuereinnahmen des Staates trotz der Senkung gleich bleiben? (MG)

Lösung:

a) Angenommen, der Grundpreis (ohne Steuern) in Euro der Fahrkarte betrage p. Dann hat die Fahrkarte bisher $P_{\text{alt}} = 1{,}19p$ gekostet. Der neue Preis beträgt $P_{\text{neu}} = 1{,}05p$. Damit kostet die Karte jetzt noch $\frac{P_{\text{neu}}}{P_{\text{alt}}} \cdot 100\,\% = \frac{1{,}05p}{1{,}19p} \cdot 100\,\% \approx 0{,}882 \cdot 100\,\% = 88{,}2\,\%$ des bisherigen Preises, die Karte ist also um etwa $100\,\% - 88{,}2\,\% = 11{,}8\,\%$ günstiger geworden.

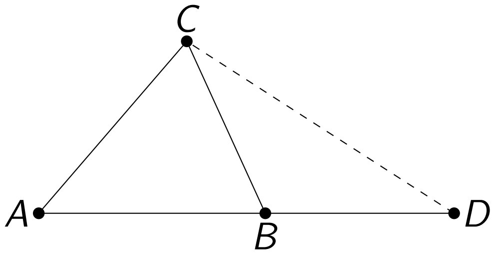
   Alternative: Statt mit der allgemeinen Rechnung kann auch ein bestimmter Preis angenommen werden. Beträgt der Grundpreis für die Fahrkarte beispielsweise 100 €, so kostete die Karte bisher 119 €, nun sind 105 € zu bezahlen. Die Reduzierung um 14 € entspricht einer Ersparnis von $\frac{14\,€}{119\,€} \cdot 100\,\% \approx 11{,}8\,\%$.

   Bemerkung: Der Fehler von Herrn Richard resultiert daraus, dass sich die Prozentsätze auf verschiedene Grundwerte beziehen.

b) Es sei wieder p der Grundpreis in Euro der Fahrkarte. Dieser wird um den Faktor x erhöht. Damit gilt, wenn alter und neuer Preis gleich sind $p \cdot 1{,}19 = p \cdot x \cdot 1{,}05$. Daraus folgt für die Erhöhung $x = \frac{p \cdot 1{,}19}{p \cdot 1{,}05} \approx 1{,}133$. Also müsste der Grundpreis um 13,3 % erhöht werden.

c) Die Bahn habe bisher Fahrkarten im Gesamtwert (inkl. Mehrwertsteuern) von insgesamt G_{alt} verkauft, die neuen zu erzielenden Gesamteinnahmen seien $G_{\text{neu}} = x \cdot G_{\text{alt}}$. Dann hat der Staat bisher $0{,}19 G_{\text{alt}}$ Mehrwertsteuereinnahmen verbuchen können. Die neuen Einnahmen von $0{,}05 G_{\text{neu}} = 0{,}05 \cdot x \cdot G_{\text{alt}}$, sollen gleich hoch sein, also $0{,}19 G_{\text{alt}} = 0{,}05 \cdot x \cdot G_{\text{alt}}$. Also folgt für die Zunahme $x = \frac{0{,}19 G_{\text{alt}}}{0{,}05 G_{\text{alt}}} = 3{,}8$.
Die Einnahmen müssen also um 280 % zunehmen. (Wenn wir davon ausgehen, dass jeder Fahrgast im Schnitt gleich viel Geld für die Fahrkarten bezahlt, dann müssten also auch die Fahrgastzahlen um 280 % zunehmen...)

V. Zwei Winkel



In der Figur gelte $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ und $|\overline{BC}| = |\overline{BD}|$.
Zeige: Dann ist $\sphericalangle ACD = 3 \cdot \sphericalangle CDA$.

(H.F.)

Lösung:

Es sei $\sphericalangle CDB = \delta$. Dann ist wegen $|\overline{BC}| = |\overline{BD}|$ auch $\sphericalangle BCD = \delta$.
Für $\triangle BDC$ ist $\sphericalangle CBA$ ein Außenwinkel, sodass $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CDB + \sphericalangle BCD = \delta + \delta = 2\delta$ ist.
Wegen $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ ist dann $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBA = 2\delta$.
Daraus folgt: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCD = 2\delta + \delta = 3 \cdot \sphericalangle CDB$.

VI. Keine Null

Zeige, dass sich die Zahl 8 000 000 auf genau eine Weise als Produkt zweier Zahlen schreiben lässt, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 0 nicht vorkommt!

(WJB)

Lösung:

Die einzigen Primfaktoren von 8000000 sind 2 und 5. Jede Zahl, die beide Primfaktoren mindestens einmal enthält, hat die letzte Ziffer 0. Also kommt nur die Zerlegung $8000000 = 2^9 \cdot 5^6$, bei der einer der beiden Faktoren genau die Primfaktoren 2, der zweite Faktor genau die Primfaktoren 5 enthält, in Frage. Tatsächlich enthalten $2^9 = 512$ und $5^6 = 15625$ nicht die Ziffer 0.

VII. Was in der Zeitung steht

In einer Zeitschrift (Das Stadtjournal, Ausgabe 2/2016, S. 5f.) stand:

> Das mittlere Alter der aktiven Hausärzte [...] beträgt 56 Jahre. Dies bedeutet, dass die Hälfte der praktizierenden Hausärzteschaft älter als 55 Jahre ist[...].

Was ist von dieser Aussage zu halten, ist sie korrekt? Begründe. (MG)

Lösung:

In der Regel wird das „mittlere Alter" mit dem arithmetischen Mittel angegeben. Dann ist der gezogene Schluss im Allgemeinen – wie er hier ohne die Rohdaten gemacht wurde – falsch. Dazu ein Beispiel mit fünf Ärzten: Angenommen, diese wären 54, 54, 54 54 und 64 Jahre alt. Im arithmetischen Mittel sind sie $\frac{54+54+54+54+64}{5} = 56$ Jahre alt, allerdings ist tatsächlich nur einer von ihnen älter als 55 Jahre.

Wird der Median als Mittelwert gewählt, dann wäre die Folgerung tatsächlich korrekt. Der Median gibt also die Grenze zwischen der Hälfte der kleineren Werte (hier also die Hälfte der jüngeren Ärzte) und der größeren (hier der älteren) Hälfte an. Also wären wirklich die Hälfte aller Ärzte 56 Jahre oder älter, also auch älter als 55 Jahre.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Ein ganz besonderes Datum (Wie-selten-Version)

Im Monoid-Heft 142 stellten wir Euch eine Aufgabe (Mathespielerei III, Seite 21) zu palindromischen Daten. Der 02.02.2020 war ein ganz besonderes Datum, da es sowohl in unserer Schreibweise (Tag, Monat dann Jahreszahl) als auch in anderen Schreibweisen, nämlich im amerikanischen Englisch (zuerst der Monat, dann der Tag und dann das Jahr) und der Schreibweise, die in vielen asiatischen Ländern und Kanada genutzt wird (mit der Reihenfolge Jahr, Monat, Tag) jeweils palindromisch ist.

Karin stellt fest: „Solche Daten sind ja sehr selten. Erst in 121 Jahren wird es so ein Datum wieder geben. Doch wie selten sie wohl wirklich sind?"

Bestimme, wie viele solcher Daten, die in allen drei Schreibweisen palindromisch sind, es mit vierstelligen Jahreszahlen überhaupt gibt.

Bemerkung: Führende Ziffern 0 bei der Jahreszahl sind nicht zulässig, bei Tag und Monat allerdings doch. (MG)

II. Korrespondierende Addition und Subtraktion

Karin rechnet mit Brüchen und macht eine Entdeckung:

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, aber auch $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$,

oder

$\frac{21}{51} = \frac{7}{17}$, aber auch $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$.

Es gilt sogar

$x^2 - 2x = \frac{8x+4}{23}$ und $\frac{x^2-2x+1}{1} = \frac{8x+4+23}{23}$.

Karin stellt also fest: Sind zwei Brüche gleich, so bleiben sie auch gleich,

a) wenn man in beiden Brüchen jeweils zum Zähler den Nenner addiert (bzw. subtrahiert),

b) wenn man in beiden Brüchen jeweils zum Nenner den Zähler addiert (bzw. subtrahiert).

Zeige allgemein, dass diese Entdeckung richtig ist. (nach WJB)

III. Konstruktion des Drehzentrums

ABC und $A'B'C'$ seien zwei kongruente Dreiecke. Diese kann man, wenn die Dreiecke nicht parallelverschoben sind, durch eine Drehung ineinander überführen. Wie konstruiert man den Drehmittelpunkt M? (WJB)

IV. Eine Summe von Quadratzahlen

Weise nach: Die Summe der Quadrate von fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist keine Quadratzahl.

Tipp: Für jede natürliche Zahl n gilt $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2+2)$.

(H.F.)

V. Drei Winkel

Im Dreieck ABC sei AE mit $E \notin AB$ eine Verlängerung von AB und CD mit $D \in AB$ sei die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$.

Begründe: $\sphericalangle DAC + \sphericalangle EBC = 2\sphericalangle BDC$. (H.F.)

VI. Wie viele Primzahlen?

Wie viele Primzahlen kann man erhalten, indem man von einer Quadratzahl 1 subtrahiert? (WJB)

VII. Eine lustige Aufgabe mit einem lustigen Term

Bestimme den Wert des Termes

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot ... \cdot (x-z),$$

indem Du so weit wie möglich vereinfachst. (MG)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1274: Endziffern von Potenzen

a) Berechne die letzte Ziffer der Summe

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2020}.$$

b) Berechne die letzten vier Ziffern der Zahl 2^{2020}.

(MG)

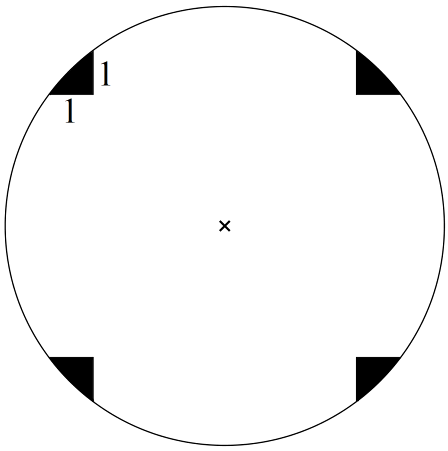
Aufgabe 1275: Ansteckung beim Tanzen

Am Montag treffen sich 100 Personen, darunter Kim und Maria, zu einer Tanzveranstaltung. Maria kommt mit einer ansteckenden Krankheit. Bei der Tanzveranstaltung gibt es regen Austausch und für jede der 99 anderen Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit sich anzustecken 10 %. Wir nehmen an, dass die Ansteckungen unabhängig voneinander erfolgen. Eine am Montag infizierte Person kann am Montag selber die Krankheit noch nicht weitergeben. Bei einer zweiten Tanzveranstaltung am Freitag (mit denselben 100 Personen) sind bereits alle infizierten Personen auch selber ansteckend. Wir nehmen an, dass jeder Kontakt von einer ansteckenden Person mit einer noch nicht infizierten Person wieder mit Wahrscheinlichkeit 10 % zu einer Infektion führt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Kim nach der Veranstaltung am Freitag infiziert? (AKI)

Hinweis: Wir nehmen vereinfachend an, dass sich niemand der Tänzerinnen und Tänzer von Montag bis Freitag bei anderen Gelegenheiten ansteckt, sondern dass die Ansteckungen nur beim Tanztraining erfolgen.

Aufgabe 1276: Kapellenneubau



Für eine Kapelle hat sich Architekt Baugern eine kreisförmige Grundfläche mit vier ausgesparten „Ecken" ausgedacht, sodass mit etwas Phantasie ein Kreuz zu erkennen ist.

Wie groß ist die Fläche der Kapelle, wenn der Kreis einen Durchmesser von 10 m hat und die beiden Seiten, die eine „Ecke" bilden, je 1 m lang sind?

Beachte: Die Ecken sind keine (rechtwinkligen) Dreiecke. $A = \pi \cdot 5^2 - 2$ ist eine Annäherung, gesucht ist aber der exakte Wert.

(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 1277: Niemals ein Teiler?

Warum ist $1000^n + 1$, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, niemals ein Teiler von $2020^n - 1$?

Aufgabe 1278: Pflastersteinpflasterung

Am Martin-Mettler-Gymnasium in Hausdorf soll der Unterstufen-Schulhof neu gepflastert werden. Der Schulhof ist rechteckig und es sollen rechteckige Pflastersteinen der Größe $75\,\text{cm} \times 50\,\text{cm}$ verlegt werden. Die Breite des Platzes ist um $40\,\%$ kleiner als die Länge. Die Bauarbeiter sind nach ihrer Arbeit erschöpft, immerhin haben sie 4000 Platten verlegt.

Wie lang und breit ist der Schulhof? (MG, nach einer Idee von WJB)

Aufgabe 1279: Zahlen gesucht

Finde ganze Zahlen a und b mit $a + b = 81$ derart, dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ bis auf einen Fehler von weniger als 0,05 gleich 1,3 ist. (WJB)

Aufgabe 1280: Minimalwert eines Termes

Bestimme ohne Differentialrechnung den minimalen Wert des Terms

$$T = \frac{1 + 9x^4}{x^2}.$$

(HF)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 142

Klassen 9–13

Aufgabe 1267: Würfel aus Holzwürfeln

Sarah hat 2020 kleine Holzwürfel der Kantenlänge $1\,\text{cm}$.

a) Sarah baut aus diesen Holzwürfeln einen möglichst großen Würfel, dabei bleiben einige kleine Holzwürfel übrig.
   Wie groß ist der große Würfel?

b) Nachdem Sarah diesen Würfel gebaut hat, bleiben noch kleine Holzwürfel übrig. Aus diesen übrig gebliebenen Holzwürfeln baut sie wiederum einen möglichst großen Würfel, aus den dann übrig gebliebenen wieder einen möglichst großen und so weiter, bis sie alle Würfel verbaut hat. Evtl. sind die letzen Würfel solche der Kantenlänge $1\,\text{cm}$.
   Wie viele Würfel hat sie letztendlich gebaut und welche Größe haben diese? (MG)

Lösung:

a) Da $12 = \sqrt[3]{1728} < \sqrt[3]{2020} < \sqrt[3]{2197} = 13$ kann Sarah jeweils 12 Holzwürfel neben-, hinter- und übereinander setzen. Der größte Würfel, den Sie bauen kann, hat also die Kantenlänge $12\,\text{cm}$ (und somit ein Volumen von $1728\,\text{cm}^3$).

b) Nachdem Sie den Würfel gebaut hat, sind noch $2020-1728 = 292$ Holzwürfel übrig.
Nun ist wiederum $6 = \sqrt[3]{216} < \sqrt[3]{292} < \sqrt[3]{343} = 7$ und somit hat der nächst größte Würfel eine Kantenlänge von 6 cm.
Danach bleiben $292 - 216 = 76$ Würfel übrig und es ist $4 = \sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{76} < \sqrt[3]{125} = 5$, sodass der nächste zusammengesetzte Würfel eine Kantenlänge von 4 cm hat.
Es verbleiben nun $76 - 64 = 12$ Holzwürfel, aus denen sich wegen $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{27} = 9$ ein Würfel der Kantenlänge 2 cm bauen lässt.
Abschließend sind noch $12 - 8 = 4$ Holzwürfel übrig, die sich nur noch jeweils alleine als Würfel der Kantenlänge 1 cm aufstellen lassen.
Also hat Sarah insgesamt acht Würfel gebaut, jeweils einen mit den Kantenlängen 12 cm, 6 cm, 4 cm und 2 cm sowie vier kleine Würfel der Kantenlänge 1 cm.

Aufgabe 1268: Ganzzahlige Lösungen gesucht

Man bestimme alle ganzen Zahlen x und y, für die gilt:
$x + y = x \cdot y$. (H.F.)

Lösung:

Für die Aussage „m ist ein Teiler von n“ schreibt man kurz $m|n$.
Aus $x + y = x \cdot y$ folgt $x|(x + y)$, sodass auch $x|y$ gilt; weiter ist $y|(x + y)$, sodass auch $y|x$ ist. Weil also $x|y$ und $y|x$ ist, gilt $y = x$ oder $y = -x$.
Im Fall $y = x$ ergibt sich aus der Bedingung der Aufgabe $2x = x^2$, sodass entweder $x = 0$, also auch $y = 0$ oder $x = 2$ und dann $y = 2$.
Im Fall $y = -x$ erhält man aus der Bedingung der Aufgabe $0 = x \cdot y$. Also ist $x = 0$ und $y = 0$.
Es gibt also nur die beiden Lösungen $x = y = 0$ und $x = y = 2$.

Aufgabe 1269: Teilbarkeit durch 7

Es sei $abcde$ die Dezimaldarstellung einer fünfziffrigen natürlichen Zahl.
Begründe dann die Regel: Wenn $abcde$ durch 7 teilbar ist, dann ist auch $abcd-2\cdot e$ durch 7 teilbar. (H.F.)

Lösung:

Es sei $A = abcde$ und $B = abcd - 2 \cdot e$ und $C = abcd$. Dann ist $A = 10C + e$ und $B = C - 2 \cdot e$. Daraus folgt $2A + B = 20C + 2e + C - 2e = 21C$.
Es sei nun $A = 7 \cdot D$ – nach Voraussetzung ist A durch 7 teilbar. Dann ist B durch 7 teilbar wegen $B = 21C - 2A = 21C - 14D = 7(3C - 2D)$.

Aufgabe 1270: Désirées verlorener Dominostein

Désirée hat ein Schachbrett und 32 Dominosteine von der Form und Größe zweier benachbarter Felder des Schachbretts. Sie kann damit das Schachbrett auf viele verschiedene Arten bedecken. Als sie eines Tages einen Dominostein verliert, bemalt sie zwei Felder rot und versucht, die verbleibenden Felder mit den 31 Dominosteinen zu bedecken. Begründe:

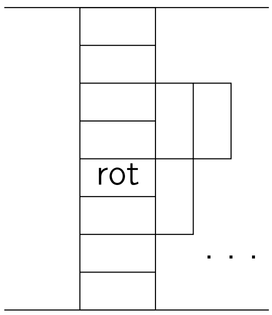
a) Liegen die beiden roten Felder direkt nebeneinander, so hat sie Erfolg.

b) Hatten die beiden Felder ursprünglich die gleiche Farbe, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

c) Hatten die beiden roten Felder ursprünglich nicht die gleiche Farbe, so lässt sich das Schachbrett ohne diese beiden Felder mit den 31 Dominos überdecken. (WJB)

Lösung:

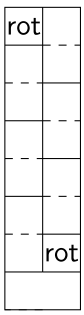
a) Liegen die beiden roten Felder waagerecht nebeneinander, so bedeckt man zunächst den sie enthaltenden senkrechten Streifen der Breite 2 mit sieben Steinen. Danach den Rest des Bretts mit senkrecht gelegten Dominosteinen.



Liegen die roten Felder senkrecht nebeneinander, so drehen wir zunächst das Schachbrett um 90°.

b) Jeder Dominostein bedeckt ein schwarzes und ein weißes Feld. Wären die verbotenen Felder gleichfarbig, so scheitern wir daran, dass es nicht gleich viele schwarze wie weiße Felder zu bedecken gibt.

c) Liegen die verbotenen Felder in unmittelbar benachbarten senkrechten Reihen, so ergibt sich folgendes Bild:



Ergänze zunächst den Streifen der Breite 2 durch sechs senkrecht gelegte Dominosteine und einen waagrecht gelegten Dominostein.
Ist der Abstand der senkrechten Reihen 2, 4 oder 6, so schließt man die Lücke durch weitere Streifen der Breite 2.

Ist der Abstand der senkrechten Reihen 1, 3 oder 5, so ist der Abstand der waagrechten Reihen 0, 2, 4 oder 6 und wir haben nach Drehung des Schachbretts die vorher betrachtete Situation.

Aufgabe 1271: Benachbarte Lottozahlen

Beim Lotto „6 aus 49" sind seit Jahresbeginn 2019 bei etwa der Hälfte der Ziehungen benachbarte Zahlen aufgetreten, so zum Beispiel am 09.01.2019 mit den Zahlen

7, **8**, 14, 22, 29, 44.

Die 7 und die 8 sind benachbart.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass bei einer Lottoziehung eine oder mehr benachbarte Zahlen auftreten.

b) Um die Lottogeräte zu überprüfen, soll die tatsächliche relative Häufigkeit h von Ziehungen mit Zahlenpaaren untersucht werden, etwa in den 522 Ziehungen der Jahre 2014 bis 2018. Liegt h weit von p entfernt, so muss davon ausgegangen werden, dass die Lottomaschine nicht korrekt arbeitet.
Bei den 522 Ziehungen der Jahre 2014 bis 2018 traten bei 261 Ziehungen benachbarte Zahlen auf. Kann man auf dem Konfidenzniveau 5% behaupten, dass die Lottomaschine nicht korrekt arbeitet?

(AKI)

Lösung:

a) Beim Lotto „6 aus 49" tritt jede geordnete Kombination von Zahlen

$$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 \leq 49.$$

mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Es gibt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten dafür. Wenn es keine benachbarten Zahlen gibt, so gilt: $1 \leq n_1$, $n_1 < n_2 - 1$, $n_2 < n_3 - 1$, $n_3 < n_4 - 1$, $n_4 < n_5 - 1$, $n_5 < n_6 - 1$, $n_6 \leq 49$.
Daraus folgt: $1 \leq n_1 < n_2 - 1 < n_3 - 2 < n_4 - 3 < n_5 - 4 < n_6 - 5 \leq 44$. Wir nennen nun $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2 - 1$, $m_3 = n_3 - 2$, $m_4 = n_4 - 3$, $m_5 = n_5 - 4$, $m_6 = n_6 - 5$.
Das heißt, jeder Kombination von $n_1, ..., n_6$ ohne Zahlennachbarn entspricht genau eine Kombination

$$1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5 < m_6 \leq 44.$$

Es gibt $\binom{44}{6}$ solche Möglichkeiten. Also ist

$$1 - p = \frac{7059052}{13983816} \approx 0{,}5048.$$

Entsprechend ist $p \approx 0{,}4952$.

b) Die Nullhypothese lautet: Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit p' bei der Lottomaschine beträgt 49,52 %. Die Alternative lautet: Das ist falsch. Für $n = 522$ Ziehungen ist die Anzahl X der Ziehungen mit benachbarten Zahlen binomialverteilt mit Parametern n und p'. Durch Normalapproximation ist $T := \frac{(X - p' \cdot n)}{\sqrt{p'(1-p') \cdot n}}$ unter der Nullhypothese standardnormalverteilt. Die Nullhypothese wird also verworfen, wenn $|T| > z_{0{,}975}$ ist, wobei $z_{0{,}975} = 1{,}96$ das 97,5 %-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Auflösen ergibt: Die Nullhypothese wird verworfen, falls

$$X > 0{,}4952 \cdot 522 + \sqrt{0{,}4952 \cdot (1 - 0{,}4952) \cdot 522} \cdot 1{,}96 = 280{,}9$$

ist oder

$$X < 0{,}4952 \cdot 522 - \sqrt{0{,}4952 \cdot (1 - 0{,}4952) \cdot 522} \cdot 1{,}96 = 236{,}1.$$

Die tatsächlichen Ziehungen zeigen aber $X = 261$. Die Nullhypothese wird also nicht verworfen, das heißt man kann auf dem Konfidenzniveau 5 % nicht behaupten, dass die Lottomaschine nicht korrekt arbeitet.

Aufgabe 1272: Eine Rechenregel

Für jede reelle Zahl a gilt $a \cdot 0 = 0$. Kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Lösung:

Für beliebige reelle Zahlen a, b und c gilt das Distributivgesetz für die Multiplikation und die Addition:

(1) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Daraus folgt das Distributivgesetz (2) für die Multiplikation und die Subtraktion. Mit (1) ist nämlich $a \cdot (b - c) + a \cdot c = a(b - c + c) = a \cdot b$, so dass

(2) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Setzt man nun in Gleichung (2): $b = c = a$, so folgt $a \cdot (a - a) = a \cdot a - a \cdot a = 0$. Wegen $a \cdot (a - a) = a \cdot 0$ gilt also $a \cdot 0 = 0$.

Aufgabe 1273: Untersuchung einer Reihenentwicklung

Sei n eine natürliche Zahl. Betrachte die Reihenentwicklung

$$\left(x^3 + \tfrac{1}{x}\right)^n$$
$$= a_{-n}x^{-n} + a_{-n+1}x^{-n+1} + \ldots + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{3n} x^{3n}.$$

Die Zahlen a_{-n}, a_{-n+1}, ... bekommt man, indem man die linke Seite ausmultipliziert. Für welche $k = 0, 1, \ldots, 3n$ ist $a_k \neq 0$? (WJB)

Lösung:
Wir schreiben

$$\left(x^3 + \tfrac{1}{x}\right)^n = (x^{-1}(x^4 + 1))^n = x^{-n}\,(x^4 + 1)^n.$$

Nun ist

$$(x^4 + 1)^n = b_0 + b_4\,x^4 + b_8\,x^8 + \dots\ b_{4n}\,x^{4n}$$

für gewisse Zahlen $b_0, b_4, \dots, b_{4n} > 0$. Tatsächlich ist $b_{4k} = \binom{n}{k}$, aber das spielt hier keine Rolle. Also ist

$$x^{-n}(x^4 + 1)^n = b_0 x^{-n} + b_4\,x^{-n+4} + b_8\,x^{-n+8} + \dots\ b_{4n}\,x^{3n}.$$

Das heißt, es gilt $a_{-n} = b_0 > 0$, $a_{-n+4} = b_4 > 0$ und so fort bis $a_{3n} = b_{4n} > 0$. Für alle k, die nicht von der Gestalt $4l - n$ für ein $l = 0, \dots, n$ sind, ist $a_k = 0$.

(AKl)

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik

Martin Mattheis

Albrecht Beutespacher: Null, unendlich und die wilde 13

Jeder von uns hat sicher eine Lieblingszahl. Man kann trefflich darüber streiten, welche Zahl man darüber hinaus persönlich am wichtigsten findet, zum Beispiel die Zahlen des eigenen Geburtsdatums, oder des Datums, an dem man seine große Liebe kennengelernt hat. Allerdings gibt es auch eine ganze Menge Zahlen, bei denen man sich sehr schnell auf eine große Bedeutung einigen kann.

Jeder aufgeführten Zahl wurde ein eigenes Kapitel gewidmet, in dem Mathematisches, Historisches und Literarisches – aber auch Hintergründiges – zur entsprechenden Zahl beschrieben und erläutert wird. Die Kapitel bauen nicht zwangsläufig aufeinander auf und können unabhängig voneinander gelesen werden, so dass man das Buch nicht am Stück lesen muss. Ein kapitelweises Lesen hat auch den Vorteil, dass die erkannten Zusammenhänge sich beim Leser erst einmal setzen können und man bewusst oder unbewusst darüber nachdenken kann, was einem selbst nach den gelesenen Anregungen noch zur entsprechenden Zahl einfällt.

Wer sind nun aber die Protagonisten des Buches? Außer den Zahlen von 0 bis 14 trifft man auf alte Bekannte aus den natürlichen Zahlen, wie die 17 des Gaußschen 17-Ecks, die 21 als Fibonacci-Zahl, die beste Zahl oder die größte bekannte Fermat-Primzahl. Aber auch für den Kenner wird darüber hinaus noch mehr geboten: Wer weiß schon, wie viele Fische Petrus nach dem Evangelium des Johannes 21, 11 aus dem See Genezareth zog, was die 1679 mit eventuellem extraterrestrischem Leben zu tun haben könnte oder wer die Kommazahlen erfunden hat?

Die meisten betrachteten Zahlen sind natürliche Zahlen, es gibt aber auch noch so manche altbekannte irrationale: So tummeln sich in den letzten Kapiteln $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, φ, π, e und ein Exkurs ins Imaginäre zur Zahl i. Obwohl es sich dabei nicht wirklich um eine Zahl handelt, bildet den Abschluss dann ein Kapitel über die Unendlichkeit. Neben den Zahlen selbst und deren Einordnung in spannende mathematische Fragestellungen wird jeweils auch die Geschichte der Entdeckung Ihrer Besonderheit und der Entdecker beleuchtet.

Fazit: Dem Gründer des Mathematikums ist wieder einmal ein Buch gelungen, in dem man gerne blättert und das auf jeden Fall in einer Schulbibliothek in die mathematische Lese-Ecke gehört.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
beutespacher, Albrecht: Null, unendlich und die wilde 13. Die wichtigsten Zahlen und ihre Geschichten; C. H. Beck, 2020, ISBN 978-3-406-74967-4, gebunden 207 Seiten.

Art des Buches:	Sachbuch
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich bis verständlich (je nach Kapitel)
Altersempfehlung:	ab 11 Jahren

Mathematische Entdeckungen

Ein Kennenlernspiel

Eine Gruppe von n Studierenden verabredet folgendes Kennenlernspiel: Sie teilen sich in Vierergruppen auf, die sich jeweils zu einem Dinner treffen; in jeder Gruppe bereitet einer eine Vorspeise, einer ein Hauptgericht, einer eine Beilage und einer einen Nachtisch vor. Dies wiederholt sich jede Woche. Die Einteilung soll so sein, dass jeder aus der Gruppe jeden anderen genau einmal trifft.

a) für welche n ist dies möglich?

b) wie viele Wochen dauert dann das Spiel?

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 30. November 2020 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

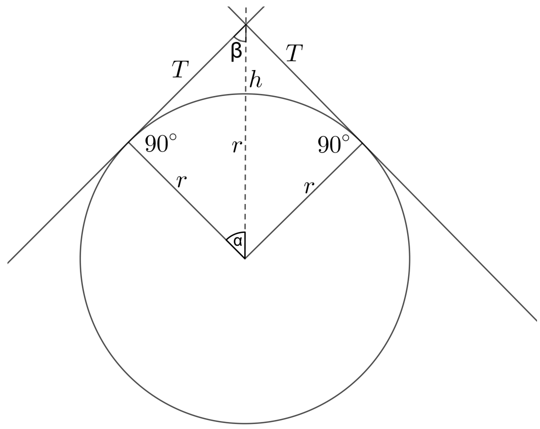
Lösung der Aufgabe aus Heft 140

In Heft 140 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Der Erdumfang mal anders

Wird ein um einen Kreis mit $U_0 = 2\pi r_0$ gespanntes Band um 1 m verlängert, so ist der sich daraus ergebende Radius des größeren Kreises unabhängig von der Größe von r_0 bekanntermaßen $r_0 + 0{,}159$ m. Und dies unabhängig von der Größe von r_0.

Nun die *veränderte Fragestellung*: Welche Länge muss ein Stock haben, mit dessen Hilfe das um einen Meter verlängerte Band senkrecht vom Kreis abgespannt wird? In der Skizze rechts ist der Stock durch die gestrichelte Linie h dargestellt. Durch die Spannung bilden sich im oberen Bereich des verlängerten Bandes zwei Tangenten T an den Kreis.

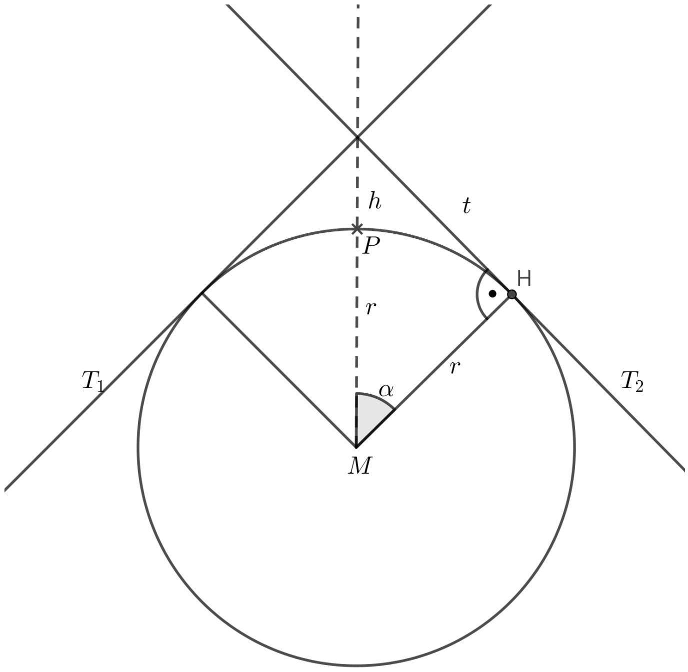


Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Philipp Lörcks (Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Trier, Klasse 8), Clemens Zabel (Theresianum, Mainz, Klasse 11) und Sönke Schneider (Schloss Hansenberg, Geisenheim, Klasse 11).

Philipp hat eine Gleichung in h und r gefunden, also einen funktionalen Zusammenhang, der sich aber nicht nach h auflösen ließ, also als Funktion $h(r)$.

Ganz ähnlich geht es Clemens. Er geht noch einen Schritt weiter: Zuerst versammelt er die Ausdrücke in h und r auf der rechten Seite der Gleichung, sodass links 0 steht. Dann nähert er sich der Nullstelle im positiven h-Bereich per Intervallhalbierungsverfahren an.



Sönke zerlegt die Aufgabe in zwei Teile: Gesucht ist ja eine Funktion h für die Streckenlänge in Abhängigkeit von der Variablen r (Kreisradius, Beschriftungen siehe Bild). Gelingt es nun, mit der Hilfsvariablen α eine Funktion $h(\alpha)$ sowie eine Funktion $\alpha(r)$ zu finden, so stellt die Komposition $h \circ \alpha$ die gewünschte Funktion $h(r)$ dar.

1. Teil: Da der Umweg über die Stockspitze 1 m länger sein soll als der Kreisbogen zwischen den Tangentenberührungspunkten, gilt

$$2t = 1 + 2r\alpha.$$

Zusammen mit $\tan(\alpha) = \frac{t}{r}$ ergibt sich

$$r(\alpha) = \frac{1}{2(\tan(\alpha) - \alpha)}.$$

Was wir bräuchten, ist die Umkehrfunktion $\alpha(r)$. (Wer mit Umkehrfunktionen nicht vertraut ist, dem hilft vielleicht folgendes Beispiel: Die Umkehrfunktion zu $y(x) = x^2$ ist $x(y) = \sqrt{y}$.)

Leider gibt es hierzu keine geschlossene Formel, aber gute Näherungsverfahren.

2. Teil: Man liest ab $\cos(\alpha) = \frac{r}{r+h}$ und kommt durch Umformung auf

$$h = r \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tan(\alpha) - \alpha} \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - 1\right).$$

Dies ist die gesuchte Funktion $h(\alpha)$.

Nimmt man für r den Erdradius, so ergibt sich näherungsweise $\alpha = \frac{1}{200}^{\circ}$ und $h = 120\,\text{m}$, siehe Aufgabe 13 auf der Homepage von Dr. Werner Brefeld

`http://www.brefeld.homepage.t-online.de/seil.html`.

Rechtwinklige, spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke
Eine Exkursion in die elementare Geometrie

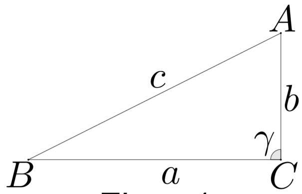
von Hartwig Fuchs

Eine Aussage der Geometrie, die jeder Schüler im Mathematikunterricht nicht nur kennenlernt, sondern auch durch viele Beispiele und Aufgaben von ihrer großen Bedeutung erfährt, ist der *Satz von Pythagoras*. Dagegen finden seine beiden nächsten Verwandten kaum eine oder auch überhaupt keine Erwähnung.
Diese eventuelle Lücke soll nun hier geschlossen werden. Dazu sei im Folgenden ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und dem Innenwinkel γ, welcher der Seite AB gegenüber liegt.

Der Satz von Pythagoras

Bereits vor der frühen griechischen Mathematik ist das Wissen über das nach Pythagoras benannte Theorem in der mesopotamischen Mathematik nachweisbar. Der griechische Mathematiker und Astronom Pythagoras von Samos (vermutlich 580–500 v. Chr.), ein weit gereister Mann, hat womöglich bei einem Besuch in Babylon davon Kenntnis erhalten; bewiesen aber – wie oft angenommen wird – hat er den Satz nach Meinung der Mathematikhistoriker nicht. Das hat wohl als Erster Euklid in seinem Werk *Elemente* im 1. Buch als Theorem 47 getan.

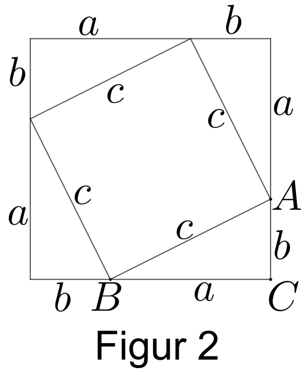
Der Rechtwinkel-Satz



Figur 1

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem Winkel $\gamma = 90°$ gilt für die Seitenlängen a, b, c:

(1) $c^2 = a^2 + b^2$.



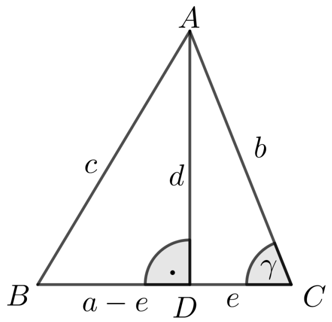
Figur 2

Einer der ältesten von hunderten Beweisen ist dieser: Ergänze das Dreieck ABC (Bild links) zu einem Quadrat der Seitenlängen $a + b$ mit einem Innenquadrat der Seitenlängen c. Für die Flächen der beiden Quadrate und der vier kongruenten Dreiecke gilt dann:
$c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, woraus $c^2 = a^2 + b^2$ folgt.

Der Spitzwinkelsatz

Im spitzwinkligen Dreieck ABC mit dem Winkel $\gamma < 90^\circ$ gilt für die Seitenlängen a, b, c:

(2) $c^2 < a^2 + b^2$.



Figur 3

Die Länge des Lotes aus A auf BC sei d und die der Strecke CD sei e. Aus dem Satz von Pythagoras (1) folgt dann: $c^2 = (a-e)^2 + d^2 = a^2 - 2ae + e^2 + d^2$ sowie $e^2 + d^2 = b^2$. Also

(2') $c^2 = a^2 + b^2 - 2ae$.

Wegen $2ae > 0$ gilt daher die Ungleichung (2).

Der Stumpfwinkelsatz

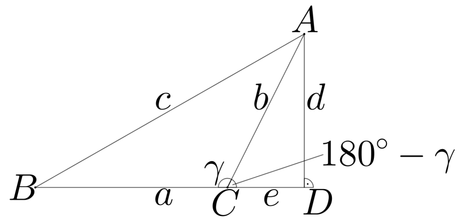
Im stumpfwinkligen Dreieck ABC mit dem Winkel $\gamma > 90^\circ$ gilt für die Seitenlängen a, b, c:

(3) $c^2 > a^2 + b^2$.

Die Länge des Lotes aus A auf BC sei d und es sei $|CD| = e$. Aus dem Satz von Pythagoras (1) folgt dann: $c^2 = (a+e)^2 + d^2 = a^2 + 2ae + e^2 + d^2$ und $e^2 + d^2 = b^2$.

(3') Somit ist $c^2 = a^2 + b^2 + 2ae$.

Wegen $ae > 0$ gilt daher (3).



Figur 4

Der Cosinussatz

Es gibt einen Satz – er heißt der *Cosinussatz* –, in dem die Sätze (1), (2) und (3) enthalten sind.

In einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und dem Winkel γ, mit $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ – vergleiche die Figuren 1, 3 und 4 – gilt:

(4) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Nachweis

Wenn $\gamma = 90^\circ$ und dann $\cos(\gamma) = 0$ ist, also gilt (4).

Für γ mit $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ ist $\cos(\gamma) > 0$. Nach Figur 3 ist $\cos(\gamma) = \frac{e}{b}$, also $e = b\cos(\gamma)$. Aus (2') folgt dann (4).

Für γ mit $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ ist $\cos(\gamma) = -\cos(180^\circ - \gamma)$ und nach Figur 4 ist $\cos(180^\circ - \gamma) = \frac{e}{b}$, also $e = b\cos(180^\circ - \gamma) = -b\cos(\gamma)$. Aus (3') folgt dann $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Umkehrung der Winkelsätze

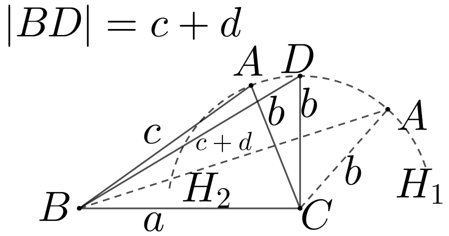
Ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c sei gegeben. Kann man dann eine Aussage über die Größe des Winkels γ machen, wenn eine der möglichen Beziehungen $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 < a^2 + b^2$ oder $c^2 > a^2 + b^2$ zutrifft (= Umkehrung der Sätze (1)–(3))?

Umkehrung des Satzes von Pythagoras

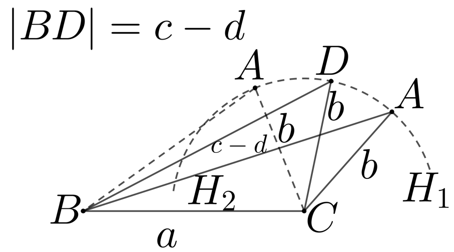
Im Dreieck ABC gelte $c^2 = a^2 + b^2$. Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen a und b und dem von den zugehörigen Seiten eingeschlossenen Winkel $\gamma' = 90°$. Nach (1) gilt dann für die dritte Seite von $A'B'C'$ ebenfalls $c^2 = a^2 + b^2$, sodass die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in allen Seitenlängen übereinstimmen. Daher sind die beiden Dreiecke kongruent und es gilt $\gamma = \gamma' = 90°$.

Umkehrung des Spitzwinkelsatzes

Im Dreieck ABC gelte $c^2 < a^2 + b^2$. Dann gibt es ein $d > 0$, sodass $(c + d)^2 = a^2 + b^2$ ist. Nach (1) gibt es daher ein rechtwinkliges Dreieck BCD mit den Seitenlängen a, b und $c + d$ (Figur 5).
Die Ecke A eines jeden Dreiecks ABC liegt nun auf dem Halbkreis $H_1 \cup H_2$ um C mit dem Radius b. Wäre $\gamma > 90°$, so läge A auf H_1 und es wäre $|AB| = c > c + d$ – ein Widerspruch.
Also liegt A auf H_2 und daher gilt $\gamma < 90°$.



Figur 5



Figur 6

Umkehrung des Stumpfwinkelsatzes

In einem Dreieck ABC gelte $c^2 > a^2 + b^2$. Dann gibt es ein $d > 0$, sodass $(c - d)^2 = a^2 + b^2$ ist. Dann ist das Dreieck BCD mit den Seitenlängen a, b und $c - d$ rechtwinklig. Die Ecke A eines jeden Dreiecks ABC liegt auf dem Halbkreis $H_1 \cup H_2$ um C mit Radius b. Läge A auf H_2, so wäre $|AB| = c < c - d$. Also liegt A auf H_1 und für γ gilt $90° < \gamma < 180°$.

Monoid-Mathe-Mittwoch
Lösungen
Teil 2

Auf den nächsten Seiten findet Ihr die Lösungen der Aufgaben zum Monoid-Mathe-Mittwoch, die wir hier im Heft ab Seite 3 abgedruckt haben.

Mathespielereien

XI. Englische Multiplikation

Da die Buchstaben Ziffern vertreten, kann man die gegebene Gleichung so schreiben:

$$(O \cdot 100 + NE) \cdot 9 = NI \cdot 100 + NE$$

und daher gilt

$$100 \cdot (NI - 9 \cdot O) = 8 \cdot NE.$$

Also ist $8 \cdot NE$ ein Vielfaches von 100 und deshalb ist $NE = 00, 25, 50$ oder 75.

$NE = 00$ ist nach Voraussetzung ausgeschlossen.

Sei $NE = 25$. Dann ist $N = 2$, $8 \cdot NE = 200$ und $NI = 20 + I$. Damit folgt $100 \cdot (20 + I - 9 \cdot O) = 200$, also $20 + I - 9 \cdot O = 2$, sodass $I + 18 = 9 \cdot O$ ist, also $I = 0$ oder $I = 9$.
Aus $I = 0$ erhält man $O = 2$, was jedoch wegen $N = 2$ und damit $O = N$ auszuschließen ist. Der Fall $I = 9$ ist nach Voraussetzung ausgeschlossen.

Sei $NE = 75$. Dann ist $N = 7, 8 \cdot NE = 600$ und $NI = 70 + I$. Es folgt dann $100 \cdot (70 + I - 9 \cdot O) = 600$, also $I + 64 = 9 \cdot O$. $I = O = 8$ ist die einzige Lösung dieser Gleichung. Jedoch ist $I = O$ ausgeschlossen.

Sei $NE = 50$. Dann ist $N = 5, E = 0, 8 \cdot NE = 400$ und $NI = 50 + I$. Daher gilt $100 \cdot (50 + I - 9 \cdot O) = 400$, also $I + 46 = 9 \cdot O$ mit der eindeutigen Lösung $I = 8$, $O = 6$.
Somit gilt $O = 6$, $N = 5$, $E = 0$ und $I = 8$. Die gesuchte Zahlengleichung lautet daher: $650 \cdot 9 = 5850$.

XII. Einerziffer gesucht

Die Folge E_z der Einerziffern der Zahlen z^1, z^2, z^3, ..., z^{100000} besteht für jedes $z = 1, 2, 3, ..., 10$ aus einem sich jeweils $\frac{100000}{4} = 25000$-mal wiederholenden Ziffernquadrupel, wie man selbst leicht nachrechnet:

$$\begin{array}{lllll}
z=1: & E_1=(1,1,1,1,...,1,1,1,1) & \Longrightarrow & V_1=4 \\
z=2: & E_2=(2,4,8,6,...,2,4,8,6) & \Longrightarrow & V_2=20 \\
z=3: & E_3=(3,9,7,1,...,3,9,7,1) & \Longrightarrow & V_3=30 \\
z=4: & E_4=(4,6,4,6,...,4,6,4,6) & \Longrightarrow & V_4=20 \\
z=5: & E_5=(5,5,5,5,...,5,5,5,5) & \Longrightarrow & V_5=20 \\
z=6: & E_6=(6,6,6,6,...,6,6,6,6) & \Longrightarrow & V_6=24 \\
z=7: & E_7=(7,9,3,1,...,7,9,3,1) & \Longrightarrow & V_7=20 \\
z=8: & E_8=(8,4,2,6,...,8,4,2,6) & \Longrightarrow & V_8=20 \\
z=9: & E_9=(9,1,9,1,...,9,1,9,1) & \Longrightarrow & V_9=20 \\
z=10: & E_{10}=(0,0,0,0,...,0,0,0,0) & \Longrightarrow & V_{10}=0
\end{array}$$

Mit $[n]$ sei die Einerziffer der ganzen Zahl n bezeichnet. Ist dann V_z die Summe der vier ersten Elemente von E_z (siehe die Liste oben), dann gilt für jede Summe $S_z = z^1 + z^2 + ... + z^{100000}$ für $z = 1, 2, 3, ..., 10$:

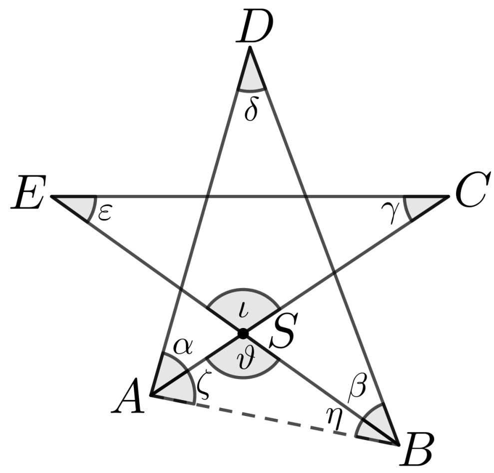
$$[S_z] = \left[\frac{100000}{4} \cdot V_z\right] = [25000 \cdot V_z] = 0$$

Setzt man nun $S = S_1 + S_2 + ... + S_{10}$, dann folgt daraus $[S] = 0$.

Damit ist die gesuchte Einerziffer $[S] = 0$ bestimmt.

XIII. Winkelsumme im Stern

Verbinde A und B.
In den Dreiecken $\triangle ABS$ und $\triangle SCE$ gilt $\zeta + \eta + \vartheta = \iota + \gamma + \varepsilon$.
Wegen $\iota = \vartheta$ folgt daraus $\zeta + \eta = \gamma + \varepsilon$.
Dann aber ist die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + \delta + \zeta + \eta$.
Die letzte Winkelsumme ist die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABD$ und diese ist $180°$ groß.



Die Summe der Zacken des Sterns beträgt also $180°$.

XIV. Victorias Kinder

36 lässt sich folgendermaßen in drei Faktoren zerlegen: $36 \cdot 1 \cdot 1$, $18 \cdot 2 \cdot 1$, $12 \cdot 3 \cdot 1$, $9 \cdot 4 \cdot 1$, $9 \cdot 2 \cdot 2$, $6 \cdot 6 \cdot 1$ und $6 \cdot 3 \cdot 2$. Die Summen sind 38, 21, 16, 14, 13, 13 und 11.

Die Information hat für Jasmin zunächst nicht gereicht. Das ist nur bei der Summe 13 der Fall, da die 13 zweimal vorkommt. Dies war die Nummer der Buslinie.

Die Kombination 6, 6, 1 scheidet durch die Zusatzinformation aus, dass es ein ältestes Kind (also nicht älteste Zwillinge) gibt.

Daher sind Victorias Kinder 9, 2 und 2 Jahre alt.

Neue Aufgaben

Aufgabe 11: Bestimmung einer Zahl

Zunächst gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 3^3 &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x+\frac{1}{x}\right) = \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= x^3+\frac{1}{x^3}+3\cdot 3. \end{aligned}$$

Also gilt $x^3+\frac{1}{x^3}=18$ und damit folgt

$$\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = x^3+2+\frac{1}{x^3} = 18+2=20.$$

Ziehen wir die Wurzel, so ergibt sich $x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{20}$ und somit ist $a=\sqrt{20}$.

(HF)

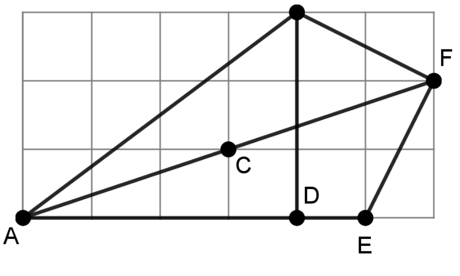
Alternative Lösung:

Multiplizieren wir die Voraussetzung $x+\frac{1}{x}=3$ mit x, so ergibt sich $x^2+1=3x$, was wiederum äquivalent zu $x^2-3x+1=0$ ist. Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Setzen wir diese beiden Lösungen in $x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=a$ ein, so ergibt sich in beiden Fällen $a=\sqrt{20}$.

(MG)

Aufgabe 12: Winkel im Rechteckgitter



Ergänze das gegebene Rechteck um ein Rechteck wie in der nebenstehenden Abbildung. Im Dreieck $\triangle ADB$ ist $|AB|^2=4^2+3^2$. Daraus folgt $|AB|=5$.
Weiter gilt: $|BF|^2=|FE|^2=1^2+2^2=5$, sodass $|BF|=|FE|=\sqrt{5}$ ist.

Dann hat das Dreieck $\triangle AFB$ die Seitenlängen 5, $\sqrt{5}$, $|AF|$ und $\triangle AEF$ die Seitenlängen 5, $\sqrt{5}$, $|AF|$.

Also sind $\triangle AFB$ und $\triangle AEF$ kongruent, sodass $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FAB$ und $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FAB = \sphericalangle DAF = \sphericalangle DAC$.

Aufgabe 13: Niemals eine Quadratzahl

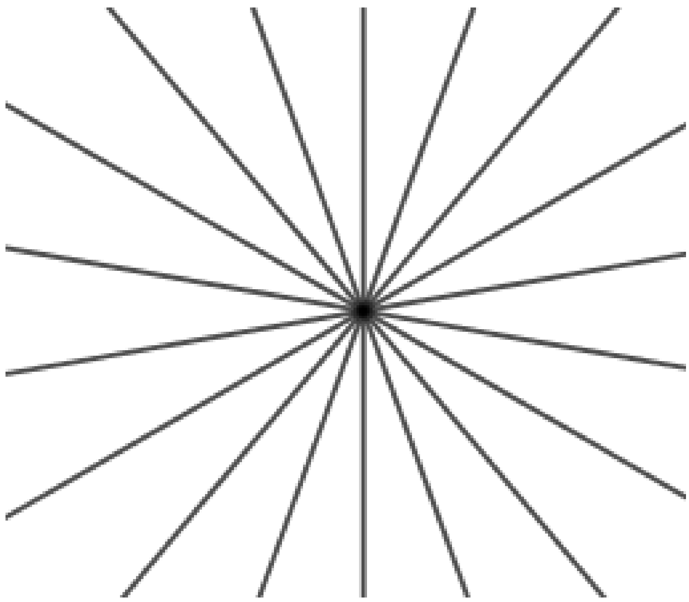
Annahme: Es gibt ein n, sodass $P_n + 1$ eine Quadratzahl ist.
Es sei $P_n + 1 = m^2$. Dann gilt

$$P_n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$$

Ist m gerade, dann sind $m-1$ und $m+1$ beide ungerade, sodass $(m-1)(m+1)$ ungerade ist, während P_n wegen $p_1 = 2$ gerade ist – ein Widerspruch.
Ist m ungerade, dann sind $(m-1)$ und $(m+1)$ beide gerade und daher ist $(m-1)(m+1)$ ein Vielfaches von 4. Da alle Primzahlen $> p_1$ ungerade sind, ist jedoch P_n kein Vielfaches von 4 – erneut ein Widerpruch.
Folglich ist die Annahme falsch – es gilt also die Behauptung.

Aufgabe 14: Schnittwinkel von Sechseckdiagonalen

Es gibt im Sechseck zu jeder der sechs Ecken drei Diagonalen, also, da diese dann doppelt gezählt sind, insgesamt $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ Diagonalen.
Zeichnen wir durch einen Punkt einen Stern aus Parallelen zu diesen Diagonalen, so ergibt sich dieses Bild:



Die 18 Winkel ergeben zusammen 360°, also ist mindestens einer davon 20° oder kleiner.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 140

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Anton Krempl 11, Marek Moldehn 5, Philipp Reis 21, Jill Marie Simon 17;
Kl. 6: Anna Lena Drescher 24, Gabriel Faber 5, Mya Fuchs 13, Johannes Greis 11;
Kl. 7: Oscar Su 109, Kevin Tran 42, Jan Christian Weber 35;
Kl. 8: Lars Schall 16;
Kl. 10: Lukas Born 38;
Kl. 12: Torben Bürger 45.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:
Kl. 9: Oliver Bill 7.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 5: Linus Salloch 16, Mika Schäfer 21;
Kl. 11: Marvin Wenzel 56.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Konstantin Herbst 57;
Kl. 10: Nico Brockmeier 49, Aleksandra Herbst 42.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 11: Sönke Schneider 52.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium:
Kl. 11: Katharina Hollingshausen 9.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 6: Jabir Aouzi 11, Lia Boyanova 8, Mark Garkuscha 13, Eva Hovadikova 2, Iwais Karimi 11, Sarah Markhof 20, Nam-Anh Pham 30;

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 11: Dennis Mayle 31.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 6: Daniel Waldek 3;
Kl. 9: Simon Waldek 10.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 5: Anna Salaru 12.

Mainz, Martinus-Schule:
Kl. 3: Johannes Wünstel 1,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 8: Gregor Salaru 33;
Kl. 10: Raphael Mayer 17.

Mainz, Theresianum: Kl. 11: Clemens Zabel 54.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium: Kl. 7: Jona Richartz 7.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule: Kl. 12: Johannes Kerhberger 8.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jasmin Borrmann 25, Leonard Köhler 4, Leon David Mayer 2, Lotta Pietschmann 9;
Kl. 6: Klara Backmann 25, Luis Brinkmann 19, Annika Giebitz 19, Louisa Lukowiak 27, Dora Meszaros 22, Marvin Weber 19;
Kl. 7: Emilie Borrmann 35;
Kl. 9: Elisabeth Budimann 6, Annika Etz 7, Martin Daniel Schanne 6;
Kl. 10: Kathrin Borrmann 31, Paulina Herber 35, Josefine Kaßner 54;
Kl. 11: Jonas Glückmann 58.

Schifferstadt, Paul-von-Denis-Gymnasium:
Kl. 12: Marlene Maager 12.

Schorndorf, Burg-Gymnasium:
Kl. 10: Christian Carda 23.

Schrobenhausen, Gymnasium
Kl. 6: Luca Sindel 59.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 5: Mai Linh Dang 21;
Kl. 8: Tu Sam Dang 61;
Kl. 10: Miriam Büttner 56.

Tettnang:
Katharina Bauer 12.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 8: Philipp Lörcks 117.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Lilith Gorecki 3,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 9: Mareike Bühler 9.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 7: Jan Wickenheiser 10;
Kl. 8: Alexander Haun 13;
Kl. 10: Lukas Emmel 7, Marco Klein 12.

Mitteilungen

- **MONOID-Jahresfeier:** Auch dieses Jahr möchten wir mit Euch feiern und Euch für Eure Leistungen ehren. Da die diesjährige MONOID-Jahresfeier aufgrund des Corona-Notstandes nicht wie gewohnt stattfinden kann, findet die Feier

  am Samstag, den 28. November 2020,
  um 10 Uhr

  in virtueller Form statt.
  Den Festvortrag wird Prof. Dr. Manfred Lehn von der Universität Mainz halten.
  Aktuelle Informationen zur Feier findet Ihr auf unserer Internetseite

  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

  Eure Preise werden wir Euch natürlich per Post zuschicken.
  Wir hoffen, dass die Jahresfeier 2021 dann wieder wie gewohnt stattfinden kann, denn dann möchten wir auch unseren 40. Geburtstag mit Euch feiern.

- **Verspätung:** Leider gab es technische Probleme beim Druck, sodass sich Druck und Versand des Heftes verzögert hat. Wir bitten Euch um Entschuldigung.
  Den Einsendeschluss haben wir daher auch verlängert bis Montag, den 30, November 2020.

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 10 € für das Schuljahr 2020/21 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahrsabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).

- **Mainzer Mathematik-Akademie:** Die für dieses Jahr geplante Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) muss leider ausfallen. Aufgrund der Corona-Pandemie bleibt das Übernachtungshaus, in dem die Teilnehmer hätten schlafen sollen und in dem auch Teile des Rahmenprogramms stattgefunden hätten, bis in den Herbst hinein geschlossen. Daher kann die MMA nicht wie geplant stattfinden.
  Die nächste Mainzer Mathe-Akademie (MMA) ist geplant für die Zeit vom 22. bis 26. September 2021. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:

  `https://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`.

Erratum

Wir lesen die Hefte vor dem Druck mehrfach Korrektur und bemühen uns um ein fehlerfreies Monoid-Heft, dennoch lässt es sich nicht vermeiden, dass sich nicht doch mal ein Fehler in das gedruckte Heft einschleicht. Auch im letzten Heft hat der „Druckfehlerteufel“ zugeschlagen.

Erratum zu „Divergenz der Reihe aus den Kehrwerten der Primzahlen“ (Monoid 142)

Auf Seite 32 fehlen die Summanden, korrekt muss es heißen:
Da $\mathbb{N} = T_0 \supset T_1 \supset \ldots$ und $\zeta(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^t} < \infty$ sind auch alle $\sum\limits_{n \in T_k} \frac{1}{n^t} < \infty$.

Außerdem wurden die Mengenzeichen $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen nicht richtig dargestellt.

Wir bitten Euch, die Fehler zu entschuldigen.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Hofmann
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 40 | Heft 143 | Oktober 2020

Inhalt

MONOID-Mathe-Mittwoch: Aufgaben (Teil 2) 3
A. Klenke: Zerlegung eines Quadrats 4
Christoph Sievert: Die besondere Aufgabe – Quadratur eines Sechsecks 6
H. Fuchs: Monoidale Knobelei 7
H. Fuchs: Was uns so über den Weg gelaufen ist 8
H. Sewerin: Das Denkerchen 9
H. Fuchs: Beweis ohne Worte 10
H. Fuchs: Eine tolle Beweis-Methode 11
Die Aufgabe für den Computer-Fan 12
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 142 17
Neue Mathespielereien 21
Neue Aufgaben 23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 142 24
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik 29
Mathematische Entdeckungen 30
H. Fuchs: Recht-, stumpf- und spitzwinklige Dreiecke 33
MONOID-Mathe-Mittwoch: Lösungen (Teil 2) 36
Rubrik der Löserinnen und Löser 40
Mitteilungen 42
Erratum 43
Impressum 44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und dem Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107
Fax: 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid