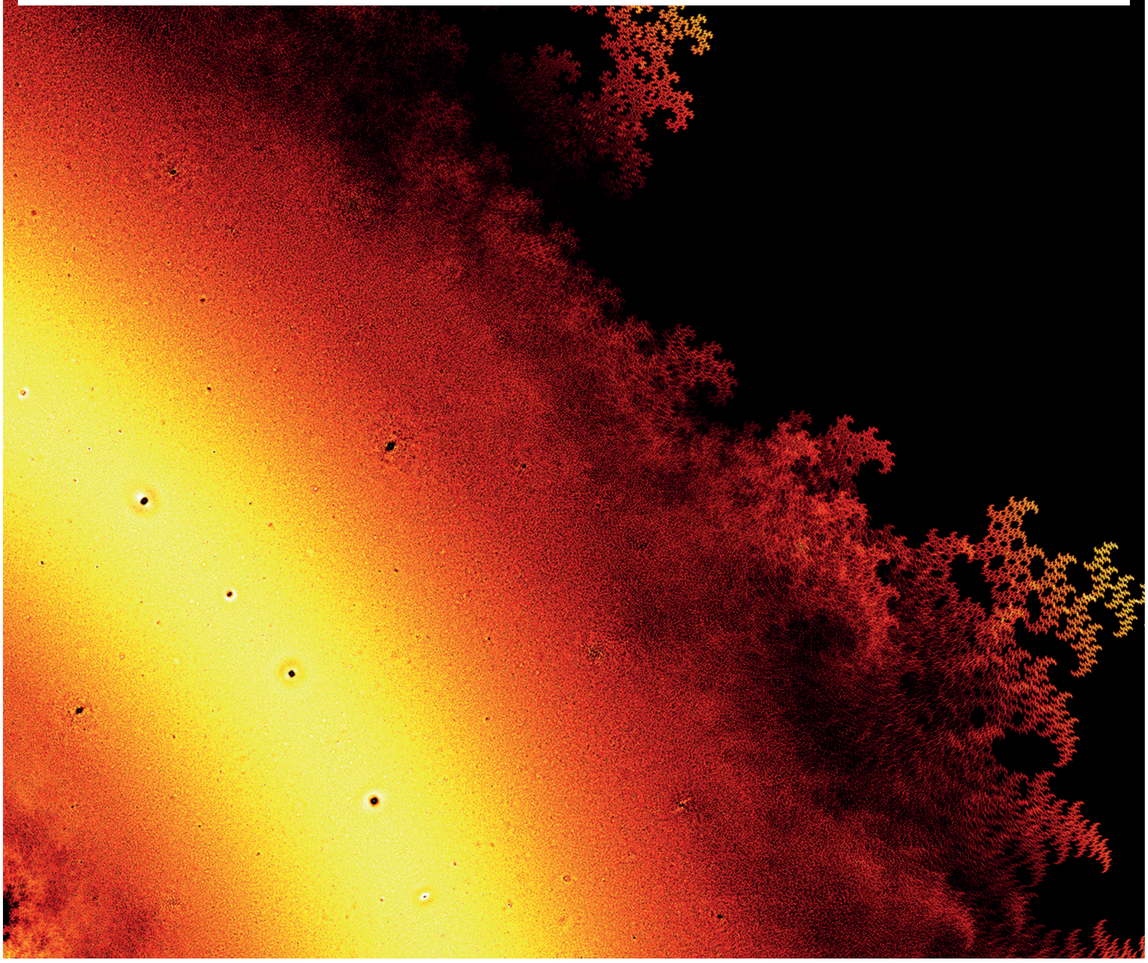
Jahrgang 41 Heft 146 Juni 2021

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler(innen) und Lehrer(innen)

1981 erstes Heft durch Martin Mettler

herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

1981 — 2021
40 Jahre MONOID

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **10. September 2021.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Nullstellen von Littlewoodpolynomen

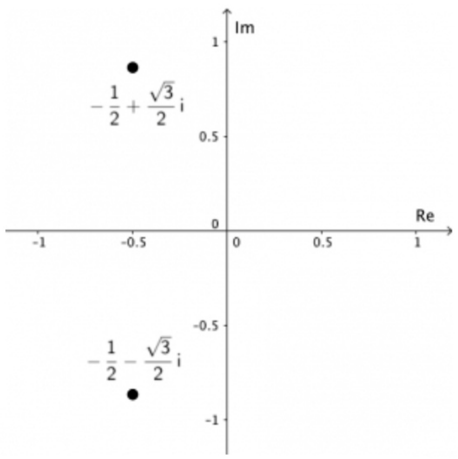
von Manuel Krummeck, Tamara Nutz und Kim Vosen

Für das „feurige“ Umschlagbild betrachten wir ganz besondere Funktionen: die Littlewood-Polynome. Diese haben die allgemeine Form:

$$f(x) = \pm 1 \pm x \pm x^2 \pm ... \pm x^n.$$

Man erkennt hier bereits ihre Besonderheit: Alle Vorfaktoren von x sind entweder 1 oder -1. Wir betrachten nun beispielsweise $f(x) = 1 + x + x^2$. Dieses hat den Grad 2, entsprechend der höchsten Potenz von x. Die p-q-Formel liefert die beiden Nullstellen von $f(x)$, nämlich

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}.$$



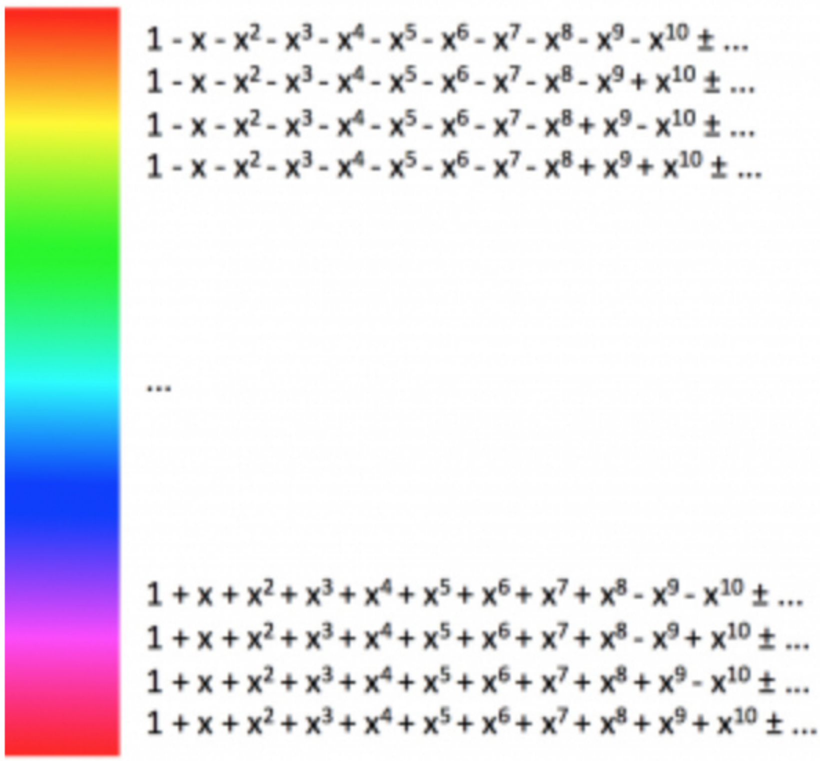
In den reellen Zahlen besitzt $f(x)$ demnach keine Nullstelle, da unter der Wurzel eine negative Zahl, die -3, steht. Fügt man zu den reellen Zahlen die imaginäre Einheit i hinzu, so erhält man die komplexen Zahlen. Diese Einheit i hat folgende Eigenschaft: $i^2 = -1$. Mit diesem Trick kann man aus negativen Zahlen die Wurzel ziehen und wir erhalten die beiden komplexen Nullstellen:

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ und } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Nun kann man die Nullstellen auf der entstehenden komplexen Zahlenebene abtragen, wobei $(-\frac{1}{2})$ in der Zahlenebene waagerecht und $(\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ senkrecht abgetragen werden. Aber zwei Punkte ergeben noch lange kein Bild! Zeichnet man aber alle 90 Millionen Nullstellen aller Littlewood-Polynome vom Grad 22, das heißt $f(x) = x^{22} \pm x^{21} \pm ... \pm 1$, in die Zahlenebene ein, dann erhält man damit den Ring und die schönen drachenartigen Muster. Um die Färbung zu erhalten, wurden die Punkte, die sehr oft als Nullstelle auftreten, viel heller gezeichnet, als solche die nur selten als Nullstelle auftreten. Dabei werden weiße Punkte bis zu 500.000-fach getroffen, wie beispielsweise der helle Ring und die Spitzen der Muster am Rand der Nullstellenmenge.

Interessanterweise ähneln die Randmuster stark den Drachenkurven. Ein Zusammenhang ist vermutet, mathematisch aber noch nicht ganz erforscht. Vielleicht hat dieses Bild Euer Interesse geweckt, diesen Zusammenhang näher zu erforschen?

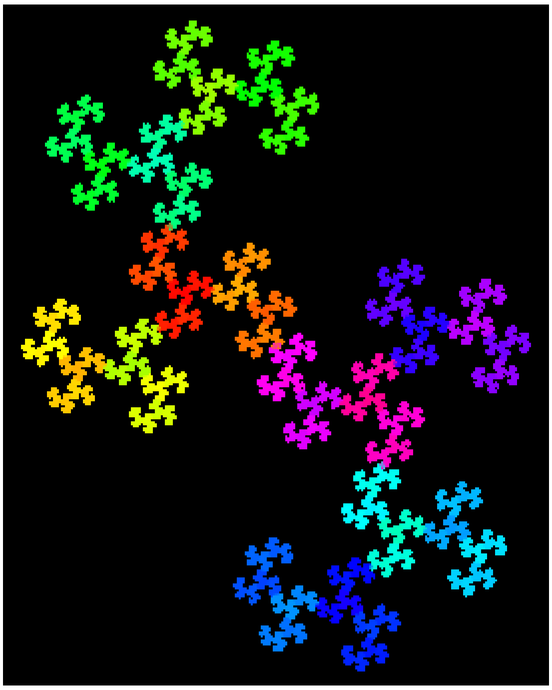
Färbt man die Nullstellenmenge der Littlewood-Polynome mit den Farben des Regenbogens, so entsteht ein neues Bild. Hierzu wurde jedem Littlewood-Polynom, wie unten angedeutet, eine Farbe des Spektralfarbbereichs zugeordnet. Die Polynome vererben dann ihre Färbung an ihre zugehörigen Nullstellen.



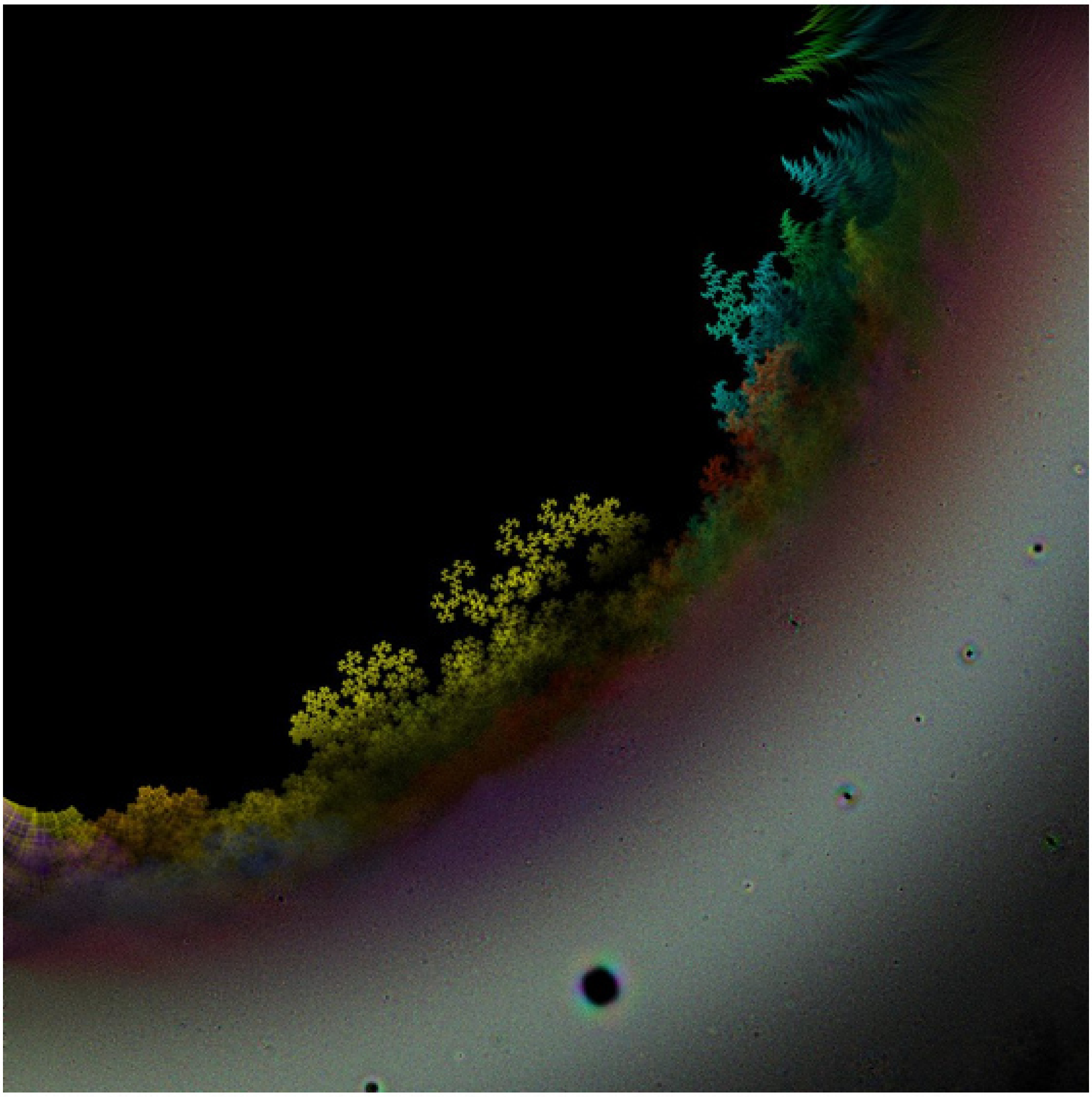
Das untenstehende Bild zeigt einen Ausschnitt des unteren rechten Quadranten der Littlewood Nullstellenmenge. Fällt Euch im Kreisinnern etwas auf? Benachbarte Nullstellen haben die gleiche Farbe. Doch warum ist dies so? Dies möchten wir an einem Beispiel illustrieren:

Betrachten wir dafür die gelbe Drachenkurve im Zentrum des Bildes um den Punkt $(0{,}43 \mid -0{,}48)$. Dies sind einige Nullstellen der Funktionen, die dem gelben Farbbereich zugeordnet sind, also

$$f(x) = 1 - x - x^2 - ... - x^8 + x^9 - x^{10} \pm x^{11} \pm ... \pm x^{21} \pm x^{22}.$$



Setzt man das dem Punkt entsprechende $x = 0{,}43 - 0{,}48i$ in *alle* Littlewoodpolynome mit der obigen Färbung ein, so erhalten wir für die Funktionswerte $f(x)$ die links abgebildete kleine Drachenkurve. Darüber hinaus ist deren gelber Teil nahezu deckungsgleich mit dem entsprechend gefärbten (gelben) Bereich der Littlewoodnullstellen um den Punkt x im nebenstehenden Bild. Variiert man diesen x-Wert leicht, so ändert sich die Drachenkurve minimal, wie auch die Anordnung der Punkte in der Littlewoodschen Nullstellenmenge.



40 Jahre MONOID
Rubingeburtstag unseres Mathematikblattes für Mitdenker

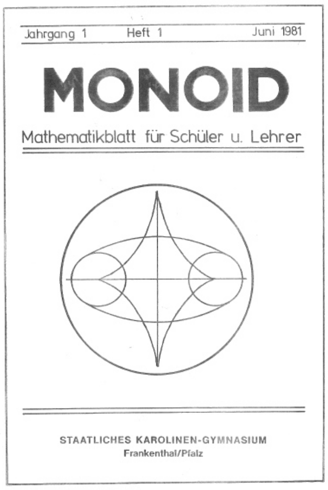
von Marcel Gruner

Es ist das Jahr 1981. Der Kanzler der Bundesrepublik Deutschland ist Helmut Schmidt, auf Papst Johannes Paul II. wird ein Attentat verübt, die CD wird erstmals vorgestellt, der Mathematiker Carl Ludwig Siegel stirbt, der US-Seuchenschutz berichtet erstmals über AIDS – und in Frankenthal erscheint am 1. Juni das erste MONOID-Heft.

Im Jahr zuvor feierte das dortige Karolinengymnasium sein 200-jähriges Jubiläum. Aus diesem Anlass wurde auch ein Mathematik-Wettbewerb durchgeführt, organisiert von Martin Mettler und der Fachkonferenz Mathematik. Die Lösungen der Wettbewerbsaufgaben werden nun im Juni 1981 in einer mathematischen Zeitschrift veröffentlicht. Gründer und Chefredakteur ist Martin Mettler[1].

Als Namen wählt er MONOID, eine recht einfache algebraische Struktur.[2] Damit möchte Martin Mettler signalisieren, dass „man klein und bescheiden, sozusagen mit dem kleinen Einmaleins der hohen Mathematik, beginnen wolle“.

Das erste Heft umfasst 32 Seiten im DIN-A4-Format, die seitlich zusammengeheftet sind. Die Seiten sind per Schreibmaschine und teilweise sogar handgeschrieben.



Neben den Lösungen gibt es auch wieder 24 neue Aufgaben, mit denen ein neuer Wettbewerb gestartet wird. Dazu wird unter anderem wie folgt eingeladen: „Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine Eins hast! Die Aufgaben sind so gehalten, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird die Lösung mancher Aufgaben mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von Dir erfordern, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.“ Eine Einladung, die fast unverändert noch bis heute in jedem Heft steht.

Neben den Auflösungen und neuen Aufgaben gibt es in diesem ersten Heft lediglich einen einzigen Artikel. In diesem wird ein Lösungsalgorithmus des Zauberwürfels (auch Rubiks Würfel genannt) beschrieben, dessen Beliebtheit zu dieser Zeit auf dem Höhepunkt ist.[3]

---

[1] *24. März 1936 in Gertianosch, Rumänien, †11. September 2005 in Carlsberg.

[2] Ein Monoid ist eine Menge mit einer Verknüpfung, für die das Assoziativitätsgesetz gilt und mit einem neutralen Element, das bei Verknüpfung mit jedem beliebigen Mengenelement wieder das Mengenelement ergibt. Zum Beispiel sind die natürlichen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung ein Monoid. Das neutrale Element ist die Zahl 1.

[3] Verkaufsstart für den Zauberwürfel in Deutschland war am 2. Juni 1980 – also fast genau ein Jahr vor dem

Doch Monoid soll keine „Eintagsfliege" sein und bleiben. Allein durch die neuen Aufgaben im ersten (und auch jedem weiteren Heft) ist die Grundlage gelegt, dass es auch weitere Hefte geben soll und wird. Und so entwickelt sich Monoid beständig weiter – sowohl inhaltlich als auch in seiner Gestaltung. Bereits im dritten Heft (Juni 1982) werden erste Seiten mit dem Computer geschrieben, doch bleiben Schreibmaschine und Handschrift bis Heft 20 vorherrschend, bis 1988 das erste komplett mit dem Computer gesetzte Heft erscheint. Auch das Format ändert sich, denn seit Heft 8 (Mai 1984) bis heute wird im DIN-A5-Format gedruckt, und seit 1988 sind zumindest die Umschläge auf farbiges Papier gedruckt.

Zwischenzeitlich wechselt Martin Mettler an das Elisabeth-Langgässer-Gymnasium nach Alzey, welches damals noch Gymnasium an der Frankenstraße heißt. Dadurch erweitert sich der Leserkreis, denn natürlich nimmt Martin Mettler Monoid an seine neue Schule mit und motiviert seine Schüler auch hier zum Lesen und Lösen. Aufgrund seiner Kontakte zu Mathematikwettbewerben und Mathematikern in der gesamten Republik macht er Monoid aber auch deutschlandweit bekannt und schon früh gibt es Löser aus Schwäbisch Hall, Frankfurt, Hamburg, später sogar aus Kairo und Alexandria.

Eine Besonderheit ergibt sich ab 1993, als Martin Mettler in den Auslandsschuldienst nach Ungarn geht. So kommt natürlich auch Monoid dorthin und es erscheinen eine Zeit lang ins Ungarische übersetzte Auszüge aus Monoid.

Im Laufe der Zeit erhalten verschiedene Rubriken Einzug in die Hefte. Den Anfang macht „Wir lernen eine neue Formel" bereits in Heft 2, später folgen „Ein Blick hinter die Kulissen", „Monoidale Knobelei", „Was uns über den Weg gelaufen ist" und viele andere – einige von ihnen gibt es immer noch, andere wurden von neuen Rubriken abgelöst.

Von Beginn an werden die erfolgreichsten Aufgabenlöser einmal im Jahr geehrt und mit Preisen ausgezeichnet. Die ersten Preise sind Zauberwürfel und Monoid-Abonnements. Im Jahr 1992 kann eine Sektkellerei als Sponsor für die Preisvergabe gefunden werden, die somit erstmals das *Goldene M* stiftet. Erster Preisträger war Björn Buth aus Osterrode. Mittlerweile werden die Preise vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e.V. gesponsert. Als weiteren Ansporn gibt es für die jüngeren Schüler seit 2015 den Monoid-Fuchs (erster Preisträger ist Maximilian Hauck aus Alzey).

Zum Jahr 2001, also dem Jahrtausendwechsel, übergibt Martin Mettler aus gesundheitlichen Gründen die Herausgeberschaft mit mit Heft 65 an die Johannes Gutenberg Universität Mainz. Neuer Redaktionsleiter wird Dr. Ekkehard Kroll, der bei seinem Eintritt in den Ruhestand 2009 mit Heft 100 wiederum von Dr. Cynthia Hog-Angeloni abgelöst wird, seit 2016 unterstützt von Marcel Gruner.

Die jährlichen Monoid-Feiern, in derem Rahmen auch die Preise vergeben werden, finden im Wechsel an der Universität Mainz und den (zum Teil mittlerweile

Monoid-Verkaufsstart.

ehemaligen) Partnerschulen Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey, Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, Gymnasium Oberursel und dem Leibniz-Gymnasium in Östringen statt.

Der Herausgeberwechsel erleichtert das Gewinnen von Festrednern für die Feiern, denn oft (aber nicht immer) kommen die Vortragenden aus den Reihen der Mainzer Mathematik-Professoren. Zudem unterstützt das Institut für Mathematik Monoid ideell und materiell, etwa durch die zur Verfügungstellung von Büro, Computern, Infrastruktur, ...

Seit dem Herausgeberwechsel werden die Hefte nun mit TEX gesetzt. Dieses Textsatzsystem ermöglicht einen hochqualitativen Textsatz und die fehlerlose Darstellung mathematischer Formeln.

Inhaltlich bleibt das *Mathematikblatt für Mitdenker*, wie seit der Nummer 20 auf jedem Heft prangt[4], natürlich dem bewährten Konzept treu: Interessante Artikel aus allen Bereichen der Mathematik von A wie Algebra bis Z wie Zahlentheorie sowie spannende Aufgaben und Knobeleien. Auch das Niveau entspricht weiterhin der Maxime, dass Schüler der Sekundarstufe die Texte nachvollziehen und die Aufgaben lösen können sollen – mit dem kleinen Einmaleins der hohen Mathematik. Aber auch Lehrer und überhaupt alle Mathematikbegeisterte werden natürlich angesprochen.

Die Redaktion besteht aus aktiven und ehemaligen Mathematiklehrkräften sowie Mainzer Universitätsdozenten sowie Diplommathematikern, die sich allesamt ehrenamtlich für Monoid engagieren und dies mit voller Begeisterung tun.

Mit diesem Juni-Heft feiern wir, dass vor genau 40 Jahren das erste Monoid-Heft erschien und somit den 40. Monoid-Geburtstag. An dieser Stelle einen herzlichen Dank an alle Abonnenten und Unterstützer von Monoid, für Euer Interesse und Eure Treue. Wir wünschen Euch, was man zum Geburtstag alles wünscht, wie Gesundheit, Zufriedenheit und Zuversicht, aber natürlich auch weiterhin Spaß und Erfolg beim Lesen und Knobeln. Ladet auch gerne Eure Freunde ein, Monoid zu lesen und bei unserem Wettbewerb mitzumachen.

Einen herzlichen Glückwunsch uns allen, Monoid-Machern und -Lesern. Mögen noch viele Jubiläen folgen!

---

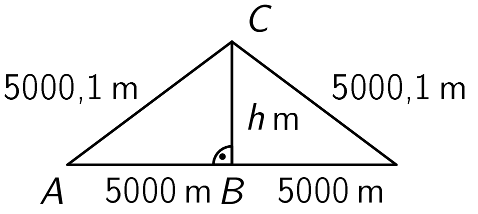
[4] Zuvor hieß es „Mathematikblatt für Schüler und Lehrer“

Nicht vorstellbar aber wahr

von Hartwig Fuchs

Ein 10 km langes Seil werde um 20 cm verlängert. Wenn man dann das verlängerte Seil in der Mitte so anhebt, dass es straff gespannt ist, kann dann eine Schlange unter dem Seil durchkriechen?

Lösung



Die Figur ist eine geometrische Darstellung der in der Aufgabe beschriebenen Situation. Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt dann nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} h\,\mathrm{m} &= \sqrt{(5000{,}1\,\mathrm{m})^2 - (5000\,\mathrm{m})^2}\,\mathrm{m} \\ &= 31{,}6\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Unter dem aufgespannten Seil könnte nicht nur eine Schlange drunter durch kriechen, sondern sogar zum Beispiel auch ein Kunstflugzeugpilot mit seiner Maschine drunterher fliegen.

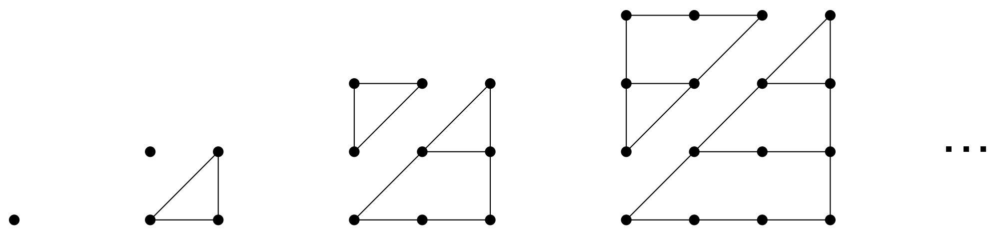
Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 2020) + (1 + 2 + 3 + \ldots + 2021) = 2021^2$$

Diese Gleichung ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Aussage für $n = 2021$: Es sei $d_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ für $n > 1$ und $d_1 = 1$. Dann gilt: $d_{n-1} + d_n = n^2$.

Beweis ohne Worte



Man kann die Aussage auch arithmetisch beweisen:
Für $n = 2$ gilt die Aussage, denn $d_1 + d_2 = 1 + 3 = 2^2$. Wegen $d_m = \frac{1}{2}m(m+1)$, für $m = 1, 2, 3, \ldots$, gilt mit $m = n - 1$ und mit $m = n$, dass $d_{n-1} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$ und $d_n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$ sind und schließlich $d_{n-1} + d_n = n^2$.

Was uns über den Weg gelaufen ist
Eine neue Rechenregel
von Hartwig Fuchs

Man rechnet leicht nach, dass die folgenden Additionen korrekt sind:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}, \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35}, \quad \frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{16}{63}, \quad \ldots \quad \text{usw.}$$

Erkennst Du die das Bildungsgesetz für diese Folge und wieso ist sie gültig?

Des Rätsels Lösung

Die Zähler der Zahlen rechts vom Gleichheitszeichen sind vermutlich $4n$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ und die zugehörigen Nenner links vom Gleichheitszeichen sind vermutlich dann $2n-1$ und $2n+1$. Ferner darf man vermuten: Der Nenner der Zahl rechts vom Gleichheitszeichen ist $(2n-1)(2n+1)$.

Vermutete Regel: $\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}=\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}$.

Wenn man diese Gleichung mit $(2n-1)(2n+1)$ multipliziert, dann ergibt sich $(2n+1)+(2n-1)=4n$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. Daher gilt die Regel für jedes $n \geq 1$.

Mathematische Entdeckungen

Würfel anordnen

Wir nehmen $n = 2, 3, 4, \ldots$ sechsseitige Würfel und legen sie in einer Reihe von links nach rechts so nebeneinander, dass die Wurfelflächen zusammenstoßen. Dann kleben wir die Würfel, so wie sie liegen, aneinander und legen das Ganze in einen Beutel.

Wie viele unterschiedliche solche Würfelreihen mit n Würfeln können wir so herstellen?

Man beachte, dass beispielsweise die Reihe, bei der jeder Würfel mit der Sechs nach rechts liegt und mit der Vier nach oben, durch einfaches Drehen entlang der langen Achse in die Reihe verwandelt wird, bei der die Sechs rechts liegt und die Fünf oben. Durch Drehen entlang einer der kurzen Achsen erhält man die Reihe, wo jeweils die Eins rechts liegt und die Vier oben, beziehungsweise (bei Drehung um die andere kurze Achse) die Reihe, bei der die Eins rechts liegt und die Drei oben. Alle diese Reihen sind also gleich, sobald sie im Beutel liegen.

Bestimme die Anzahl der Würfelreihen in den Fällen

a) $n = 2$ sowie

b) n ungerade.

Der Fall $n \geq 4$ gerade wird in einem gesonderten Artikel im nächsten Heft besprochen. (AcK)

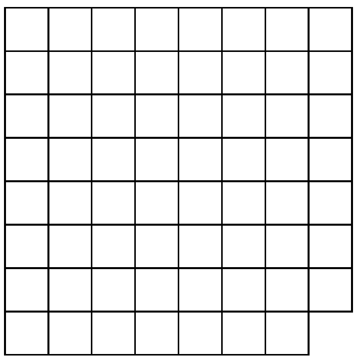
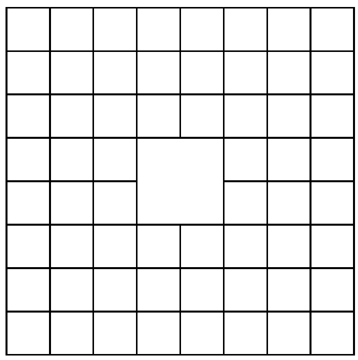
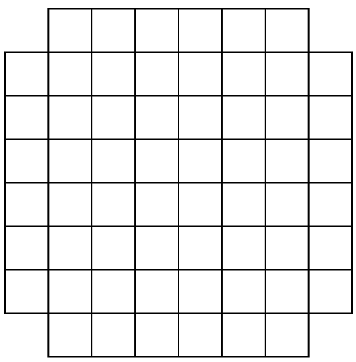
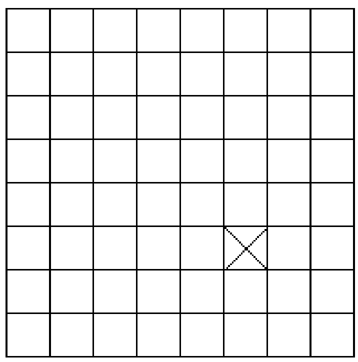
Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 10. September 2021 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 144

In Heft 144 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Mehr Dominorätsel

Schau Dir noch einmal die Neue Aufgabe 1270 (Monoid-Heft 142, Seite 23; Auflösung in Heft 143 auf Seite 26 f.) an. Mit einem ähnlichen Argument kannst Du die folgenden Puzzle-Aufgaben lösen: Welche der folgenden Figuren lassen sich mit 3×1-Steinen auslegen? Gib je eine Belegung oder eine Begründung dafür, dass es keine Belegung gibt, an.

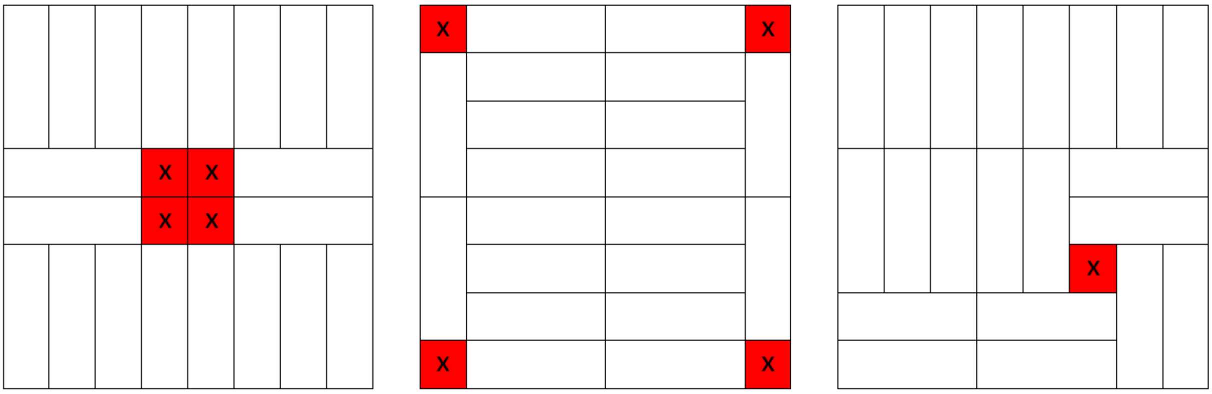





Auf dem letzten Bild soll das durchgestrichene Feld frei bleiben. (LB)

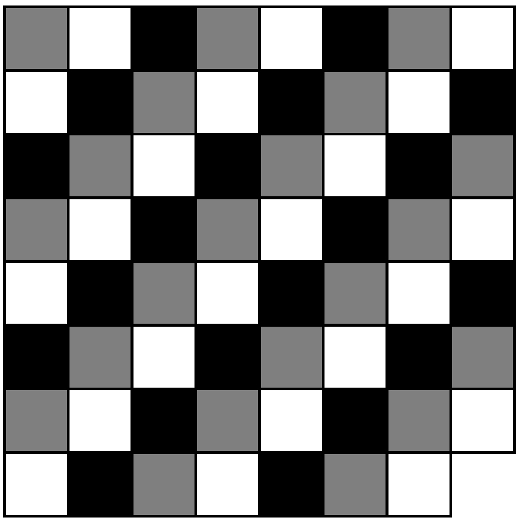
Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich Oscar Su, Clemens Zabel, Philipp Lörcks, Jonathan Reuthner, Josefine Kaßner, Sönke Schneider und Luca Sindel beschäftigt.

Die letzten drei Puzzle-Aufgaben sind wie folgt lösbar:



Die erste Figur lässt sich dagegen nicht mit 3×1-Steinen auslegen. Um dies einzusehen, färben wir die Felder der Figur wie in der Abbildung hellblau, grün und rot ein. Wenn es eine vollständige Belegung mit 3×1-Steinen gäbe, dann würde jeder dieser Steine genau ein hellblaues, ein grünes und ein rotes Feld abdecken und deshalb müssten die Anzahlen der hellblauen, grünen und roten Felder in der Figur gleich sein. Tatsächlich aber gibt es 20 grüne, 21 hellblaue und 22 rote Felder, womit gezeigt ist, dass keine solche Belegung existiert.

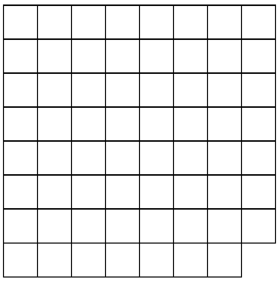
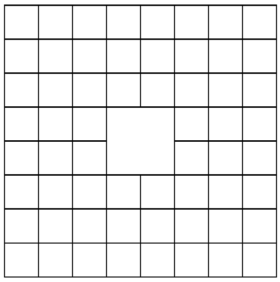
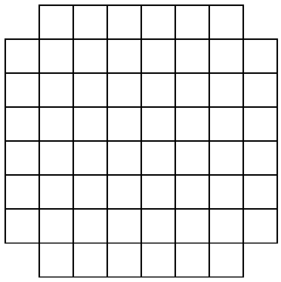
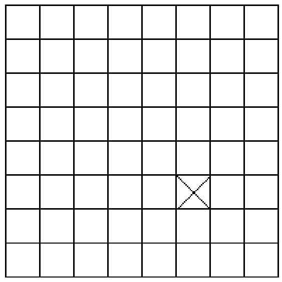


Ein 3×1-Stein passt demnach nicht in eine solche Lücke und muss mindestens ein gefärbtes Feld bedecken. Gleichzeitig können die beiden anderen Felder des Steins die Lücke nicht überqueren, sodass jeder Stein genau ein gefärbtes Feld bedeckt. Es sind 22 Felder gefärbt, dementsprechend bräuchte man 22 Steine, um sie alle zu bedecken. Es sind jedoch insgesamt nur $8 \cdot 8 - 1 = 63$ Felder vorhanden, auf diese passen nur $\frac{63}{3} = 21$ Steine. Man kann also nicht alle gefärbten Felder bedecken; daher ist diese Puzzle-Aufgabe nicht lösbar.

Puzzleaufgaben

von Laura Biroth

Im vorletzten Heft hatten wir gefragt, welche der folgenden vier Figuren sich mit 3×1-Spielsteinen auslegen lassen und welche nicht:

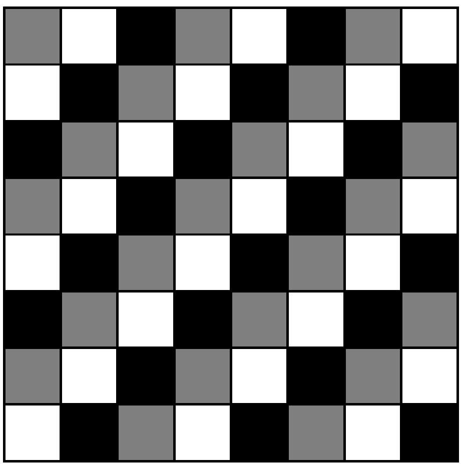
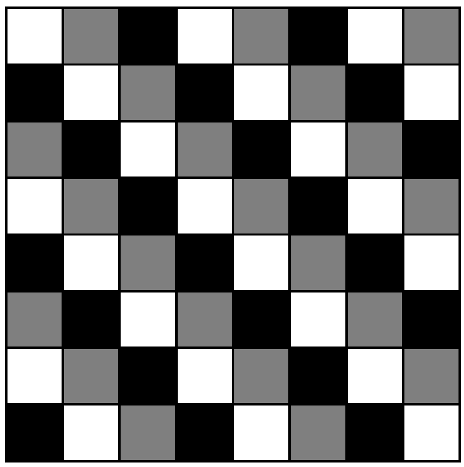





Im folgenden Teil dieses Artikels wollen wir uns mit zwei weiteren Fragen beschäftigen, die sich mit ganz ähnlichen Methoden beantworten lassen:

1. Löcher auf dem Schachbrett

Wir haben gesehen, dass man ein Schachbrett mit einer fehlenden Ecke nicht mit 3×1-Spielsteinen bedecken kann, aber dass dies möglich ist, wenn das herausgeschnittene Feld auf der Diagonale zwei Felder von der Ecke entfernt liegt. Welche Felder können wir noch entfernen, sodass man die verbleibende Figur mit solchen Spielsteinen abdecken kann?

Um uns dieser Frage zu nähern, betrachten wir noch einmal das dreifarbige Muster von oben, aber diesmal auf das gesamte Schachbrett fortgesetzt, und zusätzlich das um 90° gedrehte Muster:

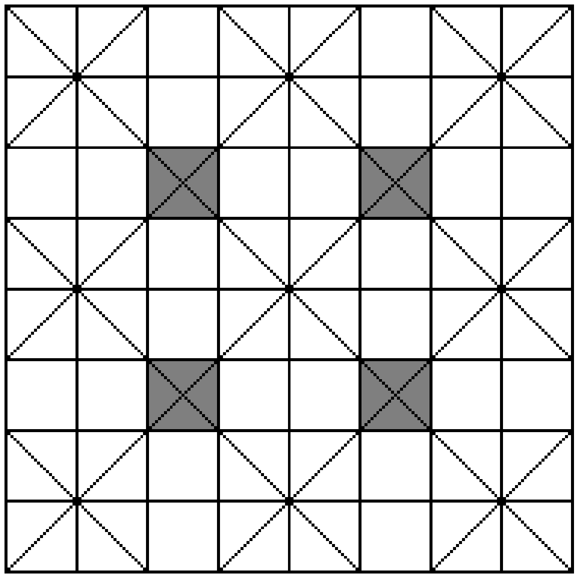
In beiden Fällen haben wir

$1 + 4 + 7 + 6 + 3 = 21$ graue Felder

$2 + 5 + 8 + 5 + 2 = 22$ weiße Felder

$3 + 6 + 7 + 4 + 1 = 21$ schwarze Felder

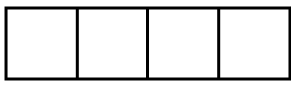
Es gibt also jeweils ein weißes Feld "zu viel", das unbedeckt bleiben muss. Wir können also höchstens dann ein lösbares Puzzle bekommen, wenn wir ein Feld entfernen, das in beiden Färbungen weiß ist. In der folgenden Zeichnung sind die weißen Diagonalen beider Färbungen durch Striche markiert.

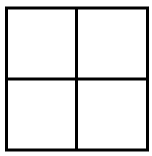


Man sieht leicht, dass es nur vier Felder (grau gefüllt) gibt, die in beiden Färbungen weiß sind. Nur diese darf man weglassen. Die entstehenden Puzzles sind bis auf Drehung gleich und tatsächlich lösbar, wie du auf der rechten Zeichnung ganz oben in diesem Artikel siehst!

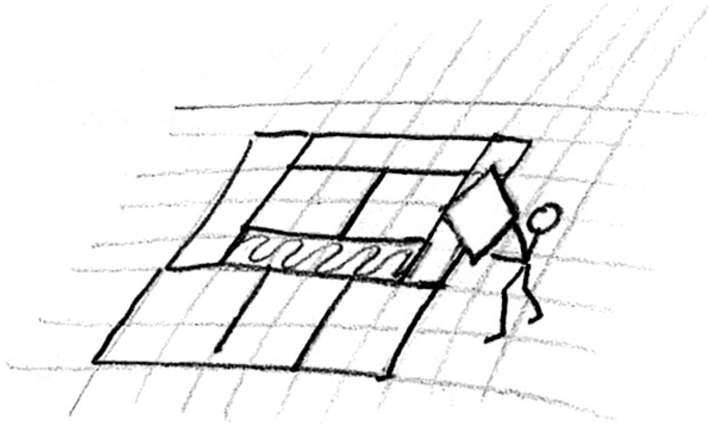
2. Badezimmerfliesen

Markus möchte den Boden seines Badezimmers neu fliesen. Die genaue Form des Zimmers ist nicht bekannt, aber bisher lagen dort kleine quadratische Fliesen, die den Boden genau bedecken, ohne dass man sie irgendwo zurechtschneiden musste. Die neuen Fliesen sind größer und es gibt zwei verschiedene Sorten: Lange Fliesen, die so breit sind wie eine der kleinen alten Fliesen, aber viermal so lang, und quadratische Fliesen, die je doppelt so lang und so breit sind wie die alten Fliesen.



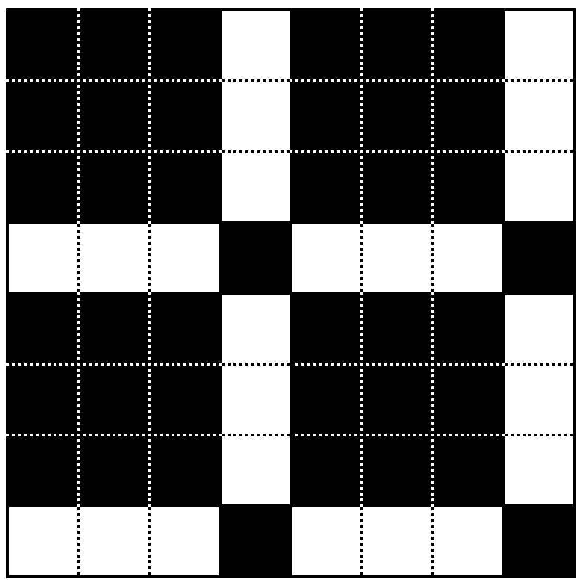


Markus hat einige Pakete Fliesen in den beiden Größen gekauft und diese probehalber in seinem Badezimmer ausgelegt. Am Ende bleibt genau eine quadratische Fliese übrig und eine Lücke, in die eine schmale lange Fliese passen würde.



Hat Markus eine Chance durch geschicktes Umsortieren der Fliesen sein Badezimmer doch noch auszulegen oder muss er nochmal in den Baumarkt fahren?

Auch diese Frage kann man durch cleveres Einfärben des zugrundeliegenden Rasters (hier des alten Fliesenbodens) beantworten. Dazu färben wir die alten Fliesen nach folgenden Schema ein:



Wir können damit an einer beliebigen Stelle des Badezimmers beginnen und das Muster beliebig weit fortsetzen. Auch wenn am Rand Teile des Musters abgeschnitten werden, macht das garnichts.

Dieses Muster hat zwei für uns sehr hilfreiche Eigenschaften:

1. Egal wohin man eine quadratische 2×2-Fliese legt, sie bedeckt immer entweder zwei schwarze und zwei weiße oder vier schwarze Quadrate.
2. Egal wohin man eine lange 4×1-Fliese legt, und egal wie man sie dreht, sie bedeckt immer entweder ein schwarzes und drei weiße oder drei schwarze und ein weißes Quadrat.

Überprüfe dies!

Da jede quadratische Fliese und je zwei lange Fliesen gemeinsam eine gerade Anzahl schwarzer Felder bedecken, gilt:

> Die Anzahl bedeckter schwarzer Fliesen ist genau dann gerade bzw. ungerade, wenn die Anzahl der dazu verwendeten langen Fliesen gerade bzw. ungerade ist.

Nehmen wir also an, Markus habe m quadratische und n lange Fliesen gekauft. Bei seinem ersten Versuch hat er festgestellt, dass sich sein Badezimmer mit $m-1$ quadratischen und $n+1$ langen Fliesen auslegen ließe. Je nachdem, ob $n+1$ gerade oder ungerade ist, muss auch die Anzahl der langen Fliesen in jeder anderen möglichen Fliesung des Badezimmers gerade bzw. ungerade sein. Auf keinen Fall ist dies mit n langen Fliesen möglich!

999 Widersprüche

von Hartwig Fuchs

In einer abgelegenen Gegend liegt ein Dorf, dessen 1000 Einwohner E_1, E_2, ..., E_{1000} sich strikt an die Regel halten: Ein Dörfler sagt immer nur die Wahrheit oder aber immer nur Lügen.
Als es Professor Quaoar bei einer Exkursion in dieses Dorf verschlägt, erregt das seine Neugier und er befragt jeden Einwohner: „Wie viele Lügner gibt es hier?“
Er erhält die Antworten:
E_1 : „Es gibt genau 1 Lügner.“
E_2 : „Es gibt genau 2 Lügner.“
$\vdots$
E_{1000} : „Es gibt genau 1000 Lügner.“
Prof. Quaoar sagt „Damit lässt sich etwas anfangen“, und er überlegt:

($*$) E_{1000} ist ein Lügner:

Wenn E_{1000} die Wahrheit sagte, dann gäbe es 1000 Lügner – insbesondere wäre dann E_{1000} selbst ein Lügner – ein Widerspruch, denn er sagte ja die Wahrheit.

Aus Aussage ($*$) folgt: Es gibt mindestens einen Nicht-Lügner.

Außerdem ist E_1 ein Lügner. – Annahme: E_1 sagt die Wahrheit. Mit Aussage ($*$) folgt dann: E_2, E_3, ... E_{999} sagen die Wahrheit – und das widerspricht der Aussage von E_1.

Ganz ebenso ergibt sich der Reihe nach aus den 997 Annahmen, dass E_2 beziehungsweise dass E_3, ..., beziehungsweise dass E_{998} die Wahrheit sagt, jeweils ein Widerspruch. Aus diesen 997 Widersprüchen folgt somit

(4) $E_2, E_3, \dots, E_{998}$ sind alle Lügner.

Nun zu E_{999}: Da E_1, E_2, ..., E_{998} und E_{1000} Lügner sind – und das sind 999 Lügner – ist die Aussage von E_{999} wahr. Folglich ist E_{999} der einzige Nicht-Lügner.

Prof. Quaoar teilt den Dörflern das Ergebnis seiner Überlegungen mit: „Ihr seid alle Lügner mit Ausnahme eures Mitbürgers E_{999}." – was ihm die Dörfler verwundert bestätigen.

Danach freundlich grüßend seinen Hut schwenkend wandert er davon.

Bemerkung

Zwei aufmerksame Monoidaner haben folgenden Alternativbeweis angegeben, der in vier Zeilen passt und den wir Euch natürlich auch nicht vorenthalten möchten: Von den Aussagen E_1, ... E_{1000} kann höchstens eine richtig sein, weil sich die Aussagen paarweise widersprechen. Also gibt es 999 oder 1000 Lügner. Wären es 1000 Lügner, so wären E_1, ... E_{1000} falsch und folglich gäbe es keinen Lügner – Widerspruch. Also sind es 999 Lügner. (Rahel und Achim Klenke)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Die Mathematik muss man schon deshalb studieren, weil sie die Gedanken ordnet."

Michail Wassiljewitsch Lomonossow
*19.11.1711, †15.04.1765;
russischer Naturwissenschaftler, Dichter

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 145

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Augustus de Morgan

Der britische Mathematiker Augustus de Morgan wurde n Jahre alt im Jahr n^2. Er starb am 18. März 1871 in London.

Wann wurde er geboren?

Hinweis: Die Aufgabe ist natürlich mathematisch zu lösen. Nachschauen in Lexika oder Enzyklopädien wird nicht als Lösung akzeptiert. (MG)

Lösung:

Die größte Quadratzahl, die kleiner als 1871 ist, ist $1849 = 43^2$. Da er in diesem Jahr 43 Jahre alt wurde, muss er $1849 - 43 = 1806$ geboren sein.

Tatsächlich wurde er am 27. Juni 1806 in Madurai, Indien, geboren.

Bemerkung: Dass de Morgan im Jahr $42^2 = 1764$ seinen 42. Geburtstag gefeiert hätte, lässt sich ausschließen, da er dann mit 149 Jahren gestorben wäre.

II. Zahlen schreiben

Die sechsjährige Kalea geht zwar noch nicht zur Schule, kann aber schon ganz toll Zahlen schreiben. Dies zeigt sie heute ihrem Onkel, der Mathematiklehrer ist. Und so schreibt sie nacheinander fehlerlos die natürlichen Zahlen auf ein Blatt, ohne dabei Lücken oder Trennzeichen zwischen die Zahlen zu machen. Die Zahlenkolonne beginnt also mit 1234..., später folgt beispielsweise ...891011... und so weiter.

a) Als Kalea aufhört, hat sie 6977 Ziffern notiert. Wie lauten die letzten vier Ziffern in dieser Kolonne?
b) Steht diese Ziffernfolge auch schon früher in der Zahlenkolonne? Erläutere Deine Entscheidung.
c) An welcher Stelle in der Zahlenkolonne steht die Zahl 145 (oder würde stehen, falls Kalea vorher aufgehört hat zu schreiben)? (MG)

Lösung:

a) Für die Zahlen 1 bis 9 werden neun Ziffern benötigt. Für die Zahlen 10 bis 99 benötigt Kalea $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern, nach der Zahl 99 hat die Kolonne also schon 189 Ziffern.Für die dreistelligen Zahlen 100 bis 999 notiert Kalea weitere $900 \cdot 3 = 2700$ Ziffern, insgesamt sind es also 2889 Ziffern.

Danach folgen noch $6977 - 2889 = 4088$ Ziffern. Da die nächsten Zahlen jeweils vierziffrig sind, kann sie damit $4088 : 4 = 1022$ Zahlen notieren, das sind die Zahlen 1000 bis 2021.
Die letzten vier Ziffern, die Kalea notiert, sind also die vier Ziffern der Zahl 2021.

b) Ja, nämlich als Kombination der Zahlen 20 und 21. Dies sind die Stellen 30 bis 33.

c) Die ersten 189 sind von den ein- und zweistelligen Zahlen besetzt. Für die 45 Zahlen 100 bis 144 benötigt Kalea weitere $45 \cdot 3 = 135$ Ziffern. Dann hat sie insgesamt $189 + 135 = 324$ Ziffern notiert. Danach folgt die Zahl 145.
Die Zahl 145 steht also an den Stellen 325 bis 327.
Bemerkung: Die Ziffernkombination 145 steht auch nicht früher in der Kolonne. Unter den einstelligen Zahlen kann die Kombination nicht stehen. Bei den zweistelligen Zahlen würde auf 14 die 15 folgen (also ergibt sich 141) bzw. vor 45 die 44 stehen (also ergibt sich 445). Und unter den dreistelligen Zahlen erscheint die Zahlenkombination das erste Mal, wenn die kleinste Ziffer an der Hunderterstelle der Zahl steht, also tatsächlich bei 145.

III. Eine besondere Differenz

Stelle die Jahreszahl 2021 als Differenz zweier Quadratzahlen dar, also in der Form

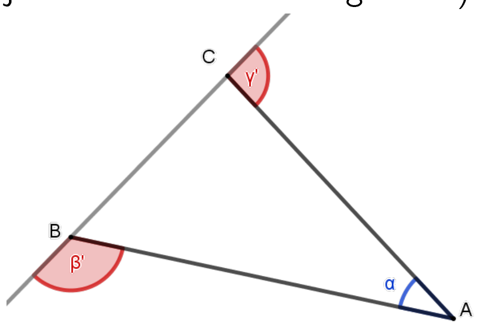
$$2021 = a^2 - b^2.$$

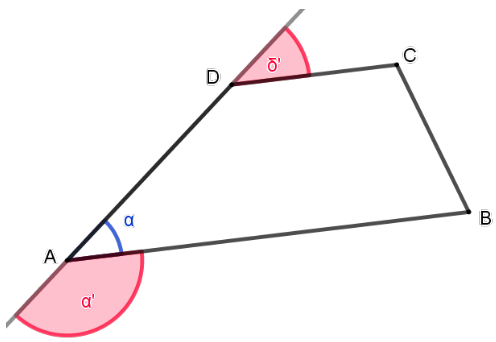
Gib alle solche Darstellungen an und begründe, dass es keine weiteren Darstellungen gibt. (MG)

Lösung:
Wegen $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ können wir die Aufgabe auch umformulieren: Gib alle Produkte $(a - b)(a + b) = 2021$ mit natürlichen Zahlen a und b an.
Die Jahreszahl hat die Primfaktorzerlegung $2021 = 47 \cdot 43$. Setzen wir $a = \frac{47+43}{2} = 45$ und $b = \frac{47-43}{2} = 2$, so ergibt sich $(45 + 2)(45 - 2) = 2021$.
Es ist aber auch $2021 = 2021 \cdot 1$, was mit $a = \frac{2021+1}{2} = 1011$ und $b = \frac{2021-1}{2} = 1010$ zum Produkt $(1011 + 1010)(1011 - 1010) = 2021$ führt.

IV. Winkelsummen

Gegeben sind die beiden folgenden Figuren, ein Dreieck und ein Trapez (beide sind jedoch nicht maßstabsgerecht):





a) Bestimme die Summe der beiden markierten Winkel β' und γ', wenn der Winkel $\alpha = 40°$ groß ist.
b) Im Trapez gilt $AB \parallel CD$. Bestimme die Summe der beiden markierten Winkel α' und δ', wenn der Winkel $\alpha = 40°$ groß ist.

(MG)

Lösung:

a) Für die Innenwinkelsumme des Dreiecks gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Daraus folgt $\beta + \gamma = 180° - \alpha$.
Für die Summe der beiden markierten Winkel gilt

$$\begin{aligned}\beta' + \gamma' &= (180° - \alpha) + (180° - \beta) = 2 \cdot 180° - \alpha - \beta\\ &= 2 \cdot 180° - (\alpha + \beta) = 2 \cdot 180° - (180° - \alpha) = 180° + \alpha\\ &= 180° + 40°\\ &= 220°\end{aligned}$$

b) Da die Trapezseiten AB und CD parallel zueinander sind, ist der Winkel δ' ein Stufenwinkel (F-Winkel) zu Winkel α.
Daher gilt für die Summe der markierten Winkel

$$\alpha' + \delta' = \alpha' + \alpha = 180°.$$

Die Summe ist also unabhängig von der Größe des Winkels α.

V. Hausaufgaben vergessen

An jedem der Unterrichtstage vom 14. bis 21. März (in diesen Tagen gab es keinen Feiertag) hatten in der Klasse 5c jeden Tag genau drei Schüler keine Hausaufgaben. Mona hatte an zwei Tagen, Ido an drei Tagen und Matheo an genau fünf Tagen keine Hausaufgaben. Die übrigen vergessenen Hausaufgaben hat Gerome zu verschulden.
An wie vielen Tagen hatte Gerome keine Hausaufgaben? (MG)

Lösung:

Der Zeitraum umfasst sieben Tage, von denen dann aber zwei Tage Wochenende sein müssen. Es bleiben also fünf Unterrichtstage, da es keine Feiertage gab.
Da jeden Tag drei Schüler keine Hausaufgaben gemacht haben, sind 15 Hausaufgaben nicht gemacht worden.
Daher hat Gerome ebenfalls an $15 - 2 - 3 - 5 = 5$ Tagen keine Hausaufgaben gemacht.

VI. Wettkampfgruppen

Die Mathematik-AG des Martin-Mettler-Gymnasiums besuchen 16 Schülerinnen und Schüler. Heute wird dort ein Kopfrechenwettbewerb durchgeführt, bei dem immer Zweiergruppen gegeneinander antreten.

Genau $\frac{2}{3}$ aller Mädchen treten mit einem Jungen zusammen im Wettkampf an, während genau $\frac{2}{5}$ aller Jungen gemeinsam mit einem Mädchen antreten.

a) Wie viele Mädchen und wieviele Jungen besuchen die Mathematik-AG?

b) Gibt es mehr gemischt-geschlechtliche Zweiergruppen oder mehr gleich geschlechtliche Gruppen?

(MG)

Lösung:

a) Die Anzahl der Mädchen bezeichnen wir mit M, die Anzahl der Jungen mit J. Da die Mathematik-AG insgesamt 16 Mitglieder hat, gilt $M + J = 16$ bzw. $J = 16 - M$.
Es treten $\frac{2}{3}$ der Mädchen in gemischt-geschlechtlichen Gruppen an, also $\frac{2}{3}M$. Entsprechend sind es $\frac{2}{5}J$ Jungen. Die beiden Anzahlen müssen gleich sein, also gilt $\frac{2}{3}M = \frac{2}{5}J = \frac{2}{5}(16 - M)$.
Diese Gleichung lösen wir und erhalten

$$\begin{aligned} & \tfrac{2}{3}M = \tfrac{2}{5}(16 - M) \\ \iff \quad & 10M = 6 \cdot (16 - M) \\ \iff \quad & 10M = 96 - 6M \\ \iff \quad & 16M = 96 \\ \iff \quad & M = 6 \end{aligned}$$

Also besuchen sechs Mädchen und $16 - 6 = 10$ Jungen die Mathematik-AG.

b) Insgesamt gibt es acht Zweiergruppen.
In gemischt-geschlechtlichen Gruppen treten $\frac{2}{5}$ der Jungen, also vier Jungen an. Es gibt also vier gemischt-geschlechtliche Gruppen.
Also gibt es gleich viele gemischt-geschlechtliche und gleichgeschlechtliche Zweiergruppen.

VII. Zahlen-Knobelei

Ersetze die Buchstaben A, B, C und D durch verschiedene Ziffern, $A \neq 0$ so, dass eine korrekte Multiplikation zweier vierstelliger Zahlen mit einem achtstelligen Ergebnis entsteht. (H.F.)

$$\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & \cdot & A & B & C & D \\ \hline & & * & * & * & * & & & \\ & & & * & * & * & * & & \\ & & & & & * & * & * & * \\ \hline & * & * & * & * & * & * & * & * \end{array}$$

Lösung:

Aus $ABCD \cdot C = 0$ folgt $C = 0$.

Weil $ABCD \cdot A$ eine vierstellige Zahl ist, gilt $A \leq 3$.

Annahme $A \leq 2$: Dann ist $ABCD \cdot ABCD < 2909^2 < 9000000$. Nach Voraussetzung ist jedoch $(ABCD)^2$ eine achtstellige Zahl – ein Widerspruch. Also ist $A = 3$.

Da auch $ABCD \cdot B = 3BCD \cdot B$ und $ABCD \cdot D = 3BCD \cdot D$ jeweils vierstellige Zahlen ergeben, müssen nun $B \leq 2$ und $D \leq 2$ sein. Außerdem können beide nicht 0 sein.

Wegen $B \neq 0$ ist nun $B = 2$ oder $B = 1$. Wäre $B = 1$, dann wäre $(310D)^2$ wegen $(310D)^2 \leq 3109^2 < 10^7$ eine siebenstellige Zahl. Also ist $B \neq 1$ und daher $B = 2$.

Für D bleibt dann wegen $D \leq 2$ nur die Möglichkeit $D = 1$. Das gesuchte Produkt lautet somit: $3201 \cdot 3201 = 10246401$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 10. September 2021.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Zum 40-jährigen Jubiläum

Das erste Monoid-Heft erschien vor 40 Jahren, also im Jahr 1981.

Berechne die Quersumme der Zahl

$$10^{2021} - 1981.$$

(*MG*)

II. Jubiläums-Banner

Auf einem Banner steht anlässlich des Monoid-Jubiläums

$$\boxed{1981402021}.$$

Doro zerschneidet das Banner so in drei Stücke, dass dabei drei natürliche Zahlen auf den drei Stücken stehen.

Wie muss Doro schneiden, damit die Summe der drei Zahlen ...

a) möglichst klein wird, wenn führende Ziffern 0 verboten sind?

b) möglichst klein wird, wenn führende Ziffern 0 erlaubt sind?

c) möglichst groß wird?

(MG)

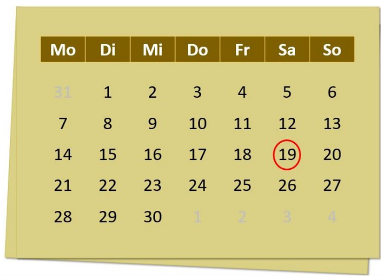
III. Wahr oder falsch?

Es seien m und n positive ganze Zahlen.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe Deine Antworten.

a) Für alle m und n gilt: $m + n > n$ und $m \cdot n > n$.
b) Es gibt unendlich viele Zahlen m und n so, dass $\frac{m}{n} < 1$ und $\frac{n}{m} > 1$ sind.
c) Für alle m und n gelten $m^2 \geq m$ und $n^2 \geq n$ und daher $m^2 + n^2 \geq m + n$.
d) Es gibt unendlich viele Zahlen m und n, für die $m - n < 0$ und $(m - n)^2 > 0$ sind.
e) Für alle m und n folgt aus $m < n$, dass $m^n < n^m$ ist. (H.F.)

IV. Datum

Beim Blick auf den Kalender stellt Karin fest: „Das heutige Datum, der 19.06.2021, enthält sowohl gerade als auch ungerade Ziffern. Aber es gibt doch bestimmt auch Daten nur mit geraden sowie nur mit ungeraden Ziffern.“



a) Wann war das letzte Datum und wann wird das nächste Datum nur mit geraden Ziffern sein?
b) Wann war das letzte Datum und wann wird das nächste Datum nur mit ungeraden Ziffern sein?

Bemerkung: Das Datum soll in der obigen Form geschrieben werden, also Tag und Monat jeweils zweistellig (also ggf. mit führender 0), das Jahr vierstellig. Es genügt, hier die Daten anzugeben, eine Begündung wird ausnahmsweise nicht verlangt. (MG)

V. Summe von 40 Fakultäten

Bestimme die letzte Ziffer von

$$1! + 2! + 3! + ... + 40!.$$

Hinweis: Die Fakultät bedeutet, dass alle natürlichen Zahlen bis zu dieser Zahl multipliziert werden, also zum Beispiel $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. (MG)

VI. Pyramide aus Holzwürfeln

Sarah hat 2021 kleine Holzwürfel der Kantenlänge $1\,cm$. Aus diesen baut sie eine Pyramide. Die oberste Schicht besteht aus einem Holzwürfel, die darunter aus $2 \cdot 2 = 4$ Holzwürfeln, die quadratisch angeordnet sind. Die nächste Schicht darunter besteht dann aus $3 \cdot 3 = 9$ quadratisch angeordneten Holzwürfeln und so weiter. (Sie baut natürlich von unten, aber auf diese Weise lässt sich der Aufbau leichter beschreiben.)

a) Wie viele Holzwürfel haben die obersten sechs Schichten insgesamt?

b) Wie viele Schichten hat die größtmögliche Pyramide, die sie aus den 2021 Holzwürfeln bauen kann?

c) Wie viele Holzwürfel sind in den untersten sechs Schichten dieser größtmöglichen Pyramide?

d) Zeige: Wenn Sarah unten mit der Schicht beginnt, in der $18 \cdot 18$ Holzwürfel sind, dann kann sie noch die $7 \cdot 7$er Schicht komplett bauen, aber nicht mehr die vollständige $6 \cdot 6$er Schicht. (MG)

VII. Domino

Karin hat zum Geburtstag ein Domino-Spiel geschenkt bekommen. Auf die Rückseiten der Dominosteine ist jeweils ein Buchstabe des Wortes DOMINO (in Großbuchstaben) gedruckt. Karin sucht nun sechs Steine so heraus, dass sie mit diesen das Wort Domino legen kann, also einen Stein mit einem D, einen mit einem O, einen mit einem M, einen mit einem I, einen mit einem N und noch einen weiteren mit einem O. Die übrigen Steine räumt sie zurück in die Packung.

Nun mischt sie diese sechs Steine und legt sie in beliebiger Reihenfolge nebeneinander. So entstehen neue Wörter, wenn auch die meisten keinen Sinn ergeben, wie zum Beispiel die möglichen Wörter DOIMNO oder ONIMOD.

a) Wie viele verschiedene (auch sinnlose) Wörter kann Karin mit den Buchstaben bilden?

b) Karin schreibt alle möglichen Wörter in alphabetischer Reihenfolge auf, in der natürlich jedes Wort nur einmal steht. An welcher Stelle steht das Wort DOMINO in dieser Liste?

c) Welches Wort steht an der 174. Stelle dieser Liste? (MG)

VIII. Wie viele?

Wie viele 6-stellige Zahlen, die durch 60 teilbar sind, gibt es? (Martin Mettler †)

Sonderseiten
zum Mainzer Wissenschaftsmarkt 2021

Mensch und Gesundheit
Macht Mathematik gesund?
von Alan Rendall

Was hat Mathematik mit Gesundheit zu tun? Eine Antwort auf diese Frage findet man, wenn man die Anwendungen der Mathematik betrachtet. Wer Monoid liest, weiß schon, dass die Mathematik an und für sich eine schöne Sache ist. Es ist aber vielen Menschen nicht bewusst und vielleicht auch manchen, die diesen Text lesen, nicht, wie wichtig die Anwendungen der Mathematik in unserem Leben sind. Wenn man an Anwendungen der Mathematik denkt, dann zuerst an die Physik (die Physiker spielen bekanntlich gerne mit Formeln) oder an die Informatik. Die Mathematik spielt aber auch eine wichtige Rolle in der Chemie, der Biologie und der Medizin, womit wir bei der Gesundheit angekommen sind.

Es gibt ein schönes Beispiel einer Beziehung zwischen Mathematik und Medizin von vor 400 Jahren. Dabei geht es keineswegs um komplizierte Mathematik – wir brauchen nichts mehr als eine einfache Multiplikation. Dieses Beispiel zeigt, dass mathematische Überlegungen einen Fortschritt in der Wissenschaft bringen können, den es ohne die Mathematik nicht gegeben hätte (oder zumindest nicht so schnell). Heutzutage wissen alle, dass es in unserem Körper einen Blutkreislauf gibt. Das Blut kommt immer wieder zum Herzen zurück. Dagegen haben die Menschen sehr lange geglaubt (etwa 1400 Jahre lang), auch die Ärzte, dass der Weg des Blutes durch den Körper eine Einbahnstraße ist, wo das Blut in der Leber produziert wird und anderswo wieder verbraucht. Der Mann, der die Welt vom Blutkreislauf überzeugt hat, war William Harvey. Er hat um 1600 in Padua studiert, zu einer Zeit, als Galileo Galilei an der dortigen Universität Professor der Mathematik war. Galilei war übrigens derjenige, der durch die Einführung quantitativer Methoden (Mathematik also) die moderne Physik mitbegründet hat. Wenn man 1400 Jahre von etwas überzeugt gewesen ist und auch teilweise gutes Geld damit verdient, dann lässt man sich nicht leicht überzeugen, dass die Wahrheit eine ganz andere ist. Wie hat Harvey es geschafft, die medizinische Welt von seiner Theorie zu überzeugen? Er hat es dadurch geschafft, dass er quantitative Methoden angewendet hat, um ein schlagendes Argument zu entwickeln.

Harvey hat damit angefangen, dass er eine quantitative Frage gestellt hat. Wenn die alte Theorie stimmt, wie viel Blut muss ein menschlicher Körper in einer Stunde produzieren? Dies wäre auch die Menge Blut, die in einer Stunde durch das

Herz fließt. Man kann leicht feststellen (durch den Puls) wie oft das Herz in einer Stunde schlägt. Wenn man noch wüsste, wie viel Blut bei jedem Herzschlag das Herz passiert, dann hätte man (durch Multiplikation) die gewünschte Frage beantwortet. Harvey musste also noch messen, wie viel Blut mit jedem Herzschlag durch das Herz fließt. Da ein solches Experiment an einem Menschen bedenklich wäre, hat Harvey einen Hund genommen. Mit der Antwort für einen Hund kann man die für einen Menschen durch Analogie erhalten. Die Antwort lautete: in einer Stunde müsste eine Menge Blut mit dem Dreifachen des Körpergewichts produziert werden. Ohne viel über Medizin zu wissen, sieht man, dass die alte Theorie zu einem absurden Ergebnis führt. Mit einem Blutkreislauf gibt es das Problem nicht. Harvey hatte große Mühe, seine Kollegen von seiner Theorie zu überzeugen, aber er hat es geschafft und sein stärkstes Argument war seine quantitative Analyse. Hier geht es nicht nur um eine Theorie. Es geht oft um den Unterschied zwischen einer falschen und einer richtigen Therapie, zwischen Leben und Tod.

Ein modernes Beispiel, in dem die Mathematik die Medizin weiter gebracht hat, betrifft die Krankheit AIDS. Diese Krankheit kam in den 1980er Jahren auf. Die Diagnose war ein Todesurteil, weil es keine effektive Behandlung gab. Viele Menschen hatten Angst vor dieser Krankheit. Das Blatt hat sich Mitte der 1990er Jahre gewendet. Mit neuen Medikamenten (HAART) konnte man die Krankheit zwar nicht heilen, aber beliebig lange unterdrücken, sodass das Todesurteil aufgehoben wurde. An den zwei Arbeiten, in denen dieser Fortschritt angekündigt wurde, waren Mathematiker beteiligt. Was haben die Mathematiker zu diesem Erfolg beigetragen? Nach einer Infektion mit dem Virus HIV dauert es im Schnitt 10 Jahre, bis AIDS im Patienten ausbricht. Was passiert in dieser ganzen Zeit? Die gängige Meinung war, das Virus würde aus unbekannten Gründen einfach nichts tun. Dass diese Vorstellung falsch war, ist durch quantitative Untersuchungen entdeckt worden.

Man konnte damals messen, wie viele Virusteilchen im Blut waren, aber man hat es selten gemacht (nicht mehr als einmal im Monat). Wozu denn auch? Die neue Idee war, nach der Gabe eines Medikaments die Viruslast in Abständen von einigen Stunden zu messen. Dadurch hat man Messungen v_i. Jetzt kann man ein mathematisches Modell aufstellen, das unter bestimmten Annahmen diese Zahlen v_i vorhersagt. Das Modell enthält bestimmte Parameter, also Zahlen wie die Rate, mit der Virusteilchen aus dem Blut entfernt werden. Für jede Wahl der Parameter kann man Werte für die v_i vorhersagen. Indem man die Werte der Parameter wählt, für die die experimentellen Daten am besten reproduziert werden, hat man die Parameter gemessen. Wenn man die Parameter hat, weiß man, wie viele Virusteilchen ein Patient jeden Tag produziert. Die Antwort lautet 10^{10}. Die Vorstellung, das Virus wäre inaktiv, ist also völlig falsch. Mit dieser Zahl (und ein bisschen Wahrscheinlichkeitstheorie) kann man berechnen, wie schnell ein Patient eine Resistenz gegen ein Medikament entwickeln wird. Man kann auch berechnen, wie es aussieht, wenn es zwei oder drei unabhängige Medikamente sind. Für ein Medikament oder zwei sind es ein paar Monate, für drei Medikamente ist es ein Menschenleben. Damit hatte man den wesentlichen Punkt gefunden: HAART kombiniert drei Medikamente.

Von welcher Art ist das mathematische Modell, das zu diesen Schlüssen führt? Man hat drei Größen (x, y, v), die den Zustand des Systems beschreiben und eine Regel, wie die zeitlichen Veränderungsraten $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{v})$ dieser Größen von ihren momentanen Werten abhängen. Eine solche Vorschrift nennt man ein System von Differentialgleichungen. In diesem Fall lautet es

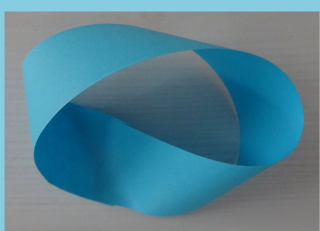
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda - dx - \beta xv,\\ \dot{y} &= \beta xv - ay,\\ \dot{v} &= ky - uv.\end{aligned}$$

Dabei sind a, d, k, u, β, λ Zahlen, die oben erwähnten Parameter. Die v_i sind die Werte von v zu den Zeitpunkten, wo gemessen wird. Differentialgleichungen sind in der Physik entstanden, in der Arbeit von Isaac Newton.

Es sind übrigens sehr ähnliche Gleichungen die heutzutage verwendet werden, um vorherzusagen, wie die Inzidenz von COVID-19 sich entwickeln wird. Beim Modell für HIV beschreibt man die Ausbreitung der Infektion in einem Patienten, während man bei den Modellen für COVID-19 die Ausbreitung der Infektion in der Bevölkerung beschreibt. Während im ersten Fall die Größen x und y die Anzahl von nichtinfizierten und infizierten Zellen sind, sind es im zweiten die Anzahl von nichtinfizierten und infizierten Menschen.

Zum Mitmachen
Ein mathematisches Experiment mit Papier
von Marcel Gruner

Für dieses Experiment brauchst Du ein DIN-A4-Blatt Papier, Kleber, einen Stift und eine Schere. Und schon kann es losgehen!



Schneide vom DIN-A4-Blatt Papier der Länge nach einen ca. 4 cm langen Papierstreifen ab. Nimm diesen Streifen, drehe ein Ende einmal um (also um 180°) und klebe die Enden zu einem Band zusammen.

1. Nimm dann einen Stift und zeichne der Länge nach in der Mitte eine durchgehende Linie auf das Band. Was stellst Du fest?
2. Nimm nun eine Schere und schneide das Band genau in der Mitte der Länge nach auseinander. Eventuell kannst Du Dich auch an der Linie orientieren. Was stellst Du fest?

Das Möbiusband

Das Band, welches Du durch das drehen und zusammenkleben erhalten hast, heißt *Möbiusband**.

Als Du die Linie gezeichnet hast, wirst Du bemerkt haben, dass Du bis zur Rückkehr zum Ausgangspunkt zweimal das Band durchlaufen hast und anschließend überall eine Mittellinie eingezeichnet ist. Das hat Dich vielleicht überrascht. Bei einem „normalen" Papierring, den Du also ohne Drehen vor dem Zusammenkleben erhältst, ist das anders. Hier hättest Du nur auf der Innen- oder Außenseite des Rings eine Linie.

Das Möbiusband hat nur eine Kante und nur eine Seite hat. Mathematiker nennen eine Fläche mit dieser Eigenschaft *nicht orientierbar*, weil nicht zwischen unten und oben oder zwischen innen und außen unterscheiden werden kann. Dies kannst Du auch noch einmal nachvollziehen, indem Du versuchst eine der scheinbar zwei Seiten einzufärben.

Auch beim Schneiden wirst Du sicher eine Überraschung erlebt haben. Vielleicht hast Du erwartet, dass Du hinterher zwei Ringe in den Händen hältst. Doch es war nur ein Ring, der aber zweimal verdrillt. Auch das ist eine besondere Eigenschaft des Möbiusbandes.

Weitere Experimente

- Was passiert, wenn Du den zweimal verdrillten Ring in der Mitte entlang schneidest?
- Was passiert, wenn Du das Möbiusband beim Schneiden drittelst?
- ... oder viertelst, fünftelst, ...?

Das Möbiusband in Industrie und Kultur

Das Möbiusband wird auch in der Mechanik als Band eines Riemengetriebes eingesetzt und ermöglicht so ein erleichtertes Auf- und Abziehen. Auch als Transport- und Aufnahmebänder können Möbiusbänder eingesetzt werden. Da dann die gesamte Fläche und nicht nur eine Seite genutzt wird, verringert sich die Abnutzung während die Kapazität verdoppelt wird.

Der niederländische Künstler M. C. Escher fertigte viele schöne Bilder mit Möbiusbändern an.

Das Logo der Deutschen EU-Ratspräsidentschaft 2020 zeigt ein Möbiusband – und nicht wenig überraschend auch das Logo der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV).

---

* August Ferdinand Möbius, * 17. November 1790 in Pforta, † 26. September 1868 in Leipzig; deutscher Mathematiker und Astronom; mathematische Arbeitgebiete: Analytische Geometrie und Topologie.

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 10. September 2021.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1267: Geburtstagskuchen

Zur Monoid-Redaktionssitzung hat die Redaktionsleiterin Frau Dr. Hog-Angeloni einen rechteckigen Blechkuchen mitgebracht. Zum 40-jährigen Jubiläum möchte sie den Kuchen mit genau 40 Schnitten zerteilen. Dabei geht ein Schnitt jeweils parallel zum Rand des Kuchens und jeweils komplett von einem Rand zum gegenüberliegenden Rand. Dadurch entstehen rechteckige Kuchenstücke. Um die Redaktion satt zu bekommen, möchte sie natürlich möglichst viele Stücke aus dem Kuchen schneiden.
Wie viele Kuchenstücke kann Frau Dr. Hog-Angeloni bei dieser Vorgabe maximal erhalten. (MG)

Aufgabe 1268: 40 Jahre Monoid

Marcel hat auf einen Zettel ganz oft „40 Jahre Monoid" geschrieben:

4	0	J	A	H	R	E	M
0	J	A	H	R	E	M	O
J	A	H	R	E	M	O	N
A	H	R	E	M	O	N	O
H	R	E	M	O	N	O	I
R	E	M	O	N	O	I	**D**

Er stellt fest, dass er nun auf ganz viele verschiedene Weisen „40 Jahre Monoid" lesen kann, wenn er von einem Buchstaben zum nächsten jeweils nur entweder um eins nach rechts oder um eins nach unten zum jeweils benachbarten Buchstaben weiterliest.
Auf wie viele Weisen kann er so „40 Jahre Monoid" lesen? (MG)

Hinweis: Er startet auf jeden Fall bei der 4 oben links und endet beim D unten rechts.

Aufgabe 1269: Eine farbige Angelegenheit

Alle Punkte einer Kreislinie sind entweder rot oder blau gefärbt.
Zeige: Es gibt unendlich viele gleichschenklige Dreiecke, deren Eckpunkte auf der Kreislinie liegen und von gleicher Farbe sind. (H.F.)

Aufgabe 1270: Gleichungssystem mit 1981 zum Jubiläum

Monoid erschien erstmals im Jahr 1981. Löse folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} -3x_1 + 1x_2 + 4x_3 - 1x_4 &= 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 9 \\ -1x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(MG)

Aufgabe 1271: Zwei Aufgaben mit zwei besonderen Zahlen

Gegeben sind die beiden Zahlen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Bestimme die (normierte*) quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $-\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) Berechne ohne Taschenrechner

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1981} \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1981}.$$

(MG)

Aufgabe 1272: Zahlen schreiben II

Nachdem Kalea ihrem Onkel gezeigt hat, wie gut sie schon Zahlen schreiben kann (siehe Monoid 145, Mathespielerei II auf Seite 22), möchte ihre kleine Schwester Sophie ebenfalls ihre Künste unter Beweis stellen. Dabei hat sie sich etwas besonderes überlegt: Sie notiert einmal die Zahl 1, zweimal die Zahl 2, dreimal die Zahl 3 und so weiter. Dabei trennt sie die Zahlen auch jeweils. Es entsteht also die Folge

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

a) An welchen Stellen der Folge steht die Zahl 1981?

b) Welche Zahl steht an der 2021. Stelle der Folge? (MG)

Aufgabe 1273: Summen aufeinanderfolgender Zahlen

Joana hat ein wenig mit Zahlen „experimentiert" und festgestellt, dass sich manche Zahlen auf viele verschiedene Weisen als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen lassen, andere nur auf eine Weise und manche gar nicht. Dabei bestehen manche Darstellungen aus nur zwei Summanden, andere aus mehreren. Die Zahl 2020 lässt sich unter anderem als Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $402 + 403 + 404 + 405 + 406 = 2020$ oder 40 auf aufeinanderfolgenden Zahlen $31 + 32 + \ldots + 70 = 2020$ darstellen.

---

* Normiert bedeutet, dass der Leitkoeffizient 1 ist, hier also das quadratische Glied $1x^2$ ist.

Nun untersucht Joana, auf wie viele verschiedene Weisen sich

a) das Monoid-Ersterscheinungsjahr 1981,
b) das aktuelle Jubiläumsjahr 2021 sowie
c) das Monoid-Alter 40

als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen schreiben lassen.
Zu welchen Ergebnissen wird sie kommen? Gib auch die Summendarstellungen an. (MG)

Aufgabe 1274: Ein Altersrätsel

Bei einem Spaziergang durch die Stadt fragt Herr Mayer seinen Freund Schmidt wie alt seine vier Kinder seien. Schmidt: „Das produkt der Zahlen, die jeweils ihr Lebensalter angeben (in Jahren) ist 96". Herr Mayer nach einigem Nachdenken: „Dürfte ich noch mehr darüber erfahren?" Schmidet: „Die Summe derselben Zahlen stimmt mit der Anzahl der Stockwerke des vor uns liegenden Hochhauses überein." Mayer nach einer kurzen Überlegung: „Fast komme ich damit zurecht. Aber vielleicht machst du noch eine Bemerkung?" Schmidet: „Mein Zweitjüngster hat blaue Augen." Mayer: „Danke, das genügt!" Und Herr Mayer nannte die Alter der vier Kinder. Wie alt sind diese? (Martin Mettler †)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 145

Klassen 9–13

Aufgabe 1260: Zahl und Spiegelzahl

Schreibt man die Ziffern einer natürlichen Zahl n in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Spiegelzahl n' von n. Zum Beispiel ist für $n = 2021$ die Spiegelzahl $n' = 1202$.
Nun gelte: Das Produkt einer natürlichen Zahl n und ihrer Spiegelzahl n' ist 78 445.
Wie heißen Zahl und Spiegelzahl? (nach HF)

Lösung:

Die Zahl 78445 hat die Primfaktorzerlegung $78445 = 5 \cdot 29 \cdot 541$. Dies sind auch die Primfaktoren der Zahlen n und n'.
Offensichtlich ist $n = 1$, $n = 5$ und $n = 29$ nicht möglich, denn dann wären (in dieser Reihenfolge) die Produkte $n \cdot n' = 1 \cdot 1 = 1$, $n \cdot n' = 25$ und $n \cdot n' = 841$, also jeweils kleiner als 78445.
Es bleibt also nur die Möglichkeit $n = 5 \cdot 29 = 145$ und $n' = 541$. (MG)

Alternative Lösung:

Sowohl n als auch n' haben nicht die Einerziffer 0, denn sonst wäre eine dieser beiden Zahlen ein Vielfaches von 10 und somit auch das Produkt $n \cdot n' = 78445$ und dieses würde auf 0 enden.

Insbesondere kann also auch keine Ziffer 0 beim Umkehren nach vorne wechseln und somit haben beide Zahlen n und n' gleich viele Ziffern.

Genauer ist die Zahl n dreiziffrig, denn für $n \leq 99$ wäre $n \cdot n' \leq 9801 < 78445$ und für $n \geq 1000$ wäre $n \cdot n' \geq 1000000 > 78445$.

Da $nn' = 78445$ auf 5 endet, muss einer der beiden Faktoren n und n' ein Vielfaches von 5 sein, aber nicht von 10, also ebenfalls auf 5 enden. Außerdem muss der andere Faktor ungerade sein, also auf eine ungerade Ziffer 1, 3, 5, 7 oder 9 enden.

Wäre aber diese Einerziffer ≥ 3, dann wäre $n \cdot n' \geq 305 \cdot 503 = 153415 \geq 78445$. Also endet eine der beiden Zahlen auf 5, die andere auf 1. Die andere Ziffer ist jeweils die Hunderterziffer.

Damit folgt

$$n \cdot n' = (105 + 10b) \cdot (501 + 10b) = 52605 + 6060b + 100b^2 = 78445$$

und schließlich $100b^2 + 6060b - 25840 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die positive Lösung $b = 4$.

Also ist $n = 145$ und $n' = 541$ (oder umgekehrt). (nach HF)

Aufgabe 1261: Lösungsprodukt

Löse die folgenden drei Gleichungen und multipliziere anschließend alle erhaltenen Lösungen:

$$17 + 7x = 19 + 6x$$
$$-2y^2 + 6y + 27 = 7$$
$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$$

(MG)

Lösung:

- Aus der ersten Gleichung $17 + 7x = 19 + 6x$ folgt $x = 2$.
- Aus $-2y^2+6y+27 = 7$ folgt $y^2-3y-10 = 0$. Damit gilt für die Lösungen y_1 und y_2 nach dem Satz von Vieta $y_1 + y_2 = -(-3) = 3$ und $y_1 \cdot y_2 = -10$. Daraus lassen sich die Lösungen $y_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$, also $y_1 = -2$ und $y_2 = 5$ berechnen.
- Es ist $z^3 - 2z^2 - z + 2 = (z-2) \cdot (z^2 - 1) = (z-2) \cdot (z-1)(z+1)$. Also hat die Gleichung die drei Lösungen $z_1 = -1$, $z_2 = +1$ und $z_3 = +2$.

Das Produkt aller Lösungen aller drei Gleichungen ist

$$2 \cdot ((-2) \cdot 5) \cdot ((-1) \cdot 1 \cdot 2) = 40,$$

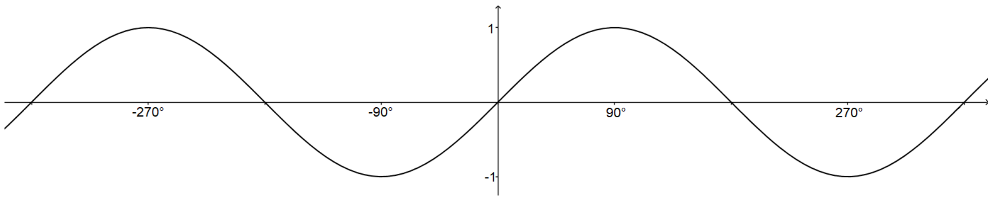
und Monoid wird dieses Jahr bereits 40 Jahre alt!

Aufgabe 1262: Eine Sinus-Summe

Berechne

$$\sin(1^\circ) + \sin(2^\circ) + \sin(3^\circ) + ... + \sin(360^\circ).$$

(MG)



Lösung:

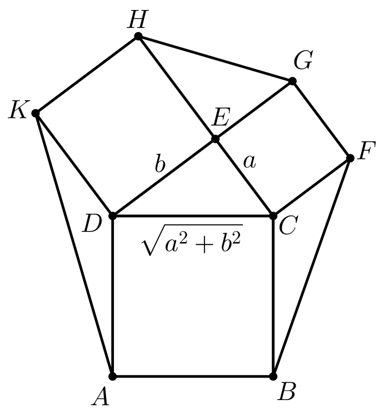
Für den Sinus gilt $\sin(x + 180^\circ) = -\sin(x)$.

Damit können wir die Summe vereinfachen und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sin(1^\circ) + \sin(2^\circ) + \sin(3^\circ) + ... + \sin(360^\circ)\\
=&\sin(1^\circ) + \sin(181^\circ) + \sin(2^\circ) + \sin(182^\circ) + ... + \sin(180^\circ) + \sin(360^\circ)\\
=&\sin(1^\circ) - \sin(1^\circ) + \sin(2^\circ) - \sin(2^\circ) + ... + \sin(180^\circ) - \sin(180^\circ)\\
=&0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1263: Flächen eines Sechsecks

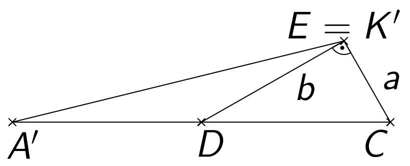
In der Figur ist CED ein rechtwinkliges Dreieck mit $|CE| = a$, $|ED| = b$ und $|DC| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $ABCD$, $CFGE$ und $DEHK$ sind Quadrate.
Bestimme die Fläche des Sechsecks $ABFGHK$. (H.F.)



Lösung:

Für die Flächen des Dreiecks CED und der drei Quadrate in der Figur gelten $|CED| = \frac{1}{2}ab$, $|ABCD| = a^2 + b^2$, $|CEGE| = a^2$ und $|DEHK| = b^2$.

Das Dreieck EGH ist kongruent zum Dreieck CED wegen $|EH| = |ED|$, $|EG| = |EC|$ und $\sphericalangle GEH = \sphericalangle DEC$. Für die Dreiecksflächen ist also $|EGH| = |CED| = \frac{1}{2}ab$.

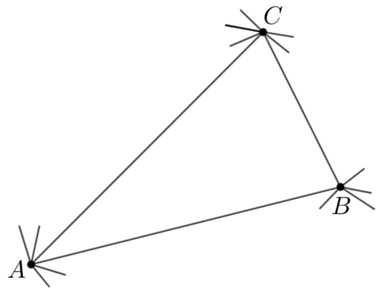


Dreht man das Dreieck ADK um D im Uhrzeigersinn um $90°$, wobei $K \to E$ und $A \to A'$ gilt, dann liegen A', D und C auf einer Geraden. Das gedrehte Dreieck $A'DE$ und das Dreieck CED haben die gleiche Höhe, sowie gleich lange Grundlinien $A'D$ und DC. Folglich sind sie flächengleich, $|ADK| = |CED| = \frac{1}{2}ab$.
Ganz analog zeigt man: $|BFC| = |CED| = \frac{1}{2}ab$.

Zusammenfassung: $|ABFGHK| = 2a^2 + 2b^2 + 2ab$.

Aufgabe 1264: Verbindungen in einem Netzwerk

In einem Netzwerk seien A, B und C Knotenpunkte, zwischen denen direkte und indirekte Verbindungen bestehen: Zwischen A und B gibt es 82 Verbindungen, die über C laufenden mitgezählt; zwischen B und C sind 62 Verbindungen vorhanden (die über A mitgezählt) und von A nach C gibt es mindestens 10 Verbindungen (die über B mitgezählt).
Wie viele Verbindungen gibt es von A nach B ohne Umwege über C, von B nach C ohne Umwege über A und von A nach C ohne, beziehungsweise mit Umwegen über B? (H.F.)



Lösung:

Die Anzahl der umweglosen Verbindungen von A nach B sei x, die von B nach C sei y und die von A nach C sei z.
Für die Gesamtzahlen aller Verbindungen von A nach B, von B nach C, von A nach C gilt dann

$A \longrightarrow B$: $x + y \cdot z = 82$
$B \longrightarrow C$: $y + x \cdot z = 62$ Addiert man die ersten beiden Gleichungen, so folgt
$A \longrightarrow C$: $z + x \cdot y \geq 10$

$x + y + yz + xz = 144$, also $(x + y)(1 + z) = 144$. Daraus folgt: $(x + y)$, sowie $(1 + z)$ sind Teiler von 144. Offenbar sind für $1 + z$ folgende Werte möglich: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.
Wegen $y + xz = 62$ sind $z + 1 = 72$ und $z + 1 = 144$ nicht möglich; wegen $z + xy \geq 10$ sind ferner die Fälle $1 + z = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ auszuschließen.
Für z sind daher nur noch folgende Werte möglich

$$z = 11, 15, 17, 23, 35, 47.$$

Zur Bestimmung von z setzen wir $x = 82 - yz$ in $y + xz = 62$ ein: Dann ist $y + (82 - yz)z = 62$, also $y - z^2y = 62 - 82z$ woraus folgt $y = \frac{2(31-41z)}{1-z^2}$.

Wenn man hier der Reihe nach die möglichen z-Werte einsetzt, dann erhält man nur für $z = 11$ ein ganzzahliges y, nämlich $y = 7$ und somit $x = 5$.
Von A nach B gibt es also fünf direkte Verbindungen, von B nach C sind es sieben direkte Verbindungen und von A nach C elf direkte und 35 indirekte Verbindungen.

Aufgabe 1265: Abundante Potenzen

Eine natürliche Zahl n heiße *abundant**, wenn für die Summe $\sigma(n)$ ihrer Teiler $\sigma(n) > 2n$ gilt.

Beispiel: $n = 12$ ist abundant, weil $\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28 > 24 = 2 \cdot 12$ ist.

Es sei nun a eine solche abundante Zahl.

Zeige: Dann sind auch alle Potenzen a^m mit $m = 2, 3, 4, ...$ abundant. (H.F.)

Lösung:

Die (positiven) Teiler von a seien t_1, t_2, t_3, ..., t_k mit $k > 1$. Dann gilt nach Voraussetzung $\sigma(a) = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_k > 2a$.

Die Zahlen $a^{m-1}t_1$, $a^{m-1}t_2$, ..., $a^{m-1}t_k$ sind Teiler von a^m. Daher gilt

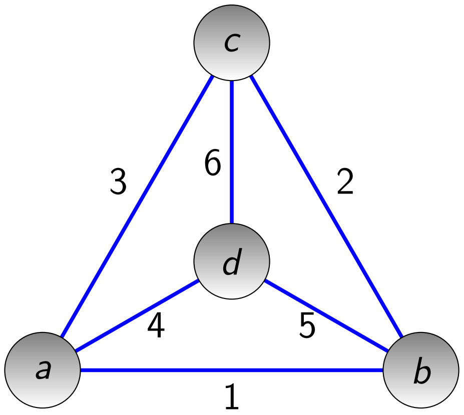
$$\begin{aligned}\sigma(a^m) &\geq a^{m-1}t_1 + a^{m-1}t_2 + ... + a^{m-1}t_k = a^{m-1}\left(t_1 + t_2 + ... + t_k\right)\\ &= a^{m-1} \cdot \sigma(a) > a^{m-1} \cdot 2a = 2a^m.\end{aligned}$$

q.e.d.

Aufgabe 1266: Das Tetraeder

Wir stellen uns die vier Ecken eines Tetraeders als Knoten in einem Graphen vor. Je zwei Ecken des Tetraeders sind dann durch eine Kante verbunden. Dies ist ein Spezialfall eines vollständigen Graphen, bei dem jedes Paar von Knoten direkt miteinander verbunden sind. Wir stellen uns nun vor, dass ein paar der Kanten durch einen zufälligen Vorgang zerstört wurden. Genauer gehen wir davon aus, dass für jede der sechs Kanten eine (gefälschte) Münze geworfen wurde, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ zeigt - das Zeichen dafür, dass die Kante bleibt. Zeigt die Münze hingegen „Zahl“, so wird die Kante entfernt. Es bleibt ein Graph aus vier Knoten und einer zufälligen Menge von Kanten.

* abundant – etwa: überfließend



Tetraeder von oben. Es ist d der Gipfel; a, b und c bilden die Basis.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Graph immer noch verbunden? (Das heißt, man kann, wenn auch eventuell über einen Umweg, von jedem Knoten, zu jedem anderen Knoten entlang von Kanten gelangen.) (AcK)

Lösung:

Wir zeichnen das Tetraeder von oben, um die Kanten und Knoten zu benennen. Sei $K_i = 1$, falls die Kante mit Nummer i erhalten bleibt, und $K_i = 0$ sonst, $i = 1, \dots, 6$. Dann ist $P(K_i = 1) = p$ und $K_1, \dots, K_6$ sind unabhängige Zufallsvariablen. Sei $K = (K_1, \dots, K_6)$. Sei $X = K_1 + \dots + K_6$ die Gesamtzahl der Kanten. Dann ist

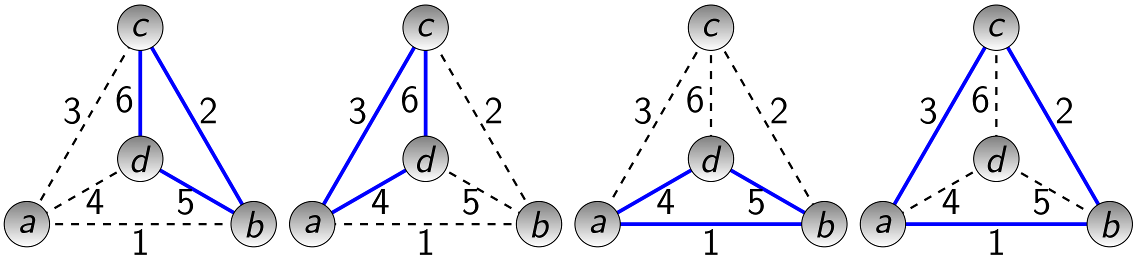
$$P(X = k) = \binom{6}{k} p^k (1-p)^{6-k}.$$

Fall 1: Ist $X \leq 2$, so ist der Graph nicht verbunden.

Fall 2: Ist $X \geq 4$, so ist der Graph verbunden.

Fall 3: Der Fall $X = 3$ ist der interessante Fall. Nehmen wir für den Moment einmal an, dass a und b verbunden sind, und dass c und d verbunden sind. Damit haben wir aber erst zwei Kanten verteilt (nämlich 1 und 6). Die dritte Kante verbindet nun notwendigerweise die beiden Zusammenhangskomponenten und der Graph ist verbunden. Die einzige Möglichkeit, um mit drei Kanten, einen nicht zusammenhängenden Graphen zu bekommen, ist, dass es einen isolierten Punkt gibt, und die drei Kanten verbinden die anderen drei Punkte im Kreis. Etwas ausführlicher heißt das: Es können die vier Fälle $K = (0,1,0,0,1,1)$ (a isoliert), $K = (0,0,1,1,0,1)$ (b isoliert), $K = (1,0,0,1,1,0)$ (c isoliert) und $K = (1,1,1,0,0,0)$ (d isoliert) auftreten. Jeder dieser Fälle hat die Wahrscheinlichkeit $p^3(1-p)^3$. Insgesamt ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
&\left(\binom{6}{3} - 4\right) p^3(1-p)^3 + P(X \geq 4) \\
=&(20-4)p^3(1-p)^3 + \binom{6}{4} p^4(1-p)^2 + \binom{6}{5} p^5(1-p) + \binom{6}{6} p^6 \\
=&16p^3(1-p)^3 + 15p^4(1-p)^2 + 6p^5(1-p) + p^6 \\
=&16p^3 - 33p^4 + 24p^2 - 6p^6.
\end{aligned}$$



Die vier Fälle mit drei Kanten, die keinen zusammenhängenden Graphen ergeben.

Übrigens: Schon für den Würfel wird die Kombinatorik dermaßen unübersichtlich, dass man es nicht mehr per Hand ausrechnen möchte:

$$384p^7 - 1512p^8 + 2420p^9 - 1962p^{10} + 804p^{11} - 133p^{12}.$$

Für das Oktaeder bekommt man

$$384p^5 - 1948p^6 + 4368p^7 - 5571p^8 + 4344p^9 - 2064p^{10} + 552p^{11} - 64p^{12}.$$

Noch komplizierter wird die Wahrscheinlichkeit beim Dodekaeder

$$5184000p^{19} - 48772800p^{20} + 209417160p^{21} - 541514640p^{22} + 936723060p^{23} - 1137887555p^{24} + 990271044p^{25} - 617291520p^{26} + 270058080p^{27} - 78957900p^{28} + 13883040p^{29} - 1111968p^{30}$$

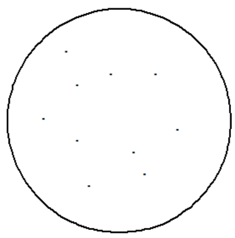
und beim Ikosaeder

$$5184000p^{11} - 75798720p^{12} + 531121080p^{13} - 2367326280p^{14} + 7516464092p^{15} - 18046097595p^{16} + 33948561420p^{17} - 51174387820p^{18} + 62691448620p^{19} - 62934554976p^{20} + 51963943020p^{21} - 35276570580p^{22} + 19602424020p^{23} - 8835569060p^{24} + 3182527680p^{25} - 894974340p^{26} + 189437660p^{27} - 28400760p^{28} + 2689560p^{29} - 121020p^{30}$$

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Das Kunstwerk war fast fertig! Nach und nach hatte der große Maler 99 Punkte irgendwie auf einer kreisförmigen Leinwand vom Durchmesser 2 m verteilt. Heute sollte der 100. Punkt das Gemälde abrunden. Um der Harmonie willen wollte der Meister diesen letzten Punkt so setzen, dass er von jedem der anderen Punkte wenigstens 10 cm Abstand hat.



Kann es einen solchen Punkt stets geben, egal wie die anderen Punkte vorher in der Kreisfläche verteilt wurden? Die Antwort ist zu begründen.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 10. September 2021 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 144

In Heft 144 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Nachdenklich kommt Herr Pommer aus seinem Keller zurück. „Die Apfelernte vom letzten Herbst ist doch schon weit aufgebraucht. Es sind nur noch etwas mehr rote als grüne Äpfel übrig, und zusammen sind es schon weniger als 50“, brummelt er. „Dann kannst du uns ja noch zwei Äpfel heraufholen“, entgegnet seine Frau. „Ich mag jetzt nicht mehr hinuntergehen“, sagt Herr Pommer. „Wenn du nachher sowieso unten bist, greife doch einfach in den Korb und nimm zwei Äpfel zufällig heraus. Ich weiß, dass du mit derselben Wahrscheinlichkeit zwei verschiedenfarbige Äpfel mitbringst wie zwei gleichfarbige.“

Wie viele rote und wie viele grüne Äpfel sind unter diesen Bedingungen höchstens in dem Korb? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Wir bezeichnen die Anzahl der roten Äpfel mit r, die Anzahl der grünen Äpfel mit g und die Gesamtzahl der Äpfel mit n. Aus den Aussagen von Herrn Pommer folgt dann:

(1) $n = r + g < 50$,

(2) $r > g$,

(3) $\binom{r}{2} + \binom{g}{2} = r \cdot g$.

Dabei bedeutet Gleichung (3), dass die Anzahl rein roter oder rein grüner Apfelpaare zusammen so groß ist wie die Anzahl gemischtfarbiger Paare. Eine zu (3) äquivalente Gleichung ergibt sich aus den Pfadregeln für Wahrscheinlichkeiten.
Umformen von Gleichung (3) liefert $r(r-1)+g(g-1) = 2rg$, woraus sich durch weiteres Umformen mithilfe der 2. binomischen Formel $(r-g)^2 = r+g = n$ ergibt. Also muss n eine Quadratzahl sein, die wegen Gleichung (1) kleiner als 50 ist. Die höchstmögliche solche Zahl ist 49; daher gilt wegen Ungleichung (2), dass $r - g = 7$ ist. Dies führt zusammen mit $r + g = 49$ auf die eindeutige Lösung $r = 28, g = 21$. Dieses Zahlenpaar erfüllt alle Bedingungen.

Richtige Lösungen haben eingesandt: Lasse Blum, Josefine Kaßner, Philipp Lörcks, Sönke Schneider, Oscar Su und Clemens Zabel.

Bald wurden die Äpfel immer weniger und es ergab sich, dass Herr Pommer die zufällige Wahl zweier gleichfarbiger Äpfel für doppelt so wahrscheinlich hielt wie die Wahl zweier verschiedenfarbiger Äpfel. Kann das sein? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
Martin Mattheis

Georg Glaeser und Markus Roskar: Mathematik mit Humor

Für das vorliegende Buch haben sich der Mathematiker Georg Glaeser und der Zeichner Markus Roskar, die beide an der Universität für angewandte Kunst in Wien lehren, zusammengefunden, um den Lesern die unterschiedlichsten mathematischen Inhalte in Text und Illustration nahe zu bringen.

In zehn Kapiteln geht es um Elementares, Geniales, Überschlagenes, Widersprüchliches, Integrierendes, Messtechnisches, Physikalisches, Biologisches, Statistisches, und Sehtechnisches. Die zum Text passenden Zeichnungen versuchen den daneben beschriebenen Inhalt mit Humor zu verdeutlichen, der oftmals erst bei näherem Hinsehen in der Zeichnung zu finden ist. Wie die Kapitelüberschriften schon vermuten lassen, finden sich die unterschiedlichsten mathematischen Inhalte wieder: Fibonacci-Zahlen, Mathematikhistorisches, Paradoxien, das Ziegenproblem, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie Anwendungen in den unterschiedlichsten Wissenschaften. Bei den Professionen der beiden Autoren ist es auch nicht verwunderlich, dass zu Beginn auch die Berührungspunkte zwischen Kunst und Mathematik deutlich angesprochen werden. Schön ist das ausführliche Stichwortverzeichnis am Ende des Buches.

Der Band enthält spannende Geschichten über Mathematik und – dem Titel entsprechend auch einige der klassischen Witze über Mathematiker – richtig in die mathematische Tiefe gehen die Autoren jedoch nur selten. Damit ist das Buch für viele Fragestellungen ein kurzer erster Einstieg, der neugierig macht. Allerdings geschieht das Anreißen oft zu kurz, um einen wirklich guten Eindruck zu gewinnen. Wenn jemand mehr wissen will, sollte eine gut sortierte Schulbibliothek zur Verfügung stehen. Falls diese nicht zur Verfügung steht, kann man der Bibliotheksleitung Anschaffungsvorschläge machen (z.B. aus den Rezensionen in MONOID) und den Mathelehrer darum bitten, dies nachdrücklich zu unterstützen.

Fazit: Die Themen des Buches sind gut ausgewählt, an einigen Stellen wäre es jedoch schöner gewesen, die Inhalte auf mehr als einer Seite ausführen zu können. Wenig gelungen finde ich, dass die jeweils auf der rechten Seite stehenden Texte in weißer Schrift auf einem sehr dunklen Untergrund gedruckt wurden. Dadurch kommen zwar die jeweils auf der linken Seite auf hellem Hintergrund gedruckten Zeichnungen besser zur Geltung, das Lesen der Texte wird dafür allerdings deutlich erschwert.

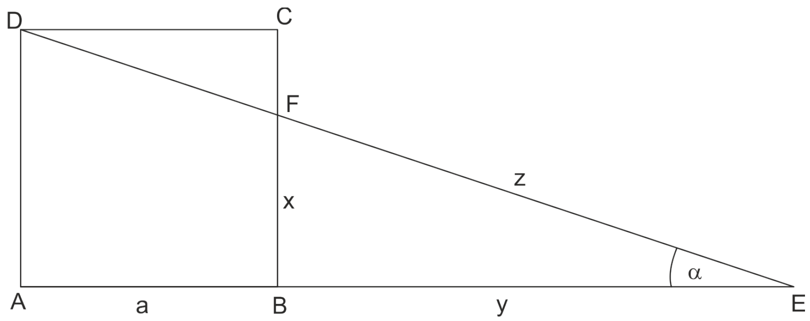
Gesamtbeurteilung: gut ☺☺

Angaben zum Buch:
Glaeser, Georg und Roskar, Markus: Mathematik mit Humor.
Wie sich mathematische Alltagsprobleme lösen lassen
De Gruyter, 2019, ISBN 978-3-11-066240-5, 158 Seiten.

Art des Buches:	Sachbuch zur Mathematik
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Quadrat und Dreieck

von Ingmar Rubin

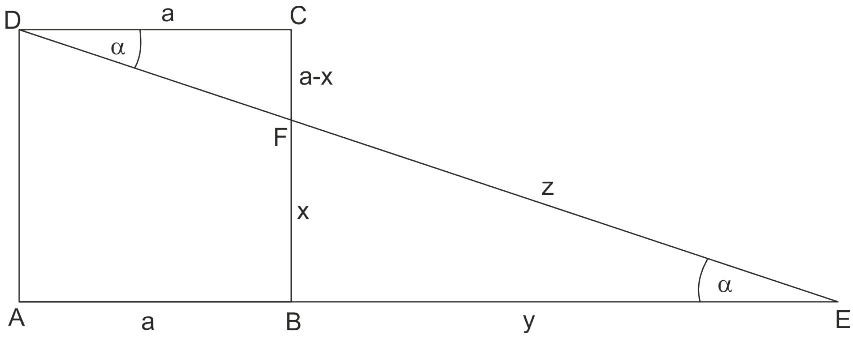


Bei einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite $\overline{AB}$ über B hinaus bis zum Punkt E verlängert. Die Strecke $\overline{DE}$ schneide die Quadratseite $\overline{BC}$ im Punkt F. Es gelten die Streckenbezeichner $a := \overline{AB}$, $x := \overline{BF}$, $y := \overline{BE}$ und $z := \overline{EF}$.

Löse die folgenden Aufgabestellungen in ganzen Zahlen:

1. Gegeben sei $a = 60$ und $z = 91$; bestimme x und y.
2. Gegeben sei $a = 60$; bestimme x, y und z für $z \neq 91$.
3. Bestimme verschiedene Tupel (a, x, y, z). Welche Eigenschaft besitzt die Zahl a? Bestimme die möglichen Winkel $\alpha = \sphericalangle AED$.

Lösungsvorschlag



Im rechtwinkligen Dreieck *BEF* gilt der Satz des Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$. Für x, y, z kommen daher die pythagoreischen Tripel in Frage.
Die Dreiecke *BEF* und *CDF* sind einander ähnlich und es gilt die Verhältnisgleichung
$(*)\quad \frac{a-x}{a} = \frac{x}{y}$.
Zur Lösung der Aufgabenstellungen 1 und 2 können wir im CAS Mathematica das Kommando `FindInstance[ ]` zur Anwendung bringen:

```
gl1 = x^2 + y^2 == z^2
gl2 = (60 - x)/60 == x/y
FindInstance[{gl1, gl2, x > 0, y > 0, z > 0}, {x, y, z},
             Integers]
{x -> 15, y -> 20, z -> 25}
FindInstance[{gl1, gl2, x > 0, y > 0, z > 25}, {x, y, z},
             Integers]
{x -> 35, y -> 84, z -> 91}
```

Damit sind die aufgabenstellungen 1 und 2 bereits gelöst.
Für die Lösung der Aufgabenstellung 3 lösen wir Gleichung $(*)$ nach a auf:

$$\frac{a-x}{a} = \frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{x \cdot y}{y-x}.$$

Wir benötigen nun eine Liste von pythagoreischen Tripeln x, y, z, so dass die Zahl a ganzzahlig wird. Wie man sich eine solche verschafft, wird unter

`https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`
`Pythagoreische%20Tripel%20in%20Python.pdf`
ausführlich besprochen.

Lösungsmenge für Aufgabe 3

Mit den dort gezeigten Programmen erhält man die folgende Ausgabe, hier begrenzt auf die ersten 24 Lösungen:

```
(3, 4, 5)        a = 12   alpha= 36.87
(6, 8, 10)       a = 24   alpha= 36.87
(9, 12, 15)      a = 36   alpha= 36.87
(12, 16, 20)     a = 48   alpha= 36.87
(15, 20, 25)     a = 60   alpha= 36.87
(18, 24, 30)     a = 72   alpha= 36.87
(20, 21, 29)     a = 420  alpha= 43.603
(21, 28, 35)     a = 84   alpha= 36.87
(24, 32, 40)     a = 96   alpha= 36.87
(27, 36, 45)     a = 108  alpha= 36.87
(30, 40, 50)     a = 120  alpha= 36.87
(33, 44, 55)     a = 132  alpha= 36.87
(35, 84, 91)     a = 60   alpha= 22.62
(36, 48, 60)     a = 144  alpha= 36.87
(39, 52, 65)     a = 156  alpha= 36.87
(40, 42, 58)     a = 840  alpha= 43.603
(42, 56, 70)     a = 168  alpha= 36.87
(45, 60, 75)     a = 180  alpha= 36.87
(48, 64, 80)     a = 192  alpha= 36.87
(51, 68, 85)     a = 204  alpha= 36.87
(54, 72, 90)     a = 216  alpha= 36.87
(56, 105, 119)   a = 120  alpha= 28.072
(57, 76, 95)     a = 228  alpha= 36.87
(60, 63, 87)     a = 1260 alpha= 43.603
```

Alle Zahlen a sind immer durch 12 ganzzahlig teilbar. Für bestimmte Zahlen a existieren sogar zwei Lösungen, zum Beispiel $a = 60$ oder $a = 120$. Für die ersten 24 Lösungen existieren vier verschiedene Winkel, wobei $\alpha = 36{,}87°$ mit Abstand am häufigsten auftritt. Berechnet man eine große Anzahl an Tripeln und untersucht sie als mögliche Lösung für unser Problem, erhält man die folgende Statistik:

Anzahl Tripel	Anzahl Lösungen	Anzahl an Winkeln
103	42	5
1005	295	11
10 000	2240	28
100 007	17 840	78

Die Winkel liegen im Bereich $4{,}979° \leq \alpha \leq 82{,}847°$.

Zu Besuch bei ...
Martin Mettler
von Martin Mattheis

1981 – 2021
40 Jahre MONOID

Wer hat warum vor 40 Jahren Monoid, das Mathematikblatt für Mitdenker, gegründet? Nach Carl Friedrich Gauß (siehe Heft 145) besuchte unser Reporter dieses Mal den Monoid-Gründer Martin Mettler.

Bild: Martin Mettler beim Mathematikunterricht

Sehr geehrter Herr Mettler, wo lebten und wirkten Sie?
Geboren wurde ich am 24. März 1936 in Gertianosch im rumänischen Banat. Nach dem Studium der Mathematik und Physik in Temeswar, unterrichtete ich diese Fächer zunächst in Rumänien und nach meiner Übersiedlung in die Bundesrepublik Deutschland dann am Karolinen-Gymnasium in Frankenthal. Dort habe ich dann 2001 die Zeitschrift Monoid gegründet. Im Jahr 1983 wechselte ich an das Elisabeth-Langgässer-Gymnasium nach Alzey. Von 1990 bis 1993 war ich Leiter des Landeswettbewerbs Mathematik in Rheinland-Pfalz und ab 1991 auch im Aufgabenausschuss der Deutschen Mathematik Olympiade. Nach der Öffnung des so genannten „Eisernen Vorhangs“ ging ich von 1993 bis zu meiner Pensionierung 1998 nach Ungarn in den Auslandsschuldienst. Verstorben bin ich am 11. September 2005 in Carlsberg in der Pfalz.

Wenn es in Ihrer Schulzeit Monoid bereits gegeben hätte, hätten Sie es dann abonniert?
Aber selbstverständlich! Schließlich habe ich bereits als Schüler an der rumänischen Mathematik-Zeitschrift für Schüler „Gazeta Matematica“ mitgearbeitet und war erfolgreicher Teilnehmer an den Mathematik-Olympiaden.

Was bedeutet eigentlich der Name Monoid?
Der Begriff Monoid bezeichnet in der Mathematik eine der einfachsten algebraischen Strukturen: Eine Halbgruppe mit neutralem Element. Das bedeutet, das es in dieser Menge eine Verknüpfung und ein neutrales Element gibt. Ein einfaches Beispiel für einen Monoid sind die natürlichen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung und der 1 als neutrales Element. Mit dem Namen sollte als Ausdruck der Bescheidenheit signalisiert werden, dass wir klein und bescheiden, sozusagen mit dem kleinen Einmaleins der hohen Mathematik, beginnen wollten.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch über sich berichten?
Es freut mich sehr, dass es Monoid nach 40 Jahren immer noch gibt. Die Entscheidung, die Herausgeberschaft an die Universität in Mainz abzugeben, hat sich als goldrichtig erwiesen. Dort ist Monoid in guten Händen.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?
Meiner Person ist mir nicht so wichtig, wie bei jungen Menschen Begeisterung für Mathematik zu wecken. Deshalb habe ich im Rahmen von Monoid einige spannende Bücher über Mathematik herausgegeben: Kollektaneen (1992), Beweise und theoretische Fragen (1995), Perlen (1995), Formeln (1996), Vom Charme der „verblassten" Geometrie (2000). Leider sind diese Bücher heute nicht mehr erhältlich.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern mit auf den Weg geben?
„Es besteht kein Zweifel, dass der Mathematik die Ehre gebührt, im besonderen Blickfeld der Öffentlichkeit zu stehen. Gilt sie doch als eine der unverzichtbaren Wissenschaften für die hoch technisierte Welt des globalen Wettbewerbs."

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Gespiegelte Summen

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Palindrom*, wenn ihre Ziffern (im Dezimalsystem) in umgekehrter Reihenfolge die gleiche Zahl ergeben. Zum Beispiel ist 13531 ein Palindrom, 13513 hingegen nicht.

Wir wollen uns nun folgendes Vorgehen anschauen: Wir beginnen mit einer beliebigen Zahl n_0 und bestimmen die Zahl m_0, die durch Umkehren der Ziffern von n_0 entsteht. Anschließend bestimmen wir die Summe $n_1 = n_0 + m_0$. Ist diese Zahl ein Palindrom, so sind wir fertig, andernfalls wiederholen wir das Ganze mit n_1, bestimmen also m_1 und $n_2 = n_1 + m_1$ und so weiter.

a) Bestimme für alle Zahlen $n_0 = 1, \dots, 20000$, nach wie vielen Iterationen das erste Mal ein Palindrom erreicht wird.
b) Welches ist jeweils die kleinste Zahl $n(k)$, für die nach genau k Iterationen ein Palindrom erreicht wird?

Achtung: Es kann auch Zahlen geben, bei denen *nie* ein Palindrom erreicht wird. Es ist daher sinnvoll, eine maximale Anzahl an Iterationen vorzugeben.

(FF)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 10. September 2021 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.
Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 144

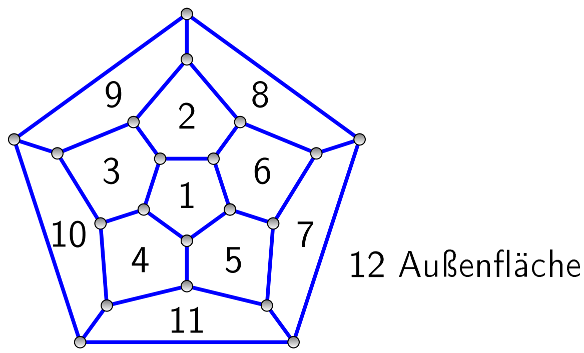
In Heft 144 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Färbungen des Dodekaeders

Die meisten Würfel für Spiele sind sechsseitig, also Kuben. Für manche Spiele werden aber auch Würfel mit mehr oder weniger Flächen verwendet. Wir wollen hier einen zwölfseitigen Würfel (Dodekaeder) betrachten. Der Würfelhersteller möchte die Würfel unterscheidbar machen, indem er die Flächen mit einem transparenten Lack überzieht, sodass der Zahlenwert der Fläche sichtbar bleibt. Er hat vier verschiedene Lackfarben zur Verfügung und kann jede der zwölf Flächen einzeln lackieren. Dabei sollen keine zwei benachbarten Flächen die gleiche Farbe erhalten. Wie viele unterschiedliche Würfel können so erzeugt werden?
Schreibe ein Programm, das dieses kombinatorische Problem durch Ausprobieren löst.

Lösung

Zunächst nummerieren wir die Flächen des Dodekaeders von 1 bis 12 durch, z. B. wie in der Grafik. Die Flächen 1 und 2 sind benachbart, die Flächen 3 und 10 sind benachbart und so weiter. Insgesamt gibt es 30 Paare benachbarter Flächen. Diese Paare werden im Programm fest angegeben.



Danach bekommt die Fläche 1 eine von vier Farben. Es wird getestet, ob die widerspruchsfrei möglich ist. Ist die möglich, dann bekommt die Fläche 2 eine von vier Farben und es wird getestet, ob die widerspruchsfrei möglich ist und so fort. Jedes Mal, wenn die zwölfte Fläche eine Farbe widerspruchsfrei zugewiesen bekommt, wird ein Zähler um 1 erhöht. Als Ergebnis erhalten wir 240 mögliche Färbungen des Würfels.

Die Funktion `anzahl_kombinationen(anzahl_farben=4)` im folgenden Python-Programm gibt die Anzahl der möglichen Färbungen mit `anzahl_farben` (voreingestellt: 4) zurück. In dieser Funktion wird zunächst einmal die Inzidenztabelle `inzidenz` festgelegt. Dieses ist eine Liste aller Paare von Nummern, die für benachbarte Flächen im Dodekaeder stehen. Das Dodekaeder hat 30 Kanten, also sind es 30 Paare.

Die Variable `tiefe` erhält den größten Wert aus der Inzidenztabelle, also 12. Wenn wir für andere Körper, etwa Tetraeder oder Würfel, die gleiche Fragestellung untersuchen, brauchen wir nur eine neue Inzidenztabelle. Die Anzahl der Flächen wird dann automatisch ermittelt und `tiefe` zugewiesen. So taucht die Zahl 12 im Programm nicht mehr auf.

Als nächstes wird die Funktion `pruefe(faerbung)` definiert. Hier ist `faerbung` eine Liste von Farben, die den einzelnen Flächen des Dodekaeder zugewiesen wurden. Diese Liste kann unvollständig sein, das heißt, die Liste kann eine Länge $k \leq \textit{tiefe}$ haben. Es haben dann nur die Flächen $1, \ldots, k$ Farben erhalten. Die Funktion `pruefe(faerbung)` testet jetzt für jedes Paar aus der Inzidenztabelle, für das beide Werte höchstens k sind, ob beide Flächen unterschiedliche Farben haben. Nur wenn dies der Fall ist, wird der Wert `True` zurückgegeben, sonst `False`.

Die Funktion `noch_moegliche_faerbungen(faerbung)` erhält eine möglicherweise unvollständige Liste `faerbung` und bestimmt, auf wie viele Weisen diese zu einer vollständigen Färbung (mit ungleichen Farben an angrenzenden Flächen) fortgesetzt werden kann. Ist die (möglicherweise noch unvollständige) `faerbung` nicht widerspruchsfrei, so lässt sie sich nicht zu einer widerspruchsfreien vollständigen Färbung ergänzen. Daher wird in diesem Fall der Wert 0 für die Anzahl der Möglichkeiten zurückgegeben. Andernfalls ist die Färbung bislang widerspruchsfrei. Ist die Länge der Färbung gleich `tiefe`, so ist die Liste vollständig, und es wird 1 zurückgegeben. Hat `faerbung` eine Länge $k < \textit{tiefe}$, so wird die Liste `faerbung` um den Eintrag `farbe` verlängert, und für diese längere Liste wird die Anzahl der noch möglichen Färbungen bestimmt. Für alle zulässigen Werte von `farbe` werden diese Zahlen addiert und zurückgeben.

Um nun schließlich die Anzahl der Färbungen des Dodekaeder auszurechnen, wird `noch_moegliche_faerbungen([])` mit einer leeren Liste [] als Wert für `faerbung` aufgerufen. Die Anzahl der Möglichkeiten, eine leere Färbung zu ergänzen, ist offenbar gleich der Anzahl der Färbungen insgesamt.

Python-Code

```
def anzahl_kombinationen (anzahl_farben=4):
    inzidenz = [( 1, 2), ( 1, 3), ( 1, 4), ( 1, 5),
                ( 1, 6), ( 2, 3), ( 2, 6), ( 2, 8),
                ( 2, 9), ( 3, 4), ( 3, 9), ( 3,10),
                ( 4, 5), ( 4,10), ( 4,11), ( 5, 6),
                ( 5, 7), ( 5,11), ( 6, 7), ( 6, 8),
                ( 7, 8), ( 7,11), ( 7,12), ( 8, 9),
                ( 8,12), ( 9,10), ( 9,12), (10,11),
                (10,12), (11,12)]

    def pruefe(faerbung):
        for (i,j) in inzidenz:
            if (max(i,j)<=len(faerbung)):
                if (faerbung[i-1] == faerbung[j-1]):
                    return False
        return True

    def noch_moegliche_kombinationen (faerbung):
        zaehler = 0
        if not pruefe(faerbung):
            return 0
        if len(faerbung) == tiefe:
            return 1
        for farbe in range(0,anzahl_farben):
            zaehler+=noch_moegliche_kombinationen
                     (faerbung+[farbe])
        return zaehler

    tiefe = max([max(i,j) for (i,j) in inzidenz])
    return noch_moegliche_kombinationen([])
>>> anzahl_kombinationen()
240
```

Das Programm ist so flexibel geschrieben, dass man die Inzidenztabelle des Dodekaeders leicht durch jede andere Inzidenztabelle ersetzen kann, ohne den Rest des Programms zu verändern. Beispielsweise kann man für das Tetraeder

```
inzidenz = [(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4),(3,4)]
```

nehmen und für das Hexaeder (Würfel):

```
inzidenz = [(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5),
            (2,6), (3,4), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)]
```

Ein Blick hinter die Kulissen
Erraten von Ziffer nach dem Komma
von Hartwig Fuchs

Der Mathematiker Dr. Quaoar veranstaltet jedes Jahr eine Geburtstagsparty. Zur Unterhaltung seiner Gäste spielt er dabei stets ein Rechenspiel mit ihnen. Bei seiner letztjährigen Einladung war es das Spiel „Eine Ziffer nach dem Komma“.
Das Spiel läuft so ab:

1. Ein Gast erhält einen Taschenrechner mit zehnziffriger Ergebnisanzeige sowie eine liste mit Zahlen $3 < p < 10000$ (für unsere Leser: die Liste enthält nur Primzahlen)
2. Dr. Quaoar behauptet: Bei der nachfolgend auszuführenden Rechnung wird im Ergebnis auf der ersten Stelle nach dem Komma die Ziffer 5 stehen.
3. Der Gast wählt nun eine Zahl p, quadriert sie und addiert 17, danach dividiert er die bis dahin errechnete Zahl durch 12.

Der Mitspieler im letzten Jahr – es war Herr Pnin, Quaoars Nachbar – wählte 9973 und rechnete $(9973^2+17) : 12 = 8288395,5$ – wie Dr. Quaoar vorhergesagt hatte. Die erstaunten Gäste verlangen noch ein Spiel. Der Gastgeber willigte ein – aber er variierte die Spielregeln ein wenig:
Pnin sollte jetzt zu p^2 die Zahl 20 addieren und danach wieder durch 12 dividieren. Dann – so sagte dr. Quaoar diesmal voraus – würde im Ergebnis auf der zweiten Stelle nach dem Komma die Ziffer 5 stehen. Pnin wählte 5023. Mit $(5023^2 + 20) : 12 = 2102545,75$ behielt Dr. Q. erneut Recht! Was steckt hinter diesem Rechentrick?

Des Rätsels Lösung

Zunächst: Die Beschränkung der Zahlen p durch $p < 10^5$ hat den technischen Grund: das exakte Ergebnis der Rechnung $(p^2 + 20) : 12$ hat stets weniger als 10 Ziffern.
Die nachfolgende Erklärung des Rechentricks gilt für alle Primzahlen $p \geq 5$. Jede Primzahl $p \geq 5$ hat die Darstellung $p = 6n - 1$ oder $p = 6n + 1$.
Für das erste Spiel gilt damit $(p^2 + 17) : 12 = ((6n \pm 19^2 + 17) : 12 = (36n^2 \pm 12n + 18) : 12 = 3n^2 \pm n + 1 + \frac{6}{12}$ und wegen $\frac{6}{12} = 0,5$ gilt Dr. Quaoars Voraussage 2).
Im zweiten Spiel ist $(p^2+20) : 12 = ((6n\pm 1)^2+20) : 12 = 3n^2 \pm n+1+\frac{9}{12}$ mit $\frac{9}{12} = 0,75$ und damit ist auch im zweiten Spiel Dr. Quaoars Voraussage begründet.
Es ist nun leicht, selbst solche Zahlenspiele mit $(p^2+x).y$ für x-Werte $\neq 17, \neq 20$ und y-Werte $\neq 12$ zu entwickeln.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Endstand nach Heft 144

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Jill Marie Simon 14;
Kl. 8: Oscar Su 82, Jan Christian Weber 18;
Kl. 11: Lukas Born 26.

Aschaffenburg, Kronberg-Gymnasium:
Kl. 7: Jonathan Reuthner 25.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 6: Linus Salloch 25, Mika Schäfer 24;
Kl. 12: Marvin Wenzel 46.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 8: Konstantin Herbst 37;
Kl. 11: Aleksandra Herbst 29.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 10: Lasse Blum 41; **Kl. 12:** Sönke Schneider 25.

Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:
Kl. 7: Jacob Schmittner 11.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:
Kl. 5: Julia Hans 3;
Kl. 10: Theresa Horstkötter 12.

Hof, Johann-Christian-Reinhart-Gymnasium:
Kl. 7: Finja Weiß 7.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Tejas Shivakumar 16;
Kl. 7: Jabir Aouzi 12,5, Sarah Markhof 11.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 10: Simon Waldek 11.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 6: Victor Mayer 7;
Kl. 11: Raphael Mayer 8.

Mainz, Theresianum:
Kl. 12: Clemens Zabel 40.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 8: Jona Richartz 3.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 13: Johannes Kerhberger 25.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 6: Jasmin Borrmann 19
Kl. 7: Louisa Lukowiak 18;
Kl. 8: Emilie Borrmann 16;
Kl. 11: Kathrin Borrmann 30, Josefine Kaßner 32.

Schorndorf, Burg-Gymnasium:
Kl. 12: Christian Carda 11.

Schrobenhausen, Gymnasium:
Kl. 7: Luca Sindel 32.

Simbach am Inn, Tassilo-Gymnasium:
Kl. 7: Alexander Koblbauer 43.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 6: Mai Linh Dang 26;
Kl. 9: Tu Sam Dang 46,5;
Kl. 11: Miriam Büttner 38.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 9: Philipp Lörcks 50,5.

Mitteilungen

- **Die Universität Mainz feiert 75. Geburtstag.** Zu Gutenbergs Zeiten im Jahr 1477 gegründet und in napoleonischer Zeit geschlossen, wurde die Mainzer Universität am 22. Mai 1946 kurz nach dem Ende des Zweiten Weltkriegs auf Betreiben der französischen Verwaltung wiedereröffnet. Nach den Anfängen auf dem ehemaligen Kasernengelände westlich der fast völlig zerstörten Stadt Mainz wuchs die JGU zu einer der großen deutschen Universitäten mitten im Herzen Europas – eine beeindruckende Entwicklung und ein guter Grund zum Feiern.

Das Leitwort „Ut omnes unum sint – Dass alle eins seien", unter dem die Universität Mainz feierlich wiedereröffnet wurde, zeichnet sie bis heute aus: 75 Jahre nach ihrer Wiedereröffnung spiegelt sich dies in einer lebendigen akademischen Gemeinschaft, einer internationalen Studierendenschaft und einem einzigartigen Campus wider. Die Universität als Gemeinschaft der Forschenden, Lehrenden und Lernenden tagtäglich zu leben, gehört zu unserem Selbstverständnis.
Wir gratulieren unserer Heimatuniversität ganz herzlich.

- **Der Mainzer Wissenschaftsmarkt** findet ab 11. September 2021 auf der virtuellen Plattform „WiMa digital" statt. Insbesondere wird es eine Wissenschafts-Box geben, durch die die verschiedenen Wissenschaften der Universität Mainz nach Hause geliefert werden können. Für die Mathematik wird eine Ausgabe dieses Heftes beiliegen, mit einem Sonderteil in der Mitte. Die bereits eingegangenen Beiträge hierfür findet Ihr ebenfalls in der Mitte dieses Heftes. Alle Beiträge werden Euch zu gegebener Zeit ebenfalls zur Verfügung gestellt.
- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 15 € für das Kalenderjahr 2021 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Fischer, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Hofmann
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau
Titellayout: Karsten Müller, Büro Schwarzschild Wiesbaden

Jahrgang 41 | Heft 146 | Juni 2021

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und dem Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax**: 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid