Jahrgang 40 Heft 145 März 2021

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

**Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)**

1981 erstes Heft durch Martin Mettler

herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

1981 — 2021
40 Jahre MONOID

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins" hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen"* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Mai 2021.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M" und seit 2015 den „Monoid-Fuchs", jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

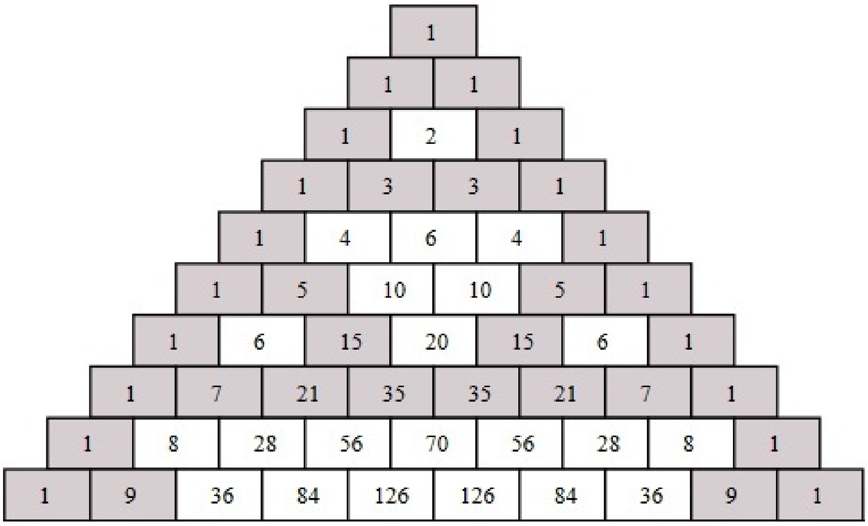
Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Teilbarkeit im Pascalschen Dreieck

von Irina Alberg und Laura Feix

Das Pascalsche Dreieck entsteht, indem man entlang der Ränder eines Dreiecks die Zahl 1 schreibt und dann das Dreieck so auffüllt, dass jeder Eintrag gerade die Summe der direkt darüber stehenden Einträge ist. Das Pascalsche Dreieck spielt in vielen Bereichen der Mathematik eine Rolle und es versteckt sich viel Interessantes darin (einfach mal die Zeilen summieren und schauen, was rauskommt).



In der obenstehenden Grafik ist das Pascalsche Dreieck von der 0-ten bis zur 10-ten Zeile dargestellt. Dabei wurden alle ungeraden Einträge grau und alle geraden Einträge weiß hinterlegt. Das entstehende Muster erinnert an das sogenannte Sierpinski-Dreieck.

Der Entstehungsprozess des *Sierpinski-Dreiecks* ist auf der linken Hälfte des Titels des Monoid-Hefts zu sehen. Die blauen Bereiche entsprechen dann wie oben angedeutet genau den ungeraden Zahlen. Die Figur auf der rechten Hälfte des Posters entsteht auf ähnliche Art und Weise, indem die nicht durch 3 teilbaren Zahlen des Pascalschen Dreiecks rot gekennzeichnet werden.

Beim Überschneiden der beiden Figuren entsteht ein neues Muster, das man als diejenigen Einträge des Pascalschen Dreiecks deutet, die nicht durch 3 oder nicht durch 2 teilbar sind. Die freigelassenen Bereiche entsprechen folglich denjenigen Zahlen, die durch 6 teilbar sind. Es erscheint also eine bildliche Darstellung des sogenannten Chinesischen Restsatzes, der besagt: Sind a und b zwei Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben, so wird eine Zahl genau dann vom Produkt ab geteilt, wenn sowohl a als auch b diese Zahl teilen.

Bemerkung: Das großartige Titelbild haben die Autorinnen im Seminar „Zahl und Bild" bei Prof. Dr. Manuel Blickle an der Universität Mainz entwickelt. Die Umsetzung in die Titelseite hat der Designer Karsten Müller aus Wiesbaden übernommen, wofür ihm unser Dank gilt.

Weitere Bilder aus dem Seminar werden uns auf den Titelseiten unseres Jubiläumsjahres begleiten.

Wann stimmen Summe und Produkt von ganzen Zahlen überein?

von Frank Rehm

Die Zahl 2 spielt in den alten Kulturen eine große Rolle. Nur die frühen Griechen sind hier eine Ausnahme: Sie erwarteten, dass eine Multiplikation mehr ergibt als eine Addition – was für $2+2=2\cdot 2$ jedoch nicht gilt. Ich weiß nicht, ob sie der folgenden Frage nachgegangen sind: Können für zwei ganzen Zahlen Produkt und Summe übereinstimmen?
Lösung: Es gelte $a \leq b$ und $a \cdot b = a + b$, daraus folgt $b(a-1) = a$. Es kann $a = 1$ ausgeschlossen werden, also ist $b = \frac{a}{(a-1)} = 1 + \frac{1}{(a-1)}$, also muss 1 durch $a-1$ teilbar sein, das heißt $a-1=1$ oder $a-1=-1$, daraus ergeben sich als Lösungen die Zahlenpaare $(a,b) = (2,2)$ und $(a,b) = (0,0)$.

Ich werde nun ähnliche Fragestellungen untersuchen und dabei zunächst nur die natürlichen Zahlen betrachten.

Lösung innerhalb der natürlichen Zahlen

Es schließt sich sich die Frage an: Können für drei positive ganze Zahlen Produkt und Summe übereinstimmen?

Lösung: Es gelte $a \leq b \leq c$ und $abc = a + b + c$. Es gibt interessanterweise hier nur eine einzige Lösung (a,b,c) in den natürlichen Zahlen.
Dass es keine weiteren Lösungen gibt, kann man auf verschiedene Weise nachweisen. Hier bietet es sich an, jeweils durch Ungleichungen weitere Möglichkeiten sukzessive auszuschließen.
Angenommen, die kleinste Zahl ist größer als 1, also $a \geq 2$, also $b \geq a \geq 2$, dann gilt: $4c = 2\cdot 2\cdot c \leq abc = a+b+c \leq 3c$, also $4c \leq 3c$, ein Widerspruch, also muss $a = 1$ gelten.
Angenommen $b \geq 3$, dann gilt $3c = 1\cdot 3\cdot c \leq abc = a+b+c = 1+b+c \leq 1+2c$, also $c \leq 1$ ein Widerspruch, also bleiben nur beiden Fälle $b = 1$ oder $b = 2$. Außerdem führt $b = 1$ zum Widerspruch $c = c + 2$.
Also muss $b = 2$ sein und es ergibt sich die einzige Lösung mit $c = 3$, also $(a,b,c) = (1,2,3)$.

Können für vier natürliche Zahlen Produkt und Summe übereinstimmen?

Lösung: Es gelte $a \leq b \leq c \leq d$ und $abcd = a + b + c + d$. Es gibt nur eine einzige Lösung (a,b,c,d). Auch hier bietet es sich an, jeweils durch Ungleichungen weitere Möglichkeiten schrittweise auszuschließen.
Wir gehen ähnlich vor, wie für nur drei Zahlen, wobei sich die untersuchten Ungleichungen daran orientieren, dass man die Lösung durch gezieltes Probieren

gefunden hat und dann vermutet, es wäre die einzige Lösung. Dies ist ein ganz normales Vorgehen in der Mathematik, um letztlich astreine Beweise vorlegen zu können. Das „Spiel" mit den Zahlen ist also durchaus zu empfehlen, um ein Gespür zu bekommen.

Für $a \geq 2$ folgt $8d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot d \leq abcd = a + b + c + d \leq 4d$, also $8d \leq 4d$ – Widerspruch, also $a = 1$.

Für $b \geq 2$ folgt $4d = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot d \leq abcd = a + b + c + d \leq 1 + 3d$, also $d \leq 1$ – Widerspruch, also $b = 1$.

Für $c \geq 3$ folgt $3d = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot d \leq abcd = a + b + c + d \leq 2 + 2d$, also $d \leq 2$ – Widerspruch, also bleiben nur die Fälle $c = 1$ oder $c = 2$.

Es sei $c = 1$, dann kommt man sofort zum Widerspruch $abcd = d = 3 + d$.

Also bleibt der Fall $c = 2$, also $2d = 4 + d$, woraus $d = 4$ folgt. Die einzige Lösung ist also $(a, b, c, d) = (1, 1, 2, 4)$.

Ausblick auf weitere Lösungen

Bei n natürlichen Zahlen mit $n \geq 5$ ergeben sich die Lösungen $(1, 1, 1, 2, 5)$, $(1, 1, 1, 1, 2, 6)$, ...

Erweitern wir nun den Zahlenraum auf die ganzen Zahlen, so kommen jeweils noch die so genannten trivialen Lösungen $(0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0)$, ... hinzu.

Im folgenden werden weitere ganzzahlige Lösungen gesucht.

Eine Verallgemeinerung auf $\mathbf{ab = a + b + c}$

Da es nur eine Lösung für die Gleichheit von Summe und Produkt zweier ganzer Zahlen gibt, untersuche ich nun, welche Lösungen sich ergeben, wenn ich die Gleichung

(1) $ab = a + b + c.$

mit drei Variablen betrachte. Zunächst prüfe ich nur, ob für jedes ganzzahlige c ein Zahlenpaar (a, b) existiert, für das die Gleichung (1) erfüllt ist. Die Antwort lautet ja, und sie kann auf ganz analoge Weise gefunden werden, wie ich für den Fall $c = 0$ ausführe. Wir formen die Gleichung so um, dass wir b ausklammern können:

(2) $b(a - 1) = ab - b = a + c = (a - 1) + (c + 1).$

Bevor wir durch $a - 1$ dividieren dürfen, ist der Fall $a = 1$ zu bewerten: Die Gleichung (1) lautet in diesem Fall $b = 1 + b + c$, also ist $c = -1$ und b beliebig ganzzahlig. Damit haben wir unendlich viele Lösungen (a, b, c) gefunden, für welche die Gleichung (1) gilt: $(1, b, -1)$ für alle ganzzahligen b und symmetrisch dazu $(a, 1, -1)$ für alle ganzzahligen a. Aber das betrifft nur den Spezialfall $c = -1$.

Bleibt der Fall $a \neq 1$, dann ergibt sich aus Gleichung (2) nach Division durch $(a - 1)$ ein Ausdruck für b, der einen Bruch enthält:

(3) $b = 1 + \frac{(c+1)}{(a-1)}.$

Der Fall $c+1=0$, also $c=-1$, wurde bereits besprochen mit den Lösungstripeln $(a,1,-1)$ für a beliebig ganzzahlig (sowie $(1,b,-1)$ für b ganzzahlig aus dem obigen Fall).

Also muss $a-1$ ein Teiler von $c+1$ sein. Dafür gibt es für jedes ganze c mindestens vier Möglichkeiten: $a-1=1$, $a-1=-1$, $a-1=c+1$ und $a-1=-(c+1)$. Die erste und die dritte Variante führen zu den Lösungstripeln $(2,c+2,c)$ bzw. $(c+2,2,c)$ – und hier findet man den im Artikel zuerst untersuchten Fall $ab=a+b$ wieder mit den Spezialfall $c=0$.
In den beiden anderen Fällen ergeben sich $a=0$ bzw. $b=0$ – und auch das ist eine Verallgemeinerung der zuerst gefundenen „Triviallösung", nämlich mit den beiden Tripeln $(0,-c,c)$ und $(-c,0,c)$ für beliebige ganzzahlige c.

Fassen wir zusammen: Mit $c=0$ gibt es genau zwei Lösungspaare (a,b) mit $ab=a+b$ ermittelt.
Für $c=-1$ gibt es exakt zwei Lösungstripelfolgen (a,b,c) (also unendlich viele Lösungen).
Für alle sonstigen ganzen Zahlen c haben wir vier Lösungstripel gefunden.

Aber: Diese vier Tripel sind nicht die einzig möglichen, zum Beispiel lässt sich für $c=3$ auch das Tripel $(3,4,3)$.

Hier liegt jedoch kein Fehler vor, denn bei der Untersuchung von Gleichung (3) haben wir nur nach ganz sicher existierenden Tripeln (a,b,c) gesucht, das heißt in welchen Fällen $a-1$ ganz sicher Teiler von $c+1$ ist. Für $c=3$ sind das die Teiler 1, -1, 4, -4. Es gibt auch noch die Teiler 2 und -2 von $c+1=4$, und das ergibt zwei weitere Lösungstripel $(3,3,3)$ und $(-1,-1,3)$.

Wenn $c+1$ oder $-c-1$ eine Primzahl ist, dann sind die gefundenen vier Lösungstripel die einzigen, denn eine Primzahl ist nur durch 1 oder sich selbst teilbar.
Sind $c+1$ und $-c-1$ keine Primzahlen, setzen wir $a-1=t$ und $c+1=nt$ mit den Teilern n und t (ohne die Werte 1, -1, 0). Es folgt $b=1+n$, das ist das Lösungstripel $(t+1,n+1,nt-1)$. Je nach Teiler-Anzahl von $c+1$ findet man demnach weitere Lösungstripel, und dies sind nun alle.

Betrachtet man im Tripel $(t+1,n+1,nt-1)$ alle denkbaren ganzen Zahlen für n und t, sind die bereits gefundenen vier Lösungstripel mit enthalten (für die Fälle $t=1$, $t=-1$ sowie $n=1$ und $n=-1$) und auch die anfangs untersuchte Variante $c=0$ mit $n=t=0$. Die Probe zeigt, dass wir hier schlicht ein Produkt zweier Terme haben: $ab=(t+1)(n+1)=(t+1)+(n+1)+(nt-1)=a+b+c$.

Wie das analoge Problem für mehr als zwei bzw. drei Zahlen aussieht, zum Beispiel $abcd=a+b+c+d+e$, ist aber schon wieder eine ganz andere Frage.

Zu Besuch bei...
Carl Friedrich Gauß
von Martin Mattheis

Wer waren all die berühmten Mathematikerinnen und Mathematiker, über die man in der Schule hört oder in MONOID liest? Die Redaktion von MONOID scheut keine Kosten und Mühen und wird in der neuen Rubrik „Zu Besuch bei...“ von diesen genialen Menschen berichten. Beim ersten Mal sind wir zu Besuch bei Carl Friedrich Gauß.

Sehr geehrter Herr Professor Gauß, wo lebten und wirkten Sie?
Geboren wurde ich am 30. April 1777 in Braunschweig. Man sagt, ich habe das Rechnen vor dem Sprechen gelernt. Als Neunjähriger löste ich die vom Lehrer gegebene stumpfsinnige Rechenaufgabe der Addition der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 in kürzester Zeit durch das Bilden von 50 Paaren der Summe 101. Mein Lehrer erkannte mein mathematisches Talent und besorgte mir ein Stipendium für das Gymnasium, das sich meine Eltern niemals hätten leisten können. Später studierte ich in Braunschweig und Göttingen. Dort blieb ich bis zu meinem Tode am 23. Februar 1855 und arbeitete an meinen wissenschaftlichen Forschungen. Viele Ideen notierte ich nur in meinem Tagebuch, sodass sie erst lange nach meinem Tode öffentlich gemacht wurden.

Es gibt Menschen, die sagen, Sie hätten die Mathematik Ihrer Zeit durch Ihr Wirken verdoppelt. Was war ihre bedeutendste mathematische Entdeckung?
Es fällt schwer hier alles aufzählen zu wollen. Besonders stolz bin ich auf den algebraischen Beweis der Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks.
Auch wenn man sagt, ich hätte das mathematische Wissen meiner Zeit verdoppelt; was ich trotzdem nicht geschafft habe ist es, das Volumen eines Würfels zu verdoppeln, also zu einem gegebenen Würfel einen neuen Würfel mit dem doppelten Volumen zu konstruieren. Wie sollte ich das auch geschafft haben, schließlich ist eine solche Konstruktion unmöglich.

Welches gedruckte Werk von Ihnen hatte den größten Einfluss auf die Mathematik?
Das 1801 in der damaligen Wissenschaftssprache Latein veröffentlichte Buch „Disquisitiones Arithmeticae" (in Deutsch etwa: Zahlentheoretische Untersuchungen), mit welchem ich die moderne Zahlentheorie begründet hatte, ist auf jeden Fall in der engeren Wahl.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch über sich berichten?
Aufgrund meiner vielfältigen und – wie ich in aller Bescheidenheit sagen muss – überragenden wissenschaftlichen Leistungen, wurde ich schon zu meinen Lebzeiten von vielen als „Princeps Mathematicorum" („Fürst der Mathematiker") bezeichnet. Eine schmeichelhafte, aber aufgrund meiner Leistungen durchaus gerechtfertigte Formulierung. Und noch ein Kommentar zu Ihrer Abbildung, die mich bei der Vermessung des Königreichs Hannover zeigt: Ich war jung und brauchte das Geld... Apropos Geld, auf dem letzten 10-DM-Schein vor der Euro-Einführung bin auf der Vorderseite ich und auf der Rückseite ist ebendiese Triangulation abgebildet.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?
In jedem Lexikon oder auch jedem Buch zur Geschichte der Mathematik der Neuzeit werde ich genannt. Einen leicht lesbaren Einstieg findet man in der populärwissenschaftlichen Sammlung „Größen der Mathematik" von Ian Stewart (rororo, 2018, siehe die Rezension in diesem Monoid-Heft ab Seite 32). Wer etwas mehr über mich erfahren will, wird fündig bei Hans Wußing: „Carl Friedrich Gauß. Biographie und Dokumente" (Eagle, 6. Auflage, 2011).

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern mit auf den Weg geben?
„Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, es ist nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, es ist nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den großen Genuss gewährt."

Lieber Herr Professor Gauß, wir danken Ihnen für dieses aufschlussreiche Gespräch!

Was uns über den Weg gelaufen ist

Vier bemerkenswerte Binome

von Hartwig Fuchs

Wenn im Binom $2x^2 + p$, wobei p eine Primzahl ist, die Variable x der Reihe nach einen der Werte 0, 1, 2, ..., $p - 1$ annimmt, dann erhält man p verschiedene Summen. All diese Summen sind Primzahlen, falls $p = 3$, 5, 11 oder 29 ist.
Beispiel: Für $p = 29$ ist $29 + 2 \cdot 0^2 = 29$, $29 + 2 \cdot 1^1 = 31$,
$29 + 2 \cdot 2^2 = 37, \dots, 29 + 2 \cdot 28^2 = 1593$ jeweils eine Primzahl.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Auf der Zielgeraden

Letztens saß ich mit meinem Laptop im Garten. Als ich eine Schnecke entdeckte, die über ein Gummiband kroch, fragst ich mich, was wohl passieren würde, wenn ich das Gummiband langzöge, während die Schnecke versucht, die andere Seite des Gummibandes zu erreichen. Um die Schnecke nicht zu stören, entschloß ich mich, ein Computerprogramm zu schreiben, um der Frage nachzugehen.
Bei der Modellierung bin ich von folgenden Daten ausgegangen: Das Gummiband hatte, wie ich wusste, eine Länge von 1 m, die Geschindigkeit der Schnecke beim Kriechen über das Gummiband schätzte ich auf konstant $v = 1\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Ich nahm an, dass ich gleichzeitig durch alle x Sekunden das unendlich dehnbare Gummiband um $4x$ cm länger zöge, wodurch die Schnecke auf dem Gummiband mitgezogen würde.

a) Wie lange braucht die Schnecke bei diesen Annahmen, um das Gummiband für verschiedene Werte von x (2, 1, 0,5, 0,25, 0,1) zu überqueren? Wie lang ist das Band, wenn die Schnekce das Ende erreicht?
b) Was passiert, wenn x beliebig klein wird?
c) Würde die Schnecke das andere Ende auch erreichen, wenn ich das Gummiband mit $v = 1\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ zöge? (Jan Disselhoff, Mainz)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2021 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.
Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 143

In Heft 143 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Ziffernquadrate

Sei $n = N_1 \dots N_k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit den Ziffern $N_1, \dots, N_k \in \{0, \dots, 9\}$. Wir definieren $f(n) = \sum_{i=1}^{k} N_i^2$, also $f(n)$ ist die Summe der Quadrate der Ziffern von n. Sei nun eine Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten die Folge der Zahlen $n_{i+1} = f(n_i)$ für $i = 1, 2, \dots$.

a) Schreibe ein Programm, welches für eine gegebene Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$ die Folge (n_i), mit $i = 1, 2, \dots$, berechnet und ausgibt. (Brich die Folge nach hinreichend vielen Schritten ab. Es kann stets abgebrochen werden, wenn sich die Folge nicht mehr ändert oder ein Folgenelement erneut vorkommt, wenn es also $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$ gibt mit $n_i = n_j$.)

b) Für einige Zahlen enthält die Folge nur endlich viele verschiedene Zahlen, das heißt eine Zahl in der Folge tritt erneut auf (zum Beispiel für $n_1 = 13$ mit 13, 10, 1, 1, ...). Gibt es andere Zahlen, für die diese Folge endlich ist?

c) Hast Du eine Vermutung, wie die Folgen allgemein aussehen?

Lösung

a) Das nachfolgende Python-Programm gibt die Zahlenfolgen für die Startwerte $n_1 \in \{1, \dots, 100\}$ aus. Das Programm bricht ab, wenn eine Zahl zum zweiten Mal in der Folge vorkommt (ab dort werden sich die Zahlen wiederholen).

```
# Berechne die Summe der Quadrate der Ziffern N_1^2 + ... + N_k^2
def f(n):
    s = 0 # Die Summe, zu Beginn 0
    # Iterativ das Quadrat der Einerstelle addieren und dann
    # die Einerstelle abschneiden.
    while n > 0:
        s += (n % 10) ** 2 # n % 10 ist die Einerstelle von n
        n = n // 10        # Einerstelle abschneiden
    return s

# Ausgabe der Zahlenfolge fÃ¼r n=1, ..., 100
for n in range(1,101):
    gesehen = dict()  # Zahlen, die in der Folge bereits vorkamen
    # Solange die aktuelle Zahl noch nicht gesehen wurde ...
    while n not in gesehen:
        gesehen[n] = True   # ... Zahl "merken",
        print(n, end ="␣")  # ... ausgeben,
        n = f(n)            # ... naechste Zahl berechnen.
    print(n, end ="...\n")  # Letzte Zahl noch einmal ausgeben.
```

b) Tatsächlich enthält die Folge für *jede* Startzahl $n_1 \in \mathbb{N}$ nur endlich viele verschiedene Zahlen. Dies kann man leicht wie folgt einsehen:

- Angenommen eine Zahl n habe k Ziffern. Die kleinste Zahl mit k Ziffern ist $10^k - 1$, die größte $10^{k+1} - 1$, insbesondere ist damit $10^k \leq n < 10^{k+1}$.
- Die maximale Summe der Ziffernquadrate tritt auf, wenn alle Ziffern den Wert 9 haben, also ist $f(n) \leq k \cdot 9^2 = 81k$.
- Da $81k < 100k = 10^2 k$, ist somit $f(n) < 10^2 k \leq 10^k$, was für alle $k \geq 3$ erfüllt ist.
- Ist das aktuelle Folgenglied
  - $n_i < 1000$, dann ist $n_{i+1} = f(n_i) < 81 \cdot 3 < 1000$, und andernfalls
  - $n_i \geq 1000$, dann ist das nächste Folgenglied echt kleiner, also $n_{i+1} = f(n_i) < n_i$.
- Also wird die Folge für jeden möglichen Startwert nach endlich vielen Schritten eine Zahl < 1000 erreichen und von da an bleiben alle Folgenglieder < 1000. Demzufolge muss irgendwann eine Zahl ein zweites Mal auftreten.

c) Man bemerkt, dass nur zwei Fälle auftreten:

1. Die Zahlenfolge erreicht irgendwann $n_i = 1$, von da an sind alle Folgenglieder $n_{i+1} = n_{i+2} = ... = 1$.
2. Die Zahlenfolge endet im Zyklus

$$4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4.$$

Tatsächlich gibt es nur diese beiden Fälle, die man mit Hilfe des Programms aus der ersten Teilaufgabe und den Überlegungen der zweiten Teilaufgabe auch beweisen kann: Da jede Folge irgendwann eine Zahl < 1000 erreichen muss, genügt es, die Zahlen von 1 bis 1000 mit unserem Programm zu überprüfen.
Übrigens nennt man Zahlen, bei denen die Folge irgendwann 1 erreicht, auch *fröhliche Zahlen*.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

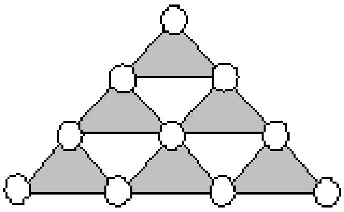
„Ein weiterer Pluspunkt für die Mathematik:
unser endlicher Verstand
kann das Unendliche begreifen.“

Donald E. Knuth
* 10. Januar 1938 in Milwaukee, USA;
Informatiker; Urheber des Textsatzsystems TEX.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Diese Aufgabe ist sehr gut geeignet, einer möglichen Langeweile während der Osterferien entgegen zu wirken. Sie ist nämlich leicht zu behalten, aber nicht leicht zu beantworten.



In die Eckpunkte der Dreiecksfigur soll jede der Zahlen von 0 bis 9 genau einmal eingetragen werden. Dabei soll aber die Summe der Zahlen in den Ecken jedes der schraffierten Dreiecke denselben Wert haben.

Ist das möglich, so gib ein Beispiel an. Ist das nicht möglich, so ist dafür eine Begründung erforderlich.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2021 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 143

In Heft 143 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Isabel, Jana und Katja stehen am Fuß der Treppe in ihrer neuen Schule. Die Treppe hat bis zum ersten Absatz 13 Stufen.
Isabel sagt: „Ich nehme immer zwei Stufen auf einmal und am Ende noch eine Stufe.“ Jana entgegnet: „Ich nehme erst zwei Stufen einzeln, dann viermal zwei Stufen auf einmal und schließlich noch drei Stufen einzeln.“ Katja berichtet: „Ich nehme erst eine Stufe und dann sechsmal zwei Stufen auf einmal.“
Isabel fragt: „Wenn das schon drei verschiedene Möglichkeiten sind, die Treppe mit Einer- oder Zweierschritten hinaufzugehen: Wie viele solcher Möglichkeiten gibt es wohl insgesamt?“ – Ratlos schauen sich die drei an.
Auf wie viele verschiedene Arten kann man eine Treppe von 13 Stufen hinaufgehen, wenn nur Einer- oder Zweierschritte erlaubt sind? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Erster Lösungsweg: Wir bezeichnen einen Einer- bzw. Zweierschritt als „Aktion“.
Wenn man nur Einerschritte macht, gibt es 13 Aktionen und dabei nur eine Möglichkeit, die Treppe hochzugehen.
Mit einem Zweierschritt benötigt man zwölf Aktionen und es entstehen zwölf verschiedene Möglichkeiten, denn der Zweierschritt kann als erste, zweite, ... oder zwölfte Aktion ausgeführt werden.
Mit zwei Zweierschritten benötigt man elf Aktionen. Die Stellen für die beiden Zweierschritte innerhalb der elf Aktionen lassen sich auf $\binom{11}{2} = 45$ verschiedene Arten wählen.

Entsprechend gibt es bei drei Zweierschritten zehn Aktionen, in deren Verlauf die drei Zweierschritte auf $\binom{10}{3} = 120$ verschiedene Arten gewählt werden können. Bei vier Zweierschritten können diese innerhalb der neun Aktionen auf $\binom{9}{4} = 126$ verschiedene Arten gewählt werden, die fünf Zweierschritte innerhalb der dann acht Aktionen auf $\binom{8}{5} = 56$ verschiedene Arten, und die sechs Zweierschritte innerhalb der dann sieben Aktionen auf $\binom{7}{6} = 7$ verschiedene Arten. Mehr Zweierschritte kann es bei 13 Stufen nicht geben.

Insgesamt gibt es daher $1 + 12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7 = 377$ verschiedene Arten, die Treppe wie beschrieben hinaufzugehen.

Zweiter Lösungsweg: Wenn zuerst ein Einerschritt erfolgt, sind alle daraus resultierenden Möglichkeiten verschieden von denen, die mit einem Zweierschritt beginnen. Wenn wir die Gesamtzahl der bei einer Treppe mit n Stufen möglichen, verschiedenen Schrittfolgen mit F_n bezeichnen, folgt daraus die Beziehung

$$(*) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

denn die jeweiligen Fortsetzungen haben eine bzw. zwei Stufen weniger zu erklimmen. Aber die Beziehung $(*)$ gilt auch für die restlichen Schrittmöglichkeiten, bis man nur noch eine oder zwei Stufen vor sich hat.

Beginnen wir nun am oberen Ende der Treppe. Offensichtlich ist $F_1 = 1$ (ein Einerschritt) und $F_2 = 2$ (ein Zweierschritt oder zwei Einerschritte). Aus der Gleichung $(*)$ folgt $F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$ und entsprechend gilt $F_4 = 3 + 2 = 5$, $F_5 = 5 + 3 = 8$, $F_6 = 8 + 5 = 13$, $F_7 = 13 + 8 = 21$, $F_8 = 21 + 13 = 34$, $F_9 = 34 + 21 = 55$, $F_{10} = 55 + 34 = 89$, $F_{11} = 89 + 55 = 144$, $F_{12} = 144 + 89 = 233$ und schließlich $F_{13} = 233 + 144 = 377$. Auf so viele verschiedene Arten kann man die Treppe mit Einer- und Zweierschritten hinaufgehen. (Die hier verwendete Zahlenfolge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist als Fibonacci-Folge bekannt, wobei die Festlegung der ersten Folgenglieder hier etwas vom Standard abweichend gehandhabt wird.)

Richtige Lösungen haben eingesandt: Lasse Blum, Kathrin Borrmann, Josefine Kaßner, Johannes Kehrberger, Alexander Koblbauer, Philipp Lörcks, Luca Sindel, Oscar Su und Clemens Zabel.

Die Freundinnen haben sich bald mehr für die Fibonacci-Folge als für ihre Schultreppe interessiert. Sie haben bemerkt, dass (bei der hier verwendeten Festlegung der ersten Folgenglieder) für die ersten drei Folgenglieder $F_n = n$ gilt und dass danach natürlich immer $F_n > n$ ist. Aber sie wollten wissen, ob vielleicht weitere Folgenglieder durch ihre Nummer teilbar sind und fanden bald $F_7 = 3 \cdot 7$. Gibt es weitere Folgenglieder mit dieser Eigenschaft? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Entdeckungen

Ein L(o)eser wies uns darauf hin, dass man die Mathematische Entdeckung aus Monoid 143 über $m = 4$ hinaus verallgemeinern könne und dabei insbesondere für $m = 2$, $m = 3$ interessante Einsichten gewinnt.

Verallgemeinerung des Kennenlernspiels aus Monoid 143

Die n Studenten einer Vorlesung treffen sich jeden Montag zum gemeinsamen Essen; sie teilen sich auf Tische mit jeweils genau m Personen auf. Die Verteilung auf die Tische soll so sein, dass jeder der n Studenten jeden anderen im Laufe der Zeit genau einmal trifft.

a) Wie viele Wochen dauert das Spiel?

b) Welche Bedingungen findet Ihr an (n, m), damit eine solche Aufteilung existieren kann?

c) Genügen umgekehrt die in b) gefundenen Bedingungen an (n, m), damit eine solche Aufteilung existiert?

Untersucht vor allem die beiden Fälle $m = 2$ und $m = 3$.

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2021 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 143

In Heft 143 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Ein Kennenlernspiel

Eine Gruppe von n Studenten verabredet folgendes Kennenlernspiel: Sie teilen sich in Vierergruppen auf, die sich jeweils zu einem Dinner treffen; in jeder Gruppe bereitet einer eine Vorspeise, einer ein Hauptgericht, einer eine Beilage und einer einen Nachtisch vor. Dies wiederholt sich jede Woche. Die Einteilung soll so sein, dass jeder aus der Gruppe jeden anderen genau einmal trifft.

a) Für welche n ist dies möglich?

b) Wie viele Wochen dauert dann das Spiel?

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich Clemens Zabel (Klasse 11, Theresianum, Mainz), Oscar Su (Klasse 8, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey), Jonathan Reuthner (Klasse 7, Kronberg-Gymnasiu, Aschaffenburg), Josefine Kaßner (Klasse 11, Gymnasium Oberursel) und Philipp Lörcks (Klasse 7, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Trier) beschäftigt.

Sie stellten fest:

b) Da ein Student sich mit jedem anderen genau einmal trifft, muss die Anzahl $n-1$ der Mitstudenten durch 3 teilbar sein, $n-1=3k$ und *jeder* Student nimmt an jeweils genau k Dinnern teil. Zum Beispiel bei 256 Studenten in der Gesamtgruppe müssten sich diese 85-mal, also mehr als 1,5 Jahre lang jede Woche verabreden.

a) Sicher muss n durch 4 teilbar sein. Aus Teil b) folgt, dass n bei Division durch 3 Rest 1 hat. Nimmt man die beiden Bedingungen zusammen, ergibt sich, dass n bei Teilung durch 12 den Rest 4 haben muss, also $n \in 4, 16, 28, 40, \dots$.
Zumindest für die ersten beiden n ist diese Bedingung auch hinreichend:
Für $n=4$ Studenten geht dies offensichtlich auf mit $k=1$.
Für $n=16=4 \cdot 4$ Studenten „nummerieren" wir diese mit zwei Ziffern zwischen 0 und 3 (also von 00 bis 33) durch und teilen die $k=5$ Dinnergruppen etwa wie folgt auf:

1. Dinner

00	10	20	30
01	11	21	31
02	12	22	32
03	13	23	33

2. Dinner

00	01	02	03
10	11	12	13
20	21	22	23
30	31	32	33

3. Dinner

00	31	12	23
10	21	02	33
20	11	32	03
30	01	22	13

4. Dinner

00	21	32	13
10	31	22	03
20	01	12	33
30	11	02	23

5. Dinner

00	11	22	33
10	01	32	23
20	31	02	13
30	21	12	03

Faszinierende Gleichung

von Hartwig Fuchs

Gibt es eine natürliche Zahl, für die der Term

$$Q(n) = 991n^2 + 1$$

eine Quadratzahl ist?

Es ist aussichtslos, durch Rechnen mit Bleistift auf Papier und selbst mit einem Taschenrechner eine Antwort auf diese Frage zu finden – dazu reicht ein Leben bei weitem nicht aus; denn selbst wenn man in jeweils $\frac{1}{1000}$ Sekunde einen Term $Q(n)$ berechnen könnte, hätte man auch in $3{,}82 \cdot 10^{17}$ Jahren das Problem noch nicht gelöst.
Wieso? Erst mit einem Computer hat man eine Zahl berechnet – sie ist die kleinstmögliche für die $Q(n)$ eine Quadratzahl ist, nämlich

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 144

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Symmetrische Daten

Im Monoid-Heft 142 stellten wir Euch eine Aufgabe (Mathespielerei III, Seite 21) zu palindromischen Daten. Aber es gibt auch symmetrische Daten. Dabei ignorieren wir, wie auch schon bei den palindromischen Daten, die Punkte und schreiben die Jahreszahl jeweils vierstellig. Führende Ziffern 0 sind bei Tag und Monat erlaubt, bei der Jahreszahl jedoch nicht.

a) Wie viele achsensymmetrische Daten gibt es?

b) Wie viele punktsymmetrische Daten gibt es? (MG)

Lösung:

a) Wir müssen zwischen einer vertikalen und einer horizontalen Symmetrieachse unterscheiden.
Für Daten mit vertikaler Symmetrieachse kommen nur Ziffern infrage, die selbst schon achsensymmetrisch sind, also nur die Ziffern 0 und 8. Da Tag und Monat jeweils nicht 00 sein und deren Zehnerstelle jeweils nicht 8 sein kann, gibt es nur das Datum 08.08.8080.
Für ein achsensymmetrisches Datum mit horizontaler Achse müssen alle Ziffern selbst diese Symmetrieeigenschaft haben. Dies sind die Ziffern 0, 3 und 8.

Für den Tag kommen also die Zahlen 03, 08 und 30 infrage, beim Monat nur 03 und 08. Damit ergeben sich $3 \cdot 2 = 6$ verschiedene Daten.
Für das Jahr lassen sich aus den drei Ziffern 0, 3 und 8 zusammen $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ Jahreszahlen kombinieren.
Insgesamt gibt es $6 \cdot 54 = 324$ verschiedene Daten mit horizontaler Symmetrieachse (das früheste ist der 03.03.3000, das letzte der 30.08.8888).
Zu diesen 324 Daten gehört auch der 08.08.8080. Daher gibt es insgesamt 324 achsensymmetrische Daten.

b) Da das Datum insgesamt acht Stellen hat, liegt das Symmetriezentrum zwischen der vierten und fünften Stelle. Daher muss zu jeder im Datum vorkommenden Ziffer an einer anderen Stelle eine Ziffer stehen, die sich durch Punktspiegelung erhalten lässt. Mögliche Ziffernkombinationen sind also 0 und 0, 6 und 9 sowie 8 und 8.
Tag und Monat können dabei nur mit der Ziffer 0 beginnen, sodass nur 06, 08 und 09 möglich sind. Daraus ergeben sich insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten, die dann jeweils zu einer eindeutigen Jahreszahl führen, die alle nicht mit einer 0 beginnen:

09.09.6060	09.08.8060	09.06.9060
08.09.6080	08.08.8080	08.06.9080
06.09.6090	06.08.8090	06.06.9090

Der 08.08.8080 ist, da dieses Datum symmetrisch sowohl zu einer vertikalen als auch horizontalen Achse ist, auch punktsymmetrisch. Schade, dass wir diesen besonderen Tag, der auch noch palindromisch ist, nicht erleben werden...

II. Letzte Ziffer einer Quadratzahlensumme

Bestimme die letzte Ziffer von

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2020^2.$$

(MG)

Lösung:

Für die letzte Ziffer der Summe sind lediglich die letzten Ziffern der Summanden relevant. Dabei gilt

letzte Ziffer der Basis b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
letzte Ziffer der Quadratzahl b^2	1	4	9	6	5	6	9	6	1	0

Diese Sequenz wiederholt sich immer wieder.
Wegen $2020 = 202 \cdot 10$ wird diese Sequenz genau 202-mal durchlaufen. Damit ist die letzte Ziffer der Summe $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2020^2$ gleich der letzten Ziffer von $202 \cdot (1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 6 + 1 + 0) = 202 \cdot 45 = 9090$.
Die letzte Ziffer der Summe $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2020^2$ ist also eine 0.

III. Gewinnspiel

Auf dem Weihnachtsmarkt wird folgendes Gewinnspiel angeboten:

> Von drei Säckchen enthält eines zwei goldene Sterne, eines zwei rote Sterne und das dritte je einen goldenen und einen roten Stern. Leider sind die Schildchen mit den Aufschriften „gold", „rot" und „gemischt" so vertauscht, dass keine der Aufschriften mehr stimmt. Ein Spieler darf aus einem der Säckchen einen Stern entnehmen und betrachten. Dann muss er sagen, in welchem Säckchen die beiden goldenen Sterne sind. Ist seine Vorhersage richtig, gewinnt er eine Schutzengel-Figur.

Aylin möchte am Gewinnspiel teilnehmen. Aus welchem Säckchen sollte sie einen Stern ziehen, um sicher zu gewinnen? (nach HF)

Lösung:

Aylin sollte einen Stern aus dem Säckchen „gemischt" ziehen. Ist er golden, so auch der andere, da gemischt falsch ist. Dann ist die Verteilung:

Aufschrift	gold	rot	gemischt
tatsächlicher Inhalt	rot	gemischt	gold

Aylin muss sich also für das Säckchen „gemischt" entscheiden.

Zieht sie einen roten Stern, so ist der andere ebenfalls rot und die Verteilung ist:

Aufschrift	gold	rot	gemischt
tatsächlicher Inhalt	gemischt	gold	rot

Jetzt muss sich Aylin für das Säckchen „rot" entscheiden.

Durch ähnliche Überlegungen kann man sich klar machen, dass man beim Ziehen aus „rot" Pech haben kann (wenn man einen goldenen Stern zieht), ebenso bei Ziehen aus „gold".

IV. Teilbar durch die Quersumme

Tatjana beschäftigt sich mit Quersummen. Sie weiß auch, dass die Quersumme helfen kann, die Teilbarkeit von Zahlen zu untersuchen.

Doch auch darüber hinaus macht sie weitere Entdeckungen: 2020 hat die Quersumme 4 und lässt sich ohne Rest durch ihre Quersumme teilen, bei der Zahl 2021 mit Quersumme 5 geht das nicht.

Sie beginnt weitere Untersuchungen: „Wie viele zweistellige Zahlen lassen sich ohne Rest durch ihre Quersumme teilen?" – Zu welchem Ergebnis wird sie kommen? (MG)

Lösung:
Wir arbeiten der Reihe nach die verschiedenen Quersummen ab:

Quersumme	Überlegung	davon teilbar durch die Quersumme
1	—	10
2	muss gerade sein	20
3	immer möglich (Teilbarkeitsregel)	12, 21, 30
4	muss gerade sein, 22 nicht möglich	40
5	Einerziffer 0 oder 5	50
6	muss gerade sein	24, 42, 60
7	16, 25, ..., 70 testen	70
8	gerade Kandidaten 26, 44, 62, 80 testen	80
9	immer möglich (Teilbarkeitsregel)	18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90
10	Einerziffer 0	—
11	beide Ziffern gleich	—
12	gerade Kandidaten 48, 66, 84 testen	48, 84
13	49, 58, 67, 76, 85, 94 testen	—
14	gerade Kandidaten 68, 86 testen	—
15	Einerziffer 0 oder 5	—
16	gerader Kandidat 88	—
17	89, 98 testen	—
18	einziger Kandidat 99 ist ungerade	—

Es gibt also 23 solcher zweistelliger natürlicher Zahlen, die durch ihre Quersumme teilbar sind: 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84 und 90.

V. Frage nach der Uhrzeit

Um 10.12 Uhr fragt der Mathelehrer Hempel seine Schüler: „Wieviel Uhr ist es in 2020202020 Stunden?“

Bemerkung: Wir ignorieren hier die Umstellung zwischen Winter- und Sommerzeit. (H.F.)

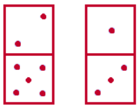
Lösung:

$2\,020\,202\,020 : 24 = 84\,175\,084 + \text{Rest} 4 \Longrightarrow$ Es ist 14.12 Uhr, denn

$$10.12\, h + \underbrace{84175084\, h \cdot 24}_{\text{entspricht auf der Uhr 0 Stunden}} + 4\, h = 14.12\, h.$$

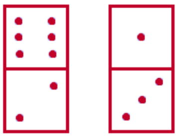
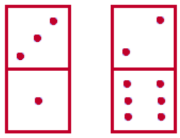
VI. Bruchrechnen mit Dominosteinen

Lina und Thilo üben gemeinsam Bruchrechnen und weil sie gerne spielen, nutzen sie dazu ein Dominospiel, wobei sie alle Dominosteine mit einer 0 aussortiert haben. Sie ziehen zwei Dominosteine und legen diese aufrecht nebeneinander, also so, dass jeweils die beiden Zahlen des Steines übereinanderliegen. Diese Steine stellen dann Brüche dar und Lina und Thilo berechnen die Summe und wenn möglich auch die Differenz der beiden Brüche.



Beispiel: Aus den Dominosteinen der nebenstehenden Abbildung ergeben sich die Aufgaben $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ und $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$.

Lina und Thilo sitzen einander gegenüber. Sie haben zwei Steine gezogen und auf den Tisch gelegt.

Lina sieht:  Thilo sieht: 

a) Als sie jeweils die Summe und die Differenz zu der für sie sichtbaren Aufgabe berechnen, machen Lina und Thilo eine Entdeckung. Welche?

b) Es gibt noch andere Dominostein-Kombinationen mit dieser Eigenschaft. Gib alle diese Kombinationen an.

Hinweis: Dominosteine tragen auf den beiden Hälften der Steine eine der Zahlen von 0 bis 6 und es gibt zu jeder möglichen Kombination einen Stein.

c) Formuliere nun eine Regel: Wie muss die Beschriftung der beiden Steine zusammenhängen, damit diese Entdeckung gemacht werden kann?

(MG)

Lösung:

a) Thilo rechnet $\frac{6}{2} + \frac{1}{3} = \frac{18}{6} + \frac{2}{6} = \frac{18+2}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ sowie $\frac{6}{2} - \frac{1}{3} = \frac{18}{6} - \frac{2}{6} = \frac{18-2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$. Lina hingegen rechnet $\frac{3}{1} + \frac{2}{6} = \frac{18}{6} + \frac{2}{6} = \frac{18+2}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ sowie $\frac{3}{1} - \frac{2}{6} = \frac{18}{6} - \frac{2}{6} = \frac{18-2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.

Lina und Thilo erhalten also jeweils dieselben Ergebnisse.

b) Weitere Kombinationen mit der Eigenschaft, dass sie beim Drehen der Steine dieselben Ergebnisse haben, sind (als Brüche geschrieben):

- $\frac{1}{1} \pm \frac{2}{2}$, $\frac{1}{1} \pm \frac{3}{3}$, $\frac{1}{1} \pm \frac{4}{4}$ und so weiter bis $\frac{5}{5} \pm \frac{6}{6}$.
- $\frac{1}{2} \pm \frac{4}{2}$
- $\frac{1}{2} \pm \frac{6}{3}$
- $\frac{2}{4} \pm \frac{6}{3}$

c) Wenn beide Brüche gleich sind oder wenn der Kehrwert des einen Bruches durch Erweitern (oder Kürzen) den anderen Bruch ergibt, dann ergeben sich

beim Drehen der beiden Domino-Steine beim Addieren und Subtrahieren dieselben Ergebnisse:
Für zwei Brüche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist dies klar.
Für $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ gilt

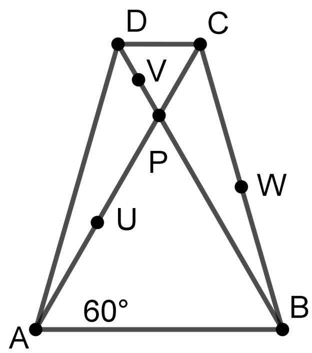
$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{d}{c} \pm \frac{b}{a} \\ \iff \quad & \frac{ad \pm bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{ac} \\ \iff \quad & \frac{1}{bd} = \frac{1}{ac} \\ \iff \quad & \frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{nd}{nc} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile bedeutet, dass der Kehrwert des Bruches $\frac{c}{d}$ durch Erweitern mit n den anderen Bruch $\frac{a}{b}$ ergibt.

VII. Gleichseitige Dreiecke

In einem achsensymmetrischen Trapez $ABCD$ mit $AB||CD$ ist $|\sphericalangle BAC| = 60°$ groß. Es sei P der Schnittpunkt der Diagonalen im Trapez und U, V, W seien die Mittelpunkte der Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PD}$, $\overline{BC}$.
Begründe, dass gelten:

a) $\triangle ABP$ und $\triangle CDP$ sind gleichseitig,
b) $\triangle UVW$ ist ebenfalls gleichseitig. (H.F.)



Lösung:

a) Aus der Symmetrie des Trapezes folgt, dass $|\sphericalangle PBA| = 60°$ beträgt. Also ist auch $|\sphericalangle APB| = 60°$ und daher das Dreieck $\triangle ABP$ gleichseitig.
Die Winkel $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle PDC$ sind als Wechselwinkel an den Parallelen AB und CD beide $60°$ groß, sodass auch $\sphericalangle CPD$ $60°$ groß ist. Folglich ist $\triangle CDP$ gleichseitig.

b) Im $\triangle ABP$ ist die Seitenhalbierende BU orthogonal zu CA, denn die Seitenhalbierende halbiert auch den Winkel $\sphericalangle PBA$, sodass im Dreieck ABU gilt $\sphericalangle AUB = 180° - \sphericalangle BAU - \sphericalangle UBA = 180° - 60° - 30° = 90°$. Ebenso sind im $\triangle CDP$ die Strecken CV und BD orthogonal. Die Punkte U und V liegen daher auf einem Thaleskreis mit Mittelpunkt W. Daraus folgt: $|WU| = |WV| = \frac{1}{2}|BC|$.
Weiter ist $UV||DA$ und $|UV| = \frac{1}{2}|AD|$ (Strahlensatz). Wegen $|AD| = |BC|$ (Symmetrie des Trapezes $ABCD$) gilt somit $|UV| = \frac{1}{2}|BC|$.
Insgesamt gilt also $|WU| = |WV| = |UV|$, sodass das Dreieck $\triangle UVW$ gleichseitig ist.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2021.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Augustus de Morgan

Der britische Mathematiker Augustus de Morgan wurde n Jahre alt im Jahr n^2. Er starb am 18. März 1871 in London.

Wann wurde er geboren?

Hinweis: Die Aufgabe ist natürlich mathematisch zu lösen. Nachschauen in Lexika oder Enzyklopädien wird nicht als Lösung akzeptiert. (MG)

II. Zahlen schreiben

Die sechsjährige Kalea geht zwar noch nicht zur Schule, kann aber schon ganz toll Zahlen schreiben. Dies zeigt sie heute ihrem Onkel, der Mathematiklehrer ist. Und so schreibt sie nacheinander fehlerlos die natürlichen Zahlen auf ein Blatt, ohne dabei Lücken oder Trennzeichen zwischen die Zahlen zu machen. Die Zahlenkolonne beginnt also mit 1234..., später folgt beispielsweise ...891011... und so weiter.

a) Als Kalea aufhört, hat sie 6977 Ziffern notiert. Wie lauten die letzten vier Ziffern in dieser Kolonne?

b) Steht diese Ziffernfolge auch schon früher in der Zahlenkolonne? Erläutere Deine Entscheidung.

c) An welcher Stelle in der Zahlenkolonne steht die Zahl 145 (oder würde stehen, falls Kalea vorher aufgehört hat zu schreiben)?

(MG)

III. Eine besondere Differenz

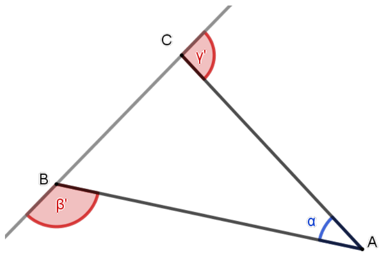
Stelle die Jahreszahl 2021 als Differenz zweier Quadratzahlen dar, also in der Form

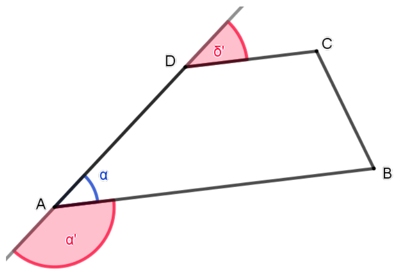
$$2021 = a^2 - b^2.$$

Gib alle solche Darstellungen an und begründe, dass es keine weiteren Darstellungen gibt. (MG)

IV. Winkelsummen

Gegeben sind die beiden folgenden Figuren, ein Dreieck und ein Trapez (beide sind jedoch nicht maßstabsgerecht):





a) Bestimme die Summe der beiden markierten Winkel β' und γ', wenn der Winkel $\alpha = 40°$ groß ist.

b) Im Trapez gilt $AB \parallel CD$. Bestimme die Summe der beiden markierten Winkel α' und δ', wenn der Winkel $\alpha = 40°$ groß ist.

(MG)

V. Hausaufgaben vergessen

An jedem der Unterrichtstage vom 14. bis 21. März (in diesen Tagen gab es keinen Feiertag) hatten in der Klasse 5c jeden Tag genau drei Schüler keine Hausaufgaben. Mona hatte an zwei Tagen, Ido an drei Tagen und Matheo an genau fünf Tagen keine Hausaufgaben. Die übrigen vergessenen Hausaufgaben hat Gerome zu verschulden.

An wie vielen Tagen hatte Gerome keine Hausaufgaben? (MG)

VI. Wettkampfgruppen

Die Mathematik-AG des Martin-Mettler-Gymnasiums besuchen 16 Schülerinnen und Schüler. Heute wird dort ein Kopfrechenwettbewerb durchgeführt, bei dem immer Zweiergruppen gegeneinander antreten.

Genau $\frac{2}{3}$ aller Mädchen treten mit einem Jungen zusammen im Wettkampf an, während genau $\frac{2}{5}$ aller Jungen gemeinsam mit einem Mädchen antreten.

a) Wie viele Mädchen und wieviele Jungen besuchen die Mathematik-AG?

b) Gibt es mehr gemischt-geschlechtliche Zweiergruppen oder mehr gleich geschlechtliche Gruppen?

(MG)

VII. Zahlen-Knobelei

Ersetze die Buchstaben A, B, C und D durch verschiedene Ziffern, $A \neq 0$ so, dass eine korrekte Multiplikation zweier vierstelliger Zahlen mit einem achtstelligen Ergebnis entsteht. (H.F.)

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & B & C & D & \cdot & A & B & C & D \\ \hline
 & & * & * & * & * & & & \\
 & & & * & * & * & * & & \\
 & & & & & * & * & * & * \\ \hline
 & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2021.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1260: Zahl und Spiegelzahl

Schreibt man die Ziffern einer natürlichen Zahl n in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Spiegelzahl n' von n. Zum Beispiel ist für $n = 2021$ die Spiegelzahl $n' = 1202$.

Nun gelte: Das Produkt einer natürlichen Zahl n und ihrer Spiegelzahl n' ist 78 445.

Wie heißen Zahl und Spiegelzahl? (nach HF)

Aufgabe 1261: Lösungsprodukt

Löse die folgenden drei Gleichungen und multipliziere anschließend alle erhaltenen Lösungen:

$$17 + 7x = 19 + 6x$$
$$-2y^2 + 6y + 27 = 7$$
$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$$

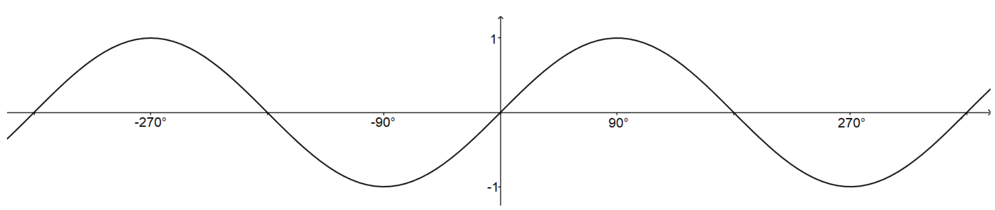
(MG)

Aufgabe 1262: Eine Sinus-Summe

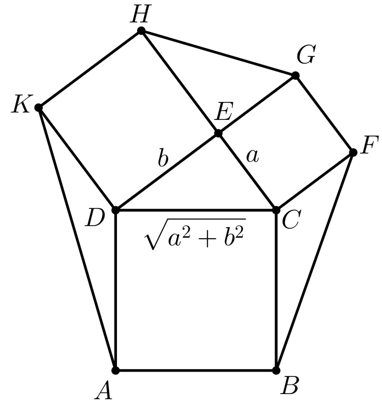
Berechne

$$\sin(1^\circ) + \sin(2^\circ) + \sin(3^\circ) + ... + \sin(360^\circ).$$

(MG)

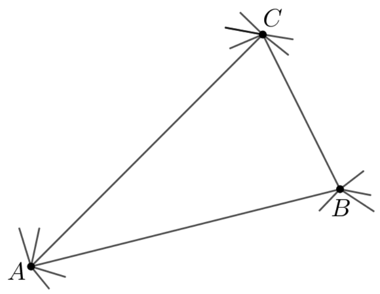


Aufgabe 1263: Flächen eines Sechsecks



In der Figur ist CED ein rechtwinkliges Dreieck mit $|CE| = a$, $|ED| = b$ und $|DC| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $ABCD$, $CFGE$ und $DEHK$ sind Quadrate.
Bestimme die Fläche des Sechsecks $ABFGHK$. (H.F.)

Aufgabe 1264: Verbindungen in einem Netzwerk



In einem Netzwerk seien A, B und C Knotenpunkte, zwischen denen direkte und indirekte Verbindungen bestehen: Zwischen A und B gibt es 82 Verbindungen, die über C laufenden mitgezählt; zwischen B und C sind 62 Verbindungen vorhanden (die über A mitgezählt) und von A nach C gibt es mindestens 10 Verbindungen (die über B mitgezählt).
Wie viele Verbindungen gibt es von A nach B ohne Umwege über C, von B nach C ohne Umwege über A und von A nach C ohne, beziehungsweise mit Umwegen über B? (H.F.)

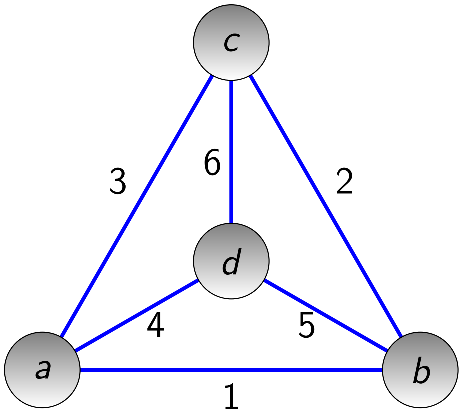
Aufgabe 1265: Abundante Potenzen

Eine natürliche Zahl n heiße *abundant**, wenn für die Summe $\sigma(n)$ ihrer Teiler $\sigma(n) > 2n$ gilt.
Beispiel: $n = 12$ ist abundant, weil $\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28 > 24 = 2 \cdot 12$ ist.
Es sei nun a eine solche abundante Zahl.
Zeige: Dann sind auch alle Potenzen a^m mit $m = 2, 3, 4, \dots$ abundant. (H.F.)

Aufgabe 1266: Das Tetraeder

Wir stellen uns die vier Ecken eines Tetraeders als Knoten in einem Graphen vor. Je zwei Ecken des Tetraeders sind dann durch eine Kante verbunden. Dies ist ein Spezialfall eines vollständigen Graphen, bei dem jedes Paar von Knoten direkt miteinander verbunden sind. Wir stellen uns nun vor, dass ein paar der Kanten durch einen zufälligen Vorgang zerstört wurden. Genauer gehen wir davon aus, dass für jede der sechs Kanten eine (gefälschte) Münze geworfen wurde, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf" zeigt - das Zeichen dafür, dass die Kante bleibt. Zeigt die Münze hingegen „Zahl", so wird die Kante entfernt. Es bleibt ein Graph aus vier Knoten und einer zufälligen Menge von Kanten.

* abundant – etwa: überfließend



Tetraeder von oben. Es ist d der Gipfel; a, b und c bilden die Basis.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Graph immer noch verbunden? (Das heißt, man kann, wenn auch eventuell über einen Umweg, von jedem Knoten, zu jedem anderen Knoten entlang von Kanten gelangen.) (AcK)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 144

Klassen 9–13

Aufgabe 1253: Lösung einer Gleichung

Bestimme die Lösung der Gleichung

$$\frac{x-1}{2020} - \frac{x-2}{2019} + \frac{x-3}{2018} - \ldots + \frac{x-2019}{2} - \frac{x-2020}{1} = 0.$$

(MG)

Lösung:

Forme die gegebene Gleichung um:

$$\begin{aligned} & \tfrac{x-1}{2020} - \tfrac{x-2}{2019} + \tfrac{x-3}{2018} - \ldots + \tfrac{x-2019}{2} - \tfrac{x-2020}{1} = 0 \\ \iff & \left(\tfrac{x-1}{2020} - 1\right) - \left(\tfrac{x-2}{2019} - 1\right) + \left(\tfrac{x-3}{2018} - 1\right) - \\ & \ldots + \left(\tfrac{x-2019}{2} - 1\right) - \left(\tfrac{x-2020}{1} - 1\right) = 0 \\ \iff & \tfrac{x-2021}{2020} - \tfrac{x-2021}{2019} + \tfrac{x-2021}{2018} - \ldots + \tfrac{x-2021}{2} - \tfrac{x-2021}{1} = 0 \\ \iff & (x-2021) \cdot \left(\tfrac{1}{2020} - \tfrac{1}{2019} + \tfrac{1}{2018} - \ldots + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Das Produkt auf der linken Seite der Gleichung ist genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren gleich 0 ist. Dies kann aber nur der erste Faktor $x - 2021$ sein. Somit ist $x = 2021$.

Aufgabe 1254: Nullstellenprodukt

Bestimme das Produkt aller Nullstellen der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \sqrt{\big|(5+x) \cdot (2-|x|) \cdot |x-101|\big|}.$$

(MG)

Lösung:
Der Funktionswert ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren im Radikant der Wurzel 0 ist.
Der erste Faktor $(5+x)$ wird 0 für $x=-5$, der zweite Faktor $(2-|x|)$ aufgrund des Betrags für $x=+2$ und $x=-2$ und der dritte Faktor $|x-101|$ schließlich für $x=101$.
Damit ist das Produkt aller Nullstellen $(-5)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 101=2020$.

Aufgabe 1255: Teilbarkeit durch 271

Wenn die 5-ziffrige Zahl $n=abcde$ durch die Primzahl 271 teilbar ist, ist damit auch die Zahl $m=bcdea$ durch 271 teilbar? (H.F.)

Lösung:
Wenn t ein Teiler von r ist, dann schreiben wir $t|r$.
Aus $271|n$ folgt $271|10n$; ferner gilt $271|(10^5-1)$.

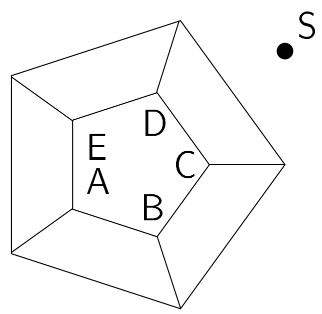
$$\begin{aligned} \text{Es gilt } m &= b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+e\cdot 10+a \text{ sowie}\\ n &= a\cdot 10^4+b\cdot 10^3+c\cdot 10^2+d\cdot 10+e \text{ und daher}\\ 10n &= a\cdot 10^5+b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+e\cdot 10\\ &= a\cdot(10^5-1)+(b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+e\cdot 10+a)\\ &= a\cdot(10^5-1)+m \end{aligned}$$

Da nun 271 Teiler von $10n$ und von $a\cdot(10^5-1)$ ist, ist 271 auch ein Teiler der Zahl m.

Alternative Lösung:
Ja, denn $(abcde)\cdot 10+a-10^5a=y\cdot 271\cdot 10-a\cdot 369\cdot 271$

Aufgabe 1256: Ein Rundweg-Polygon

Beweise oder widerlege die Behauptung:
Es gibt einen geschlossenen im Punkt S beginnenden und endenden Weg W, der jede Seite eines jeden der sechs Polygone der Figur *genau einmal* zwischen den Eckpunkten der jeweiligen Seite kreuzt. (H.F.)



Lösung:
Annahme: Es gibt einen Weg W. Wenn dann der Weg W die Seite eines Polygons kreuzt und so in sein Innengebiet gelangt, so muss W dieses Innengebiet auch wieder verlassen – wobei er eine andere Seite des Polygons kreuzen muss.
Daraus folgt mit der Annahme: Jedes der sechs Polygone besitzt geradzahlig viele Seiten. Das aber trifft für das Fünfeck $ABCDE$ nicht zu. Somit kann es einen Weg W nicht geben. Damit ist die Annahme und folglich auch die Behauptung widerlegt.

Aufgabe 1257: (K)eine Frage des Alters

Von den folgenden Aussagen über das Alter von drei verschieden alten Kindern ist genau eine falsch:

(1) Anna ist älter als Bettina.
(2) Christa ist älter als Anna.
(3) Christa ist jünger als Bettina.
(4) Bettina und Christa sind zusammen doppelt so alt wie Anna.

Wer von den Dreien ist die Jüngste und wer ist die Älteste? (HF)

Lösung:

Mit A, B und C seien das Alter von Anna, Bettina und Christa bezeichnet.

Wir nehmen an, dass Aussage (3) wahr sei; es gelte also $C < B$.

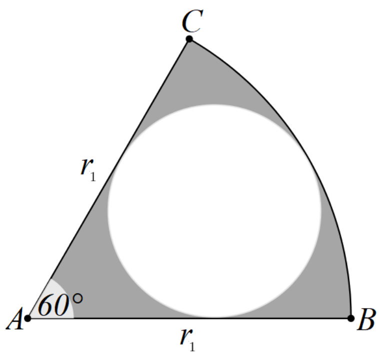
Falls Aussage (2) wahr ist, dann gilt $A < C < B$, und daher ist Aussage (1) $A > B$ falsch. Zugleich ist aber $2A = A + A < A + B < C + B$ und daher ist auch Aussage (4) falsch. Damit sind zwei Aussagen, nämlich (1) und (4), falsch im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher ist Aussage (2) falsch. Also ist $C < A$ und daher mit $C + A < A + A = 2A = B + C$ wegen Aussage (4) schließlich $A < B$. Dann ist aber Aussage (1) falsch. Da zwei falsche Aussagen, nämlich (2) und (1), nicht möglich sind, ist somit die Annahme falsch.

Somit ist die Aussage (3) falsch. Daher sind die Aussagen (1), (2) und (4) und die Negation der dritten Aussage, also $B < C$, wahr.
Aus Aussagen (1) und (2) folgt: $B < A < C$.

Also ist Bettina die jüngste der Kinder, Christa ist das älteste Kind.

Aufgabe 1258: Kreis im Sektor



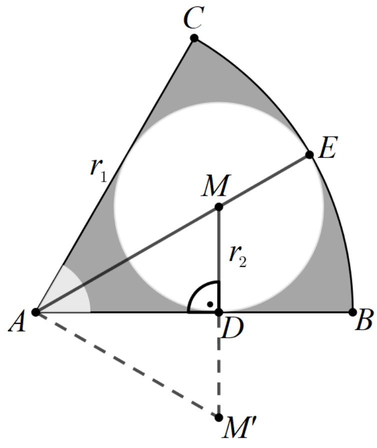
Es sei k_1 ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius r_1; ferner sei $s = ABC$ ein Sektor von k_1 mit einem Winkel von $60°$ beim Punkt A.
In den Sektor s sei ein kleiner Kreis k_2 gezeichnet, der die Strecken AB und AC, sowie den Bogen BC berührt.
Wie groß ist die schraffierte Fläche? (H.F.)

Lösung:

Man zeichne in den Sektor Hilfslinien wie in der Abbildung. Dann spiegelt man das Dreieck ADM an der Strecke AB, M Mittelpunkt des Kreises k_2.

Aus Gründen der Symmetrie gilt $\sphericalangle MAD = \frac{1}{2}\sphericalangle CAD = 30°$. Folglich ist $\sphericalangle MAM' = 60°$. Somit ist das gleichschenklige Dreieck MAM' gleichseitig.

Wegen $|AM| = |MM'| = 2r_2$ folgt dann aus $r_1 = |AM| + |ME| = 2r_2 + r_2$, dass $r_2 = \frac{1}{3}r_1$ ist.



Die schraffierte Fläche f hat somit den Inhalt:

$$|f| = |s| - |k_2| = \frac{1}{6}\pi r_1^2 - \pi r_2^2$$
$$= \pi\left(\frac{1}{6}r_1^2 - \frac{1}{9}r_1^2\right) = \frac{1}{18}\pi r_1^2.$$

Aufgabe 1259: Eine Summe aus Quadratzahlen

Die Zahlen 1, 2, 3, ..., n seien in beliebiger Reihenfolge mit c_1, c_2, c_3, ..., c_n bezeichnet.

Weise nach, dass dann $(c_1+1)^2 + (c_2+2)^2 + (c_3+3)^2 + ... + (c_n+n)^2$ stets eine gerade Zahl ist. (H.F.)

Lösung:

Es ist

$$\begin{aligned}
&(c_1+1)^2 + (c_2+2)^2 + (c_3+3)^2 + ... + (c_n+n)^2\\
=&c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2 + 2\cdot(c_1 + 2c_2 + 3c_3 + ... + nc_n) + 1^2 + 2^2 + ... + n^2\\
=&2\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 2\cdot(c_1 + 2c_2 + 3c_3 + ... + nc_n)
\end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass die $c_1^2, c_2^2, c_3^2, ..., c_n^2$ in irgendeiner Reihenfolge mit den Zahlen $1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2$ übereinstimmen.

Aufgabe 1260: Wahrscheinlich stumpfwinklig

E_1, E_2 und E_3 seien zufällig gewählte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

a) Es sei n gerade, also $n = 2m$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bilden E_1, E_2 und E_3 ein stumpfwinkliges Dreieck?

b) Beantworte die gleiche Frage für ungerades $n = 2m+1$.

c) Beantworte die gleiche Frage, wenn das n-Eck von n auf einem Kreis zufällig gewählten Punkten gebildet wird. (WJB)

Lösung:

Das Dreieck ist genau dann stumpfwinklig, wenn von einer seiner Ecken aus gesehen die anderen beiden Ecken im Uhrzeigersinn gesehen auf dem echten Halbkreis liegen. Die Wahrscheinlichkeit dafür sei P_1. Das beschriebene Ereignis kann nicht gleichzeitig für mehr als eine der drei Ecken auftreten. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P = 3P_1$.

a) Bei geradem n liegen in diesem Halbkreis $m-1$ der $2m-1$ Punkte (ohne die vorgegebene Ecke). Es gibt also $(m-1)(m-2)$ Möglichkeiten diese auszuwählen von insgesamt $(2m-1)(2m-2)$ Möglichkeiten.
Daraus ergibt sich $P = 3P_1 = 3\frac{(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m-2}{2m-1}$.

b) Bei ungeradem $n = 2m+1$ liegen m von insgesamt $2m$ Punkten im Halbkreis, also ist hier $P = 3P_1 = 3\frac{m(m-1)}{2m(2m-1)}$.

c) Da die Punkte alle zufällig gewählt wurden, wird das Dreieck jetzt aus drei zufällig auf dem Kreis gewählten Punkten gebildet.
Hier ist jeweils $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ und $P = 3P_1 = \frac{3}{4}$

Bemerkung: In a) und b) ist der Grenzwert von P für $n \to \infty$ ebenfalls $\frac{3}{4}$.

Eine „Besserwisserei“ zu Schaltsekunden

Eine alternative Lösung zur Mathespielerei „Frage nach der Uhrzeit“

von Achim Klenke

Wir betrachten nochmal die Mathespielerei V. „Frage nach der Uhrzeit“ aus Monoid-Heft 144 (Lösung in diesem Heft auf Seite 19):

> Um 10.12 Uhr fragt der Mathelehrer Hempel seine Schüler: Wieviel Uhr ist es in 2020202020 Stunden?
>
> *Bemerkung:* Wir ignorieren hier die Umstellung zwischen Winter- und Sommerzeit.
>
> (H.F.)

Als offensichtliche Lösung haben wir angegeben: 2020202020 geteilt durch 24 hat Rest 4. Also wird es 14:12 Uhr sein. Dabei bleibt unberücksichtigt, dass möglicherweise eine Umstellung auf Sommer- oder Winterzeit eine Verschiebung um eine Stunde bringt.* Bei Berücksichtigung der Uhrumstellungen wären 13:12 Uhr oder 15:12 Uhr ebenfalls möglich.

Schaltsekunden: 19:48 Uhr

Alle vier Jahre ist ein Schaltjahr, das nur ausfällt, wenn die Jahreszahl durch 100, aber nicht durch 400 teilbar ist. In einem Zyklus von 400 Jahren wiederholt sich also die Abfolge von Schaltjahren, und in diesem Zyklus gibt es 97 Schaltjahre.
Die Schaltjahre beeinflussen das Ergebnis nicht, aber es werden zudem ungefähr alle 18 Monate Schaltsekunden eingefügt, um Abweichungen der Erdrotation vom

* Dies war als Bemerkung so angegeben.

exakten 24-Stunden-Rhythmus auszugleichen. Diese Schaltsekunden addieren sich über die Periode von 2020202020 Stunden auf und führen zu einer anderen Uhrzeit. Um die Anzahl der Jahre zu ermitteln, die 2020202020 Stunden entsprechen, ermitteln wir zunächst die durchschnittliche Anzahl von Tagen und Stunden, die ein Jahr hat. Ein Zyklus von 400 Jahren hat 97 Schaltjahre mit 366 Tagen und 303 Nicht-Schalt-Jahre mit 365 Tagen, insgesamt also 146 097 Tage je 24 Stunden. Teilen wir dies durch 400, so erhalten wir die durchschnittliche Zahl von Stunden eines Jahres

$$\frac{24 \cdot 146\,097}{400} = 8765{,}82 \quad \text{(Stunden pro Jahr)}.$$

Der Dezimalbruch ist dabei exakt. Die 2020202020 Stunden ergeben also

$$2020202020 \cdot \frac{400}{24 \cdot 146\,097} = \frac{101010101000}{438291} \approx 230\,463{,}5528 \quad \text{(Jahre)}.$$

Nach durchschnittlich 1,5 Jahren wird eine Schaltsekunde eingefügt. Bei dieser Anzahl von Jahren sind dies

$$\frac{230\,463{,}5528}{1{,}5} \approx 153\,642{,}3685 \quad \text{(Sekunden)}.$$

Es werden also 153 642 Schaltsekunden eingefügt. Dies sind 1 Tag (86 400 Sekunden), 18 Stunden ($18 \cdot 3\,600 = 64\,800$), 24 Minuten ($24 \cdot 60 = 1\,440$) und 2 Sekunden. Nach der offensichtlichen Lösung wäre es nach Ablauf der 2020202020 Stunden 14:12 Uhr. Wir müssen nun 18 Stunden und 24 Minuten früher annehmen, also 19:48 Uhr.

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

Mit den Buchstaben M, O, N, I, D seien positive reelle Zahlen, die auch gleich sein dürfen, bezeichnet.

Hat dann die Gleichung

$$M^2 + O^2 + N^2 + O^2 + I^2 + D^2 = 2(M + O + N + O + I + D) - 6$$

eine Lösung?

Lösung

Die Gleichung lässt sich umformen in die Gleichung

$$\begin{aligned} &(M^2 - 2M + 1) + 2(O^2 - 2O + 1) + (N^2 - 2N + 1) + \\ &\qquad (I^2 - 2I + 1) + (D^2 - 2D + 1) = 0 \\ \Longrightarrow\ &(M-1)^2 + 2(O-1)^2 + (N-1)^2 + (I-1)^2 + (D-1)^2 = 0 \\ &\qquad \Longrightarrow M = O = N = I = D = 1 \end{aligned}$$

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
Martin Mattheis

Ian Stewart: Größen der Mathematik

Jede Wissenschaft hat Ihre Helden, auch die Mathematik: Oft hört man in der Schule von mathematischen Inhalten, die nach früher lebenden Mathematikern benannt wurden: Euklidischer Algorithmus (da stecken sogar zwei Mathematiker drin), Satz des Thales, Pascal'sches Dreieck, Gauß-Verfahren, Satz des Pythagoras, Newton-Verfahren etc. Leider erfährt man dabei aber wenig oder gar nichts über die namengebende Person. Sieht man dagegen in historische Lexika, so findet man vor allem etwas über die Lebensdaten, aber wenig Inhaltliches über die von der Person entwickelte Mathematik.

In seinem Buch „Größen der Mathematik" geht der britische Mathematiker Ian Stewart einen Mittelweg: ein bisschen biographisches und ein bisschen von den mathematischen Ideen, mit der sich die jeweilige Person beschäftigt hat. Bei dem umfangreichen Schaffen der aufgeführten Mathematikerinnen und Mathematiker kann es sich dabei natürlich nur um einen ersten Einstieg handeln. Trotzdem ist es dem Autor gelungen einen Eindruck zu vermitteln, womit sie sich mathematisch beschäftigt haben. Dadurch erhält man beim Lesen zusätzlich zu Grundinformationen über die Personen einen schönen ersten Eindruck der mathematischen Fragestellungen, mit denen diese sich beschäftigt haben.

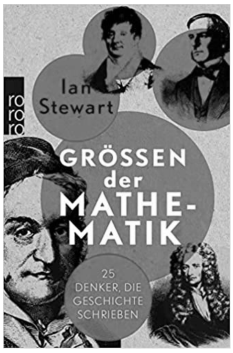
Der zeitliche Bogen – nach dem die untersuchten Personen auch im Buch angeordnet sind – reicht zwar von der Antike bis heute, der Schwerpunkt liegt jedoch in den letzten zweihundert Jahren.

Unter die Lupe genommen werden: Archimedes, Liu Hui, Al-Chwarismi, Madhava, Cardano, Fermat, Newton, Euler, Fourier, Gauß, Lobatschewski, Galois, Lovelace, Boole, Riemann, Cantor, Kowalewskaja, Poincaré, Hilbert, Noether, Ramanujan, Gödel, Turing, Mandelbrot und Thurston. Es macht gar nichts, wenn Du davon wenige – oder niemanden – kennst, denn genau um das zu ändern ist das Buch „Größen der Mathematik" ja da.

Wundert man sich, warum sich unter den 25 beschriebenen Helden der Mathematik nur drei Frauen befinden, so muss man wissen, dass Frauen es noch vor 100 Jahren sehr schwer hatten, eine den Männern gleichwertige Schulbildung zu erlangen und dass es ihnen fast unmöglich war, eine Professur zu erlangen. Folgerichtig ist mit Sofja Kowalewskaja eines der Kapitel der ersten Professorin für Mathematik weltweit gewidmet.

Den Abschluss des Buches bildet ein kurzes Kapitel „Mathematiker – Was macht sie so besonders?", in dem Stewart bei allen Unterschieden der vorgestellten Helden der Mathematik tatsächlich eine große Gemeinsamkeit findet. Diese Gemeinsam-

keit soll hier natürlich nicht verraten werden.
Fazit: Ian Stewart ist wieder einmal ein spannendes populärwissenschaftliches Buch zur Mathematik gelungen. Insbesondere hat er – auch wenn der Scherpunkt auf der historischen Persönlichkeit liegt – aus Sicht des Rezensenten trotzdem eine gute Balance zwischen Lebensgeschichte und einem ersten Einblick in die mathematischen Inhalten, mit denen sich die beschriebenen Personen befasst hatten, gefunden.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:
Stewart, Ian: Größen der Mathematik. 25 Denker, die Geschichte schrieben
rororo, 2018,
ISBN 978-3-499-63394-2,
478 Seiten.

Art des Buches:	Sachbuch zur Geschichte der Mathematik
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Bundeswettbewerb Mathematik 2021

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

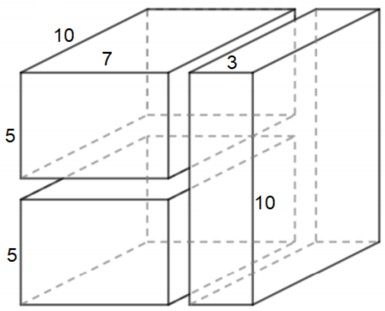
Aufgabe 1

Ein Würfel mit Kantenlängen 10 wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerlegt. Anschließend wird einer dieser beiden Quader durch einen zweiten ebenen Schnitt weiter in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt.
Welches ist das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader?
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung: Der größte der drei Quader hat stets mindestens das Volumen 350.
Beweis: Wir nennen die drei Kantenrichtungen eines Quaders (und damit auch des Würfels) Breite, Tiefe und Höhe; genau vier der zwölf Kanten des Quaders sind

einer der Richtungen zugeordnet. Ein ebener Schnitt, der den Würfel in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt, schneidet ausschließlich Kanten einer Richtung, ohne Einschränkung sei dies die Breite, und der Schnitt lässt die Kanten der beiden anderen Richtungen Tiefe und Höhe unberührt. Die Kanten der beiden Richtungen Tiefe und Höhe haben also nach diesem Schnitt weiterhin die Länge 10. Ebenso schließt man, dass der zweite ebene Schnitt, mit dem einer der beiden Quader in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt wird, ausschließlich die Kanten einer Richtung schneiden kann. Mindestens eine der Richtungen Tiefe oder Höhe wird also bei keinem Schnitt berührt und hat daher auch nach dem zweiten Schnitt die Länge 10. Deshalb ist das Volumen jedes der drei entstehenden Quader, die alle ganzzahlige Kantenlängen haben, ein ganzzahliges Vielfaches von 10.

Der Ausgangs-Würfel mit Kantenlänge 10 hat das Volumen 1000. Nach dem Schubfachprinzip hat der größte der drei Quader also mindestens das Volumen $\frac{1}{3} \cdot 1000$, also nach der vorigen Beobachtung mindestens das Volumen 340, da dies das kleinste ganzzahlige Vielfache von 10 ist, das $\frac{1}{3} \cdot 1000$ übersteigt. Jedoch ist die Primzahlzerlegung von $34 = 2 \cdot 17$, und ein Quader mit Kantenlänge 17 oder 34 kann nicht aus Zerteilung von Quadern mit Kantenlänge höchstens 10 entstehen. Also ist das Volumen 340 keine mögliche Lösung.



Das nächstkleinere Volumen, das ein ganzzahliges Vielfaches von 10 ist, ist 350. Und tatsächlich existieren zwei Schnitte, nach denen der größte der drei Quader das Volumen 350 hat, nämlich eine Zerlegung in drei Quader mit Volumina 350, 350 oder 300, wie in der nebenstehenden Skizze. (Die Schnitte haben eigentlich die Dicke 0 und sind nur zur Verdeutlichung so groß eingezeichnet.)

Das beweist die in der Lösung gegebene Antwort. Q.e.d.

Aufgabe 2

Der Bruch $\frac{3}{10}$ kann auf genau zwei Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden:

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann $\frac{3}{2021}$ als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden?

b) Gibt es eine nicht durch 3 teilbare positive ganze Zahl n mit der Eigenschaft, dass $\frac{3}{n}$ auf genau 2021 Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden kann?

Erläuterung: Ein Stammbruch ist ein Bruch der Form $\frac{1}{z}$, wobei z eine positive ganze Zahl ist.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Beweis

a) Wir behaupten: Der Bruch $\frac{3}{2021}$ kann auf genau drei verschiedene Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden.
Wegen $3 \cdot 673 = 2019 < 2021$, also $\frac{3}{2021} < \frac{1}{673}$, kann kein Stammbruch $\frac{1}{z}$ mit $1 \leq z \leq 673$ Teil eines Darstellung von $\frac{3}{2021}$ als Summe zweier Stammbrüche sein. Man findet aber für $z = 674$ wegen $3 \cdot 674 = 2022$, dass

(2.1) $\frac{3}{2021} = \frac{1}{674} + \frac{1}{674 \cdot 2021} = \frac{1}{674} + \frac{1}{1362154}$.

Allgemeiner als in Gleichung (2.1) lässt sich für ganze Zahlen k, mit $k \geq 0$, ansetzen, dass

(2.2) $\frac{3}{43 \cdot 47} = \frac{3}{2021} = \frac{1}{674+k} + \frac{1+3k}{43 \cdot 47 \cdot (674+k)}$,

und aus Gleichung (2.2) ergibt sich genau dann eine weitere Darstellung von $\frac{3}{2021}$ als Summe zweier Stammbrüche, wenn $1+3k$ den Nenner $43 \cdot 47 \cdot 674 + k$ teilt. Weil $1 + 3k$ kein Vielfaches von 3 ist, teilt $1 + 3k$ genau dann diesen Nenner, wenn $1 + 3k$ auch

$$3 \cdot 43 \cdot 47 \cdot (674+k) = 43 \cdot 47 \cdot (2021+1+3k) = 43^2 \cdot 47^2 + (1+3k) \cdot 43 \cdot 47$$

teilt, also genau dann, wenn $1 + 3k$ das Produkt $2021^2 = 43^2 \cdot 47^2$ von zwei Primzahlquadraten teilt. Die Teiler von $43^2 \cdot 47^2$ unterscheiden sich mit Blick auf ihren Rest mod3 durch

(2.3) $1 \equiv 43 \equiv 43^2 \equiv 47^2 \equiv 43 \cdot 47^2 \equiv 43^2 \cdot 47^2 \equiv 1 \mod 3$ und

(2.4) $47 \equiv 43 \cdot 47 \equiv 43^2 \cdot 47 \equiv 2 \mod 3$.

Wegen $1 + 3k \equiv 1 \mod 3$ kann $1 + 3k$ genau den Termen in (2.3) entsprechen, und dies führt über $k \in \{0, 14, 616, 736, 31662, 1361480\}$ zu den drei verschiedenen Darstellungen

$$\frac{3}{2021} = \frac{1}{674} + \frac{1}{1362154} = \frac{1}{688} + \frac{1}{32336} = \frac{1}{1290} + \frac{1}{1410},$$

das umfasst auch die Zerlegung aus Gleichung (2.1).

b) Wir behaupten: Für $n = 2^{4042}$ lässt sich $\frac{3}{n}$ auf genau 2021 verschiedene Arten als Summe zweier Stammbrüche darstellen.
Wir betrachten zunächst den allgemeineren Fall $n = 2^m$, mit $m \geq 1$; die Zahl n ist nicht durch 3 teilbar. Sind u, $v \geq 1$ ungerade ganze Zahlen und s, $t \geq 0$ nichtnegative ganze Zahlen, so lässt sich jede Summe zweier Stammbrüche, die $\frac{3}{2^m}$ ergibt, in der Form

(2.5) $\frac{3}{2^m} = \frac{1}{u \cdot 2^s} + \frac{1}{v \cdot 2^{s+t}} = \frac{v \cdot 2^t + u}{u \cdot v \cdot 2^{s+t}}$

schreiben. Im Vergleich der Brüche auf der linken und rechten Seite von (2.5) ergibt sich, dass sowohl u als auch v Teiler des Zählers $v \cdot 2^t + u$ sein müssen. Damit sind beide Terme auf den rechten Seiten der Gleichungen in

$$\tfrac{1}{u} \cdot (v \cdot 2^t + u) = \tfrac{v}{u} \cdot 2^t + 1 \text{ und } \tfrac{1}{v} \cdot (v \cdot 2^t + u) = 2^t + \tfrac{u}{v}$$

ganze Zahlen, also muss u ein Teiler von v (die ungerade Zahl u ist teilerfremd zu 2^t) und v ein Teiler von u sein, also $u = v$, und (2.5) nimmt die Form $\frac{3}{2^m} = \frac{2^t+1}{u \cdot 2^{s+t}}$ an. Da $2^t + 1$ ungerade ist, müssen $s + t = m$ und $2^t + 1 = 3u$ gelten.

Wegen $2 \equiv 2 \mod 3$ ist $2^{2k} + 1 \equiv 2 \mod 3$ und $2^{2k+1} + 1 \equiv 0 \mod 3$ für alle $k \geq 0$. Der Term $\frac{1}{3} \cdot (2^{2k+1} + 1)$ nimmt für $k = 0$ den Wert 1 an, ist also ungerade, und wegen der für alle $k \geq 1$ gültigen Umformung

$$(2.6) \quad \frac{2^{2k+1}+1}{3} = \frac{2 \cdot (4^k - 1) + 3}{4 - 1} = 2 \cdot (1 + 4 + \ldots + 4^{k-1}) + 1$$

ist der Term $\frac{1}{3} \cdot (2^{2k+1} + 1)$ für alle $k \geq 0$ ungerade. Also ergeben sich genau für die ungeraden t mit $0 \leq t \leq m$ Darstellungen von $\frac{3}{2^m}$ als Summe zweier Stammbrüche, nämlich mit Gleichung (2.5) die Summen

$$(2.7) \quad \frac{3}{2^m} = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot (2^t+1) \cdot 2^{m-t}} + \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot (2^t+1) \cdot 2^m}, \text{ wobei } 0 \leq t \leq m, t \text{ ungerade.}$$

Die Darstellungen sind paarweise verschieden, weil die Primfaktorzerlegungen der beiden Nenner auf der rechten Seite genau die Zweierpotenzen 2^{m-t} und 2^m enthalten.

Wählen wir $m = 4042$, dann haben wir mit $t \in \{1, 3, 5, \ldots, 4039, 4041\}$ gemäß der Summen (2.7) genau 2021 verschiedene Arten gefunden, $\frac{3}{4042}$ als Summe zweier Stammbrüche darzustellen.

Das beweist die Behauptung. Q.e.d.

Bemerkungen: Die Überlegungen im Beweis von Teil a) lassen sich allgemeiner wie folgt beschreiben: Sind n eine nicht durch 3 teilbare Zahl und a, b positive ganze Zahlen, so gelten die Äquivalenzbeziehungen

$$(2.8) \quad \tfrac{3}{n} = \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} \Leftrightarrow 3 \cdot (3ab - na - nb) = 3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow (3a - n) \cdot (3b - n) = n^2.$$

Aus dieser Beobachtung folgt: Die Anzahl der Darstellungen von $\frac{3}{n}$ als Summe zweier Stammbrüche wie auf der linken Seite von (2.8) mit $a \leq b$ entspricht genau der Anzahl der positiven Teiler t von n^2, für die $t < n$ und $t \equiv -n \mod 3$ gelten. Denn auf der rechten Seite von (2.8) ist $t = 3a - n$ ein solcher Teiler. Unter anderem folgt hieraus: Für jede Primzahl $q \geq 2$ mit $q \equiv 2 \mod 3$, also beispielsweise auch $q = 5$ oder $q = 47$, kann $\frac{3}{q^{4042}}$ auf genau 2021 Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden kann, nämlich

$$\frac{3}{q^{4042}} = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot (q^{4042} + q^{2m+1})} + \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot (q^{4042} + q^{8084-2m-1})} \text{ für } 0 \leq m \leq 2020.$$

Aufgabe 3

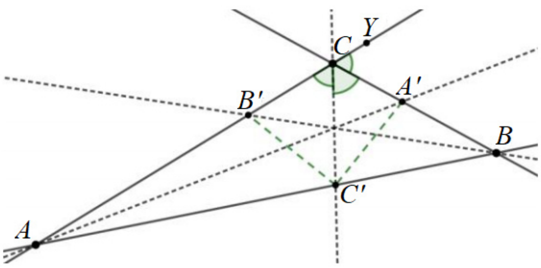
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei $\sphericalangle ACB = 120°$, und die Innenwinkelhalbierenden durch A, B und C schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in A' bzw. B' bzw. C'.

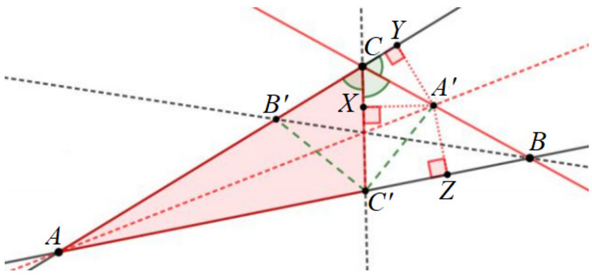
Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle A'C'B'$?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen

Lösung: Der Winkel $\sphericalangle A'C'B'$ ist ein rechter Winkel, also $\sphericalangle A'C'B' = 90°$.

Erster Beweis: Skizze 3.1 zeigt links die Situation der Aufgabenstellung. Dabei bezeichne Y den Fußpunkt des Lots von A' auf die Gerade (AC); der Punkt C liegt dann wegen $\sphericalangle ACA' = \sphericalangle ACB = 120°$ echt zwischen A und Y.





Skizze 3.1: Aufgabenstellung (links), A' als Schnittpunkt von Winkelhalbierenden (rechts)

Die Voraussetzung $\sphericalangle ACB = 120°$ geht elementar in diesen Beweis ein: Weil $\sphericalangle ACY = 180°$ und nach Aufgabenstellung $\sphericalangle ACC' = \sphericalangle C'CB = 60°$, folgt sofort

$$\sphericalangle BCY = \sphericalangle ACY - \sphericalangle ACB = 60° = \sphericalangle C'CB,$$

also halbiert die Gerade (CB) den Winkel $\sphericalangle C'CY = 120°$, den Außenwinkel bei Punkt C im Dreieck $\triangle AC'C$. Die Gerade (CB) schneidet sich nach Konstruktion mit der Winkelhalbierenden (AA') von $\sphericalangle C'AC = \sphericalangle BAC$ im Punkt A'. Definieren wir auch die Punkte X bzw. Z als Fußpunkte der Lote von A' auf die Geraden (CC') bzw. (AB), so gilt aufgrund der Eigenschaften der Winkelhalbierenden (CB) von $\sphericalangle C'CY$ bzw. (AA') von $\sphericalangle C'AC$, dass

$$\overline{A'X} = \overline{A'Y} = \overline{A'Z},$$

woraus sich direkt ergibt, dass die Dreiecke $\triangle C'A'X$ und $\triangle A'C'Z$ kongruent zueinander sind (nach ssw), die Gerade $(C'A')$ also den Winkel $\sphericalangle BC'C$ halbiert:

(3.1) $\sphericalangle BC'A' = \sphericalangle A'C'C = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BC'C.$

Das ist für das Dreieck $\triangle AC'C$ eine Anwendung des allgemeineren Satzes, dass sich die Halbierende eines Innenwinkels, hier $\sphericalangle C'AC$ mit Scheitel A, und die Halbierenden der Außenwinkel, hier $\sphericalangle BC'C$ bei C' bzw. $\sphericalangle C'CY$ bei C, deren Scheitel zu den beiden anderen Ecken des Dreiecks gehören, stets in einem Punkt schneiden, hier im Punkt A'.

Ebenso wie (3.1) können wir herleiten, dass $(C'B')$ den Winkel $\sphericalangle CC'A$ bei C' halbiert, also

(3.2) $\sphericalangle CC'B' = \sphericalangle B'C'A = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle CC'A$.

Damit schließen wir mit den Gleichungen (3.1) und (3.2), dass

$$2\sphericalangle A'C'B' = 2\sphericalangle A'C'C + 2\sphericalangle CC'B' = \sphericalangle BC'C + \sphericalangle CC'A = \sphericalangle BC'A = 180°,$$

also $\sphericalangle A'B'C' = 90°$. Q.e.d.

Die folgenden Beweise der Behauptung nutzen auf die eine oder andere Weise, was wir über die Verhältnisse wissen, in denen die Fußpunkte der Winkelhalbierenden die jeweiligen Dreiecksseiten teilen. Wir fassen das hier zusammen, noch ohne die spezielle Voraussetzung $\sphericalangle ACB = 120°$ der Aufgabe zu nutzen.

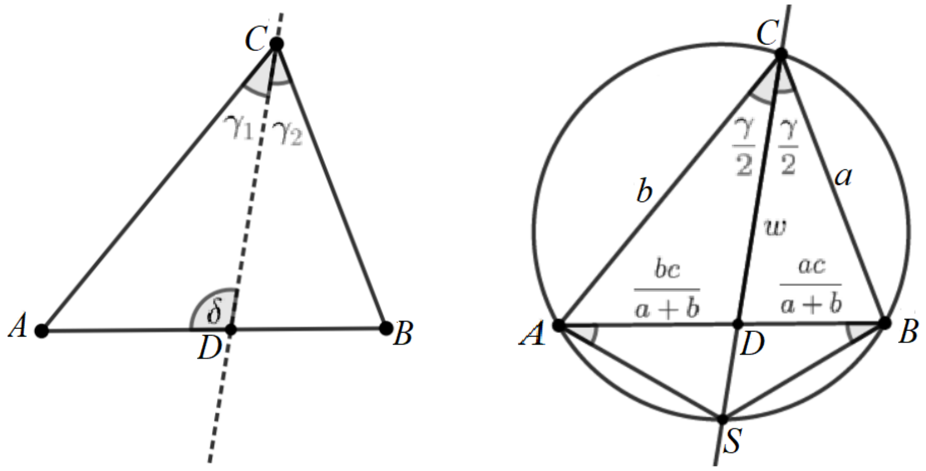
Hilfssatz 1 (Winkelhalbierendensatz): In einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ sei D ein Punkt auf der Strecke AB. Die Gerade (CD) ist genau dann die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$, wenn

(3.3) $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ bzw. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = 1$.

Beweis von Hilfssatz 1: Dies lässt sich elementar durch Betrachtung ähnlicher Dreiecke beweisen, wir verwenden hier (kürzer) den Sinussatz, aus dem mit den Bezeichnungen von Skizze 3.2 links die Beziehungen

(3.4) $\frac{\sin \gamma_1}{\overline{AD}} = \frac{\sin \delta}{\overline{AC}}$ und $\frac{\sin \gamma_2}{\overline{BD}} = \frac{\sin(180° - \delta)}{\overline{BC}} = \frac{\sin \delta}{\overline{BC}}$, also $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}$

folgen. Wegen $0° < \gamma_1 + \gamma_2 < 180°$ ist der Quotient ganz rechts in (3.4) genau dann gleich 1, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$.

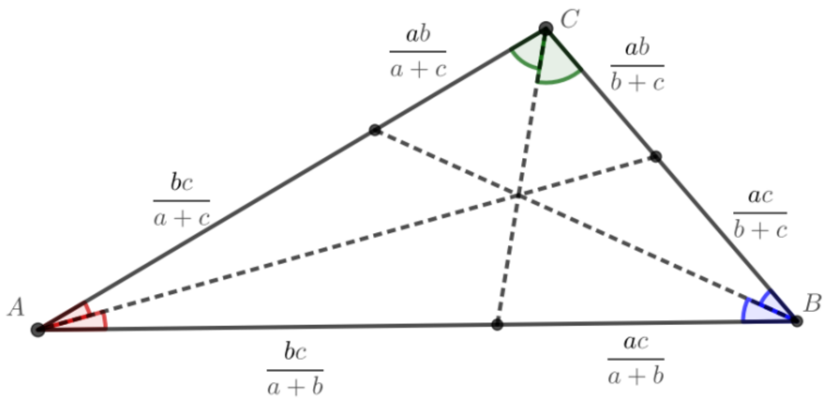


Skizze 3.2: Beweis der Hilfssätze 1 (links) und 2 (rechts)

In einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ mit Seitenlängen $a := \overline{BC}$, $b := \overline{AC}$ und $c := \overline{AB}$ sei D ein Punkt auf AB so, dass die Gerade (CD) den Winkel $\sphericalangle ACB$ halbiert; vergleiche Skizze 3.2 rechts. Aus dem Hilfssatz 1 folgt nun $\frac{c}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} + 1 = \frac{b}{a} + 1 = \frac{a+b}{a}$, also

(3.5) $\overline{BD} = \frac{ac}{a+b}$ und $\overline{AD} = c - \overline{BD} = \frac{bc}{a+b}$.

Mit analoger Argumentation kennen wir alle Verhältnisse, in denen die Fußpunkte der Winkelhalbierenden die jeweiligen Dreiecksseiten teilen, sowie die Längen der jeweiligen Teilstrecken.



Skizze 3.3: Längen der Teilstrecken durch Anwendung des Winkelhalbierendensatzes

Hilfssatz 2 (Länge der Winkelhalbierenden): In einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ mit Seitenlängen $a := \overline{BC}$, $b := \overline{AC}$ und $c := \overline{AB}$ sei D ein Punkt auf AB so, dass die Gerade (CD) den Winkel $\gamma := \sphericalangle ACB$ halbiert; vergleiche Skizze 3.2 (rechts). Dann ist

(3.6) $w := \overline{CD} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos(\frac{\gamma}{2})$.

Beweis von Hilfssatz 2: Es sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden (CD) mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, der von C durch (AB) getrennt ist. Nach dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel sind

(3.7) $\sphericalangle ACS = \sphericalangle ABS = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle SCB = \sphericalangle SAB$.

Aus (3.7) ist auch erkennbar, dass das Dreieck $\triangle BAS$ gleichseitig mit Scheitel S und Basis AB ist; wegen $\sphericalangle BSA = 180° - \gamma$ gilt dabei

(3.8) $\overline{AS} = \overline{BS} = \frac{c}{2 \cdot \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{c}{2 \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$.

Wegen $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADS$ (Scheitelwinkel) sind die Dreiecke $\triangle BCD$ und $\triangle SDA$ ähnlich, sodass mit (3.5) und (3.8) geschlossen werden kann, dass

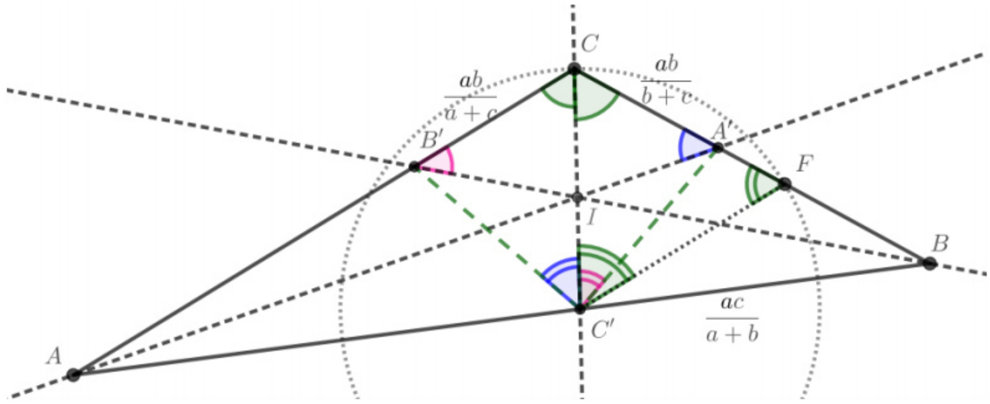
(3.9) $\frac{w}{a} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \frac{2b}{a+b} \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$;

das beweist die Behauptung (3.6).

Bemerkung: Ist im Dreieck $\triangle ABC$ der Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB = 120°$, gilt also $\cos(\frac{\gamma}{2}) = \frac{1}{2}$, so lässt sich $\overline{CC'} = \frac{ab}{a+b}$ auch direkter als über die Anwendung von (3.6) herleiten; vergleiche die folgende Herleitungen von (3.11).

Zweiter Beweis (ähnliche Dreiecke): Im Dreieck $\triangle ABC$ der Aufgabenstellung seien die Seitenlängen mit $a := \overline{BC}$, $b := \overline{AC}$ und $c := \overline{AB}$ bezeichnet. Neben den

Punkten in der Aufgabenstellung sei I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck $\triangle ABC$.



Skizze 3.4: Bezeichnungen im zweiten Beweis

Wegen $2 \cdot \cos(\sphericalangle ACB) = 2 \cdot \cos(120^\circ) = -1$ nimmt der Kosinussatz im Dreieck $\triangle ABC$ die Form

(3.10) $c^2 = a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 + c \cdot (a+b) - c \cdot (a+b) - ab \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+c} = \frac{b+c}{a+b}$

an. Aus dem Winkelhalbierendensatz (Hilfssatz 1) und wie in Skizze 3.3 schließen wir auf die Teilstrecken der Seiten von $\triangle ABC$, wie sie durch die Punkte A', B', C' generiert werden.

Der Punkt F bezeichne wie in Skizze 3.4 den Schnittpunkt der Strecke BC mit dem Kreis um C' mit Radius $\overline{CC'}$ jenseits des Punktes C. Im nach Konstruktion gleichschenkligen Dreieck $\triangle FCC'$ mit Scheitel C' sind die beiden Basiswinkel $\sphericalangle CFC' = \sphericalangle C'CF = 60^\circ$ und damit auch $\sphericalangle FCC' = 60^\circ$; das Dreieck ist also gleichseitig mit Seitenlänge $\overline{CC'} = \overline{C'F}$. Wegen $\sphericalangle C'FB = 180^\circ - \sphericalangle CFC' = 120^\circ$ ist das Dreieck $\triangle C'BF$ ähnlich zum Dreieck $\triangle ABC$ und somit gilt

(3.11) $\overline{CC'} = \overline{C'F} = \overline{CA} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{ac}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$.

Da BI auch Winkelhalbierende im Dreieck $\triangle CC'B$ ist, folgt mit Hilfssatz 1 analog zu (3.5) auch

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{CI}} = 1 + \frac{\overline{IC'}}{\overline{CI}} = 1 + \frac{\overline{C'B}}{\overline{CB}} = 1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{ac}{a+b} = \frac{a+b+c}{a+b},$$

also zusammen mit (3.11) schließlich

(3.12) $\overline{CI} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \overline{CC'} = \frac{ab}{a+b+c}$.

Wir nutzen nun die hergeleiteten Verhältnisse, um die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $\triangle CB'I$ und $\triangle CC'A'$ nachzuweisen: Wegen $\sphericalangle B'CI = 60^\circ = \sphericalangle C'CA'$ und

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CI}} = \frac{a+b+c}{a+c} = \frac{b+c}{a+b} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CA'}}$$

nach (3.10) folgt dies aus dem sws-Ähnlichkeitssatz. Damit gilt insbesondere

(3.13) $\sphericalangle A'C'C = \sphericalangle IB'C$.

Ebenso weisen wir über die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle A'CI$ und $\triangle C'CB'$ nach, dass die beiden in Skizze 3.4 markierten Winkel übereinstimmen,

(3.14) $\sphericalangle CA'I = \sphericalangle CC'B'$.

Im Dreieck $\triangle ABC$ ist nach Voraussetzung $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA = 180° - 120° = 60°$, also sind im Viereck $\square B'IA'C'$ die Winkel $\sphericalangle A'IB' = 180° - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA) = 150°$ (Scheitelwinkel) und

(3.15) $\sphericalangle IB'C + \sphericalangle CA'I = 360° - \sphericalangle B'CA' - \sphericalangle A'IB' = 360° - 120° - 150° = 90°$.

Damit bestimmt sich der gesuchte Winkel $\sphericalangle A'C'B'$ in der Kombination von (3.15), (3.13) und (3.14) zu

$$\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle A'C'C + \sphericalangle CC'B = \sphericalangle IB'C + \sphericalangle CA'I = 90°,$$

er ist also ein rechter Winkel. Q.e.d.

Dritter Beweis (Winkelhalbierendensatz): Die Bezeichnungen seien wie in der Aufgabenstellung gewählt; siehe Skizze 3.1 (links). Die Voraussetzung $\sphericalangle ACB = 120°$ geht in diesen Beweis über $\cos(60°) = -\cos(120°) = \frac{1}{2}$ ein. Wir weisen nach, dass die Gerade $(C'A')$ den Winkel $\sphericalangle BC'C$ halbiert, was im Dreieck $\triangle BCC'$ nach Hilfssatz 1 äquivalent ist zu

(3.16) $\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{CC'}} \Leftrightarrow CC' = \frac{\overline{CA'} \cdot \overline{BC'}}{\overline{BA'}}$.

Die Terme in (3.16) rechts lassen sich im Dreieck $\triangle ABC$, in dem die Punkte A' und C' Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten sind, nach Skizze 3.3 ermitteln, also

$$\frac{\overline{CA'} \cdot \overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{ba}{b+c} \cdot \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{b+c}{ca} = \frac{ab}{a+b} = \overline{CC'},$$

wobei wir für die letzte Gleichung Hilfssatz 2 mit $\gamma = \sphericalangle ACB = 120°$ genutzt haben. Das beweist (3.16). Ebenso rechnen wir nach, dass die Gerade $(C'B')$ den Winkel $\sphericalangle CC'A$ halbiert. Damit folgt

$$2\sphericalangle A'C'B' = 2\sphericalangle A'C'C + 2\sphericalangle CC'B' = \sphericalangle BC'C + \sphericalangle CC'A = \sphericalangle BC'A = 180°,$$

also $\sphericalangle A'C'B' = 90°$. Q.e.d.

Vierter Beweis (Umkehrung des Satzes von Pythagoras im Dreieck $\triangle A'B'C'$) – Beweisskizze: Im Dreieck $\triangle ABC$ der Aufgabenstellung seien die Seitenlängen mit $a := \overline{BC}$, $b := \overline{AC}$ und $c := \overline{AB}$ bezeichnet. Aus dem Winkelhalbierendensatz (Hilfssatz 1) und Skizze 3.3 schließen wir auf die Teilstrecken der Seiten von $\triangle ABC$, wie sie durch die Punkte A', B', C' generiert werden.

Nach dem Satz des Pythagoras (und seiner Umkehrung) ist das Dreieck $\triangle A'B'C'$ genau dann rechtwinklig mit Hypotenuse $A'B'$, wenn

(3.17) $0 = \overline{B'C'}^2 + \overline{A'C'}^2 - \overline{A'B'}^2.$

Aus der mehrfachen Anwendung des Kosinussatzes in den Dreiecken $\triangle B'C'C$, $\triangle C'A'C$ und $\triangle B'A'C$ folgen mit $\cos(60°) = -\cos(120°) = \frac{1}{2}$ schließlich Terme für $\overline{B'C'}^2$, $\overline{C'A'}^2$ und $\overline{A'B'}^2$, nämlich

(3.18) $\overline{B'C'}^2 = \overline{B'C}^2 + \overline{CC'}^2 - \overline{B'C} \cdot \overline{CC'}$, $\overline{C'A'}^2 = \overline{A'C}^2 + \overline{CC'}^2 - \overline{A'C} \cdot \overline{CC'}$

(3.19) sowie $\overline{A'B'}^2 = \overline{B'C}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{B'C} \cdot \overline{A'C}$.

Hieraus schließen wir (mit etwas aufwändigeren Umformungen)

$$\begin{aligned}\overline{B'C'}^2 + \overline{A'C'}^2 - \overline{A'B'}^2 &= \overline{CC'} \cdot (2 \cdot \overline{CC'} - \overline{B'C} - \overline{A'C}) - \overline{B'C} \cdot \overline{A'C}\\ &= \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{ab \cdot (a+b)}{(b+c) \cdot (c+a)} - \frac{a^2b^2}{(b+c) \cdot (c+a)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Daher ist $\sphericalangle A'C'B'$ ein rechter Winkel.* Q.e.d.

Aufgabe 4

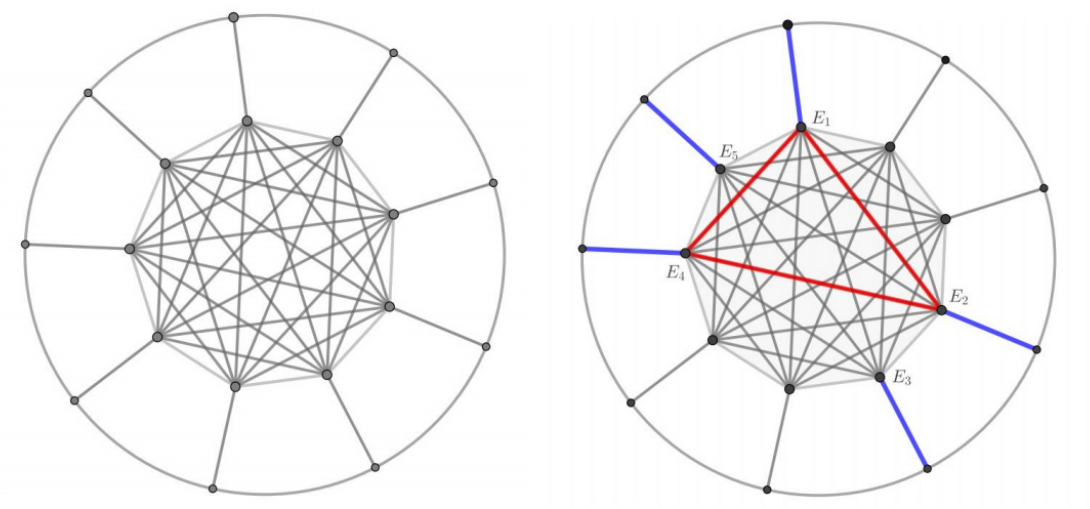
Die Grundfläche einer Pyramide ist ein regelmäßiges n-Eck. Jede Verbindungsstrecke zweier Ecken der Pyramide mit der Ausnahme der Seiten der Grundfläche wird entweder rot oder blau gefärbt.

Beweise: Für $n = 9$ gibt es bei jeder solchen Färbung drei Ecken der Pyramide, die durch drei gleichfarbige Strecken verbunden sind, und für $n = 8$ gilt dies nicht in jedem Fall.

Beweis: Wir nennen (allgemein) zwei Ecken benachbart, wenn sie durch eine Seite der Grundfläche miteinander verbunden sind. Jede Kombination von drei Ecken der Pyramide nennen wir (etwas kürzer) Dreieck; sind die drei Ecken durch gleichfarbige Strecken verbunden, so sprechen wir von einem einfarbigen (blauen bzw. roten) Dreieck. Eine Ecke der Grundfläche heiße blau bzw. rot, wenn die Verbindungsstrecke dieser Ecke zur Spitze der Pyramide blau bzw. rot gefärbt ist.

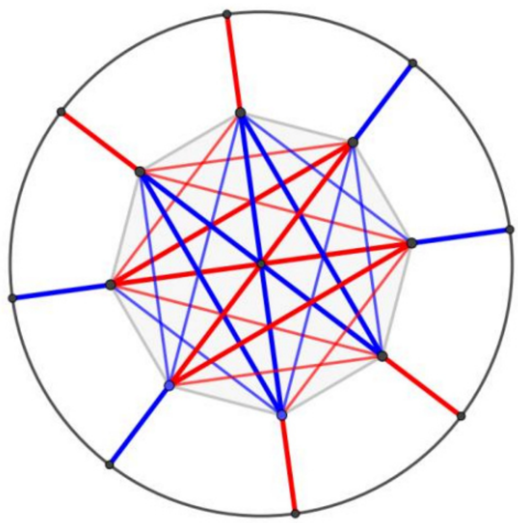
Wir betrachten zunächst den Fall $n = 9$ und stellen die Pyramide wie in Skizze 4.1 links graphisch dar: Alle Punkte auf dem umschließenden Kreis sind eine identische Ecke, nämlich die Spitze der Pyramide. Alle eingezeichneten Kanten bis auf die Seiten der Grundfläche werden nach Aufgabenstellung entweder rot oder blau gefärbt.

* Das Dreieck $\triangle A'B'C'$ ist ein Spezialfall eines Dreiecks, das durch die Fußpunkte von Ecktransversalen (Cevanen) gebildet wird. Für solche Dreiecke sind Formeln für Seitenlängen und Flächeninhalte bekannt; siehe Eric W. Weisstein, Cevian Triangle; `https://mathworld.wolfram.com/CevianTriangle.html` (abgerufen am 8. März 2021). Weisstein behandelt auch den Fall, dass die Punkte A', B', C' Fußpunkte der Winkelhalbierenden sind; siehe Eric W. Weisstein, Incentral Triangle; `https://mathworld.wolfram.com/IncentralTriangle.html` (abgerufen am 3. März 2021)



Skizze 4.1: Darstellung der Pyramide ($n = 9$) und Nachweis eines roten Dreiecks

Aufgrund des Schubfachprinzips gibt es im Fall $n = 9$ mindestens fünf Ecken der Grundfläche, die dieselbe Farbe haben, ohne Einschränkung seien es blaue Ecken. Sind zwei dieser blauen Ecken nicht benachbart, so ist ihre Verbindungsstrecke gefärbt: Ist sie blau gefärbt, so haben wir ein blaues Dreieck gefunden, und die Aufgabe ist gelöst. Wir betrachten nun die Konstellation, dass alle nicht benachbarten dieser blauen Ecken durch rote Strecken verbunden sind: Wir wählen genau fünf blaue Ecken $E_1, E_2, \ldots, E_5$ aus. Nicht alle Ecken können benachbart sein, und E_1 sei ohne Einschränkung so gewählt, dass sie nicht zu E_2 benachbart ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so bilden die Ecken E_1, E_2, E_4 stets ein rotes Dreieck unabhängig von der genauen Lage der Ecken $E_1, E_2, \ldots, E_5$ zueinander.
Für $n = 8$ wählen wir dieselbe graphische Darstellung und weisen nach, dass für die folgende Färbung keine drei Ecken der Pyramide durch gleichfarbige Strecken verbunden sind:



Skizze 4.2: Eine Färbung für $n = 8$, bei der kein einfarbiges Dreieck existiert

Je vier der acht Ecken der Grundfläche seien wie in Skizze 4.2 rot bzw. blau, das heißt, die Verbindungsstrecke zwischen der Ecke und der Spitze der Pyramide ist rot bzw. blau gefärbt. In Skizze 4.2 lässt sich für die insgesamt $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ Dreiecke in der Pyramide überprüfen:

(4.1) Acht Dreiecke enthalten genau zwei Seiten der Grundfläche als Strecken und $8 \cdot (6 - 2 + 1) = 40$ Dreiecke enthalten genau eine Seite der Grundfläche als Strecke; diese $8 + 40 = 48$ Dreiecke sind nach Definition nicht einfarbig.

(4.2) Die Verbindungsstrecke zwischen zwei gleichfarbigen Ecken der Grundfläche sei jeweils in der anderen Farbe eingefärbt. Solche Verbindungsstrecken sind in Skizze 4.2 fett eingezeichnet. Damit kann keines der $\binom{8}{2} - 8 = 20$ Dreiecke, deren eine Ecke die Spitze der Pyramide ist und das nur gefärbte Strecken enthält, nur gleichfarbige Strecken besitzen.

(4.3) Jedes der Dreiecke mit Ecken nur in der Grundfläche, das keine Seite der Grundfläche als Strecke besitzt, besteht aus Ecken, die nicht benachbart sind, zwischen denen also k_1 bzw. k_2 bzw. k_3 benachbarten Ecken, der Grundfläche liegen, $k_1, k_2, k_3 \geq 1$. Es gilt $k_1 + k_2 + k_3 = 8 - 3 = 5$, also ist (ohne Einschränkung) entweder $k_1 = 3$ und $k_2 = k_3 = 1$ (das sind die Dreiecke über den Diagonalen des 8-Ecks) oder $k_1 = 1$ und $k_2 = k_3 = 2$. Für diese jeweils acht Dreiecke, also für insgesamt 16 Dreiecke, lässt sich in der Skizze 4.2 leicht überprüfen, dass in der angegebenen Färbung keines von ihnen gleichfarbige Strecken besitzt.

Damit ist auch die Behauptung dieses Teils der Aufgabe bewiesen. Q.e.d.

Wir danken Herrn StD a.D. Fegert und Herrn OStR Dr. Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 143

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Jill Marie Simon 5;
Kl. 8: Oscar Su 37;
Kl. 11: Lukas Born 11.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 6: Linus Salloch 9, Mika Schäfer 8;
Kl. 12: Marvin Wenzel 21.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 8: Konstantin Herbst 18;
Kl. 11: Aleksandra Herbst 12.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Lasse Blum 21.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:
Kl. 5: Julia Hans 3; **Kl. 10:** Theresa Horstkötter 6.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Tejas Shivakunar 7.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 10: Simon Waldek 5.

Mainz, Theresianum:
Kl. 12: Clemens Zabel 16.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 8: Jona Richartz 3.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 13: Johannes Kehrberger 10.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 6: Jasmin Borrmann 9; **Kl. 7:** Louisa Lukowiak 7;
Kl. 8: Emilie Borrmann 8;
Kl. 11: Kathrin Borrmann 10, Josefine Kaßner 14.

Schorndorf, Burg-Gymnasium:
Kl. 12: Christian Carda 11.

Schrobenhausen, Gymnasium
Kl. 7: Luca Sindel 7.

Simbach am Inn, Tassilo-Gymnasium:
Kl. 7: Vincent Keppel 16.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 6: Mai Linh Dang 11;
Kl. 9: Tu Sam Dang 21,5;
Kl. 11: Miriam Büttner 18.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 9: Philipp Lörcks 26,5.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Lilith Gorecki 3,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 9: Mareike Bühler 9.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 7: Jan Wickenheiser 10; **Kl. 8:** Alexander Haun 13;
Kl. 10: Lukas Emmel 7, Marco Klein 12.

Monoid-Mathezirkel Mainz

Was ist der Monoid-Mathezirkel Mainz?

Der Monoid-Mathezirkel Mainz richtet sich an alle an Mathematik interessierten Schülerinnen und Schüler, die gerne mit Gleichgesinnten einen Einblick in höhere Mathematik bekommen wollen und Lust darauf haben, zumindest virtuelle Uni-Luft zu schnuppern. Wir treffen uns in circa einmonatigem Abstand dienstags 16:30–18:00 Uhr per Videokonferenz mit Euch und bearbeiten Themen von A wie Algebra und Analysis bis Z wie Zahlentheorie. Durch das neue und experimentelle Format wollen wir auch Schülerinnen und Schüler außerhalb von Mainz ansprechen. Die Treffen werden geleitet von Professorinnen und Professoren des Instituts für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

Die Auftaktveranstaltung zum Monoid-Mathezirkel Mainz findet am Dienstag, dem 4. Mai 2021, 16:30–18:00 Uhr, statt.

Teilnahmebedingungen

- Interesse und Spaß an Mathematik
- Mindestalter 15 Jahre
- Computer (für Videokonferenz), möglichst Kamera und Graphiktablet

Voraussichtliche Termine im Sommersemester 2021

4.5.2021, 1.6.2021 und 29.6.2021

Registrierung

Bitte sendet eine Mail mit Angabe Eures Namens, der Schule und der Klassenstufe an:

- Akad. Rat Dr. Cynthia Hog-Angeloni, `hogangel@uni-mainz.de` und
- Prof. Dr. Manfred Lehn, `mlehn@uni-mainz.de`.

Dann erhaltet Ihr alle weiteren Informationen, auch zu technischen Details, und den Zugangs-Link.

Aktuelle Informationen findet Ihr zu gegebener Zeit auf den Seiten des Mathematischen Instituts der Universität Mainz

`https://www.mathematik.uni-mainz.de/schule/`.

Mitteilungen

- **Vielen Dank, Helmut Ramser:** Zum Endes des vergangenen Jahres ist Helmut Ramser nach Vollendung des Heftes 144 aus der Monoid-Redaktion ausgestiegen. Herr Ramser war Lehrer am Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, an dem Monoid lange herausgegeben wurde, und so stieß er mit Heft 44, welches im Dezember 1995 erschien, zur Redaktion. Auch als Pensionär blieb er Monoid treu und brachte sich weiterhin in die Redaktionsarbeit ein. Doch nun, genau 25 Jahre und genau 101 reguläre Hefte später, verabschiedet er sich aus der aktiven Redaktionarbeit. Herr Ramser brachte sich zuletzt besonders bei der Auswahl der Aufgaben für unseren Wettbewerb ein, indem er aus dem Aufgabenfundus die schönsten heraussuchte und diese akribisch auf Fehler kontrollierte. Hier lieferte er wichtige Arbeit. Lieber Herr Ramser, für das Vierteljahrhundert ehrenamtlichen Engagements bedanken wir uns ganz herzlich und wünschen Ihnen alles erdenklich Gute, besonders viel Gesundheit.
- **Vielen Dank, liebe Spender:** Ende letzten und Anfang diesen Jahres haben wir großzügige Spenden erhalten. Auch dafür vielen Dank an alle Spender!
- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 15 € für das Kalenderjahr 2021 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).

  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Fischer, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Hofmann
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Katherine Pillau
Titellayout: Karsten Müller, Büro Schwarzschild Wiesbaden

Jahrgang 41 Heft 145 März 2021

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid