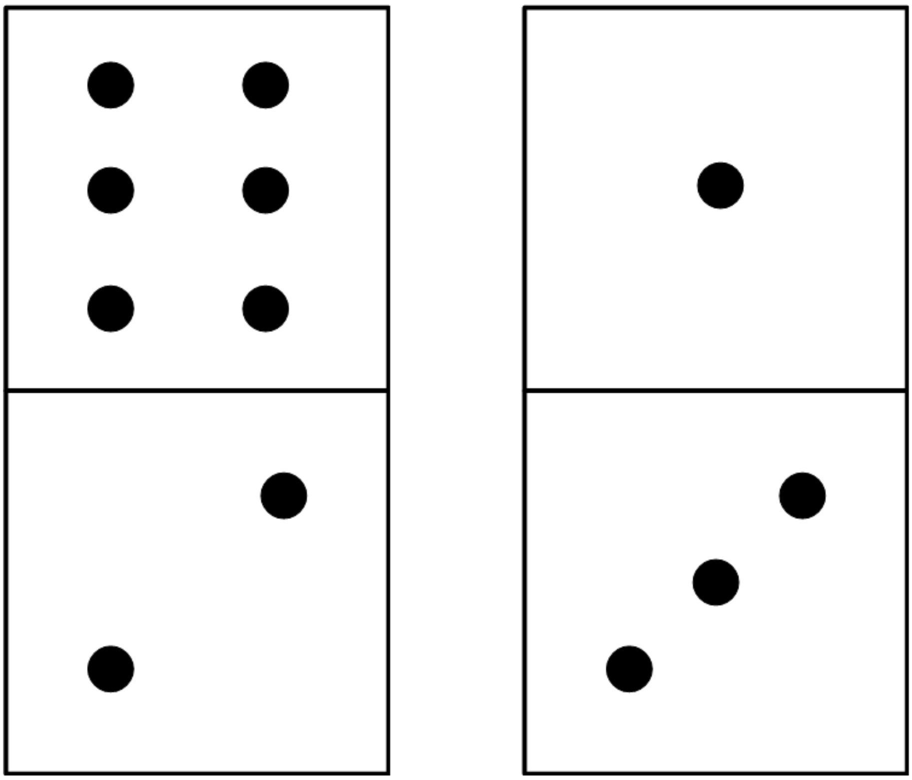
Jahrgang 40 Heft 144 Dezember 2020

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.02.2021.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Liebe L(o)eserinnen und L(o)eser,


nun haltet Ihr das MONOID-Heft 144 in Euren Händen, das letzte für dieses kuriose Jahr. Und wenn in wenigen Tagen das neue Jahr beginnt, ist es ein besonderes für MONOID, denn 2021 feiern wir unseren 40. Geburtstag.
An dieser Stelle Euch allen herzlichen Dank für Euer Interesse an MONOID, Eure Treue, Eure Begeisterung, mit der Ihr Artikel lest und Aufgaben löst, und natürlich Eure Rückmeldungen und Kritik, die uns immer wieder erreichen.
Leider müssen wir dieses Jahr mit einer (weiteren) schlechten Nachricht beenden: Aufgrund sinkender Abonnentenzahlen, Portoerhöhung (55 % alleine den letzten drei Jahren!), gestiegenen Druckkosten etc. tragen die Einnahmen aus dem Verkauf leider nicht mehr die tatsächlichen Kosten. Nachdem wir zehn Jahre lang den Preis konstant halten und die teilweise erheblichen Kostensteigerungen abfangen konnten, ist uns dies nun leider nicht mehr möglich. Obwohl die komplette Redaktion ehrenamtlich arbeitet, haben wir zuletzt sogar Verlust gemacht.
Daher müssen wir leider den Preis erhöhen. Ab dem neuen Jahr kosten Einzelhefte 4 €, ein Abonnement mit vier Heften pro Jahr kostet 15 € (jeweils inklusive Versand).
Wir hoffen, dass Ihr MONOID weiterhin treu bleibt und unser Mathematikblatt zum Mitdenken weiter abonniert. Bitte überweist Euren Beitrag auf das MONOID-Konto mit der IBAN *DE28 5519 0000 0505 9480 18* (bei der Mainzer Volksbank, BIC: MVBMDE55). Gebt als Verwendungszweck bitte Eure Abonummer (siehe Adressetikett) und Eueren Namen an.
Übrigens: Wer bis zum 31. Dezember 2020 seinen Abo-Beitrag überweist, bezahlt noch den alten Preis, auch wenn die Hefte erst im neuen Jahr erscheinen!
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der Dauerauftrag, da Ihr dann die Überweisung nicht mehr vergessen könnt und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft. Wenn Ihr schon einen Dauerauftrag eingerichtet habt, vergesst bitte nicht, diesen an den neuen Preis anzupassen.
Dieser Schritt ist uns schwer gefallen und wir haben ihn möglichst lange hinausgezögert. Wir bitten um Verständnis, dass er nicht vermeidbar ist.

Wir wünschen Euch im Namen der gesamten Redaktion eine schöne Weihnachtszeit, einen guten Rutsch ins MONOID-Jubiläumsjahr 2021 und natürlich das Wichtigste in diesen Zeiten: Ganz viel Gesundheit für Euch und Eure Familien!
Viel Spaß beim Lesen und Knobeln!

Dr. Cynthia Hog-Angeloni　　　　Marcel Gruner

Redaktionsleitung

Aufgaben zum neuen Jahr

von Hartwig Fuchs und Marcel Gruner

Scherenschnitte im neuen Jahr

Du hast vier Papierstücke. Mit einer Schere zerschneidest Du eine beliebige Anzahl von ihnen und zwar jedes in vier Stücke. Von den danach vorhandenen Papierstücken zerschneidest Du erneut eine beliebige Anzahl wiederum jedes in vier Teile.
Wenn Du so weiter machst, kannst Du dann durch irgendeine Zerschneidungstaktik erreichen, dass 2021 Papierstücke vorhanden sind?

Bemerkung: Wir gehen davon aus, dass die Papierstücke am Anfang groß genug sind, damit die Zerschneidungen möglich sind. Das Problem zu kleiner Papierstücke können wir also vernachlässigen.

Ein Nullen-Problem

Wie viele natürliche Zahlen unterhalb von 2021 gibt es, in deren Dezimaldarstellung mindestens eine Ziffer 0 vorkommt?

Zahlen mit 2021 Teilern

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen mit genau 2021 Teilern. Stimmt das?

Zeitlich begrenzt bemerkenswerte Quersumme

Wie groß ist die Quersumme von $7 \cdot 10^{224} - 2$?

Besondere Teilbarkeiten

a) Die Zahl $2021^{2020} + 1$ ist ohne Rest durch 2022 teilbar.
b) Die Zahl $2020^{2021} - 1$ ist ohne Rest durch 2019 teilbar.

Verschlüsselte Botschaft

2	3	7	3	4	5		8
1	7	9				0	
	1	7	9	1	4	7	1
7		1	9	1	6	7	1
4	7		8		1	9	7
1	8	1	9		0		6

Ersetze die Ziffern 0, 1, 2, . . . , 9 durch Buchstaben (verschiedene Ziffern – verschiedene Buchstaben) und schreibe in die leeren Kästchen geeignete Buchstaben, so dass Zeile für Zeile gelesen ein in diese Zeit passender Satz entsteht.

Tipp: In deutschsprachigen Texten sind die vier häufigsten Buchstaben – nach abnehmender Häufigkeit geordnet – E, N, I, S.

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 33.

Geometrie mit der Schere: Triangulationen

von Hartwig Fuchs

Die Topologie hat viele Gesichter – eines davon ist die Geometrie mit der Schere (= Zerlegungsgeometrie).

Es sei E_n ein ebenes n-Eck (= Polygon) – ein geometrisches Gebilde, bestehend aus einem zusammenhängenden Gebiet, das von einem geschlossenen Kantenzug aus n Ecken und n die Ecken verbindenden Kanten berandet ist. In E_n seien Kantenzüge eingezeichnet, die eine Zerlegung von E_n in Teilfiguren bewirken, die ebenfalls Polygone sind (vergleiche Figur 1).

Man kann dann fragen: Gibt es Beziehungen zwischen E_n und seinen Teilfiguren? Dem werden wir nun bei Zerlegungen von Polygonen eines bestimmten Typs in lauter Dreiecke nachgehen.

Triangulationen

Es sei E_n mit $n \geq 3$ ein *konvexes*[1] n-Eck. Ferner sei M eine vorgegebene endliche Menge von m Punkten, wobei $m \geq 0$, im Innengebiet von E_n. Das geometrische Gebilde aus E_n und M nennen wir einen *Graphen* (E_n, M); die Eckpunkte des Randes von E_n und die Punkte aus M nennen wir die Ecken von (E_n, M) und jede Verbindungsstrecke zweier Ecken in E_n bezeichnen wir als Kante von (E_n, M).

Wenn man nun Ecken in (E_n, M) durch Kanten so verbindet, dass dabei das Innengebiet von E_n in lauter Dreiecke zerlegt wird, so spricht man von einer *Triangulation* des n-Ecks E_n und auch des Graphen (E_n, M), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

B_1: Jede der $n + m$ Ecken des Graphen (E_n, M) ist Ecke eines Dreiecks.

B_2: Die Ecke eines jeden Dreiecks sind Ecken in (E_n, M).

B_3: Keine Ecke eines Dreiecks liegt im Innengebiet eines Dreiecks oder im Inneren einer Kante eines anderen Dreiecks.

Beispiele/Gegenbeipiele

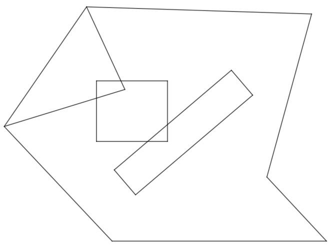
a) Die Figur 2 ist eine die Bedingungen 1 bis 3 erfüllende Triangulation des Graphen (E_n, M) mit $M = \{P, Q, R\}$.

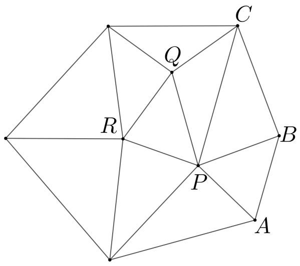
b) Die Zerlegung des Graphen (E_5, M) mit $M = \{P\}$ in Figur 3 ist keine Triangulation, da das Innengebiet von E_5 nicht in lauter Dreiecke zerlegt ist. Außerdem ist $Q \notin M$.

c) Die Zerlegung von (E_3, M) mit $M = \{P, Q\}$ in Figur 4 ist keine Triangulation, denn die Ecke Q des Dreiecks BCQ liegt in der Seite CP des Dreiecks APC

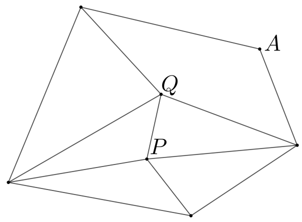
[1] Ein n-Eck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke jeder zwei seiner Punkte vollständig in E_n liegt – vergleiche die Polygone in den Figuren 2–4 unten.

(vergleiche B_3) und die Ecke R des Dreiecks BCR liegt im Innengebiet von Dreieck BCQ – beides ein Widerspruch zu B_3.

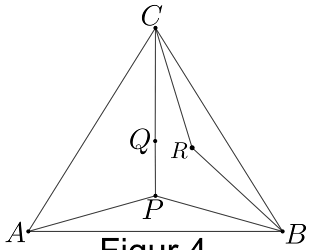

Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Durch die Vorgabe einer Menge M von Punkten im Innengebiet eines Polygons E_n ist eine Triangulation des Graphen (E_n, M) nicht eindeutig festgelegt.

Beispiel

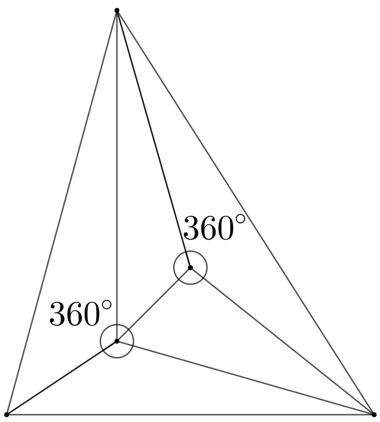
Wenn man in Figur 2 – die eine Triangulation eines Graphen (E_6, M) darstellt – die Kante BP durch die Kante AC ersetzt, dann hat man eine andere Triangulation von (E_6, M).
Dagegen können wir zeigen, dass durch die Vorgabe von M bei jeder Triangulation eines Graphen (E_n, M) zwischen den Ecken, Kanten und Teilfiguren von E_n numerische Beziehungen entstehen, die eindeutig festgelegt sind.

Eine invariante Eigenschaft der Triangulation eines Dreiecks

Es sei $T(M)$ die Menge aller Triangulationen, durch die ein Dreiecks-Graph (E_3, M) mit $M \neq \emptyset$ in lauter Dreiecke zerlegt werde.
Dann gilt:

(1) Jede Triangulation $T \in T(M)$ zerlegt einen Dreiecks-Graph (E_3, M) mit $M \neq \emptyset$ in die gleiche Anzahl $d = 2m + 1$ von Dreiecken.

Nachweis
Es sei w die Summe aller Winkelmaße der d Teildreiecke des von T zerlegten Dreiecks E_3.



Figur 5

Dann gilt zunächst: $w = d \cdot 180°$.
Es ist aber auch (vergleiche Figur 5):

$$\begin{aligned} w = {} & \text{Innenwinkelsumme von } E_3 + m \cdot 360° \\ = {} & 180° + 2m \cdot 180° \end{aligned}$$

Daraus folgt $d \cdot 180° = (2m + 1) \cdot 180°$ und daher

(2) $d = 2m + 1$ – und das gilt auch für $m = 0$.

Da T ein beliebiges Element von $T(M)$ ist, gilt (2) für jedes $T \in T(M)$ und damit gilt (1).

Beispiel

In Figur 5 ist $m = 2$ und $d = 5$ – und dafür gilt $d = 5 = 2 \cdot 2 + 1 = 2 \cdot m + 1$.

Topologische Interpretation der Aussage (1)

Die Aussage (1) bleibt ungeändert gültig bei jeder Änderung der Größe und der Form von E_n, der Anzahl m der vorgegebenen Ecken $\in M$ und deren Position in E_n. Da sie zudem für jedes $T \in T(M)$ gilt, haben wir mit (1) einen numerischen, als *topologische Invariante* bezeichneten Zusammenhang zwischen den Ecken aus M und den Zerlegungsdreiecken eines jeden triangulierten Graphen (E_n, M) gefunden.

Eine invariante Eigenschaft der Triangulation von n-Ecken mit n > 3

Vorweg: Es sei T eine Triangulation eines n-Ecks E_n, wobei $n \geq 3$, mit einer Menge M, bestehend aus nur einem Punkt P. Durch T werde E_n in n Dreiecke zerlegt. Die Summe aller Winkel dieser n Dreiecke beträgt $n \cdot 180°$; die Summe der n Dreieckswinkel bei der Ecke P ist $360°$. Daraus folgt:

(3) Die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks beträgt $(n-2) \cdot 180°$.

Damit zeigen wir:

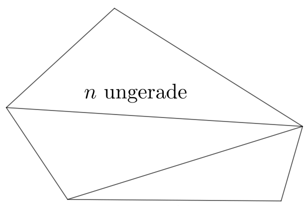
(4) Jede Triangulation $T \in T(M)$ eines Graphen (E_n, M), wobei $n \geq 3$, M mit m Punkten mit $m \geq 0$, zerlegt E_n in die gleiche Anzahl von $d = n + 2m - 2$ Dreiecken.

Nachweis

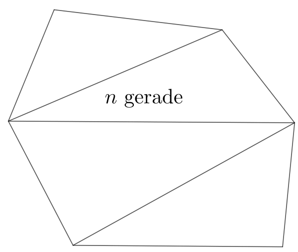
Für die Summe w aller Winkelmaße der d Dreiecke des triangulierten Polynoms E_n gilt $w = d \cdot 180°$; es ist aber auch $w =$ Innenwinkelsumme von $E_n + m \cdot 360°$, wobei $m \cdot 360°$ die Summe aller Dreieckswinkel bei den m Punkten von M ist – vergleiche Figur 5. Daraus folgt mit der Innenwinkelsumme (3) von n-Ecken: $w = d \cdot 180° = (n-2) \cdot 180° + 2m \cdot 180°$, also

(5) $d = n + 2m - 2$.

Die Gleichung (5) enthält auch den Fall $n = 3$, denn (5) lautet dann $d = 3 + 2 \cdot m - 2 = 2m + 1$ – vergleiche Satz (1).



Figur 6



Figur 7

Gleichung (5) gilt insbesondere für $m = 0$, denn dann ist $d = n - 2$ vergleiche die Figuren 6 und 7. Da Gleichung (5) für ein beliebiges $T \in T(M)$ gilt, ist der Satz (4) bewiesen.

Beispiel

In Figur 2 ist $n = 6$, $m = 3$, $d = 10$ – nach (5) ist $d = 6 + 2 \cdot 3 - 2 = 10$.

Die Aussage (4) ist – mit gleicher Begründung wie oben für Dreiecke der Satz (1) eine topologisch invariante Beziehung zwischen den Ecken aus M und den Dreiecken eines triangulierten Graphen (E_n, M).

Noch eine invariante Eigenschaft der Triangulationen von n-Ecken für n $\geq$ 3

Wie viele Kanten (= Dreieckseiten) besitzt ein in d Dreiecke triangulierter Graph (E_n, M)? Es sei k die Anzahl aller Kanten von (E_n, M) und es sei i die Anzahl der („inneren") Kanten der d Dreiecke, die keine Kanten von E_n sind. Die Dreiecke haben $3d$ Kanten. Es ist jedoch *nicht* $3d = n + i$, denn jede innere Kante ist eine Kante von zwei Dreiecken. Wenn wir daher die inneren Kanten doppelt zählen, dann gilt: $3d = n + 2i$.

Mit Gleichung (5) folgt dann $3(n + 2m - 2) = n + 2i$, sodass $i = n + 3m - 3$ ist. Weil nun $k = n + i$ ist, haben wir die topologisch invariante Aussage:

(6) Für jede Triangulation $T \in T(M)$ der Graphen (E_n, M), wobei M mit $m = 0, 1, 2, ...$ Ecken ist, gilt: Der von T triangulierte Graph (E_n, M) besitzt $k = 2n + 3m - 3$ Kanten.

Beispiel

Für den Graphen in Figur 2 ist $n = 6$, $m = 3$ und $k = 18$; nach Satz (6) ist $k = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 - 3 = 18$. Für den Graphen in Figur 6 ist $n = 5$, $m = 0$ und $k = 7$; nach Satz (6) ist $k = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 - 3 = 7$.

Die Triangulationsinvariante von Euler[2]

Die Triangulation eines jeden Graphen (E_n, M) für $n = 3, 4, 5, ...$, wobei M mit $m = 0, 1, 2, ...$ Ecken ist, führt stets zu einem neuen Graphen, für den gilt: Die Anzahlen seiner e Ecken, k Kanten und d Dreiecken sind $e = n + m$, $k = 2n + 3m - 3$ und $d = n + 2m - 2$.

Wegen der topologischen Invarianz der Größen k und d bei gegebenen n und m gilt die für jede Triangulation invariante *Eulersche Polyederformel*

(7) $e - k + d = 1$

Ausblick

Wenn man geeignete Abänderungen bei den Triangulationsvoraussetzungen vornimmt, gelangt man zu Verallgemeinerungen der Gültigkeitsbereiche der Eulersche Polyederformel (7). So bleibt sie etwa auch bei der Triangulation nicht-konvexer Polygone[3] gültig.

Verzichtet man darauf, dass Triangulationen die Bedingung B_3 erfüllen, so erhält man Zerlegungen wie in Figur 4 und auch jetzt gilt jeweils die Eulersche Polyederformel (7).

Selbst wenn man n-Ecke in beliebige Polygone (= Flächen) zerlegt, wie in Figur 1 und f die Anzahl der Flächen ist, dann gilt die Gleichung (7) in der Form

(8) $e - k + f = 1$.

---

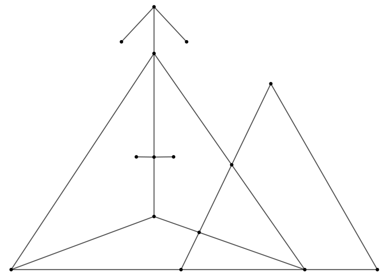
[2] Dem Schweizer Mathmatiker Leonhard Euler (1707–1783) verdankt man die ersten Sätze der Topologie (ab 1735) – darunter auch die später nach ihm benannte Polyederformel (7).

[3] Polygone wie zum Beispiel das Sechseck in Figur 1 heißen nicht-konvex.

Beispiel

Für den Graph in Figur 1 ist $e = 6 + 13$, $k = 24$ und $f = 6$ folgt $e - k + f = 1$.

Man kann sogar den geometrischen Hintergrund von der Gleichung (8), die Zerlegung von Polygonen, beiseite lassen und bei beliebigen Graphen (vergleiche die Figur 8) nach Zusammenhängen zwischen den Größen e, k und f suchen.



Figur 8

Das Ergebnis ist: Für jeden zusammenhängenden Graphen[4] gilt (7).

Beispiel

Der Graph in Figur 8 besitzt $e = 15$ Ecken, $k = 20$ Kanten und $f = 6$ Flächen und es ist $e - k + f = 1$.

Damit sind die Variationsmöglichkeiten unseres Themas keineswegs erschöpft. Man kann die Oberfläche eines konvexen Polyeders mit e Ecken, k Kanten und f Flächen als einen nicht ebenen Graphen auffassen. Euler hat 1750 für solche „Oberflächen-Graphen“ bewiesen, dass für sie gilt $e - k + f = 2$.

Beispiele:

Tetraeder:	$e = 4, k = 6, f = 4$	und $e - k + f = 2$;
Würfel:	$e = 8, k = 12, f = 6$	und $e - k + f = 2$;
Oktaeder:	$e = 6, k = 12, f = 8$	und $e - k + f = 2$.

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
Martin Mattheis

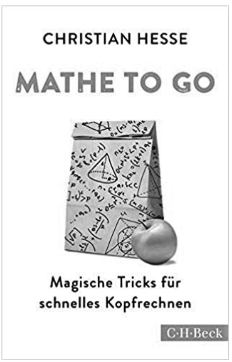
Christian Hesse: Mathe to go

Der seit 1991 an der Universität Stuttgart als Professor für Mathematik lehrende Christian Hesse hat diverse Bücher zur Popularisierung von Mathematik vorgelegt. In dieser Rezension geht es um das Taschenbuch „Mathe to go“. Auf der hinteren Umschlagseite wird das Motto des Buches klargemacht: „Sie meinen, Mathematik sei die Kunst des Rechnens? Weit gefehlt: Es ist die Kunst, Rechnen durch Denken überflüssig zu machen.“ Damit wird richtigerweise nicht nur die Meinung von vielen Laien zur Mathematik widersprochen, sondern gleichzeitig das Programm des vorliegenden Buches verdeutlicht.

[4] Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn man von jeder seiner Ecken längs einer Folge von Kanten aus G zu jeder anderen Ecke gelangen kann.

Als Einstieg („Warm-up") wählte Hesse die bekannte Anekdote über Carl Friedrich Gauß, wie dieser in der Volksschule blitzschnell die Zahlen von 1 bis 100 addierte. Die Anekdote wird allerdings nicht nur vorgestellt, sondern als Beispiel genutzt, um klarzumachen, was auch schon auf der Rückseite beschrieben war: Rechnen durch Denken überflüssig machen.
Vorgeführt werden zum Beispiel einfach durchzuführende Rechentricks zur Multiplikation mit 11, schwierigere Tricks zur einfachen Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen, zum Quadrieren, zur Berechnung der dritten Potenz, zur Division und auch zum Wurzelziehen. Außerdem gibt es noch mehrere Teilbarkeitsregeln. Exkurse führen zur Verwendung unserer Finger als Abakus, oder zu den Logarithmen oder der Bestimmung des Wochentages aus dem Datum.
Einige der beschriebenen Rechentricks unplugged, also ohne elektronische Hilfsmittel, werden auch so aufbereitet, dass jeder sie selbst als Zauberer auf einer Party zum Besten geben kann. Dazu gibt es noch Cocktail-Rezepte (leider auch welche mit Alkohol).
Zusätzlich erfahren die Leser noch etwas über die Mühsal einer Multiplikation mit den römischen Zahlzeichen und die lustigste Zahl 123, die das stärkste Gravitationsfeld im Zahlenkosmos aufweisen kann.
Wer von Christian Hesses mathematischen Spielereien nicht genug bekommen kann, sei auf den Tages-Abreiß-Kalender „Der Mathematik-Kalender 2021" verwiesen. Inwieweit zwischen Kalender und „Mathe to go" eine inhaltliche Schnittmenge besteht, habe ich allerdings nicht überprüft.

Fazit: Mathe to go ist ein Buch, das nicht an einem Stück durchgelesen werden muss. Wie bei jedem guten Mathematikbuch ist es auch sinnvoll, beim Lesen ein Blatt Papier und einen Bleistift neben dem Buch liegen zu haben, um den einen oder anderen Rechentrick sofort auszuprobieren. Außerdem war ich nach fast jedem Trick gewillt, diesen einem anderen Menschen zu erzählen, damit dieser mit mir staunen kann.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



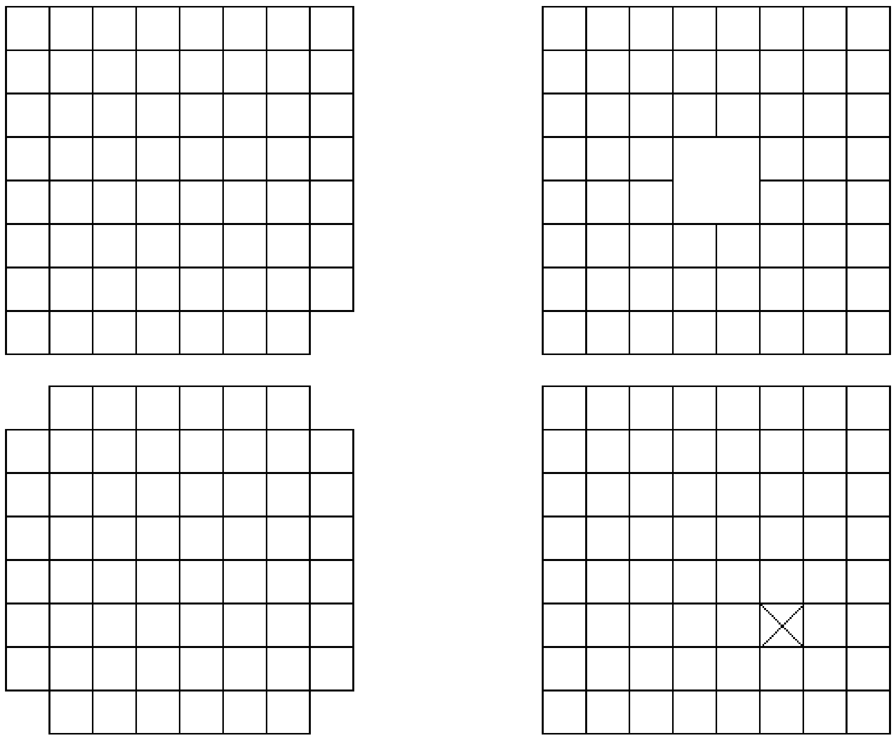
Angaben zum Buch:
Christian Hesse: Mathe to go;
C. H. Beck, 2017,
ISBN 978-3-406-713852-9,
Taschenbuch, 189 Seiten.

Art des Buches:	Sachbuch
Mathematisches Niveau:	von leicht verständlich bis verständlich (je nach Kapitel)
Altersempfehlung:	ab 11 Jahren (je nach Kapitel)

Mathematische Entdeckungen

Mehr Dominorätsel

Schau Dir noch einmal die Neue Aufgabe 1270 (Monoid-Heft 142, Seite 23; Auflösung in Heft 143 auf Seite 26 f.) an. Mit einem ähnlichen Argument kannst Du die folgenden Puzzle-Aufgaben lösen: Welche der folgenden Figuren lassen sich mit 3×1-Steinen auslegen? Gib je eine Belegung oder eine Begründung dafür, dass es keine Belegung gibt, an.



Auf dem letzten Bild soll das durchgestrichene Feld frei bleiben. (LB)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2021 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 141 und 142

In Heft 141 und 142 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Teilbarkeit durch 3

Gegeben sei eine nicht abbrechende Folge von Differenzen

$$a - 1, a^2 - 1, a^3 - 1, \ldots$$

wobei a eine der Zahlen 2, 3, 4, ... sei und $a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a$, und so weiter bedeutet. Untersuche, welche der Differenzen durch 3 teilbar sind. Beginne Deine Untersuchungen mit dem Fall $a = 2$, danach betrachte den Fall $a = 3$ und so weiter – so weit Du möchtest.
Versuche Deine Ergebnisse zu begründen. (HF)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich Philipp Lörcks (Klasse 7, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Trier), Sönke Schneider (Klasse 11, Gymnasium Oberursel), Oscar Su (Klasse 7, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey), Clemens Zabel (Klasse 11, Theresianum, Mainz), Josefine Kaßner (Klasse 10, Gymnasium Oberursel) und Luca Sindel (Klasse 6, Gymnasium Schrobenhausen) beschäftigt.

Im folgenden die Lösung von Philipp Lörcks:

Für $a = 2$:

$2 - 1$	$= 1,$	nicht durch 3 teilbar
$2^2 - 1$	$= 3,$	durch 3 teilbar
$2^3 - 1$	$= 7,$	nicht durch 3 teilbar
$2^4 - 1$	$= 15,$	durch 3 teilbar
$2^5 - 1$	$= 31,$	nicht durch 3 teilbar
$2^6 - 1$	$= 63,$	durch 3 teilbar

Für $a = 3$:

$3 - 1$	$= 2,$	nicht durch 3 teilbar
$3^2 - 1$	$= 8,$	nicht durch 3 teilbar
$3^3 - 1$	$= 26,$	nicht durch 3 teilbar
$3^4 - 1$	$= 80,$	nicht durch 3 teilbar
$3^5 - 1$	$= 242,$	nicht durch 3 teilbar

Für $a = 4$:

$4 - 1$	$= 3,$	durch 3 teilbar
$4^2 - 1$	$= 15,$	durch 3 teilbar
$4^3 - 1$	$= 63,$	durch 3 teilbar
$4^4 - 1$	$= 255,$	durch 3 teilbar
$4^5 - 1$	$= 1023,$	durch 3 teilbar

Hier können wir eine Fallunterscheidung durchführen:
Fall 1: $a \equiv 0 \mod 3$, das heißt a ist von der Form $3n$ mit $n \in \mathbb{N}$
Dann gilt für alle $n = 1, 2, 3, ...$:

$$a^n - 1 \equiv 0^n - 1 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \mod 3,$$

also ist $a^n - 1$ nicht durch 3 teilbar.
Fall 2: $a \equiv 1 \mod 3$, das heißt a ist von der Form $3n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$
Dann gilt für alle $n = 1, 2, 3, ...$, dass

$$a^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod 3,$$

also ist $a^n - 1$ für alle n durch 3 teilbar.

Fall 3: $a \equiv -1 \mod 3$, das heißt a ist von der Form $3n-1$ mit $n \in \mathbb{N}$
Für alle n der Form $2k$ mit natürlichem k gilt:

$$a^{2k} - 1 \equiv (a^2)^k - 1 \equiv ((-1)^2)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod 3,$$

also ist $a^n - 1$ für alle geraden n durch 3 teilbar.
Für alle n der Form $2k+1$ mit natürlichem k gilt:

$$\begin{aligned} a^{2k+1} - 1 &\equiv a^{2k} \cdot a - 1 \equiv (a^2)^k \cdot a - 1 \equiv ((-1)^2)^k \cdot (-1) - 1 \\ &\equiv 1^k \cdot (-1) - 1 \equiv 1 \cdot (-1) - 1 \equiv -2 \mod 3, \end{aligned}$$

also ist $a^n - 1$ für alle ungeraden n nicht durch 3 teilbar.

Durch 3 teilbar sind also alle Folgenglieder mit a, die den Rest 1 bei Division durch 3 lassen, und alle Folgenglieder mit geradem Exponenten mit a, die den Rest 2 (beziehungsweise -1) bei Division durch 3 lassen.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

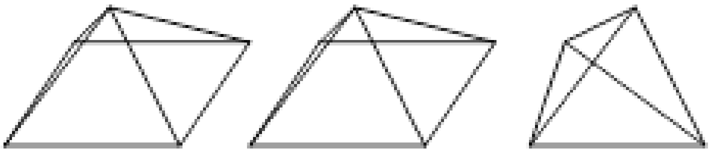
Nachdenklich kommt Herr Pommer aus seinem Keller zurück. „Die Apfelernte vom letzten Herbst ist doch schon weit aufgebraucht. Es sind nur noch etwas mehr rote als grüne Äpfel übrig, und zusammen sind es schon weniger als 50“, brummelt er. „Dann kannst du uns ja noch zwei Äpfel heraufholen“, entgegnet seine Frau. „Ich mag jetzt nicht mehr hinuntergehen“, sagt Herr Pommer. „Wenn du nachher sowieso unten bist, greife doch einfach in den Korb und nimm zwei Äpfel zufällig heraus. Ich weiß, dass du mit derselben Wahrscheinlichkeit zwei verschiedenfarbige Äpfel mitbringst wie zwei gleichfarbige.“

Wie viele rote und wie viele grüne Äpfel sind unter diesen Bedingungen höchstens in dem Korb? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2021 einschicken, denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 142

In Heft 142 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Lucia hat große Freude daran, mit gleich langen Strohhalmen Kantenmodelle von Körpern zu basteln. Für die Haltbarkeit in den Ecken sorgen je nach Vorrat Knete oder Kaugummi. Die Figur zeigt ihre ersten, einfachen Modelle: zwei quadratische Pyramiden und ein Tetraeder (siehe nächste Seite).

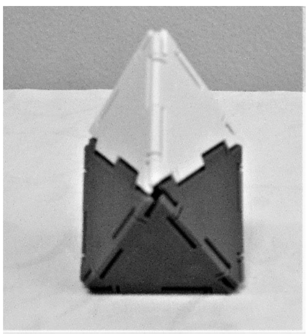


Eine quadratische Pyramide hat 5 Ecken, 8 Kanten und 5 Seitenflächen. Ein Tetraeder hat 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Seitenflächen. Lucia legt beide quadratischen Pyramiden mit den Quadratflächen aneinander. Dann legt sie auf eine beliebige Dreiecksfläche das Tetraeder und klebt alles fest. So erhält sie einen neuen Körper, denn die Flächen passen genau aneinander.

Wie viele Ecken, Kanten und Seitenflächen besitzt dieser neue Körper? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Wenn Lucia die beiden quadratischen Pyramiden mit den Quadratflächen aufeinander legt, verschwinden die beiden Quadrate und es fallen 4 Kanten sowie 4 Ecken zusammen. Das so entstehende Oktaeder besitzt also 8 Flächen, 12 Kanten und 6 Ecken.
Setzt Lucia nun noch das Tetraeder auf eine der Dreiecksflächen, so verschwinden 2 Flächen und es fallen 3 Kanten sowie 3 Ecken zusammen. Die so entstehende Figur sollte also 10 Flächen, 15 Kanten und 7 Ecken besitzen (1).



Allerdings stimmt diese Lösung nicht! Jede sichtbare Seitenfläche des Tetraeders liegt nämlich mit einer benachbarten Seitenfläche des Oktaeders zusammen in der gleichen Ebene, so dass diese beiden Flächen jeweils eine Raute bilden und die in dieser Raute diagonal verlaufende Kante entfällt (2). Also besitzt der neue Körper 7 Ecken, aber nur 12 Kanten und 7 Seitenflächen. Die Figur zeigt ein Modell aus Jovo-Teilen, wobei die Seiten des aufgesetzten Tetraeders hell gefärbt sind.

Die Eigenschaft (2) lässt sich zum Beispiel nachweisen, indem in einer geeigneten Schnittebene durch den Körper Winkel in passenden Dreiecken berechnet werden, die zusammen 180° ergeben.

Keine Teilnehmerin und kein Teilnehmer hat die Eigenschaft (2) bemerkt, so dass es keine richtigen Lösungen gab, sondern nur die Teillösung (1) angegeben wurde.

Lucia (aus der Aufgabe) hat übrigens weitergebastelt und ein weiteres, gleich großes Tetraeder auf eine noch freie Dreiecksfläche des Oktaeders geklebt. Sie behauptet, dass der dann entstehende Körper insgesamt nur 6 Seitenflächen, 11 Kanten und 7 Ecken besitzt. Kann das sein? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 143

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Ein ganz besonderes Datum (Wie-selten-Version)

Im Monoid-Heft 142 stellten wir Euch eine Aufgabe (Mathespielerei III, Seite 21) zu palindromischen Daten. Der 02.02.2020 war ein ganz besonderes Datum, da es sowohl in unserer Schreibweise (Tag, Monat dann Jahreszahl) als auch in anderen Schreibweisen, nämlich im amerikanischen Englisch (zuerst der Monat, dann der Tag und dann das Jahr) und der Schreibweise, die in vielen asiatischen Ländern und Kanada genutzt wird (mit der Reihenfolge Jahr, Monat, Tag) jeweils palindromisch ist.

Karin stellt fest: „Solche Daten sind ja sehr selten. Erst in 121 Jahren wird es so ein Datum wieder geben. Doch wie selten sie wohl wirklich sind?“

Bestimme, wie viele solcher Daten, die in allen drei Schreibweisen palindromisch sind, es mit vierstelligen Jahreszahlen überhaupt gibt.

Bemerkung: Führende Ziffern 0 bei der Jahreszahl sind nicht zulässig, bei Tag und Monat allerdings doch. (MG)

Lösung:

Die drei Datumformate lassen sich allgemein so schreiben:

TT-MM-JJJJ (unsere Schreibweise, im Folgenden TMJ-Schreibweise),
JJJJ-MM-TT (z.B. Asien, Kanada, im Folgenden JMT-Schreibweise),
MM-TT-JJJJ (Amerikanisch-Englisch, im Folgenden MTJ-Schreibweise).

Im Folgenden werden wir das Trennzeichen - weglassen.

Wir beginnen mit unserer TMJ-Schreibweise und schreiben mit verschiedenen Variablen für die einzelnen Stellen, wobei wir ausnutzen, dass das Datum palindromisch werden soll:

$$T_1T_2\,M_1M_2\,J_1J_2J_3J_4 = T_1T_2\,M_1M_2\,M_2M_1\,T_2T_1.$$

Es müssen also $J_1 = M_2$, $J_2 = M_1$, $J_3 = T_2$ und $J_4 = T_1$ gelten.

Dies setzen wir in die JMT-Schreibweise ein:

$$J_1J_2J_3J_4\,M_1M_2\,T_1T_2 = M_2M_1T_2T_1\,M_1M_2\,T_1T_2.$$

Da das Datum auch in dieser Schreibweise palindromisch sein soll, müssen also auch $M_1 = T_1$ und $M_2 = T_2$ gelten, also

$$J_1J_2J_3J_4\,M_1M_2\,T_1T_2 = M_2M_1M_2M_1\,M_1M_2\,M_1M_2.$$

Für unsere TMJ-Schreibweise bedeutet dies dann

$$T_1T_2\,M_1M_2\,J_1J_2J_3J_4 = M_1M_2\,M_1M_2\,M_2M_1M_2M_1.$$

In der MTJ-Schreibweise ist das Datum nun automatisch ebenfalls palindromisch:

$$M_1M_2\ T_1T_2\ J_1J_2J_3J_4 = M_1M_2\ T_1T_2\ M_2M_1\ T_2T_1 = M_1M_2\ M_1M_2\ M_2M_1M_2M_1.$$

Suchen wir nun ein Datum mit dieser Eigenschaft, so müssen wir berücksichtigen, dass M_1M_2 der Monat ist, also in dieser Kombibation nur Werte von 01 bis 12 annehmen kann.

Daher gibt es maximal zwölf solcher Daten, die wir erhalten, wenn wir alle möglichen Ziffernkombinationen für den Monat M_1M_2 einsetzen und das Datum ergänzen. Da beim 10.10.0101 die Jahreszahl eine führende 0 hat, entfällt dieses Datum, sodass es nur elf weltweit palindromische Daten gibt:

01.01.1010	03.03.3030	07.07.7070
11.11.1111	04.04.4040	08.08.8080
02.02.2020	05.05.5050	09.09.9090
12.12.2121	06.06.6060	

Solche weltweit palindromischen Daten sind also wirklich sehr selten (nur elf in den 9000 Jahren mit vierstelligen Jahreszahlen) und es ist etwas Besonderes, dass wir ein solches Datum erleben konnten.

II. Korrespondierende Addition und Subtraktion

Karin rechnet mit Brüchen und macht eine Entdeckung:

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, aber auch $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$,

oder

$\frac{21}{51} = \frac{7}{17}$, aber auch $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$.

Es gilt sogar

$x^2 - 2x = \frac{8x+4}{23}$ und $\frac{x^2-2x+1}{1} = \frac{8x+4+23}{23}$.

Karin stellt also fest: Sind zwei Brüche gleich, so bleiben sie auch gleich,

a) wenn man in beiden Brüchen jeweils zum Zähler den Nenner addiert (bzw. subtrahiert),
b) wenn man in beiden Brüchen jeweils zum Nenner den Zähler addiert (bzw. subtrahiert).

Zeige allgemein, dass diese Entdeckung richtig ist. (nach WJB)

Lösung:

a) Es gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 \iff \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

b) Ist einer der beiden Nenner (und somit beide Nenner) gleich 0, dann ändert sich der Zähler bei der Addition (bzw. Subtraktion) nicht und die Gleichheit bleibt erhalten.

Für Nenner ungleich 0 ergibt sich die entsprechende Beziehung für die Addition (bzw. Subtraktion) des Zählers im Nenner durch Betrachtung der Kehrwerte:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \iff \frac{b}{a} \pm 1 = \frac{d}{c} \pm 1$$
$$\iff \frac{b \pm a}{a} = \frac{d \pm c}{c} \iff \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}.$$

(MG)

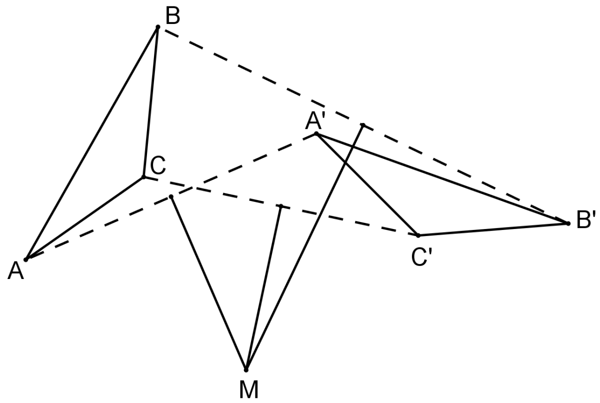
III. Konstruktion des Drehzentrums

ABC und $A'B'C'$ seien zwei kongruente Dreiecke. Diese kann man, wenn die Dreiecke nicht parallelverschoben sind, durch eine Drehung ineinander überführen.

Wie konstruiert man den Drehmittelpunkt M? (WJB)

Lösung:

A und A', bzw. B und B' (sowie auch C und C') müssen auf Kreisen um M liegen. M ist also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AA' und von BB' sowie von CC'.



IV. Eine Summe von Quadratzahlen

Weise nach: Die Summe der Quadrate von fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist keine Quadratzahl.

Tipp: Für jede natürliche Zahl n gilt $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2+2)$.

(H.F.)

Lösung:

Annahme: $5(n^2+2)$ ist eine Quadratzahl.

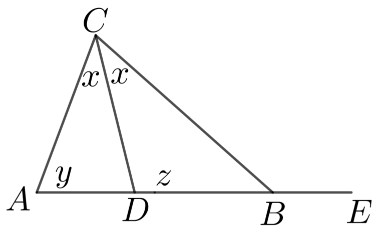
Aus der Annahme folgt, dass dann n^2+2 ein Vielfaches von 5 und mithin die Einerziffer von n^2+2 eine 0 oder eine 5 ist. Nun kommen als Einerziffern von n^2 nur 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 in Frage. Daher ist die Einerziffer von n^2+2 eine der Ziffern 2, 3, 6, 7, 8 oder 1 – keinesfalls aber 0 oder 5: ein Widerspruch.

Die Annahme ist falsch; es gilt die Behauptung.

V. Drei Winkel

Im Dreieck ABC sei AE mit $E \notin AB$ eine Verlängerung von AB und CD mit $D \in AB$ sei die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$.
Begründe: $\sphericalangle DAC + \sphericalangle EBC = 2\sphericalangle BDC$. (H.F.)

Lösung:



Es sei $\sphericalangle ACD = x$, $\sphericalangle DAC = y$ und $\sphericalangle BDC = z$.
Dann gilt im Dreieck CAD, dass $x + y + (180^\circ - z) = 180^\circ$ ist, woraus $z = x + y$ folgt.
Im Dreieck CDB ist dann $x + z + (180^\circ - \sphericalangle EBC) = 180^\circ$, sodass $\sphericalangle EBC = x + z = x + (x + y) = 2x + y$ ist.

Daher ist $\sphericalangle DAC + \sphericalangle EBC = y + 2x + y = 2x + 2y = 2 \cdot (x + y) = 2 \cdot \sphericalangle BDC$.

VI. Wie viele Primzahlen?

Wie viele Primzahlen kann man erhalten, indem man von einer Quadratzahl 1 subtrahiert? (WJB)

Lösung:

Für eine Primzahl p bedeutet die Bedingung $p = n^2 - 1$, dass $n + 1 = p$ und $n - 1 = 1$, also ist $n = 2$ und damit $p = 3$ die einzige Primzahl.

VII. Eine lustige Aufgabe mit einem lustigen Term

Bestimme den Wert des Termes

$$(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot ... \cdot (x - z),$$

indem Du so weit wie möglich vereinfachst. (MG)

Lösung:

Schreiben wir das Ende des Terms etwas ausführlicher

$$(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot ... \cdot (x - w) \cdot (x - x) \cdot (x - y) \cdot (x - z),$$

dann sehen wir, dass dieser Term auch den Faktor $(x - x) = 0$ enthält, also der gesamte Term den Wert 0 hat.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Symmetrische Daten

Im Monoid-Heft 142 stellten wir Euch eine Aufgabe (Mathespielerei III, Seite 21) zu palindromischen Daten. Aber es gibt auch symmetrische Daten. Dabei ignorieren wir, wie auch schon bei den palindromischen Daten, die Punkte und schreiben die Jahreszahl jeweils vierstellig. Führende Ziffern 0 sind bei Tag und Monat erlaubt, bei der Jahreszahl jedoch nicht.

a) Wie viele achsensymmetrische Daten gibt es?

b) Wie viele punktsymmetrische Daten gibt es?

(MG)

II. Letzte Ziffer einer Quadratzahlensumme

Bestimme die letzte Ziffer von

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2020^2.$$

(MG)

III. Gewinnspiel

Auf dem Weihnachtsmarkt wird folgendes Gewinnspiel angeboten:

> Von drei Säckchen enthält eines zwei goldene Sterne, eines zwei rote Sterne und das dritte je einen goldenen und einen roten Stern. Leider sind die Schildchen mit den Aufschriften „gold", „rot" und „gemischt" so vertauscht, dass keine der Aufschriften mehr stimmt. Ein Spieler darf aus einem der Säckchen einen Stern entnehmen und betrachten. Dann muss er sagen, in welchem Säckchen die beiden goldenen Sterne sind. Ist seine Vorhersage richtig, gewinnt er eine Schutzengel-Figur.

Aylin möchte am Gewinnspiel teilnehmen. Aus welchem Säckchen sollte sie einen Stern ziehen, um sicher zu gewinnen? (nach HF)

IV. Teilbar durch die Quersumme

Tatjana beschäftigt sich mit Quersummen. Sie weiß auch, dass die Quersumme helfen kann, die Teilbarkeit von Zahlen zu untersuchen.

Doch auch darüber hinaus macht sie weitere Entdeckungen: 2020 hat die Quersumme 4 und lässt sich ohne Rest durch ihre Quersumme teilen, bei der Zahl 2021 mit Quersumme 5 geht das nicht.

Sie beginnt weitere Untersuchungen: „Wie viele zweistellige Zahlen lassen sich ohne Rest durch ihre Quersumme teilen?" – Zu welchem Ergebnis wird sie kommen?

(MG)

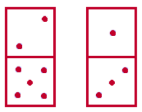
V. Frage nach der Uhrzeit

Um 10.12 Uhr fragt der Mathelehrer Hempel seine Schüler: Wieviel Uhr ist es in 2020202020 Stunden?

Bemerkung: Wir ignorieren hier die Umstellung zwischen Winter- und Sommerzeit. (H.F.)

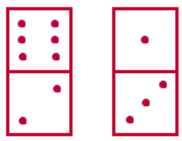
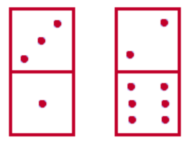
VI. Bruchrechnen mit Dominosteinen

Lina und Thilo üben gemeinsam Bruchrechnen und weil sie gerne spielen, nutzen sie dazu ein Dominospiel, wobei sie alle Dominosteine mit einer 0 aussortiert haben. Sie ziehen zwei Dominosteine und legen diese aufrecht nebeneinander, also so, dass jeweils die beiden Zahlen des Steines übereinanderliegen. Diese Steine stellen dann Brüche dar und Lina und Thilo berechnen die Summe und wenn möglich auch die Differenz der beiden Brüche.



Beispiel: Aus den Dominosteinen der nebenstehenden Abbildung ergeben sich die Aufgaben $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ und $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$.

Lina und Thilo sitzen einander gegenüber. Sie haben zwei Steine gezogen und auf den Tisch gelegt.

Lina sieht:  Thilo sieht: 

a) Als sie jeweils die Summe und die Differenz zu der für sie sichtbaren Aufgabe berechnen, machen Lina und Thilo eine Entdeckung. Welche?

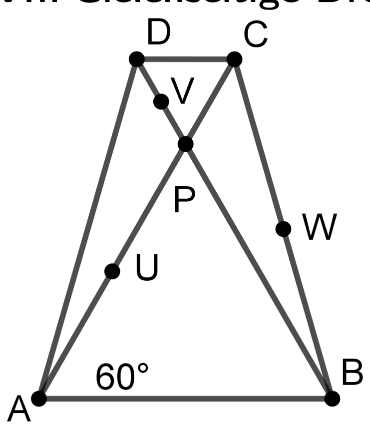
b) Es gibt noch andere Dominostein-Kombinationen mit dieser Eigenschaft. Gib alle diese Kombinationen an.

Hinweis: Dominosteine tragen auf den beiden Hälften der Steine eine der Zahlen von 0 bis 6 und es gibt zu jeder möglichen Kombination einen Stein.

c) Formuliere nun eine Regel: Wie muss die Beschriftung der beiden Steine zusammenhängen, damit diese Entdeckung gemacht werden kann?

(MG)

VII. Gleichseitige Dreiecke



In einem achsensymmetrischen Trapez $ABCD$ mit $AB||CD$ ist $|\sphericalangle BAC| = 60°$ groß. Es sei P der Schnittpunkt der Diagonalen im Trapez und U, V, W seien die Mittelpunkte der Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PD}$, $\overline{BC}$. Begründe, dass gelten:

a) $\triangle ABP$ und $\triangle CDP$ sind gleichseitig,

b) $\triangle UVW$ ist ebenfalls gleichseitig. (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1281: Lösung einer Gleichung

Bestimme die Lösung der Gleichung

$$\frac{x-1}{2020} - \frac{x-2}{2019} + \frac{x-3}{2018} - ... + \frac{x-2019}{2}-\frac{x-2020}{1} = 0.$$

(MG)

Aufgabe 1282: Nullstellenprodukt

Bestimme das Produkt aller Nullstellen der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \sqrt{\big|(5+x)\cdot(2-|x|)\cdot|x-101|\big|}.$$

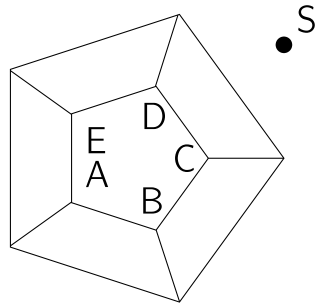
(MG)

Aufgabe 1283: Teilbarkeit durch 271

Wenn die 5-ziffrige Zahl $n = abcde$ durch die Primzahl 271 teilbar ist, ist damit auch die Zahl $m = bcdea$ durch 271 teilbar? (H.F.)

Aufgabe 1284: Ein Rundweg-Polygon

Beweise oder widerlege die Behauptung:
Es gibt einen geschlossenen im Punkt S beginnenden und endenden Weg W, der jede Seite eines jeden der sechs Polygone der Figur *genau einmal* zwischen den Eckpunkten der jeweiligen Seite kreuzt. (H.F.)



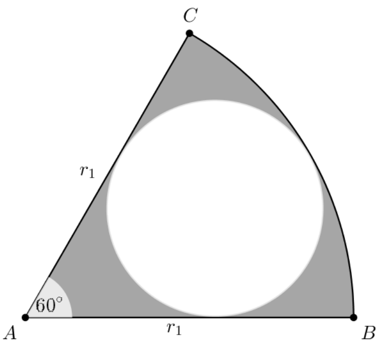
Aufgabe 1285: (K)eine Frage des Alters

Von den folgenden Aussagen über das Alter von drei verschieden alten Kindern ist genau eine falsch:

(1) Anna ist älter als Bettina.
(2) Christa ist älter als Anna.
(3) Christa ist jünger als Bettina.
(4) Bettina und Christa sind zusammen doppelt so alt wie Anna.

Wer von den Dreien ist die Jüngste und wer ist die Älteste? (HF)

Aufgabe 1286: Kreis im Sektor



Es sei k_1 ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius r_1; ferner sei $s = ABC$ ein Sektor von k_1 mit einem Winkel von $60°$ beim Punkt A.
In den Sektor s sei ein kleiner Kreis k_2 gezeichnet, der die Strecken AB und AC, sowie den Bogen BC berührt.
Wie groß ist die schraffierte Fläche? (H.F.)

Aufgabe 1287: Eine Summe aus Quadratzahlen

Die Zahlen 1, 2, 3, ..., n seien in beliebiger Reihenfolge mit c_1, c_2, c_3, ..., c_n bezeichnet.

Weise nach, dass dann $(c_1 + 1)^2 + (c_2 + 2)^2 + (c_3 + 3)^2 + ... + (c_n + n)^2$ stets eine gerade Zahl ist. (H.F.)

Aufgabe 1288: Wahrscheinlich stumpfwinklig

E_1, E_2 und E_3 seien zufällig gewählte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

a) Es sei n gerade, also $n = 2m$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bilden E_1, E_2 und E_3 ein stumpfwinkliges Dreieck?
b) Beantworte die gleiche Frage für ungerades $n = 2m + 1$.
c) Beantworte die gleiche Frage, wenn das n-Eck von n auf einem Kreis zufällig gewählten Punkten gebildet wird. (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 143

Klassen 9–13

Aufgabe 1274: Endziffern von Potenzen

a) Berechne die letzte Ziffer der Summe

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2020}.$$

b) Berechne die letzten vier Ziffern der Zahl 2^{2020}. (MG)

Lösung:

a) Berechnen wir die ersten 2er-Potenzen, so erhalten wir $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, ... Wir sehen also, dass sich die Einerziffer der 2er-Potenzen mit Periodenlänge 4 wiederholen und immer 2, 4, 8, 6 sind.

Wegen $2020 : 4 = 505$ wiederholt sich diese Periode also insgesamt 505-mal. Daher ist die gesuchte letzte Ziffer der Summe gleich der Einerziffer von $(2+4+8+6) \cdot 505 = 20 \cdot 505 = 10100$. Die letzte Ziffer ist also eine 0.

b) Wir betrachten nur die Reste der Zahlen bei der Division durch 10000. Dafür schreiben wir kurz mod 10000. Es gilt dann $a \bmod 10000 \cdot b \bmod 10000 \equiv ab \bmod 10000$, wobei wir bei ab auch ggf. zum Rest bei der Division durch 10000 übergehen und Vielfache von 10000 ignorieren.
Nun sind

$$\begin{aligned} 2^{10} &= 1024 \\ 2^{20} &= \left(2^{10}\right)^2 = 1024^2 \equiv 8576 \bmod 10000 \\ 2^{40} &= \left(2^{20}\right)^2 \equiv 8576^2 \equiv 7776 \bmod 10000 \\ 2^{80} &= \left(2^{40}\right)^2 \equiv 7776^2 \equiv 6176 \bmod 10000 \\ 2^{160} &= \left(2^{80}\right)^2 \equiv 6176^2 \equiv 2976 \bmod 10000 \\ 2^{320} &= \left(2^{160}\right)^2 \equiv 2976^2 \equiv 6576 \bmod 10000 \\ 2^{640} &= \left(2^{320}\right)^2 \equiv 6576^2 \equiv 3776 \bmod 10000 \\ 2^{1280} &= \left(2^{640}\right)^2 \equiv 3776^2 \equiv 8176 \bmod 10000. \end{aligned}$$

Wegen $2020 = 1280 + 640 + 80 + 20$ gilt

$$\begin{aligned} 2^{2020} &= 2^{1280+640+80+20} \\ &= 2^{1280} \cdot 2^{640} \cdot 2^{80} \cdot 2^{20} \\ &\equiv 8176 \cdot 3776 \cdot 6176 \cdot 8576 \\ &\equiv 2576 \cdot 5376 \\ &\equiv 8576 \bmod 10000. \end{aligned}$$

Die letzten vier Ziffern von 2^{2020} sind also 8576.

Aufgabe 1275: Niemals ein Teiler?

Warum ist $1000^n + 1$, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, niemals ein Teiler von $2020^n - 1$? (HF)

Lösung:

Wenn a ein Teiler von b ist, dann schreiben wir $a|b$.
Es sei $z := 1000^n + 1$.
Annahme: Es gilt $z|(2020^n - 1)$ für ein $n \geq 1$.
Dann folgt $z|(2020^n - 1) + (1000^n + 1)$, also $z|2020^n + 1000^n$ und schließlich $z|10^n(202^n + 100^n)$.
Da 10^n nur die Primfaktoren 2 und 5, z bei Division durch diese Zahlen aber stets den Rest 1 hat, kann z kein Teiler von 10^n sein. Also gilt $z|(202^n + 100^n)$. Nun ist aber $202^n + 100^n < 2 \cdot 202^n < 404^n < 1000^n + 1$, sodass $z = 1000^n + 1$ kein Teiler von $202^n + 100^n$ ist – ein Widerspruch, die Annahme ist falsch.

Aufgabe 1276: Ansteckung beim Tanzen

Am Montag treffen sich 100 Personen, darunter Kim und Maria, zu einer Tanzveranstaltung. Maria kommt mit einer ansteckenden Krankheit. Bei der Tanzveranstaltung gibt es regen Austausch und für jede der 99 anderen Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit sich anzustecken 10 %. Wir nehmen an, dass die Ansteckungen unabhängig voneinander erfolgen. Eine am Montag infizierte Person kann am Montag selber die Krankheit noch nicht weitergeben. Bei einer zweiten Tanzveranstaltung am Freitag (mit denselben 100 Personen) sind bereits alle infizierten Personen auch selber ansteckend. Wir nehmen an, dass jeder Kontakt von einer ansteckenden Person mit einer noch nicht infizierten Person wieder mit Wahrscheinlichkeit 10 % zu einer Infektion führt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Kim nach der Veranstaltung am Freitag infiziert? (AKI)

Hinweis: Wir nehmen vereinfachend an, dass sich niemand der Tänzerinnen und Tänzer von Montag bis Freitag bei anderen Gelegenheiten ansteckt, sondern dass die Ansteckungen nur beim Tanztraining erfolgen.

Lösung:

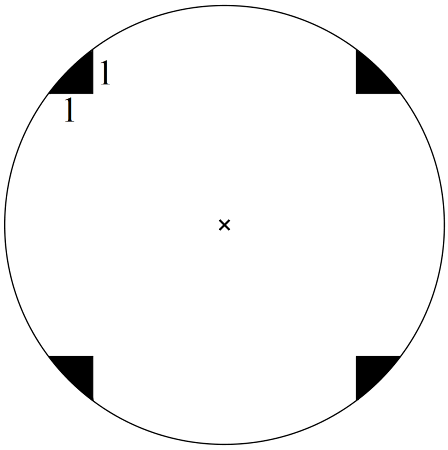
Wir nummerieren die Personen von 1 bis $n = 100$ durch, so dass Maria die Nummer 1 bekommt und Kim die Nummer 2. Für $i = 2, \dots, 100$ sei A_i das Ereignis, dass Person i sich am Montag infiziert. Nach Voraussetzung sind die Ereignisse unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $P(A_i) = 0{,}1$. Da wir nicht wissen, wer am Freitag schon ansteckend erscheint, stellen wir uns vor, dass für jede Person $i = 1, 3, 4, \dots, n$ eine unfaire Münze geworfen wird, die mit Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}1$ Kopf zeigt. In diesem Fall würde i die Infektion an Kim weitergeben, wenn i am Freitag infiziert wäre. Sei B_i das Ereignis, dass die Münze Kopf zeigt. Wir bekommen nun

$$
\begin{aligned}
&P(\text{Kim ist nach Freitag infiziert})\\
=&1 - P(\text{Kim ist nach Freitag nicht infiziert})\\
=&1 - P\big((A_2 \text{ und } B_1 \text{ treten nicht ein}) \text{ und}\\
&\qquad\qquad (A_i \text{ oder } B_i \text{ tritt nicht ein}) \text{ für jedes } i = 3, \dots, n\big)\\
=&1 - P\left(A_2 \text{ tritt nicht ein}\right) \cdot P\left(B_1 \text{ tritt nicht ein}\right)\\
&\qquad\qquad \cdot \prod_{i=3}^{n} P\left(A_i \text{ oder } B_i \text{ tritt nicht ein}\right)\\
=& 1 - (1-p)^2(1-p^2)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Mit $n = 100$ und $p = 0{,}1$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{Kim ist nach Freitag infiziert}) \approx 0{,}697.$$

Aufgabe 1277: Kapellenneubau

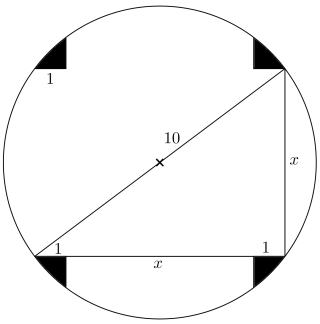


Für eine Kapelle hat sich Architekt Baugern eine kreisförmige Grundfläche mit vier ausgesparten „Ecken" ausgedacht, sodass mit etwas Phantasie ein Kreuz zu erkennen ist.
Wie groß ist die Fläche der Kapelle, wenn der Kreis einen Durchmesser von 10 m hat und die beiden Seiten, die eine „Ecke" bilden, je 1 m lang und senkrecht zueinander sind?

Beachte: Die Ecken sind keine (rechtwinkligen) Dreiecke. $A = \pi \cdot 5^2 - 2$ ist eine Annäherung, gesucht ist aber der exakte Wert.

(Christoph Sievert, Bornheim)

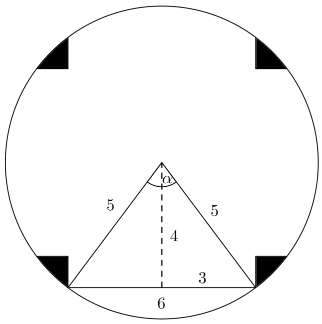
Lösung:



Wendet man auf das eingezeichnete Dreieck den Satz des Pythagoras an, so gilt

$$x^2 + (x+2)^2 = 10^2.$$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = -8$ (die jedoch entfällt).



Mit Hilfe der Trigonometrie lässt sich der Mittelpunktswinkel α berechnen, zum Beispiel $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 73{,}74°$.
Die Fläche der Kapelle setzt sich nun zusammen aus zwei Dreiecken wie in der ersten Abbildung der Lösung, zwei Rechtecke (oben und unten zwischen den „Ecken") sowie vier (gleich große) Kreisabschnitte.
Die einzelnen Flächeninhalte betragen:

$$\begin{aligned}
A_\triangle &= \frac{1}{2} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 6\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{m}^2,\\
A_{\text{Rechteck}} &= 6\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}^2,\\
A_{\text{Kreisabschnitt}} &= \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{180°} \cdot \pi - \sin\alpha\right)\\
&= \frac{(5\,\mathrm{m}^2)^2}{2} \cdot \left(\frac{73{,}74°}{180°} \cdot \pi - \sin(73{,}74°)\right) \approx 4{,}09\,\mathrm{m}^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Gesamtfläche

$$\begin{aligned} A_{\text{Kapelle}} &= 2A_{\triangle} + 2A_{\text{Rechteck}} + 4A_{\text{Kreisabschnitt}} \\ &\approx 2 \cdot 24\,\text{m}^2 + 2 \cdot 6\,\text{m}^2 + 4 \cdot 4{,}09\,\text{m}^2 \approx 76{,}35\,\text{m}^2. \end{aligned}$$

Die größe der Kapellenfläche beträgt also $A \approx 76{,}35\,\text{m}^2$.

Aufgabe 1278: Pflastersteinpflasterung

Am Martin-Mettler-Gymnasium in Hausdorf soll der Unterstufen-Schulhof neu gepflastert werden. Der Schulhof ist rechteckig und es sollen rechteckige Pflastersteinen der Größe $75\,\text{cm} \times 50\,\text{cm}$ verlegt werden. Die Breite des Platzes ist um $40\,\%$ kleiner als die Länge. Die Bauarbeiter sind nach ihrer Arbeit erschöpft, immerhin haben sie 4000 Platten verlegt.

Wie lang und breit ist der Schulhof? (MG, nach einer Idee von WJB)

Lösung:

Wir bezeichnen die Länge des Schulhofes mit l und die Breite mit b.

Ein Pflasterstein bedeckt einen Flächeninhalt von $75\,\text{cm} \cdot 50\,\text{cm} = \frac{3}{4}\,\text{m} \cdot \frac{1}{2}\,\text{m} = \frac{3}{8}\,\text{m}^2$.

Die insgesamt 4000 Platten ergeben dann zusammen einen Flächeninhalt von $4000 \cdot \frac{3}{8}\,\text{m}^2 = 1500\,\text{m}^2$.

Dies ist der Flächeninhalt des Schulhofes, für dessen Breite $b = 0{,}6 \cdot l$ gilt. Damit gilt für den Flächeninhalt des Schulhofes

$$1500\,\text{m}^2 = l \cdot b = l \cdot 0{,}6l = 0{,}6l^2 = \frac{3}{5}l^2.$$

Daraus folgt $l^2 = \frac{5}{3} \cdot 1500\,\text{m}^2 = 2500\,\text{m}^2$ und somit beträgt die Länge des Schulhofes $l = \sqrt{2500\,\text{m}^2} = 50\,\text{m}$ und die Breite $b = 0{,}6 \cdot l = 0{,}6 \cdot 50\,\text{m} = 30\,\text{m}$.

Der Schulhof ist also 50 m lang und 30 m breit. (MG)

Aufgabe 1279: Zahlen gesucht

Finde ganze Zahlen a und b mit $a + b = 81$ derart, dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ bis auf einen Fehler von weniger als 0,05 gleich 1,3 ist. (WJB)

Lösung:

$1{,}3^2 = 1{,}69$. Also muss $\frac{a}{b}$ in der Nähe von 1,69 liegen. Mit ein bisschen Ausprobieren kommt man schnell zu $\frac{51}{30} = 1{,}7$, und es ist $\sqrt{1{,}7} = 1{,}3038...$. Damit ist $a = 51$, $b = 30$ die Lösung.

Aufgabe 1280: Minimalwert eines Termes

Bestimme ohne Differentialrechnung den minimalen Wert des Terms

$$T = \frac{1 + 9x^4}{x^2}.$$

(HF)

Lösung:

Es ist $T = \frac{1+9x^4}{x^2} = \left(\frac{1}{x} - 3x\right)^2 + 6$.

Da die quadratische Klammer niemals negativ ist, hat sie den kleinsten Wert für $\frac{1}{x} - 3x = 0$, also für $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dann hat aber auch T für $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ den minimalen Wert und der beträgt $T = \frac{1+9\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6$.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Färbungen des Dodekaeders

Die meisten Würfel für Spiele sind sechsseitig, also Kuben. Für manche Spiele werden aber auch Würfel mit mehr oder weniger Flächen verwendet. Wir wollen hier einen zwölfseitigen Würfel (Dodekaeder) betrachten. Der Würfelhersteller möchte die Würfel unterscheidbar machen, indem er die Flächen mit einem transparenten Lack überzieht, sodass der Zahlenwert der Fläche sichtbar bleibt. Er hat vier verschiedene Lackfarben zur Verfügung und kann jede der zwölf Flächen einzeln lackieren. Dabei sollen keine zwei benachbarten Flächen die gleiche Farbe erhalten. Wie viele unterschiedliche Würfel können so erzeugt werden?

Schreibe ein Programm, das dieses kombinatorische Problem durch Ausprobieren löst.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2021 einschicken, denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Die Aufgabe aus Heft 141 und 142 wurde bereits in Heft 143 aufgelöst. Die Auflösung der Aufgabe aus Heft 143 wird wie gewohnt in Heft 145 erscheinen.

Präsidentschaftswahl

von Achim Klenke

In einem unbekannten Land
vor gar nicht allzu langer Zeit
war ein Politiker bekannt,
von dem sprach alles weit und breit.

Aufgabe

In einem fernen Land werden die Präsidentschaftswahlen auf die folgende Weise durchgeführt: Es gibt zwei Kandidaten für das Präsidentenamt – den amtierenden Präsidenten und den Herausforderer. Es gibt fünfzig Wahlbezirke. In jedem Wahlbezirk gibt es 100 Wahlberechtigte, die auch tatsächlich jede und jeder eine Stimme für einen der beiden Kandidaten abgeben. Wer die Mehrheit der abgegebenen Stimmen in einem Wahlbezirk erreicht, hat diesen Wahlbezirk gewonnen. Der Kandidat, der mindestens 26 Wahlbezirke gewinnt, wird neuer Präsident. Gewinnt keiner der beiden Kandidaten 26 Wahlbezirke, so wählt das Parlament den neuen Präsidenten. Auf Grund der Mehrheitsverhältnisse im Parlament würde in diesem Fall der bisherige Präsident gewählt.
Nun ist der bisherige Präsident nicht so beliebt, wie der Herausforderer, und er erhält in jedem Wahlbezirk 20 Stimmen weniger als der Herausforderer – also 40 Stimmen. Der Herausforderer erhält 60 Stimmen. Offenbar gewinnt der Herausforderer daher alle 50 Wahlbezirke und wird neuer Präsident. Deshalb ändert der bisherige Präsident während der Wahl das Wahlrecht und erhält nun das Recht, einzeln in jedem der Wahlbezirke die Auszählung der Stimmen gerade dann zu stoppen, wenn er dort vorne liegt. In diesem Fall hätte er den entsprechenden Wahlbezirk gewonnen. Wir nehmen an, dass die Stimmen in zufälliger Reihenfolge gezählt werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der bisherige Präsident nach den neuen Regeln einen gegebenen Wahlbezirk?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der bisherige Präsident nach dem neuen Wahlrecht wieder zum Präsidenten gewählt (entweder von den Wählern oder vom Parlament)?

Lösung

a) Wir betrachten einen festen Wahlbezirk. Seien $n = 100$ und $k = 40$. Wir nehmen für den Moment an, dass die Stimmen alle der Reihe nach bis zum Ende ausgezählt werden und nennen die Ergebnisse $X_1, X_2, \dots, X_n$. Dabei steht $X_i = 1$ für eine Stimme für den Präsidenten und $X_i = -1$ für eine Stimme für den Herausforderer. Insgesamt haben wir also $X_1 + X_2 + ... + X_n = 2k - n = -20$. Wenn es nun ein (zufälliges) m gibt, so dass $X_1 + X_2 + ... + X_m > 0$ ist, kann der Präsident die Auszählung stoppen und gewinnt den Wahlbezirk. Wenn es ein solches m gibt, dann gibt es auch ein kleinstes solches m, und für dieses gilt dann

$$X_1 + X_2 + ... + X_m = 1. \tag{$*$}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit existiert nun ein solches m?
Bezeichnen wir mit $A := \{i : X_i = 1\} \subset \{1, ..., n\}$ die Menge der Indizes von Wahlzetteln für den aktuellen Präsidenten, dann gilt $|A| = k$, und es gibt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Möglichkeiten für die Wahl von A, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Bezeichnen wir mit

$$B := \{A : \text{ es gibt ein } m, \text{ so dass } (*) \text{ gilt}\}.$$

Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{|B|}{\binom{n}{k}}.$$

Wir wenden nun einen Trick an. Angenommen, wir haben ein $A \in B$ mit zugehörigem m. Dann setzen wir

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} X_i, & \text{falls } i \le m, \\ -X_i, & \text{falls } i > m. \end{cases}$$

Auf diese Weise bekommen wir

$$\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_n = 2 + n - 2k$$

Nun entspricht jedes $A \in B$ also genau einer Möglichkeit, die $\tilde{X}_i$ anzuordnen. Unter den $\tilde{X}_i$ gibt es aber genau $n+1-k$ Einsen. Also gibt es für die Anordnung genau $\binom{n}{n+1-k} = \binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten. Es gilt also

$$|B| = \binom{n}{k-1}.$$

Mit unseren Zahlen $n = 100$ und $k = 40$ bekommen wir also

$$p = \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!\, k!\, (n-k)!}{n!\, (k-1)!\, (n-k+1)!} = \frac{k}{n-k+1} = \frac{40}{61} \approx 65{,}6\,\%.$$

b) Die Anzahl der Wahlbezirke, die der bisherige Präsident gewinnt, ist binomialverteilt mit Parametern $n = 50$ (Anzahl der Versuche) und $p = \frac{40}{61}$ (Erfolgswahrscheinlichkeit). Der bisherige Amtsinhaber braucht 25 Erfolge, da er bei Gleichstand durch Parlamentswahl gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit W, dass der Amtsinhaber gewinnt ist also

$$W = \sum_{i=25}^{50} \binom{50}{i} \left(\frac{40}{61}\right)^i \left(\frac{21}{61}\right)^{50-i} = 99{,}2\,\%.$$

Ein Weg zu großen Primzahlen

von Hartwig Fuchs

Große Primzahlen

Professor Quaoar ist ein Primzahl-Fan; insbesondere interessiert er sich für große Primzahlen und für die Methoden zu ihrer Entdeckung. Talentino, ein sehr wissbegieriger seiner Studenten, fragt ihn: Wodurch unterscheiden sich denn große Primzahlen von den kleinen?

Prof. Quaoar: Primzahlen sind ungezähmte Gesellen. Ihr Auftreten in der Menge der natürlichen Zahlen scheint keiner Regel zu folgen – zumindest hat man bis heute keine Regel gefunden, mit der man schnell entscheiden kann, ob eine Zahl prim oder nicht prim ist.

Bei kleinen Primzahlen N ist das unproblematisch: Die systematische Division von N durch jede Primzahl $\leq \sqrt{N}$ führt stets zu einer Entscheidung.[1] Diese Vorgehensweise[2] verbietet sich jedoch bei großen Zahlen N wegen des dabei erforderlichen immensen numerischen Aufwandes.

Talentino: Lässt sich das durch ein Beispiel verdeutlichen?

Prof. Quaoar: Gewiss. Und da ich diese Frage voraussah, habe ich auch ein Beispiel vorbereitet. Hier ist es:

Beispiel 1

Die bis dahin größte Primzahl $N = 2^{82\,589\,931} - 1$ mit $24\,862\,047$ Ziffern wurde gegen Ende des Jahres 2018 gefunden.

Hätte man versucht, mit der Brute-Force-Methode N als Primzahl nachzuweisen, dann hätte man dazu mehr als $10^{7\,000\,000}$ Divisionen von N durch die Primzahlen $\leq \sqrt{N}$ benötigt. Denn nach einer berühmten Näherungsformel von Carl Friedrich Gauß für die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leq x$ gilt: $\pi(x) \approx \ln(x)$, sodass für $x = \sqrt{N}$ gilt $\pi(\sqrt{N}) \approx \frac{\sqrt{N}}{\ln(\sqrt{N})} \approx 10^{7\,628\,989}$.

Prof. Quaoar fährt fort: Um Situationen wie die im Beispiel beschriebene zu meistern, haben Mathematiker im Laufe der Zeit immer effektivere, damit aber auch komplexere Methoden entwickelt. Ich kenne allerdings eine simple Entscheidungsregel, die zudem ganz elementar begründbar ist; man benötigt dazu nur eine gewisse Übung im Umgang mit Ungleichungen.

[1] Ist t ein Teiler von N mit $t > \sqrt{N}$, dann gilt $N = s \cdot t$ mit einem $s < \sqrt{N}$. Dann macht die Division von N durch s die Division von N durch t überflüssig.

[2] Man nennt diese Vorgehensweise die Brute-Force-Methode (=mit roher Kraft)

Ein Algorithmus zu Bestimmung von Nichtprimzahlen

Es sei $N \geq 9$ eine ungerade Zahl[3] und m^2 sei die kleinste Quadratzahl mit $m^2 > N$. Weiter sei F die Folge

(1) F: $m^2 - N, (m+1)^2 - N, (m+2)^2 - N, ..., (m+e)^2 - N$ mit $e = \frac{1}{2}(N - 1 - 2m)$ – woraus folgt, dass $\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - N$ das letzte Element von F ist.

Dann gilt das *Nichtprim-Kriterium*:

(2) Gibt es in der Folge F eine Quadratzahl, dann ist N eine Nichtprimzahl.

Hierzu **Beispiel 2**:
Es sei $N = 2^{15} - 1$. Dann ist $m^2 = 182^2$ die kleinste Quadratzahl $> N$. Die ersten Elemente von $F : 357, 722, 1089, ..., \left(\frac{1}{2}(2^{15} - 1)^2 - (2^{15} - 1)\right)$. Weil $1089 = 33^2$ und 1089 kleiner als das letzte Element von F ist, gilt wegen des Nichtprim-Kriteriums (2): $N = 2^{15} - 1$ ist eine Nichtprimzahl. Tatsächlich ist $N = 7 \cdot 4681$.

Nun zum Beweis des Nichtprim-Kriteriums (2): Zunächst gilt $e \geq 0$. Weil m^2 die kleinste Quadratzahl $\geq N$ ist, ist $(m-1)^2 \leq N$, sodass $m \leq \sqrt{N} + 1$ ist. Daraus folgt mit der Voraussetzung $N \geq 9$ und mit der Folgenvorschrift (1):
$2e = N - 1 - 2m \geq N - 1 - 2(\sqrt{N} + 1) = (\sqrt{N} - 1)^2 - 4 \geq (\sqrt{9} - 1)^2 - 4 = 0.$
Also ist $e \geq 0$.
Es sei nun Q^2 eine in der Folge F vorkommende Quadratzahl. Dann gilt für eine Zahl c mit $0 \leq c \leq e$:

$$Q^2 = (m+c)^2 - N \Rightarrow N = (m+c)^2 - Q^2 = (m+c-Q)(m+c+Q).$$

Wäre nun N eine Primzahl, so wäre $m + c - Q = 1$ und $m + c + Q = N$. Nach Addition dieser beiden Gleichungen hat man $N + 1 = 2m + 2c$. Folglich ist $c = \frac{1}{2}(N + 1 - 2m) > \frac{1}{2}(N - 1 - 2m) = e$, also $c > e$ im Widerspruch zur Definition von c.
Daher ist N eine Nichtprimzahl.

Absicherung des Algorithmus

Talentino: Ich habe einen Einwand. Für mich ist das Kriterium unvollständig: Es könnte doch Nichtprimzahlen geben, bei denen die Folge F keine Quadratzahl enthält.
Prof. Quaoar: Dieser Fall kann nicht eintreten. Ich behaupte:

(3) Ist N eine ungerade Nichtprimzahl und $N \geq 9$, dann enthält die Folge F eine Quadratzahl.

[3] Da Primzahlen (außer 2) immer ungerade sind und hier große Primzahlen untersucht werden sollen, ist diese Einschränkung $N \geq 9$ unerheblich.

Nachweis

Es sei $N = rs$ mit $r > 1$, $s > 1$ und r, s seien beide ungerade; m^2 sei die kleinste Quadratzahl $\geq N$ und es sei $C = (m + c)^2 - N$ für eine ganze Zahl c. Dann gilt:

(a) Für $c = \frac{1}{2}(r + s - 2m)$ und $N = rs$ ist C eine Quadratzahl.

(b) Es ist $0 \leq c \leq \frac{1}{2}(N - 1 - 2m) = e$.

Aus (a) und (b) folgt, dass die Quadratzahl C in der Folge F vorkommt.

Zu (a): Für c ist $C = (m + \frac{1}{2}(r + s - 2m))^2 - N = \frac{1}{4}(r + s)^2 - \frac{4}{4}rs = \frac{1}{4}(r - s)^2$. Für das in (a) definierte c ist also C eine Quadratzahl.

Zu (b): Da m^2 die kleinste Quadratzahl $\geq N$ in F ist, gilt $(m - 1)^2 < N$, also $m < \sqrt{N} + 1 = \sqrt{rs} + 1$. Mit der Ungleichung $\sqrt{rs} \leq \frac{1}{2}(r + s)$[4] folgt daraus: $m < \frac{1}{2}(r + s) + 1$ und weil $\frac{1}{2}(r + s)$ eine ganze Zahl ist, gilt sogar $m \leq \frac{1}{2}(r + s)$, sodass $2m \leq r + s$ und mithin $c \geq 0$ ist.

Nach Voraussetzung sind $r \geq 3$ und $s \geq 3$. Dann gilt: $(r - 1)(s - 1) \geq 4$ und daher $rs - (r + s) + 1 \geq 4$, woraus folgt, dass $r + s \leq rs - 3 \leq rs - 1 \leq N - 1$ ist. Also ist $c = \frac{r+s-2m}{2} \leq \frac{N-1-2m}{2} = e$; wie behauptet.

Prof. Quaoar fasst nun noch (2) und (3) zusammen zu dem Kriterium:

(4) Ist $N \geq 9$ eine ungerade Zahl und enthält die Folge F eine Quadratzahl, dann ist N eine Nichtprimzahl. Hiervon gilt auch die Umkehrung. Daher ist dann und nur dann N eine Primzahl, wenn F keine Quadratzahl enthält.

Prof. Quaoar spricht's und will damit den kleinen Ausflug ins Reich der Primzahlen beenden. Doch der Student Talentino hat noch eine Frage: Stellt das Kriterium (4) einen Fortschritt gegenüber der Brute-Force-Methode dar – und wenn ja: wieso?

Prof. Quaoar: Ich sehe den Vorteil von Kriterium (4) darin: Wenn man wissen möchte, ob eine große Zahl – etwa eine Zahl N wie in Beispiel 1 – prim ist oder nicht, dann muss man zu einer Entscheidung mit der brute force-Methode alle Primzahlen $\leq \sqrt{N}$ berechnen, was im Allgemeinen einen nicht vertretbaren Aufwand erfordert; dagegen ist beim Kriterium (4) nur die eine Quadratzahl m^2 zu bestimmen, um mit ihr die Elemente der Folge F – soweit sie überhaupt benötigt werden – zu berechnen.

4 Kurzer Beweis der Ungleichung: Für $r \geq 0, s \geq 0$ ist $(\sqrt{r} - \sqrt{s})^2 \geq 0 \Rightarrow r - 2\sqrt{r}\sqrt{s} + s \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(r+s) \geq \sqrt{rs}$

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 4

Scherenschnitte im neuen Jahr

Ursprünglich hattest Du $3 + 1$ Papierstücke. Jedes Mal, wenn ein Papierstück zerschnitten wird, erhöht sich die Anzahl der vorhandenen Papierstücke um 3. Ganz gleich, wie viele Papierstücke Du also zerschneidest, die ursprüngliche Anzahl der Papierstücke erhöht sich dadurch um ein Vielfaches von 3. Die Anzahl der vorhandenen Papierstücke ist also stets von der Form Vielfaches von $3+1$. Wegen $2021 = 3 \cdot 673 + 2$ ist 2021 aber nicht von der nötigen Form – so dass man durch den Zerschneidungsprozess niemals 2021 Papierstücke erhalten kann.

Ein Nullen-Problem

Unter den zweistelligen Zahlen gibt es neun gesuchte Zahlen mit einer Ziffer 0, nämlich 10, 20, ..., 90.

Unter den dreistelligen Zahlen gibt es 19 Zahlen mit von 100 bis 199, nämlich 100, 101, . . . , 109, 110, 120, . . . , 190.

Ebenso gibt es jeweils 19 Zahlen im Intervall von 200 bis 299 usw. bis schließlich zum Intervall von 900 bis 999.

Also gibt es $9 \cdot 19$ der gesuchten 3-stelligen Zahlen.

Wir betrachten nun die vierstelligen Zahlen. Dort gibt es 100 Zahlen von 1000 bis 1099, nämlich 1000, 1001, . . . , 1099.

Wie bei den dreistelligen Zahlen finden wir 19 Zahlen in den Intervallen von 1100 bis 1199 und so weiter bis zu den 19 Zahlen im Intervall von 1900 bis 1999.

Also gibt es $100 + 9 \cdot 19$ gesuchte Zahlen von 1000 bis 1999.

Weiter gibt es noch 21 Zahlen von 2000 bis 2020, nämlich 2000, 2001, 2002, . . . , 2020.

Insgesamt gibt es also $9 + 9 \cdot 19 + 100 + 9 \cdot 19 + 21 = 472$ Zahlen mit einer Ziffer 0 unterhalb von 2021.

Zahlen mit 2021 Teilern

Jede Primzahlpotenz p^{2020} einer der unendlich vielen Primzahlen $p = 2, 3, 5, \ldots$ hat die 2021 Teiler $1 = p^0$, $p = p^1$, p^2, p^3, . . . , p^{2020}. Also gibt es unendlich viele natürliche Zahlen mit genau 2021 Teilern.

Zeitlich begrenzt bemerkenswerte Quersumme

Mit $Q(n)$ sei die Quersumme der natürlichen Zahl n bezeichnet. Dann gilt

$$Q(7 \cdot 10^{224} - 2) = Q(6\,\underbrace{999\ldots99}_{\text{223 Ziffern 9}}\,8) = 6 + 223 \cdot 9 + 8 = 2021.$$

Besondere Teilbarkeiten

a) Für eine ungerade natürliche Zahl n und zwei beliebige positive reelle Zahlen ist

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... + y^{n-1}).$$

Setze darin $n = 2020$, $x = 2021$ und $y = 1$ ein. Dann folgt: $2021^{2020} + 1$ ist ohne Rest durch $2021 + 1 = 2022$ teilbar.

b) Für eine gerade natürliche Zahl n und zwei beliebige positive reelle Zahlen ist

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1}).$$

Setze darin $n = 2021$, $x = 2020$ und $y = 1$ ein. Dann erhältst Du: $2020^{2021} - 1$ ist ohne Rest durch $2020 - 1 = 2019$ teilbar.

Verschlüsselte Botschaft

Die Ziffern 1 und 7 kommen zehnmal bzw. achtmal vor. Versuchsweise setzen wir daher gemäß der angegebenen Buchstabenhäufigkeit 1 = E und 7 = N.
Das zweimal vorkommende Trippel 147 könnte dann 147 = ESN oder 147 = EIN lauten. Wählen wir 4 = I, dann sollte für die dritthäufigste Zahl 9 gelten: 9 = S. Aus der fünften Zeile folgt: Da die Kombination 197 = ESN im Deutschen sehr selten ist, wird sie wohl ein Wortende ES und den Anfangsbuchstaben eines Wortes der nächsten Zeile sein; dann hätten wir ...1971819... = ...ES NE8ES... , also 8 = U. Aus diesen fünf Buchstaben-Zuordnungen ergibt sich nun leicht der Lösungssatz:

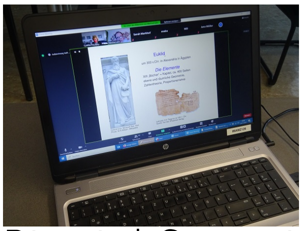
MONOID WUENSCHT ALLEN SEINEN LESERN EIN GUTES NEUES JAHR.

Monoid-Feier trotz(t) Corona
Jahresfeier mit Preisvergabe erhält viel Lob

Alle Jahre wieder treffen die Monoid-Löserinnen und -Löser sowie die Redaktion einander bei der Jahresfeier, in deren Rahmen auch die erfolgreichsten der Löser für ihre Leistungen geehrt werden sollen... Alle Jahre? Nein! Dieses Jahr ist alles anders. Aufgrund der Corona-Pandemie war klar, dass die Feier im üblichen Rahmen nicht möglich sein würde. Doch genau so klar war es der Redaktion auch, dass alle Schüler Ihre verdiente Ehrung bekommen sollen.

Daher fand am 28. November eine virtuelle Jahresfeier statt. Von insgesamt 46 Geräten schalteten sich Löser, Preisträger, Eltern, Lehrer, Redaktionsmitglieder, Freunde und Förderer von Monoid in ganz Deutschland zu. Da sich teilweise auch mehrere Monoidaner vor einem Gerät versammelten, nahmen insgesamt wohl so viele Gäste wie bei den realen Feiern üblich teil.

Dr. Cynthia Hog-Angeloni und Marcel Gruner begrüßten Corona-konform mit Nasen-Mund-Schutz alle Teilnehmer und lobten Ausdauer und Engagement aller Löser beim Knobeln an den Aufgaben.



Anschließend trug Prof. Dr. Manfred Lehn von der Universität Mainz über das Thema „Einblicke in die Nicht-Euklidische Geometrie“ vor.

Dies sind Geometrien, in denen das Parallelenaxiom, dass es in der Ebene zu jeder Geraden und jedem Punkt außerhalb dieser Geraden genau eine Parallele gibt, aufgegeben wird. Eine solche Geometrie ist die sphärische Geometrie, also eine auf der Kugelfläche. Hier gibt es keine Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb der Geraden. Ein interessantes Phänomen ist, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks nicht mehr 180° groß ist sondern stets größer.
Umgekehrte Phänomene ergeben sich in der hyperbolischen Geometrie. Hier gibt es mindestens zwei Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb der Geraden. Eine Konsequenz aus der Änderung im Axiomensystem ist, dass die Innenwinkelsumme von Dreiecken stets kleiner als 180° ist und dass sich die hyperbolische Ebene mit regelmäßigen Fünfecken parkettieren lässt.

An den Festvortrag schloss sich der zweite große Programmpunkt an, nämlich die Ehrung der erfolgreichen Löserinnen und Löser. Viele Preisträger waren virtuell zugeschaltet und auch wenn sie ihre Preise nicht persönlich entgegen nehmen konnten, wurden ihnen Urkunden, Buchpreise, Knobelspiele und Gutscheine gezeigt. Die Preise werden im Anschluss per Post zugeschickt.

Für ihre Leistungen beim Monoid-Mathe-Mittwoch, einer Aktion während der Schulschließung im Frühjahr, und insgesamt hoher Punktzahlen erhielten Philipp Lörcks und Oscar Su jeweils einen Sonderpreis. Der diesjährige Monoid-Fuchs für die jüngeren Schüler bis Klassenstufe 8 ging an Luca Sindel, der Hauptpreis, das Goldene M, an Jonas Glückmann. Ihnen und allen Preisträgern eines 1. bis 4. Preises einen herzlichen Glückwunsch.

Die Feier war sehr gelungen und wurde von vielen Teilnehmern gelobt. Ein großer Dank allen, die zum Gelingen beigetragen haben: Allen Preisträgern und Gästen, Prof. Lehn für seinen Vortrag, der Redaktion, den Preissponsoren und allen Organisatoren vor und hinter den Rechnern.

Die nächste Feier findet am 27. November 2021 statt – und wenn kein Virus der Planung einen Strich durch die Rechnung macht, dann auch wieder real an der Universität in Mainz.

Die Monoid-Preisträger 2020

Das Goldene M: Jonas Glückmann (Gymnasium Oberursel).
Monoid-Fuchs: Luca Sindel (Gymnasium Schrobenhausen).

Sonderpreis: Philipp Lörcks (Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Trier),
Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey)
Forscherpreis: Sönke Schneider (Schloss Hansenberg Geisenheim).

1. Preise: Miriam Büttner, Tu Sam Dang, Jonas Glückmann, Konstantin Herbst, Josefine Kaßner, Philipp Lörcks, Luca Sindel, Oscar Su, Marvin Wenzel, Clemens Zabel.

2. Preise: Lukas Born, Kathrin Borrmann, Nico Brockmeier, Torben Bürger, Paulina Herber, Aleksandra Herbst, Sönke Schneider, Kevin Tran.

3. Preise: Emilie Borrmann, Christian Carda, Mai Linh Dang, Louisa Lukowiak, Dennis Mayle, Nam-Anh Pham, Anna Salaru, Gregor Salaru, Mika Schäfer, Jill Marie Simon, Jan Christian Weber.

4. Preise (Monoid-Jahresabonnements 2021):
Klara Backmann, Katharina Bauer, Jasmin Borrmann, Luis Brinkmann, Anna Lena Drescher, Mya Fuchs, Mark Garkuscha, Annika Giebitz, Alexander Haun, Johannes Kehrberger, Marco Klein, Marlene Maager, Sarah Markhof, Raphael Mayer, Dora Meszaros, Philipp Reis, Jona Richartz, Linus Salloch, Lars Schall, Marvin Weber.

Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2019/2020 herzlich zu ihren Gewinnen.

Der Preis für den Träger des Goldenen M wurde gestiftet vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und dem Institut für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Der Preis für den Träger des Monoid-Fuchs und die Sonderpreise hat Dr. Ralf Genannt gespendet. Der Forscherpreis wurde von Casio gesponsert. Die 1.–3. Preise wurden ebenfalls von den Freunden der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. gestiftet. Die Monoid-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Rubrik der Löserinnen und Löser

Endtand nach Heft 142

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Anton Krempl 11, Marek Moldehn 5, Philipp Reis 21, Jill Marie Simon 35;
Kl. 6: Anna Lena Drescher 24, Gabriel Faber 5, Mya Fuchs 13, Johannes Greis 11;
Kl. 7: Oscar Su 155, Kevin Tran 42, Jan Christian Weber 35;
Kl. 8: Lars Schall 16;
Kl. 10: Lukas Born 46;
Kl. 12: Torben Bürger 59.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:
Kl. 9: Oliver Bill 7.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 5: Linus Salloch 17, Mika Schäfer 29;
Kl. 11: Marvin Wenzel 74.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Konstantin Herbst 78;
Kl. 10: Nico Brockmeier 68, Aleksandra Herbst 67.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 11: Sönke Schneider 52.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium:
Kl. 11: Katharina Hollingshausen 9.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 6: Jabir Aouzi 11, Lia Boyanova 8, Mark Garkuscha 13, Eva Hovadikova 2, Iwais Karimi 11, Sarah Markhof 20, Nam-Anh Pham 30;

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 11: Dennis Mayle 31.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 6: Daniel Waldek 3; **Kl. 9:** Simon Waldek 10.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 5: Anna Salaru 37.

Mainz, Martinus-Schule:
Kl. 3: Johannes Wünstel 1,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 8: Gregor Salaru 33;
Kl. 10: Raphael Mayer 26.

Mainz, Theresianum:
Kl. 11: Clemens Zabel 80.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 7: Jona Richartz 21.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 12: Johannes Kerhberger 25.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jasmin Borrmann 27, Leonard Köhler 4, Leon David Mayer 2, Lotta Pietschmann 9;
Kl. 6: Klara Backmann 25, Luis Brinkmann 19, Annika Giebitz 19, Louisa Lukowiak 38, Dora Meszaros 22, Marvin Weber 19;
Kl. 7: Emilie Borrmann 40;
Kl. 9: Elisabeth Budimann 6, Annika Etz 7, Martin Daniel Schanne 6;
Kl. 10: Kathrin Borrmann 45, Paulina Herber 55, Josefine Kaßner 72;
Kl. 11: Jonas Glückmann 83.

Schifferstadt, Paul-von-Denis-Gymnasium:
Kl. 12: Marlene Maager 12.

Schorndorf, Burg-Gymnasium:
Kl. 10: Christian Carda 38.

Schrobenhausen, Gymnasium:
Kl. 6: Luca Sindel 99.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 5: Mai Linh Dang 30;
Kl. 8: Tu Sam Dang 97;
Kl. 10: Miriam Büttner 82.

Tettnang:
Katharina Bauer 12.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 8: Philipp Lörcks 163.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Lilith Gorecki 3,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 9: Mareike Bühler 9.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 7: Jan Wickenheiser 10;
Kl. 8: Alexander Haun 13;
Kl. 10: Lukas Emmel 7, Marco Klein 12.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 15 € für das Kalenderjahr 2021 auf das MONOID-Konto

  IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18

  zu überweisen (bitte gebt im Verwendungszweck Eure Abonnentennummer und Euren Namen an).

  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da Ihr dann die Überweisung nicht mehr vergessen könnt und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Mainzer Mathematik-Akademie:** Die für 2020 geplante Mainzer Mathe-Akademie (MMA) musste leider ausfallen.

  Die nächste Mainzer Mathe-Akademie ist geplant für die Zeit vom 22. bis 26. September 2021. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:

  `https://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Hofmann
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 40 Heft 144 Dezember 2020

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und dem Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107
Fax: 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid