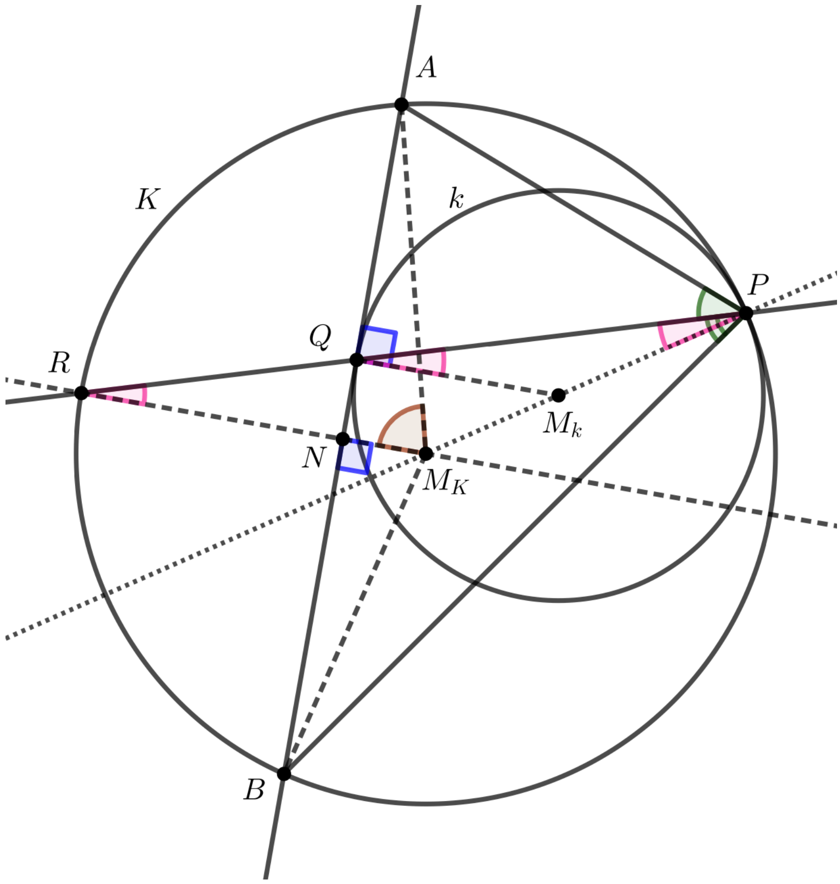
Jahrgang 42 | Heft 149 | März 2022

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **31. Mai 2022.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindtund am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

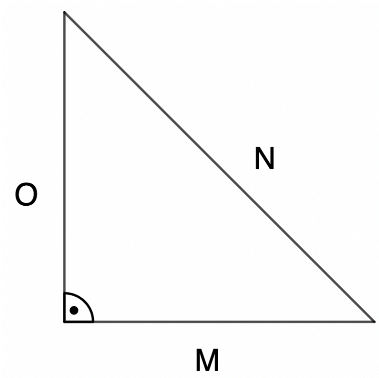
Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs



Es seien M und O die Längen der Katheten und N die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Flächeninhalt I so groß ist wie sein halber Umfang D; ferner seien M, O, N, I, D ganze Zahlen. Diese fünf Buchstaben seien zugleich nicht unbedingt verschiedene Ziffern, die den Buchstaben des Wortes Monoid zugeordnet werden.
Welche 6-ziffrigen Zahlen ergeben sich so? (Es gibt zwei Lösungen.)

Lösung

Nach Voraussetzung sind

(1) $D = \frac{1}{2}(M + O + N) < 10$ und

(2) $I = \frac{1}{2}M \cdot O < 10$.

Daraus folgt mit $D = I$:

(3) $M + O + N = M \cdot O < 20$.

Zunächst darf man Zahlenpaare (M, O) mit ungeraden M und O außer Betracht lassen, weil sonst I wegen Bedingung (2) keine ganze Zahl ist.
Der Fall $M = 1$ lässt sich ausschließen, da sonst $O + N = 0$ wäre, was für $N > 1$ aber nicht möglich ist. Auch $M = 2$ nicht möglich, denn dann folgte aus $2 + O + N = 2 \cdot O$, dass $N = 2O - 2 - O = O - 2$ wäre; da N aber die Länge der Hypotenuse ist, muss $N > O$ sein.
Also ist $M \geq 3$ und aus Symmetriegründen (vertausche M und O in der Argumenatation) auch $O \geq 3$.
Es sei $M = 3$. Dann ist Bedingung (2) nur erfüllt für $O = 4$ und $O = 6$.
Es sei $M = 4$. Dann gilt Bedingung (2) nur für $O = 3$ und $O = 4$, denn für $O \geq 5$ ist $I \geq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$.
Es sei $M \geq 5$. Die Bedingung (2) ist dann nur erfüllbar für $O < 4$; also ist $O = 3$. Dann aber ist $M = 6$, weil dann M nicht ungerade sein darf.
Damit kommen nur die Paare $(M, O) = (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 4)$ und $(6, 3)$ als Lösung in Frage. Im rechtwinkligen Dreieck gilt für die Paare $(3, 6)$, $(6, 3)$ sowie für $(4, 4)$ – vergleiche die Figur: $3^2 + 6^2 = N^2$ und $N = \sqrt{45}$ sowie $4^2 + 4^2 = N^2$ und $N = \sqrt{32}$. Dann ist aber N jeweils keine ganze Zahl. Für die Paare $(3, 4)$ und $(4, 3)$ dagegen gilt $3^2 + 4^2 = N^2$ und $N = 5$.
Damit ergeben sich für M, O, N, I, D die Werte $M = 3$, $O = 4$ oder $M = 4$, $O = 3$ und daraus folgt jeweils $N = 3$, $D = 6$ und $I = 6$.
Somit gilt: Monoid $= 34566$ oder Monoid $= 43566$.

Hinweis: Die Aufgabe ist ohne Knobelei lösbar, wenn man die Erzeugungsformeln für rechtwinklige Dreiecke kennt. Sie lauten mit unseren Bezeichnungen: $M = 2xy$, $O = x^2 - y^2$, $N = x^2 + y^2$, dabei sind x und y ganze Zahlen mit $x > y > 0$.
Damit erhält man für $x = 2$, $y = 1$, dass $M = 4$, $O = 3$, $N = 5$ sind.
Durch Vertauschen von M und O erhält man die zweite Lösung: $M = 3$, $O = 4$, $N = 5$. Dagegen gilt bereits für $x = 3$ und $y = 1$, dass $M = 6$, $O = 8$ und $N > 9$, nämlich $N = 10$.

Ein Satz über Mittelpunktswinkel und Peripheriewinkel

von Hartwig Fuchs

Es sei A ein Punkt eines Kreises mit Mittelpunkt M und Durchmesser BC.
Dann gilt:

(1) $\sphericalangle AMC = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

Beweis

Betrachte zunächst Figur 1 (am Ende des Artikels): Das Dreieck ABM ist gleichschenklig wegen $|MA| = |MB|$.
Daraus folgt:

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM = \sphericalangle ABC.$$

Im Dreieck ABM gilt daher

$$\sphericalangle BMA = 180^\circ - (\sphericalangle MAB + \sphericalangle ABM) = 180^\circ - 2\sphericalangle ABC.$$

Dann ist

$$\sphericalangle AMC = 180^\circ - \sphericalangle BMA = 180^\circ - (180^\circ - 2\sphericalangle ABC) = 2\sphericalangle ABC.$$

Eine Verallgemeinerung

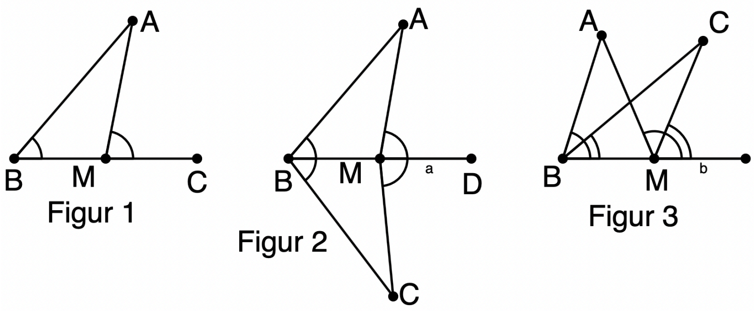
Der Satz (1) gilt aber auch dann noch, wenn keine zwei der Punkte A, B, C Endpunkte eines Durchmessers sind: Wenn die Punkte A, B und C auf einem Kreis mit Mittelpunkt M liegen, dann gilt

(2) $\sphericalangle AMC = 2\sphericalangle ABC$.

Wegen (1) sei vorausgesetzt, dass weder AB noch AC noch BC ein Durchmesser des Kreises sei.
Dann sind zwei Fälle möglich:
1. Fall: M liegt im Innengebiet des Winkels $\sphericalangle ABC$;
2. Fall: M liegt im Außengebiet des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beweis von (2) ohne Worte

1. Fall: siehe Figur 2
2. Fall: siehe Figur 3



Wo liegt der Fehler?

von Hartwig Fuchs

Wir zeigen: Für jede reelle Zahl r gilt: $r + 1 = r$.

Setze $r + 1 = x$ und $2r + 1 = y$. Aus $(r + 1)^2 = r^2 + 2r + 1$ folgt dann $x^2 = r^2 + y$ und daher $x^2 - y = r^2$. Durch Subtraktion von ry erhält man $x^2 - y - ry = r^2 - ry$. Wegen $-y - ry = -yr$ ergibt sich mit der quadratischen Ergänzung $\frac{1}{4}y^2$ nun $x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 = r^2 - ry + \frac{1}{4}y^2$, woraus folgt:

(1) $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 = \left(r - \frac{1}{2}y\right)^2$.

Also ist

(2) $x - \frac{1}{2}y = r - \frac{1}{2}y$

und daher gilt $x = r$ und somit $r + 1 = r$.
Wo liegt der Fehler?

Lösung

Bis zur Gleichung (1) sind alle Gleichungen korrekt.
Der Schritt (1) $\Longrightarrow$ (2) bedeutet radizieren. Beim Radizieren ist stets zu beachten: Aus der Gleichheit zweier Quadratzahlen kann man nicht auf die Gleichheit der nicht-quadratischen Zahlen schließen. Genau diese Regel hat man beim Übergang von (1) zu (2) nicht beachtet. Ersetzt man nämlich in Gleichung (1) die Variable x durch $r + 1$ und y durch $2r + 1$, so lautet

$$\left(+\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2,$$

eine korrekte Gleichung, aus der aber nicht folgt: Wegen $\sqrt{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Die Dominanz der Ziffer 1 bei Potenzen von 2

von Hartwig Fuchs

An einem Sommertag saß Prof. Quaoar in seinem Garten unter einem Apfelbaum und vertrieb sich die Zeit mit Spielereien auf dem Taschenrechner. Als er dabei auch eine Kette aufeinanderfolgender Potenzen 2^i berechnete, fiel ihm sogleich eine ihm bis dahin unbekannte mögliche Gesetzmäßigkeit auf. Die folgende Liste, in der $E(2^i)$ die erste Ziffer (von links) der Dezimaldarstellung der Potenz 2^i bedeutet,

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$E(2^i)$	1	2	4	8	1	3	6	1	2	5	1	2	4

i	13	14	15	16	17	18	19	...	50	51	...
$E(2^i)$	8	1	1	6	1	2	5	...	1	2	...

führte ihn zu der Vermutung: Die Ziffernfolge $E(2^0), E(2^1), E(2^2), \ldots$ ist periodisch mit der Periode 10, so dass also $E(2^{i+10}) = E(2^i)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.
Leider musste Prof. Quaoar schnell feststellen, dass seine Vermutung falsch war, wie das Beispiel $E(2^{53}) = 9$ beweist.

Nach diesem Rückschlag wandte er sich der nun folgenden naheliegenden Frage zu: Wie häufig kommt eine bestimmte Ziffer in der Folge $E(2^0)$, $E(2^1)$, $E(2^2)$, ... vor? – Anders formuliert: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Potenz 2^i die erste Ziffer $E(2^i) = z$ hat für ein z mit $1 \leq z \leq 9$?
Prof. Quaoar beschränkte sich zunächst auf den Fall $z = 1$.

Als Erstes bewies er drei Eigenschaften der Potenzen 2^i mit $E(2^i) = 1$.
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es stets eine Potenz 2^i, für die gilt:

(1) 2^i hat in Dezimaldarstellung n Ziffern;

(2) für die kleinste n-ziffrige Potenz 2^i ist $E(2^i) = 1$;

(3) es gibt genau eine n-ziffrige Potenz 2^i mit $E(2^i) = 1$.

Beweis von Behauptung (1) durch vollständige Induktion:
Es gilt Behauptung (1) für $n = 1$, denn 2^1 ist eine einziffrige Zahl.
Behauptung (1) sei nun bewiesen für n; es gibt also eine n-ziffrige Potenz 2^k.
Für $5 \leq E(2^k) \leq 9$ ist $5 \cdot 10^{n-1} < 2^k < 10 \cdot 10^{n-1}$ und daher

$$10 \cdot 10^{n-1} < 2^{k+1} < 20 \cdot 10^{n-1};$$

für $3 \leq E(2^k) \leq 4$ ist $3 \cdot 10^{n-1} \leq 2^k < 5 \cdot 10^{n-1}$ und daher

$$12 \cdot 10^{n-1} < 2^{k+2} < 20 \cdot 10^{n-1};$$

für $E(2^k) = 2$ ist $2 \cdot 10^{n-1} < 2^k < 3 \cdot 10^{n-1}$ und daher

$$16 \cdot 10^{n-1} < 2^{k+3} < 24 \cdot 10^{n-1};$$

für $E(2^k) = 1$ ist $10^{n-1} < 2^k < 2{\cdot}10^{n-1}$ und daher $16{\cdot}10^{n-1} < 2^{k+4} < 32{\cdot}10^{n-1}$.
In den vier Fällen sind die Zahlen $2^{k+1}, 2^{k+2}, 2^{k+3}$ und 2^{k+4} jeweils $(k+1)$-ziffrig – die Behauptung (1) gilt also auch für $n+1$, womit Eigenschaft (1) für jedes $n \geq 1$ gilt.

Nachweis von Behauptung (2):
Die kleinste n-ziffrige Potenz von 2 sei 2^i. Wäre nun $E(2^i) \geq 2$, dann wäre $\frac{1}{2} \cdot 2^i = 2^{i-1}$ eine n-ziffrige Potenz, die kleiner als 2^i ist – ein Widerspruch. Es gilt also Eigenschaft (2).

Nachweis von Behauptung (3):
Annahme: Es gibt zwei n-ziffrige Potenzen 2^i und 2^k mit $E(2^i) = E(2^k) = 1$ und $2^i < 2^k$.
Dann ist $2 \cdot 2^i \leq 2^k$ und aus $10^{n-1} < 2^i$ folgt $2 \cdot 10^{n-1} < 2 \cdot 2^i \leq 2^k$. Daher ist $E(2^k) \neq 1$ – ein Widerspruch; es gilt Eigenschaft (3).

Nachdem er diese Eigenschaften hergeleitet hatte, bestimmte Prof. Quaoar für jede endliche Menge $M_i = \{2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^i\}$, wobei $i = 0, 1, 2, ...$ sei, und dann als nächstes für die unendliche Menge $M = \{2^0, 2^1, 2^2, ...\}$ die Wahrscheinlichkeiten P_i bzw. die Wahrscheinlichkeit P, bei einer Zufallswahl eines Elements aus M_i bzw. aus M eine Potenz 2^k mit $E(2^k) = 1$ zu erhalten.
Das größte Element 2^i aus M_i sei eine n-ziffrige Zahl. Wegen der Eigenschaft (3) gibt es genau eine n-ziffrige Potenz in M_i mit der ersten Ziffer 1. Die Wahrscheinlichkeit P_i, eine dieser Potenzen zufällig aus M_i zu wählen, ist daher der Quotient

(4) $P_i = \frac{\text{Anzahl der günstigsten Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{n}{i}$ für $i = 1, 2, 3, ...$ und $P_0 = 1$.

Beispiel: Für $i = 50$ ist 2^{50} eine 16-ziffrige Zahl, also $n = 16$. Dann gilt

$$P_{50} = \frac{16}{50} = 0{,}32.$$

Nun sei M die Menge, aus der man zufällig eine Potenz auswählen will. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P, dass sich dabei eine Potenz 2^k mit $E(2^k) = 1$ ergibt, geht Dr. Quaoar so vor: Jede n-ziffrige Zahl 2^i, mit $i \geq 0$, kann in der Form $2^i = a \cdot 10^{n-1}$ mit $1 \leq a < 10$ geschrieben werden.
Dann ist $\log 2^i = i \cdot \log 2$ und $\log a \cdot 10^{n-1} = \log a + (n-1)^*$, sodass $i \log 2 = \log a + (n-1)$ und daher $n = i \log 2 + (1 - \log a)$ mit $0 \leq \log a < 1$ ist.
Damit lautet dann die Wahrscheinlichkeit (4):

(4') $P_i = \log 2 + \frac{1 - \log a}{i}$ mit $0 < \frac{1-\log a}{i} \leq \frac{1}{i}$ für $i = 1, 2, 3, ...$ und $P_0 = 1$.

* Mit log ist der Logarithmus zur Basis 10 gemeint.

Wenn nun i die nicht abbrechende Folge $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft, dann erhält man damit auch die nicht abbrechenden Folgen M_0, M_1, M_2, ... und P_0, P_1, P_2, ..., über die man der Menge M bzw. der Wahrscheinlichkeit P beliebig nahe kommt – kurz:

$$\lim_{i\to\infty} M_i = M \text{ und } \lim_{i\to\infty} P_i = P.$$

Nun ist

$$P = \lim_{i\to\infty} P_i = \lim_{i\to\infty} \left(\log 2 + \frac{1 - \log a}{i}\right) = \log 2 + \lim_{i\to\infty} \frac{1 - \log a}{i}.$$

Wegen

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1 - \log a}{i} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$$

gilt also

(5) Mit der Wahrscheinlichkeit $P = \log 2 = 0{,}3010\ldots$ hat eine zufällig aus der Menge $M = \{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$ gewählte Potenz die erste Ziffer 1.

Prof. Quaoar war wohl etwas überrascht von seinem Ergebnis $P = \log 2$, hatte er doch anfangs spontan auf den Wert $P = \frac{1}{3}$ getippt.
Aber wie es der Zufall wollte: Am Abend in seinem Arbeitszimmer fiel ihm das MONOID-Heft 103 (September 2010) mit dem Artikel „Das Benfondsche Gesetz" von Hans-Jürgen Schuh in die Hände. Und dort war seine Frage nach der Wahrscheinlichkeit $P\left(E\left(2^k\right) = z\right)$ – das steht kurz für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Potenz 2^k die erste Ziffer z hat –, für $z = 1, 2, 3, \ldots, 9$ im allgemeineren Zusammenhang des Benfordschen Gesetzes bereits gelöst. Danach gilt:

(6) Für $z = 1, 2, 3, \ldots, 9$ ist $P\left(E\left(2^k\right) = z\right) = \log\left(1 + \frac{1}{2}\right)$;

ausführlicher:

z	1	2	3	4	5
$P\big(E(2^k) = z\big)$	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079
z	6	7	8	9	
$P\big(E(2^k) = z\big)$	0,067	0,058	0,051	0,046	

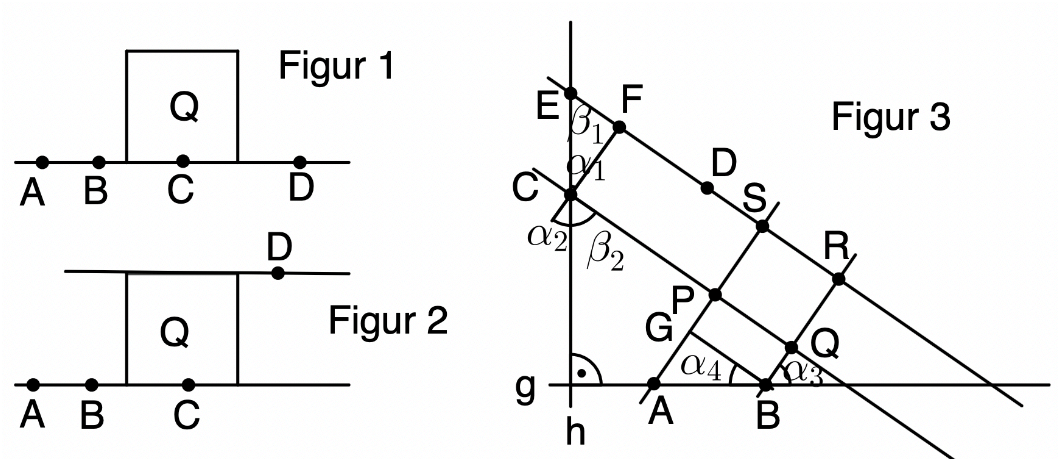
Die Tabelle zeigt eine deutliche Dominanz der Ziffer 1 unter den neun möglichen Ziffern der ersten Ziffern der Potenzen 2^i, wobei $i = 0, 1, 2, \ldots$; mehr noch: sie weicht insgesamt beträchtlich von den anschaulichen Erwartungen hinsichtlich der Werte von $P\big(E(2^k) = z\big)$ ab.

Die besondere Aufgabe

von Hartwig Fuchs

In der Ebene seien vier Punkte A, B, C und D beliebig verteilt. Dann gibt es stets ein Quadrat, auf dessen Seiten oder deren Verlängerungen die gegebenen Punkte liegen. Zeige dies.

Lösung

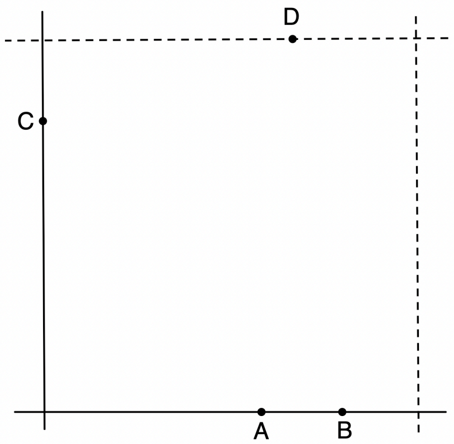


- *Fall 1:* Alle vier Punkte liegen auf einer Geraden g. Dann beweist jedes Quadrat, von dem eine Seite in g liegt, die Behauptung (siehe Figur 1).
- *Fall 2:* Drei der vier Punkte liegen in einer Geraden g. Dann wird die Behauptung von jedem Quadrat bewiesen, von dem eine Seite in g und eine zweite Seite in einer Parallelen zu g durch den vierten Punkt liegt (siehe Figur 2).
- *Fall 3:* Keine drei der gegebenen Punkte liegen in einer Geraden. Falls A, B, C und D die Eckpunkte eines Quadrates sind, dann sind wir fertig. Deshalb sei dieser Fall im Folgenden ausgeschlossen (siehe Figur 3).
  Es sei g die Gerade durch die Punkte A und B und h sei die zu g orthogonale Gerade durch C. Wir gehen im Folgenden ferner davon aus, dass D nicht auf h liegt (dies können wir o. B. d. A. annehmen, sonst tausche die Bezeichnungen der Punkte geeignet).
  Auf der Geraden h tragen wir von C aus eine Strecke der Länge AB ab – ihr zweiter Endpunkt sei E. Wir verbinden E und D durch die Gerade k und konstruieren die Parallele l zu k durch C sowie die Orthogonalen zu k durch A, durch B und durch C.
  Es seien P, Q, R und S wie in der Abbildung bezeichnet. Dann ist das Rechteck $PQRS$ ein Quadrat, das die Behauptung beweist – es bleibt nur noch zu zeigen, dass $|PS| = |PQ|$ ist.
  Wir konstruieren als Hilfslinie die Strecke BG parallel zu h durch B.

Mit den Bezeichnungen der Figur gilt $\alpha_2 = \alpha_1$ und wegen $\alpha_1+\beta_1 = \alpha_2+\beta_2 = 90^\circ$ ist $\beta_2 = \beta_1$. Nun ist $\alpha_2 + \beta_2 = \beta_2 + \alpha_3 = 90^\circ$, sodass $\alpha_2 = \alpha_3$ ist.
Weil nun $\alpha_3 = \alpha_4$, also $\alpha_4 = \alpha_1$ ist, sind die Dreiecke *ABG* und *CFE* kongruent, denn sie stimmen in ihren drei Winkeln sowie der Länge der Seite *AB* und der Seite *CE* überein. Daraus folgt $|CF| = |BG|$ und das Rechteck *PQRS* ist ein Quadrat.

Alternativer Lösungsweg für Fall 3

von Marcel Gruner



Es sei g die Gerade durch die Punkte A und B und h sei die zu g orthogonale Gerade durch C (wie oben).
Konstruiere nun die Parallele zu g durch den Punkt D. Den Abstand der beiden Parallelen bezeichnen wir mit d. Anschließend konstruiere im selben Abstand d die Parallele zu h. Die vier Geraden schließen ein Quadrat ein, welches die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Diese Konstruktion ist auch ohne Weiteres durchführbar, wenn D auf der Geraden h liegt. Dann gilt sogar: Jedes Quadrat, dessen eine Seite auf g und deren benachbarte Seite auf h liegt, beweist die Behauptung.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Mathematik ist eine Stätte des Friedens,
ohne die ich nicht wüsste,
wie ich weiterleben sollte. “

Bertrand Arthur William Russell
*18. Mai 1872, †2. Februar 1970;
britischer Philosoph und Mathematiker,
feiert dieses Jahr seinen 200. Geburtstag

Zweitausendzweiundzwanzig

- In römischen Zahlzeichen: MMXXII (sieht noch etwas regelmäßiger aus)
- Im Binärsystem: $11111100101_{(2)}$
- Im Hexadezimalsystem: $7E62$
- Primfaktorzerlegung: $2 \cdot 3 \cdot 337$

Wir wünschen Euch alles Gute im Jahr 2022 – und allen Löserinnen und Lösern natürlich viel Erfolg!

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

Marcus du Sautoy: Eine sehr kurze Einführung in die Unendlichkeit
Der an der Universität Oxford lehrende Mathematiker Marcus du Sautoy hat ein neues populärwissenschaftliches Buch geschrieben. Im Gegensatz zu den bisherigen ist – wie es bereits im Titel ausgedrückt wird – „Eine sehr kurze Einführung in die Unendlichkeit“ mit 71 Seiten allerdings kurz geraten.

Da alles, was wir als Menschen in unserem täglichen Erleben wahrnehmen, nur endlich ist, haben wir von jeher ein Problem darin die Unendlichkeit zu verstehen. Genau dabei will uns das Büchlein eine Hilfestellung bieten.

Die Reise in die Unendlichkeit, auf die der Autor die Leser mitnehmen möchte, beginnt zunächst mit dem Zählen mit natürlichen Zahlen. Bei der Frage nach den ältesten Zeugnissen danach landet er bei einem ca. 37 000 Jahre alten in Südafrika gefundenen Knochen mit 29 Einkerbungen. Der Weg geht weiter über die Ägypter, die Mayas, die Babylonier bis in unsere heutige Zeit.

Die Frage, wie man es schaffen kann immer schneller zu zählen, bringt einige nette Nebengedanken, über die an dieser Stelle nichts verraten werden soll, um die Freude beim Lesen des Buches nicht zu verringern.

Da eine unendlich lange Reise auch müde machen kann, geht es mit den Mathematikern Georg Cantor und David Hilbert als Gedankenexperiment in dessen Hotel.

Nachdem der Autor erläutert hat, warum es genauso viele rationale Zahlen wie natürliche Zahlen gibt, führt der weitere Weg in die Unendlichkeit zur irrationalen Kreiszahl π und der ebenfalls irrationalen Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

Da Marcus du Sautoy bewusst die Anzahl von Formeln im Text minimiert hat, kann es an manchen Stellen hilfreich sein, beim Lesen Papier und Bleistift nebendran liegen zu haben, um sich manches aufzuschreiben. Das gilt allerdings für fast alle Bücher zur Mathematik.

Fazit: Wer ausführliche und tiefere Erklärungen zu den Fragen der Unendlichkeit sucht, den wird die „sehr kurze Einführung in die Unendlichkeit" enttäuschen. Wer jedoch einen kurzen Einstieg zu Fragen der Unendlichkeit sucht, der liegt mit dem vorliegenden Buch vollkommen richtig und wird danach garantiert Lust haben, sich noch mehr damit zu beschäftigen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch

Marcus du Sautoy: Eine sehr kurze Einführung in die Unendlichkeit, München (C. H. Beck), 2022; ISBN 978-3-406-78329-6, 71 Seiten
Art des Buches: Sachbuch
Mathematisches Niveau: leicht verständlich
Altersempfehlung: ab 11 Jahren

„Das Denkerchen"

von Horst Sewerin

Eines Morgens erzählt Herr Pommer seiner Frau beim Frühstück, was er in dieser Nacht geträumt hatte: „Ich wurde auf einen fremden Planeten geholt, um den Rückgang der dortigen Apfelernte zu stoppen. Dort gibt es eine besondere Sorte von Würmern, mit denen sich der Boden in den Plantagen verbessern lässt. Diese Würmer wachsen gleichmäßig mit einer Rate von 10 cm pro Woche, aber sie wachsen nach Erreichen von 10 cm Länge nicht weiter. Darüber hinaus kann ein ausgewachsenes Exemplar dieser – übrigens völlig schmerzunempfindlichen – Tiere in zwei beliebig lange lebendige Würmer von der Gesamtlänge 10 cm zerschnitten werden, die dann wieder mit der gleichen Rate bis zur vollen Länge wachsen können. Man gab mir den letzten auf diesem Planeten verbliebenen Wurm und bat mich, innerhalb einer Woche 10 ausgewachsene Würmer für die Plantagen zu züchten." – „Und, konntest Du dem Planeten helfen?", fragte Frau Pommer ihren Mann. Er entgegnete: „Ich weiß es nicht. Gerade als ich anfangen wollte, bin ich aufgewacht!" Kann Herr Pommer den Auftrag erfüllen und die Apfelernte auf dem Planeten retten? Die Antwort ist zu begründen.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. Mai 2022 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 147

In Heft 147 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Nach den Sommerferien wollen Peter und Paul endlich wieder gemeinsam ins Kino gehen. Diesmal schlägt Paul eine Wette vor; der Verlierer muss ja bekanntlich für beide den Eintritt zahlen. Paul hat auf die Rückseite eines Filmplakats die Zahlen von 1 bis 221 geschrieben. Es ist noch viel leerer Platz auf dem Plakat. „Eigentlich wollte ich ja die Zahlen von 1 bis 2021 aufschreiben", erklärt er Peter, „aber die Wette funktioniert auch so. Wir streichen abwechselnd zwei beliebige Zahlen auf dem Plakat und schreiben dafür die Summe oder die Differenz der beiden gestrichenen Zahlen hin. Wenn am Schluss deine Lieblingszahl 28 stehen bleibt, lade ich dich ein – sonst lädst du mich ein." Peter entgegnet: „Da hast du mir bis zum Ende zu viel Kontrolle, um die 28 zu verhindern. Lass mich die letzten 50 Streichungen alleine machen und ich bin dabei." Paul stimmt nach kurzem Überlegen zu und erlaubt Peter, mit dem ersten Paar zu beginnen. Wer kann die Wette gewinnen und wie muss er spielen?

Lösung

Wir betrachten das Ersetzen zweier natürlicher Zahlen durch ihre Summe oder ihre Differenz unter dem Gesichtspunkt gerade/ungerade (g/u). Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten: g/g $\rightarrow$ g, g/u $\rightarrow$ u, u/u $\rightarrow$g.
Dabei verringert sich die Anzahl ungerader Zahlen auf dem Plakat um 0 oder um 2. Am Anfang sind 111 ungerade Zahlen aufgeschrieben, so dass die letzte Zahl auf dem Plakat auf jeden Fall ungerade sein muss. Daher gewinnt Paul die Wette, die man durchaus als unfair bezeichnen darf.

Eine richtige Bearbeitung wurde von Oscar Su eingesandt.

Peter hat bald begriffen, dass er sogar alle Zahlen hätte streichen können, ohne eine Chance auf den Gewinn zu haben. Also schlug er die gleiche Wette mit den Zahlen von 1 bis 220 vor. Hat er jetzt eine Chance, dass seine Lieblingszahl stehen bleibt? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Entdeckungen

Läuferecke

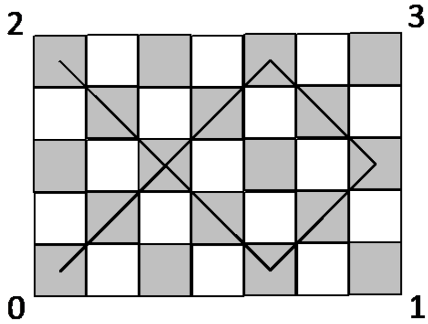
Bei meiner Mutter im Bad liegt ein Teppich wie im Bild.

Man kann sich fragen, wenn ein Läufer in der linken unteren Ecke startet, wo landet er, wenn er an den Wänden wie eine Billardkugel abprallt?

Genauer: Ein Läufer kann auf einem Schachbrett nur diagonal ziehen. Ist ein Läufer also auf einem schwarzen Feld, bleibt er auf schwarz. Gegeben sei ein Schachbrett mit Kantenlängen $n > 1$ und $m > 1$ und ein Läufer in der linken unteren Ecke.

Diese Startecke bekomme die Bezeichnung 0 und die sei im Folgenden grundsätzlich schwarz. Entgegen dem Uhrzeigersinn sollen die Ecken 0, 2, 3, 1 heißen (siehe Abbildung 2).

Wir lassen den Läufer in der Startecke starten und soweit laufen, bis er an eine Randkante stößt. Dort verlässt er mit der anderen möglichen Richtung die Kante wieder, bis er an die nächste Kante stößt, usw. (siehe nebenstehende für das 7×5-Feld). Das Ganze endet in einer Ecke.



Sei $\lambda_2(n, m)$ die Ecke in der er landet. Aus Abbildung 2 entnehmen wir: $\lambda_2(7, 5) = 2$. Zeichne Dir auf Karopapier den Weg des Läufers im $n \times m$-Feld für einige Paare (n, m).

Untersuche die folgenden Eigenschaften:

a) Was ist $\lambda_2(n, n)$?

b) Der Läufer endet nie in der Ecke 0. Warum?

c) Finde eine Symmetrie, also einen Zusammenhang von $\lambda_2(n, m)$ mit $\lambda_2(m, n)$.

d) Welchen Wert hat $\lambda_2(n, m)$ wenn n und m gerade sind? In welchen Fällen ist die Bestimmung von $\lambda_2(n, m)$ noch einfach?

e) Bestimme die Eckennummer, in der der Läufer landet, in Abhängigkeit davon, wie oft der Läufer die Wände oben/unten und rechts/links trifft, bevor er in seiner Ecke landet.

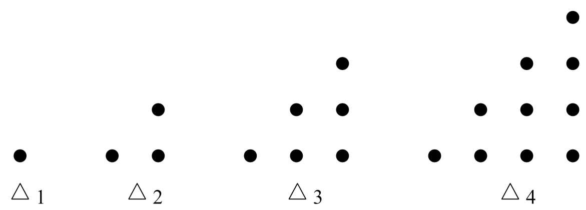
(Stephan Rosebrock, Pädagogische Hochschule Karlsruhe)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 31. Mai 2022 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 147

Im Heft 147 stellten wir euch folgende Aufgabe:

Eine Dreieckszahl erhält man geometrisch so:



oder algebraisch durch $\triangle_n = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$.
Untersuche die Zahlenfolge $\triangle_{11}$, $\triangle_{111}$, $\triangle_{1111}$, ...

Lösung

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, Klasse 9), Lena Baumgartner (Staatliche Berufsschule, Altötting, Kl. 10) und Paulina Herber (Gymnasium Oberursel, Kl. 12).

Oscar gibt zunächst ein Verfahren an, die Dreieckszahlen zu 1_n, der n-stelligen Zahl, deren Ziffern alle 1 sind, zu berechnen: Es gilt

$$\triangle 1_{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} 10^i = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1).$$

Mit Hilfe der Formel von Gauß ergibt sich

$$\begin{aligned} 1_n &= \frac{1}{2}\frac{10^n - 1}{9} \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9} + 1\right) = \frac{1}{162}\left(10^n - 1\right)\left(10^n + 8\right) \\ &= \frac{1}{162}\left(10^{2n} + 7 \cdot 10^n - 8\right). \end{aligned}$$

Ausgeschrieben sieht die Folge der $\triangle 1_{(n)}$ so aus:

$$\begin{array}{rcl}
\triangle 1_{(2)} = & 66 & \leftarrow \text{palindromisch}\\
\triangle 1_{(3)} = & 6216 & \leftarrow \text{sub-palindromisch}\\
\triangle 1_{(4)} = & 617716 & \leftarrow \text{palindromisch}\\
\triangle 1_{(5)} = & 61732716 & \leftarrow \text{sub-palindromisch}\\
\triangle 1_{(6)} = & 6172882716 & \leftarrow \text{palindromisch}\\
\triangle 1_{(7)} = & 617284382716 & \leftarrow \text{sub-palindromisch}\\
\triangle 1_{(8)} = & 61728399382716 & \leftarrow \text{palindromisch}\\
\triangle 1_{(9)} = & 6172839549382716 & \downarrow \text{sub-palindromisch}\\
\triangle 1_{(10)} = & 617283951049382716 & \\
\triangle 1_{(11)} = & 6172839\underline{66}049382716 & \\
\triangle 1_{(12)} = & 617283950\underline{6216}049382716 & \\
\triangle 1_{(13)} = & 617283950\underline{617716}049382716 & \\
\triangle 1_{(14)} = & 617283950\underline{61732716}049382716 & \\
\vdots & & \\
\triangle 1_{(n)} = & 617283950\triangle 1_{(n-9)}049382716 &
\end{array}$$

Oscar beobachtet: $\triangle 11$, $\triangle 1111$, $\triangle 111111$ und $\triangle 11111111$ sind palindromisch, bei allen anderen $\triangle 1_{(n)}$ sind die Werte sub-palindromisch. Das heißt, dass in den mittleren Stellen der Zahl keine Palindrome vorhanden sind, die äußeren Ziffern aber Palindrome sind.
Diese sind bis zu 7 Ziffern lang. Ab $\triangle 1_{(8)}$ bzw. $\triangle 1_{(9)}$ lauten diese Ziffern: 6172839...9382716
$\rightarrow$ Der nicht-palindromische Bereich ist ab $\triangle 1_{(11)}$ regelmäßig, dieser lautet $50\triangle 1_{(n-9)}04$. Daher gibt es kleinere $\triangle 1_{(n)}$ stets in größeren $\triangle 1_{(n)}$.

Paulina schaut sich die Differenzen $\triangle 1_{(n)} - \triangle 1_{(n-1)}$ an und entdeckt:

$$\begin{aligned}
\triangle_{111} - \triangle_{11} &= 66\\
\triangle_{1111} - \triangle_{111} &= 6216\\
\triangle_{11111} - \triangle_{1111} &= 61115000\\
\triangle_{111111} - \triangle_{11111} &= 6111150000\\
&\vdots\\
\triangle 1_{(n)} - \triangle 1_{(n-1)} &= 61_{(n-2)}50_{(n-2)},
\end{aligned}$$

wobei $0_{(n-2)}$ für $n-2$ Nullen steht.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Läufer

Auf Seite 14 haben wir euch das Läufereckenproblem vorgestellt. Es ist hilfreich, zur Erforschung ein kleines Programm zu schreiben, das den Gang des Läufers auf seinem Schachbrett simuliert.

Schreibe ein Programm, das als Eingabe die Schachbrettgröße n, m erhält und in dem du die Schritte des Läufers nachvollziehst. Der Läufer beginnt im Feld $1, 1$, geht dann nach $2, 2$ etc. bis er an eine Wand stößt. Entsprechend wird im nächsten Schritt eine der beiden Koordinaten um eins kleiner statt größer.

Die Ausgabe des Programms soll sein: Die Nummer der Ecke, in der er landet, die Anzahl Schritte, die der Läufer gemacht hat und wie viele Felder er doppelt besucht hat. Schicke diese drei Angaben für ein Schachbrett der Größe 280×329.

(Stephan Rosebrock, Pädagogische Hochschule Karlsruhe)

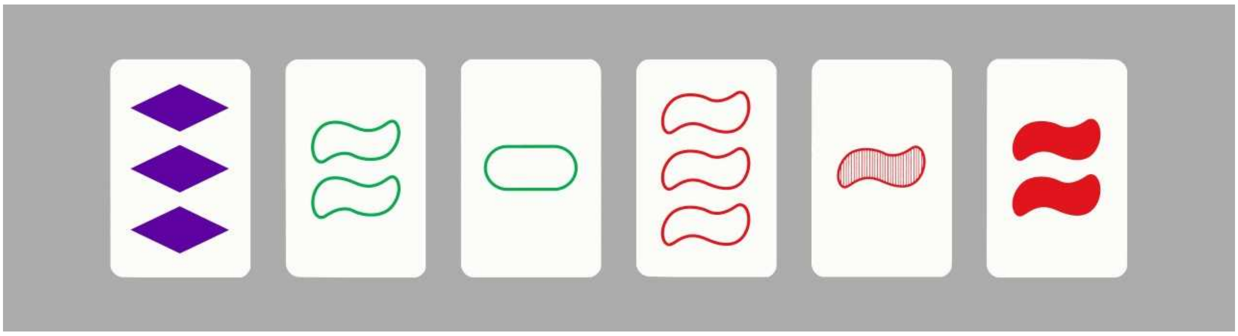
Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. Mai 2022 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 147

In Heft 147 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Untersuchung eines Kartenspiels



Verschiedene SET®-Karten, © AMIGO Spiel + Freizeit GmbH

Beim Spiel SET® gibt es 81 unterschiedliche Spielkarten. Auf einer Spielkarte ist jeweils eines von drei Symbolen (Raute, Welle, Oval) abgebildet, und zwar

entweder ein Mal, zwei Mal oder drei Mal. Alle Symbole einer Karte haben dieselbe Farbe (Violett, Grün oder Rot) und dieselbe Füllung (ungefüllt, schraffiert oder massiv gefüllt). Werden drei dieser Karten ausgewählt, so bilden sie ein zulässiges *SET*, falls sie in jeder der vier Eigenschaften entweder übereinstimmen oder alle unterschiedlich sind. Dabei können sie zum Beispiel in der Farbe (rot) und der Form (Welle) übereinstimmen, in der Anzahl jedoch nicht (es treten ein, zwei und drei Symbole auf) und auch in der Füllung nicht (es treten gefüllte, schraffierte und ungefüllte Symbole auf). Die drei rechten Karten in der obigen Auslage bilden solch ein zulässiges *SET*.
Die Spielregeln sind einfach: Es werden zwölf Karten offen ausgelegt. Wer zuerst ein *SET* findet, erhält diese drei Karten und die Auslage wird ergänzt. Wird kein *SET* gefunden, werden weitere Karten ausgelegt, bis ein *SET* gefunden wird. Die Spielerin oder der Spieler mit den meisten gewonnenen Karten gewinnt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der ersten Auslage von zwölf Karten bereits ein zulässiges *SET*?
Schreibe ein Programm, das für 1 000 000 zufällige Auslagen bestimmt, wie häufig mindestens ein zulässiges *SET* in der Auslage liegt. Wie groß ist Dein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit? (Hinweis zum Überprüfen Deines Ergebnisses: Die Wahrscheinlichkeit ist größer als 90 %, aber kleiner als 99 %.) (AcK)

Lösung

Wir nummerieren die Karten von 0 bis 80 durch und schreiben sie dann im Tertiärsystem mit vollen vier Stellen auf. Zum Beispiel ist 55 im Tertiärsystem ‚2001' und 23 ist ‚0212'. Wir stellen uns vor, dass die erste Ziffer die Farbe kodiert (etwa Violett=0, Grün=1, Rot=2), die zweite Ziffer das Symbol (etwa Welle=0, Raute=1, Oval=2), die dritte Ziffer die Füllung (etwa ungefüllt=0, schraffiert=1, gefüllt=2) und die vierte Ziffer die Anzahl der Symbole (minus Eins). Für eine Karte mit Nummer a seien a_1, a_2, a_3, a_4 die Tertiärziffern, also $a = 27 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + a_4$. Haben wir drei Karten a, b, c, so liegt ein *SET* vor, wenn für jede Ziffer $i = 1, 2, 3, 4$ gilt: $a_i = b_i = c_i$ oder a_i, b_i, c_i sind alle unterschiedlich, das heißt: $\{a_i, b_i, c_i\} = \{0, 1, 2\}$. Genau in diesen beiden Fällen ist $a_i + b_i + c_i$ durch drei teilbar. Die Prüfung, ob drei Karten ein *SET* bilden, ist also einfach: Bilde die Tertiärdarstellung und prüfe für jedes i, ob die Summe der i-ten Ziffern durch drei teilbar ist.
Das Paket `numpy` liefert die Funktion `numpy.random.permutation(n)`, die die Elemente der Liste `[0, ..., n-1]` in eine zufällige Reihenfolge bringt. Dies machen wir mit allen 81 Karten und prüfen dann, ob in den ersten zwölf Karten ein *SET* vorliegt, indem wir alle Tripel in den ersten zwölf Karten durchprobieren. Dieser Versuch wird 1 000 000 mal durchgeführt und die Anzahl der Erfolge durch die Anzahl der Versuche geteilt. Dies ergibt den Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten zwölf aufgeckten Karten ein *SET* ist. Der Wert ist ungefähr 96,8 %.

Python-Code

```
import numpy as np
def tertiaer(k):
    # Wandelt die Nummer einer Karte 0,..,80 in ihre
    # Darstellung im Tertiaersystem
    #(Ziffern 0, 1, 2 statt 0,..,9).
    # Die vier Ziffern werden als Liste zurueckgegeben
    l = [k%3]
    k = k//3
    l += [k%3]
    k = k//3
    l += [k%3]
    k = k//3
    l += [k%3]
    return(l)

def pruefe_ob_set(k1,k2,k3):
    # Ein set liegt vor, wenn ziffernweise im Tertiaersystem
    # die Summe durch drei teilbar ist
    # fuer jede der vier Ziffern.
    l1 = tertiaer(k1)
    l2 = tertiaer(k2)
    l3 = tertiaer(k3)
    if ((l1[0]+l2[0]+l3[0])%3 != 0):
        return(False)
    if ((l1[1]+l2[1]+l3[1])%3 != 0):
        return(False)
    if ((l1[2]+l2[2]+l3[2])%3 != 0):
        return(False)
    if ((l1[3]+l2[3]+l3[3])%3 != 0):
        return(False)
    return(True)

def set_vorhanden(k):
    # Es werden alle geordneten Tripel von Karten
    # ausgesucht und ueberprueft, ob sie ein SET
    # bilden.
    if(len(k)<3):
        return(False)
    for h in range(0,len(k)-2):
        for i in range(h+1,len(k)-1):
            for j in range(i+1,len(k)):
                if  pruefe_ob_set(k[h],k[i],k[j]):
                    return(True)
    return(False)

def monte_carlo(anzahl_versuche,karten=12):
    anzahl_erfolge=0
    for i in range(0,anzahl_versuche):
        # Das gesamte Kartendeck wird in eine
        # zufaellige Reihenfolge gebracht.
        k=np.random.permutation(81)
        # Liegt unter den ersten "karten" Karten ein SET vor?
        if set_vorhanden(k[:karten]):
            anzahl_erfolge+=1
    # Anteil der Versuche mit SETs wird zurueckgegeben
    return(anzahl_erfolge/anzahl_versuche)

>>> monte_carlo(1000000,12)
0.967804
```

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 148

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Letzte Ziffern von Dezimalbrüchen

Die Zahlen $\frac{1}{5^n}$, wobei n eine natürliche Zahl ist, lassen sich jeweils mit endlichen Dezimalbrüchen darstellen, das heißt die Darstellung bricht irgendwann ab und es folgen ab einer bestimmten Stelle nach dem Komma nur noch Ziffern 0, die aber nicht mehr notiert werden. Die Ziffer an der Stelle, bevor nur noch Ziffern 0 folgen, ist die *letzte Ziffer*.

Bestimme die letzte Ziffer...

a) der Zahl $\frac{1}{5^{1981}}$.

b) der Zahl $\frac{1}{5^{2021}}$.

c) der Zahl $\frac{1}{5^{1981}} + \frac{1}{5^{2021}}$.

(MG)

Lösung:

a) Wir berechnen zunächst $\frac{1}{5^1} = 0{,}2$, $\frac{1}{5^2} = 0{,}04$, $\frac{1}{5^3} = 0{,}008$, $\frac{1}{5^4} = 0{,}0016$, $\frac{1}{5^5} = 0{,}00032$, $\frac{1}{5^6} = 0{,}000064$, ... Da jeweils durch die selbe Zahl 5 geteilt wird, sehen wird, dass sich die letzten Ziffern mit der Periodenlänge 4 wiederholen, nämlich 2, 4, 8, 6, ...
Da $1981 = 495 \cdot 4 + 1$ ist, hat $\frac{1}{5^{1981}}$ dieselbe letzte Ziffer wie $\frac{1}{5^1}$, nämlich 2.

Alternative: Wir formen die Brüche wie folgt um:

$$\frac{1}{5^1} = \frac{2^1}{2^1 \cdot 5^1} = \frac{2^1}{(2 \cdot 5)^1} = \frac{2^1}{10^1} = \frac{2}{10},$$
$$\frac{1}{5^2} = \frac{2^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{2^2}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{2^2}{10^2} = \frac{4}{100},$$
$$\frac{1}{5^3} = \frac{2^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{2^3}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{2^3}{10^3} = \frac{8}{1000},$$
$$\frac{1}{5^4} = \frac{2^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{2^4}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{2^4}{10^4} = \frac{16}{1000},$$
$$\frac{1}{5^5} = \frac{2^5}{2^5 \cdot 5^5} = \frac{2^5}{(2 \cdot 5)^5} = \frac{2^5}{10^5} = \frac{32}{1000}.$$

Die Ziffern der Nachkommaentwicklung entsteht also durch 2er-Potenzen, deren Endziffern sich mit der Periodenlänge 4 wiederholen. Daher hat $\frac{1}{5^{1981}}$ dieselbe letzte Ziffer wie $\frac{1}{5^1}$, nämlich die letzte Ziffer 2.

b) Da $2021 = 505 \cdot 4 + 1$ ist, hat auch $\frac{1}{5^{2021}}$ die letzte Ziffer 2.

c) Die Nachkommaentwicklung der Zahlen $\frac{1}{5^n}$ erhalten bei jedem Schritt $n \to n+1$ jeweils eine Stelle mehr (dies wird besonders aus der Alternativlösung der ersten Teilaufgabe deutlich). Daher ist die letzte Ziffer der Zahl $\frac{1}{5^{1981}} + \frac{1}{5^{2021}}$ dieselbe letzte Ziffer wie $\frac{1}{5^{2021}}$, nämlich die Ziffer 2.

II. Bauer Wilhelms Waage

In Bauer Wilhelms Hofladen fällt der elektrische Strom aus. Er holt deshalb statt der sonst benutzten elektrischen Waage eine alte Balkenwaage.

Er weiß, dass auf der rechten Waagschale 10 % mehr Gewicht liegen muss als auf der linken, wenn die Waage im Gleichgewicht sein soll.

Er hilft sich jetzt auf falsche Weise: wenn ein Kunde 2 kg Äpfel kaufen will, so legt er zunächst ein 1 kg-Gewicht auf die linke Waagschale und Äpfel auf die rechte. Dann wiederholt er dies mit dem Gewicht rechts und den Äpfeln links.

Ist dieses Verfahren wirklich gerecht?

(WJB)

Lösung:

Zuerst braucht er 10 % mehr Äpfel als 1 kg, also 1,1 kg. Bei der zweiten Wägung muss 1 kg um 10% mehr sein als das Gewicht a der Äpfel. Also $a + a \cdot 1{,}1 = 1\,\text{kg}$ das heißt $a = \frac{1\,\text{kg}}{1{,}1} \approx 0{,}909\,\text{kg}$.

Der Kunde erhält also $(1{,}1 + 0{,}909)\,\text{kg} = 2{,}009\,\text{kg}$ Äpfel, also 9 g zu viel.

III. Natürliche Zahl gesucht

Wie heißt die kleinste natürliche Zahl x, für die gilt: $x > 1300$ und x ist ein Vielfaches von 5 und x hat die Quersumme 4? (H.F.)

Lösung:

Alle Zahlen $x, 1300 < x < 2000$ haben eine Quersumme > 4. Somit ist $x \geq 2000$. Die Vielfachen von 5 sind 2000, 2005, 2010, ... In dieser Folge erfüllt erstmals $x = 2020$ die vorgegebenen Bedingungen. Also ist $x = 2020$.

IV. Fragen zu Quadratzahlen

a) Zeige: $5n + 3$ ist für kein n eine Quadratzahl.

b) Gibt es Quadratzahlen, die bei Division durch 15 den Rest 2 haben? (WJB)

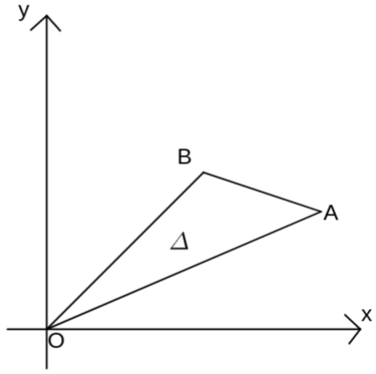
Lösung:

Die letzten Ziffern der Quadrate von Zahlen mit letzter Ziffer 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9 sind 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1.

a) Zahlen der Form $5n + 3$ haben als letzte Ziffer 3 oder 8, können also keine Quadratzahlen sein.

b) Ist $n : 15 = m$ Rest 2, so heißt das $n = 15m + 2$; damit ist die letzte Ziffer 2 oder 7. Es gibt also keine solchen Quadratzahlen.

V. Dreiecksflächen

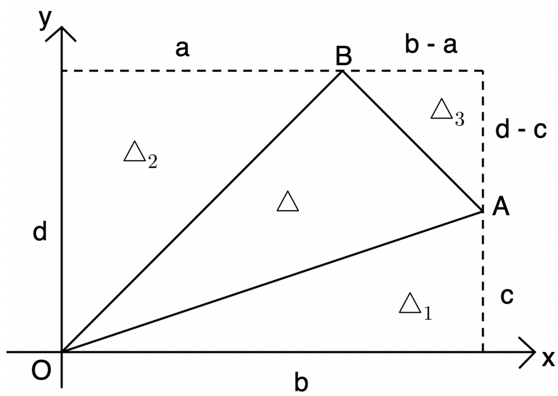


In einem Koordinatensystem seien die Punkte $O = (0|0)$, $A = (2022|2021)$ und $B = (2020|2023)$ gegeben. Betrachte nun das Dreieck $\triangle := OAB$.
Gilt für den Flächeninhalt $|\triangle|$ des Dreiecks dann $|\triangle| - 2021 < 2022$ oder $|\triangle| - 2021 > 2022$ oder $|\triangle| - 2021 = 2022$? (H.F.)

Lösung:
Es sei zunächst $A = (b|c)$ und $B = (a|d)$ mit $a < b$ und $c < d$.

Dann sind $|\triangle_1| = \frac{1}{2}bc$, $|\triangle_2| = \frac{1}{2}ad$, und $|\triangle_3| = \frac{1}{2}(b-a)(d-c)$.
Daraus folgt für das Dreieck $\triangle$

$$\begin{aligned} |\triangle| &= bd - |\triangle_1| - |\triangle_2| - |\triangle_3| \\ &= bd - \tfrac{1}{2}bc - \tfrac{1}{2}ad \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(bd - ad - bc + ac) \\ &= \tfrac{1}{2}bd - \tfrac{1}{2}ac. \end{aligned}$$



Mit den in der Aufgabe angegebenen Werten von a, b, c und d gilt $|\triangle| - 2021 = 2022$.

VI. Nicht nur zum Jahreswechsel 2021/22

Es gilt

$$(2021 + 2021) + (2021 - 2021) + (2021 \cdot 2021) + (2021 : 2021) = 2022^2.$$

Diese Gleichung gilt aber nicht zufällig, sondern auch für andere Jahreswechsel. Begründe dies und gib an, für welche weiteren Jahreswechsel entsprechende Gleichungen gelten. (MG)

Lösung:
Wir rechnen allgemein mit $x \neq 0$ und erhalten

$$(x + x) + (x - x) + (x \cdot x) + (x : x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Also ist die Gleichung kein Zufall und sie gilt für jeden Jahreswechsel – außer für den Jahreswechsel vom Jahr 1 v. Chr. (also dem Jahr -1) zum Jahr 1 n. Chr. (also dem Jahr $+1$). Das Jahr 0, für welches die Gleichung mathematisch nicht gilt, gab es ja bekanntlich nicht.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 31. Mai 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Letzte Ziffer

Bestimme die letzte Ziffer von

$$2022^{2022}.$$

(MG)

II. Stefan Banach

> Ein Mathematiker ist eine Person, die Analogien zwischen Sätzen finden kann; ein besserer Mathematiker ist jemand, der Analogien zwischen Beweisen erkennen kann und der beste Mathematiker kann Analogien zwischen Theorien feststellen.

Der polnische Mathematiker Stefan Banach, vom dem obiges Zitat stammt, wurde n Jahre alt im Jahr n^2. Er starb am 31. August 1945 in Lemberg (dem heute Ukrainischen Lwiw).
Wann wurde er geboren?

Hinweis: Die Aufgabe ist natürlich mathematisch zu lösen. Nachschauen in Lexika oder Enzyklopädien wird nicht als Lösung akzeptiert. (MG)

III. Ist doch logo – oder?

In einer Nachrichtensendung* für Kinder und Jugendliche wurde zum Thema Inflation Folgendes erklärt:

> Auch die Preise für Lebensmittel, vor allem für Obst und Gemüse, sind deutlich gestiegen. So kosten Tomaten zum Beispiel im Moment etwa ein Fünftel mehr als noch vor einem Monat. Das heißt: Vor einem Monat hat man für einen bestimmten Betrag fünf Tomaten bekommen, während es heute für das gleiche Geld nur noch vier Tomaten gibt.

Ist das korrekt? Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Wir akzeptieren die vereinfachte Annahme, dass jede Tomate gleich schwer wäre. (MG)

* logo!, Sendung vom 13. Oktober 2021, bei ca. 3:37

IV. Monoidale Knobelei

In jedes der leeren Felder soll je ein Buchstabe eingetragen werden so, dass dann in jeder Zeile, in jeder Spalte und in der Diagonalen von links oben nach rechts unten jeder Buchstabe des Wortes MONOID vorkommt.

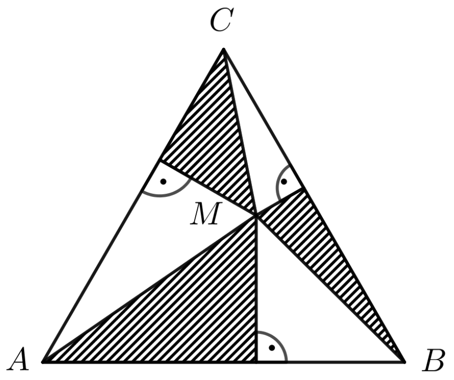
Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen. Es genügt, wenn Du eine angibst. (HF)

M	O	N	O	I	D
	O				D
		O			D
					D
					D
D	D	D	D	D	D

V. Ziffern-Problem

Es sei $n = 2^m$ mit positivem ganzen m eine 1000-ziffrige Zahl. Dann hat n mindestens 101 gleiche Ziffern. Zeige dies. (H.F.)

VI. Flächen-Vergleich



Im gleichseitigen Dreieck ABC sei M ein beliebiger Punkt im Inneren. Verbindet man M mit A, B und C und zeichnet die Lote von M auf die Seiten des Dreiecks, so erhält man sechs Teildreiecke.

Zeige: Die Fläche der drei schraffierten Dreiecke ist so groß wie die Fläche der drei nicht schraffierten Dreiecke.

(gefunden H.F.)

VII. Logisches Puzzle

Von den folgenden fünf Aussagen über positive ganze Zahlen x und y ist genau eine Aussage falsch:

(1) $x = 2y + 13$.

(2) $x + y$ ist ein Vielfaches von 3.

(3) $x + 4y$ ist eine Primzahl.

(4) y ist ein Teiler von $x + 3$.

(5) $x > 30$.

Beantworte folgende Fragen:

a) Welche der fünf Aussagen ist falsch?

b) Welches Zahlenpaar (x, y) erfüllt die übrigen vier Bedingungen?

(HF)

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 31. Mai 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1289: Summenspiel mit Potenzen

a) Es sei
$$3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m = 9^{2022}.$$
Bestimme den Exponenten m.

b) Es sei
$$4^n + 4^n + 4^n + 4^n = 2^{2022}.$$
Bestimme den Exponenten n.

(MG)

Aufgabe 1290: Maximaler Quader

Ein Quader mit Seitenlängen x, y, z und $x + y + z = 12$ soll so gewählt werden, dass sein Volumen möglichst groß ist. Finde die zugehörigen Seitenlängen.

(WJB)

Aufgabe 1291: Rechteck im Rechteck

Zeichne ein äußeres Rechteck mit den Maßen $a = 10\,\text{cm}$ und $b = 14\,\text{cm}$.

a) Konstruiere ein inneres Rechteck so, dass die Eckpunkte des inneren Rechtecks auf den Seiten des äußeren Rechtecks liegen. Dabei soll der Flächeninhalt des inneren Rechtecks halb so groß sein wie der Flächeninhalt des äußeren Rechtecks.

b) Welche Maße hat das innere Rechteck?

Aufgabe 1292: Winkel zwischen Geraden

a) Zeige: Sind in der Ebene sechs oder mehr Punkte gegeben, von denen je drei nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es ein von drei dieser Punkte gebildetes Dreieck, dessen größter Winkel mindestens 120° beträgt.

b) Zeige, dass die Behauptung aus Aufgabenteil a für fünf Punkte nicht gilt.

c) Ist folgende Aussage richtig? Sind vier Geraden gegeben, von denen sich nicht drei in einem Punkt schneiden, so hat mindestens eines der von ihnen gebildeten Dreiecke einen Winkel von mindestens 120°. (WJB)

Aufgabe 1293: Höhe im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit verschieden langen Katheten CA und CB ist die Höhe h aus dem Eckpunkt C stets kürzer als die halbe Hypotenuse. Trifft das zu? (H.F.)

Aufgabe 1294: Kindergeburtstag

Anton und Berta sind Zwillinge und feiern ihren Geburtstag. Sie haben drei weitere Geschwisterpaare eingeladen.

a) Für ein Spiel stehen 13 Stühle in einer Reihe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die acht Kinder auf dieser Stuhlreihe zu platzieren, wenn zwei Geschwisterkinder stets nebeneinandersitzen und die Kinder innerhalb eines Geschwisterpaares auch noch ihre Plätze tauschen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es unter den obigen Bedingungen, wenn die 13 Stühle im Kreis angeordnet sind?

(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 1295: Größter gemeinsamer Teiler

Wie heißt der größte gemeinsame Teiler von $2a^3 + 3a$ und $2a^4 + 5a^2 + 1$, wobei a eine beliebige ganze Zahl ≥ 1 ist? (HF)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 148

Klassen 9–13

Aufgabe 1282: Teilbarkeit zum 40-jährigen Jubiläum

a) Bestimme den größten ganzzahligen Exponenten m so, dass 1981^m ein Teiler von 2021! ist.

b) Bestimme den größten ganzzahligen Exponenten n so, dass 2021^n ein Teiler von 1981! ist.

(MG)

Lösung:

a) Die Gründungsjahreszahl 1981 hat die Primfaktorzerlegung $1981 = 7 \cdot 283$. Der Primfaktor 283 ist wegen $2021 : 283 \approx 7{,}1$ genau siebenmal als Faktor in 2021! enthalten.
Daher ist $m = 7$ der größtmögliche Exponent.

b) Die Jahreszahl 2021 hat die Primfaktorzerlegung $2021 = 43 \cdot 47$.
Wegen $1981 : 47 \approx 42{,}2$ ist $n = 42$ der größtmögliche Exponent.

Aufgabe 1283: Eine Ungleichung für rechtwinklige Dreiecke

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit Hypotenus AB sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann gilt:

$$|CM| < \frac{1}{2}|AC| + \frac{1}{2}|BC|.$$

Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist M der Mittelpunkt eines Kreises durch die Punkte A, B und C (Umkehrung des Satzes von Thales) und AB ist ein Durchmesser dieses Kreises.

Daraus folgt:

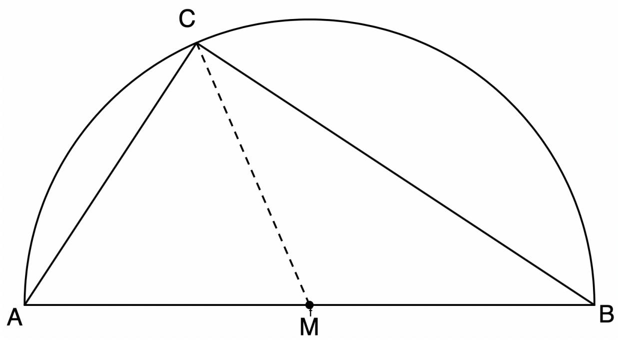
$$|MA| = |MB| = |MC| \text{ sowie } |AB| = 2|MC|.$$

Wegen der Dreiecksungleichung ist:

$$|AB| < |AC| + |BC|, \text{ also } 2|MC| < |AC| + |BC|,$$

sodass

$$|CM| < \frac{1}{2}|AC| + \frac{1}{2}|BC|.$$



Aufgabe 1284: Welche Zahl?

Welche zweistellige Zahl ist gleich der Summe aus ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Einerstelle? (WJB)

Lösung:

Die Zahl sei xy, das heißt $10x + y$. Dann muss gelten: $10x + y = x + y^2$. Fassen wir dies als quadratische Gleichung in y auf $y^2 - y - 9x = 0$, so ist die Lösung $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{36x + 1}$.

Also muss $36 + 1$ eine Quadratzahl sein. Durchprobieren der möglichen Werte von $x = 1, 2, ..., 9$ liefert $36 \cdot 8 + 1 = 289 = 17^2$ als einzige Lösung. Es ist also $x = 8$ und $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 17 = 9$. Die gesamte Zahl ist also 89.

Aufgabe 1285: Fünf Lose

Zur Kundenbindung hat sich die Supermarktkette MERCATOR eine Aktion überlegt: Jeder Kunde erhält bei jedem Kauf ein Glückslos. Die Supermarktkette wirbt damit, dass jedes fünfte Los gewinne.

Herr Emptor, der gerade im Supermarkt einkauft, überlegt: „Wenn ich fünfmal einkaufen gehe und dann fünf Lose habe, dann müsste ich doch sicher gewinnen."

a) Begründe mit einer Rechnung, dass Herr Emptor sich irrt.

b) Wie viele Lose benötigt Herr Emptor, damit er mit mindestens 90 %-iger Wahrscheinlichkeit gewinnt?

(MG)

Lösung:

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der fünf Lose tatsächlich ein Gewinnlos ist:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^5 = 0{,}67232.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Emptor bei fünf Losen gewinnt, beträgt also lediglich ungefähr 67,2 %.

b) Es soll gelten $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$. Wir berechnen nun die dazu nötige Anzahl Lose:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) = 1 - 0{,}8^n &\geq 0{,}9 \\ \iff 0{,}8^n &\leq 0{,}1 \\ \iff n \cdot \log 0{,}8 &\leq \log 0{,}1 \\ \iff n &\geq \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}8} \approx 10{,}3. \end{aligned}$$

Er benötigt also mindestens elf Lose.

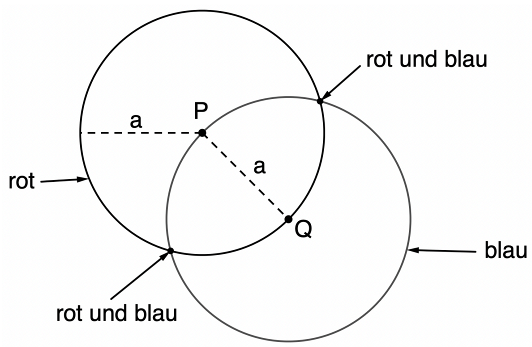
Aufgabe 1286: Ein Zwei-Farben-Problem

Jeder Punkt der Ebene sei entweder rot oder blau gefärbt, aber nicht alle Punkte seien gleich gefärbt.

Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl a zwei gleichfarbige Punkte vom Abstand a.

Trifft das zu? (H.F.)

Lösung:



Angenommen, es gibt keine zwei gleichfarbigen Punkte P und Q mit $|PQ| = a$. Seien nun P und Q zwei beliebige Punkte vom Abstand a und sei zum Beispiel P blau. Dann sind alle Punkte auf dem Kreis um P mit Radius a rot – insbesondere ist Q rot. Dann aber sind alle Punkte auf dem Kreis um Q mit Radius a blau. Daraus folgt: Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind sowohl blau als auch rot – ein Widerspruch. Daher ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung. (H.F.)

Alternative Lösung:
Lege ein gleichseitiges Deieck der Seitenlänge a irgendwo in die gefärbte Ebene. Dann liegen die drei Eckpunkte dieses gleichseitigen Dreiecks entweder auf drei gleichfarbigen Punkten, also insbesondere auch auf zwei gleichfarbigen (und wir sind fertig, denn zwei Eckpunkte des Dreiecks haben ja jeweils den Abstand a zueinander) oder die drei Eckpunkte liegen auf unterschiedlich farbigen Punkten der Ebene. Da für drei Punkte aber nur zwei Farben zur Verfügung stehen, müssen von diesen drei Punkten doch zwei dieselbe Farbe haben (und der dritte Punkt die andere Farbe). Diese zwei Punkte haben den Abstand a zueinander.
Q.e.d.

Bemerkung: Da wir das Dreieck beliebig in die Ebene legen können, es also unendlich viele Positionen gibt, können wir die Aussage der Aufgabe sogar noch verbessern: Es gibt unter den gemachten Vorausetzungen zu jeder reellen Zahl a unendlich viele gleichfarbige Punktepaare vom Abstand a. (MG)

Aufgabe 1287: Lösungen eines Gleichungssystems
Gib für alle Paare (a, b) von reellen Zahlen jeweils alle Lösungen für x und y des Gleichungssystems

$$x - y = a$$
$$x^2 - y^2 = b$$

an. (gefunden WJB)

Lösung:

- Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$. Dann gilt wegen $x - y = 0$, dass auch $b = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (x + y) \cdot 0 = 0$ und schließlich $b = 0$ sein muss.
  Ist aber $b \neq 0$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung und die Lösungsmenge ist leer.

- Sind $a = 0$ und $b = 0$, dann gilt wegen $x - y = 0$, dass $x = y$ ist (womit auch $x^2 - y^2 = 0$ erfüllt ist).
  Also ist jedes Paar reeller Zahlen (x, y) mit $y = x$, also jedes Paar (x, x), Lösung des Gleichungssystems.
- Sei nun $a \neq 0$. Wegen $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ reduziert sich das Gleichungssystem zu
  $$x - y = a$$
  $$x + y = \tfrac{b}{a}.$$
  Die beiden Gleichungen addieren wir einmal und subtrahieren wir einmal und erhalten
  $$2x = a + \tfrac{b}{a}$$
  $$2y = \tfrac{b}{a} - a.$$
  Nach Division durch 2 erhalten wir die Lösungen des Gleichungssystems, nämlich
  $$x = \frac{a^2 + b}{2a} \text{ und } y = \frac{b - a^2}{2a}.$$
  Also sind die Paare reeller Zahlen $\left(\frac{a^2+b}{2a}, \frac{b-a^2}{2a}\right)$ Lösungen des Gleichungssystems.

(nach WJB)

Aufgabe 1288: Zum Abschluss des Jahres

Zeige: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt
$$2^n + 0^n + 2^n + 1^n \leq 3^n.$$
Für welche natürlichen Zahlen n gilt dabei das Gleichheitszeichen? (HF)

Lösung:

Wir schreiben kurz $T := 2^n + 0^n + 2^n + 1^n = 2 \cdot 2^n + 1$.
Damit ist
$$\frac{T}{3^n} = 2 \cdot \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{3^n}.$$
Es gelten $2 \cdot \frac{2^n}{3^n} \leq 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$ und $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{9}$, sodass $\frac{T}{3^n} = 2 \cdot \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$.
Daraus folgt
$$2^n + 0^n + 2^n + 1^n = T \leq 1 \cdot 3^n = 3^n.$$

Für $n = 2$ gilt sogar $2^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 0 + 4 + 1 = 9 = 3^2$, also das Gleichheitszeichen. Für alle anderen $n > 2$ gilt hingegen $T = 2^n + 0^n + 2^n + 1^n < 3^n$, denn dann gelten im obigen Beweis der Ungleichung jeweils $<$ statt $\leq$.

Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 2022
Runde 1
von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Fünf Eichhörnchen haben zusammen einen Vorrat von 2022 Nüssen. Am ersten Tag kommen zwei Nüsse hinzu, am zweiten Tag vier Nüsse, am dritten sechs Nüsse und so weiter, das heißt an jedem weiteren Tag kommen jeweils zwei Nüsse mehr hinzu als am Tag zuvor. Am Ende irgendeines Tages teilen die Eichhörnchen den Vorrat untereinander auf. Ist es möglich, dass dabei alle gleich viele Nüsse erhalten und keine Nuss übrigbleibt?

Anmerkung: Die Nüsse bleiben beim Verteilen ganz. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung:

Nein, das ist nicht möglich, weil die Anzahl der Nüsse im Vorrat am Ende keines Tages ein Vielfaches von 5 ist.

Erster Beweis:

Wir betrachten die Einerziffern zweier Anzahlen am k-ten Tag für $k \geq 0$. Mit „Vorrat“ bezeichnen wir die Einerziffer der Anzahl der Nüsse, die sich am Ende des k-ten Tages im Vorrat befinden; am Ende des 0-ten Tages sind dies 2022 Nüsse. Mit „Zuwachs“ bezeichnen wir die Einerziffer der Anzahl der Nüsse, die am k-ten Tag zum Vorrat hinzukommen. Nach Aufgabenstellung ist diese Einerziffer 0 für $k = 0$ und 2 für $k = 1$; weil an jedem weiteren Tag jeweils zwei Nüsse mehr hinzukommen als am Tag zuvor, durchläuft diese Einerziffer an den direkt folgenden Tagen die Ziffern 4, 6, 8, 0, um ab $k = 6$ an direkt aufeinander folgenden Tagen die Ziffernfolge 2, 4, 6, 8, 0 periodisch zu durchlaufen. Die Einerziffer „Vorrat“ am Tag k, für $k \geq 1$, ergibt sich aus der Summe, wenn die Einerziffer „Vorrat“ am Tag $k - 1$ und die Einerziffer „Zuwachs“ am Tag addiert werden; siehe Tabelle.

Tag k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Einerziffer Zuwachs	0	2	4	6	8	0	2	4	...
Einerziffer Vorrat	2	4	8	4	2	2	4	8	...

Weil die Einerziffer „Vorrat“ für $k = 5$ wieder 2 beträgt (wie für $k = 0$) und die Einerziffer „Zuwachs“ ab $k = 1$ dieselbe Ziffernfolge wie ab periodisch durchläuft, wiederholt sich für die Einerziffer „Vorrat“ die Ziffernfolge 2, 4, 8, 4, 2 periodisch. Diese Ziffernfolge enthält weder die Einerziffer 0 noch die Einerziffer 5; dies bedeutet, dass die Anzahl der Nüsse im Vorrat am Ende keines Tages ein Vielfaches von 5 ist. □

Zweiter Beweis:
Aus der Aufgabenstellung folgt induktiv für $k \geq 1$, dass am k-ten Tag 2^k Nüsse zum Vorrat hinzukommen, der Vorrat also am Ende des k-ten Tages $2022 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2k = 2022 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k) = 2022 + k \cdot (k + 1)$ Nüsse umfasst, wobei wir am Ende der Gleichungskette die Gaußsche Summenformel verwandt haben.
Wir betrachten die Reste modulo 5 des Terms $2022 + k \cdot (k + 1)$ für $k \geq 1$ in Abhängigkeit von $k(\text{mod } 5)$; es ist $2022 \equiv 2(\text{mod } 5)$.

$k(\text{mod } 5)$	0	1	2	3	4
$k \cdot (k + 1)(\text{mod } 5)$	0	2	1	2	0
$(2022 + k \cdot (k + 1))(\text{mod } 5)$	2	4	3	4	2

Für kein $k \geq 1$ gilt also, dass $2022 + k \cdot (k + 1) \equiv 0(\text{mod } 5)$; die Anzahl der Nüsse im Vorrat ist also nie ein Vielfaches von 5. □

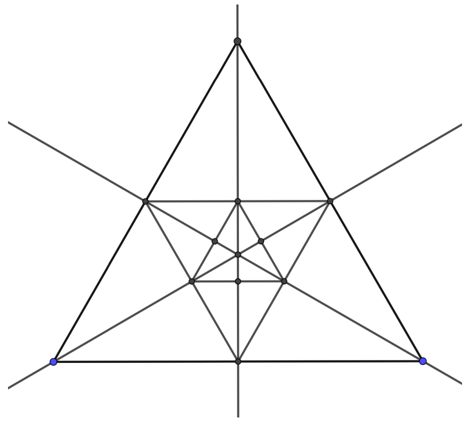
Aufgabe 2

Eva zeichnet zunächst ein gleichseitiges Dreieck und seine Höhen. In einem ersten Schritt zeichnet sie dann das Mittendreieck des gleichseitigen Dreiecks ein, im zweiten Schritt das Mittendreieck dieses Mittendreiecks und so weiter. Nach jedem Schritt zählt Eva alle Dreiecke, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen. Wie viele Mittendreiecke muss sie mindestens eingezeichnet haben, damit die Figur mehr als 2022 solche Dreiecke enthält?
Hinweise: Das Mittendreieck eines Dreiecks besteht aus den Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der Seiten. Vor dem Einzeichnen des ersten Mittendreiecks findet man mehr als 6 solche Dreiecke.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Behauptung:

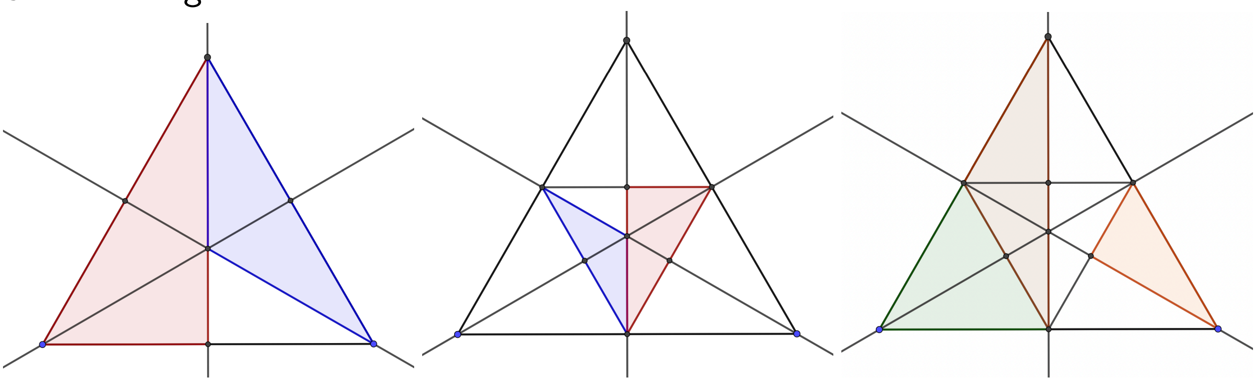
Eva muss mindestens 65 Mittendreiecke eingezeichnet haben, damit die Figur mehr als 2022 Dreiecke enthält, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen.

Beweis:
Die Seiten der von Eva gezählten Dreiecke liegen stets auf Seiten des ursprünglichen gleichseitigen Dreiecks, auf Seiten der Mittendreiecke (sie verlaufen jeweils parallel zu einer Seite des ursprünglichen Dreiecks) oder auf den Höhen. Je zwei dieser gezeichneten Strecken können sich in einem Winkel mit Maß 30°, 60°, 90°, 120° oder 150° schneiden. Das bestimmt die möglichen Innenwinkel der von Eva gezählten Dreiecke.



Skizze 2.1: Figur nach dem Zeichnen von drei Mittendreiecken

Weil $180° - 150° = 30°$, was nicht in zwei weitere zulässige Winkelmaße aufgeteilt werden kann, hat kein Dreieck, dessen Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegt, einen Innenwinkel mit Maß 150°. Die jeweils größten Innenwinkel der von Eva gezählten Dreiecke messen also 60°(das sind also gleichseitige Dreiecke), 90°(rechtwinklige Dreiecke) oder 120°(stumpfwinklige gleichschenklige Dreiecke).
Wir bezeichnen für die Figur nach dem Zeichnen von n Mittendreiecken, $n \geq 0$, mit D_n die Anzahl von Dreiecken, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen.



Skizze 2.2: Figur bei $n = 0$ (links) bzw. $n = 1$ (mittig und rechts)

Für $n = 0$ stellen wir mit Hilfe des linken Dreiecks in Skizze 2.2 fest, dass mit einem ursprünglichen gleichseitigen Dreieck, mit den je sechs zum roten bzw. weißen Dreieck kongruenten rechtwinkligen Dreiecken und mit den drei zum blauen Dreieck kongruenten stumpfwinkligen gleichschenkligen Dreiecken

$$D_0 = 1 + 6 \cdot 2 + 3 = 16 \tag{2.1}$$

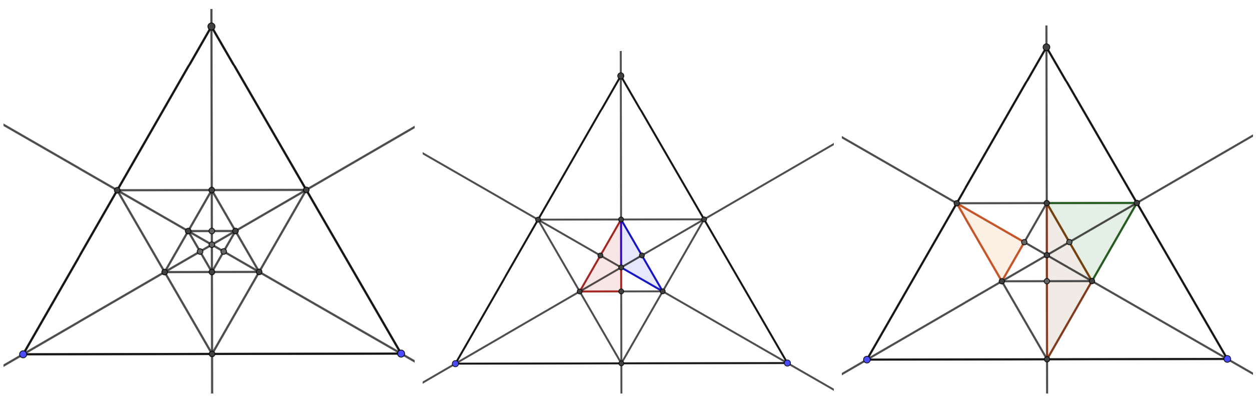
gilt. Für $n = 1$ bestehen die D_0 bislang gezählten Dreiecke weiter fort, und es kommen durch die Seiten des Mittendreiecks neue Dreiecke hinzu, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen. Mit Hilfe der Dreiecke mittig und rechts in Skizze 2.2 erkennen wir, dass Eva bislang

- bei den gleichseitigen Dreiecken das eine Mittendreieck und die drei zum grünen Dreieck kongruenten Dreiecke, also insgesamt vier gleichseitige Dreiecke,
- bei den rechtwinkligen Dreiecken die je sechs zum roten bzw. weißen Dreieck kongruenten Dreiecken und die sechs zum orangfarbenen Dreieck kongruenten Dreiecke, also insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ rechtwinkligen Dreiecke,
- und bei den stumpfwinklig gleichschenkligen Dreiecken die drei zum blauen Dreieck kongruenten Dreiecke und die sechs zum braunen Dreieck kongruenten Dreiecke, also insgesamt neun stumpfwinklig gleichschenklige Dreiecke,

nicht gezählt hat. Das bedeutet

$$D_1 = D_0 + 4 + 18 + 9 = D_0 + 31. \tag{2.2}$$

Auch nach dem Zeichnen des n-ten Mittendreiecks, $n \geq 2$, bestehen alle D_{n-1} bislang von Eva gezählten Dreiecke fort; neu hinzukommende Dreiecke müssen mindestens teilweise eine der Seiten des n-ten Mittendreiecks enthalten. Diese (Teil-)Seiten verlaufen alle vollständig im $(n-1)$-ten Mittendreieck, nämlich zwischen zwei Höhenfußpunkten im $(n-1)$-ten Mittendreiecks oder zwischen einem dieser Höhenfußpunkte und einem Höhenfußpunkt des n-ten Mittendreiecks. Eine dieser (Teil-)Seiten s und ein Höhenfußpunkt H des $(n-1)$-ten Mittendreiecks, in dem s endet, seien beliebig gewählt. Über H hinaus lässt sich s nicht gerade durch eine bereits gezeichnete Strecke fortsetzen, und mit der Fortsetzung der Höhe durch H, die außerhalb des $(n-1)$-ten Mittendreiecks verläuft, bildet s einen Winkel mit Maß $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$; hieraus kann sich nach der einleitenden Beobachtung kein zu zählendes Dreieck ergeben. Damit können neue Dreiecke nur im $(n-1)$-ten Mittendreieck entstehen, und die Situation für $n \geq 2$ ist analog zum Fall $n = 1$; vergleiche Skizze 2.3.



Skizze 2.3: Figur bei $n = 2$

Damit gilt allgemein analog zu (2.2)

$$D_n = D_{n-1} + 31 \text{ für } n \geq 1. \tag{2.3}$$

Durch vollständige Induktion folgt, dass (2.1) und (2.3) äquivalent sind zu

$$D_n = 16 + n \cdot 31 \text{ für } n \geq 0.$$

Hiermit folgt für die positive ganze Zahl n erforderlicher Zeichnungen

$$16 + n \cdot 31 = D_n \geq 2022 \iff n \cdot 31 \geq 2006 \iff n \geq 64.$$

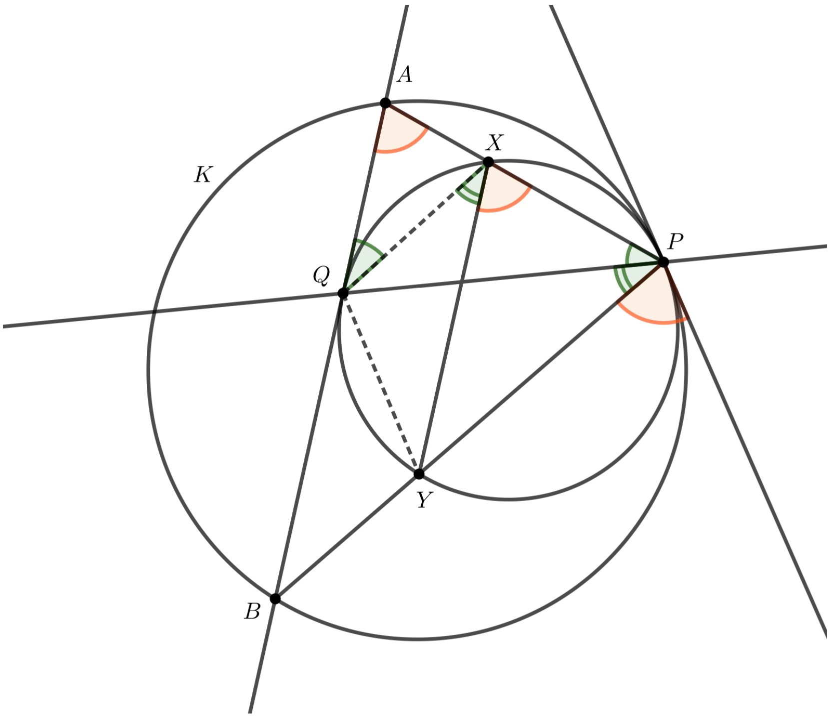
Das beweist die Behauptung. □

Aufgabe 3

Ein Kreis k berührt einen größeren Kreis K von innen im Punkt P. Der Punkt Q sei ein von P verschiedener Punkt auf k. Die Tangente an k im Punkt Q schneidet K in den Punkten A und B. Beweise, dass die Gerade (PQ) den Winkel $\sphericalangle APB$ halbiert.

Erster Beweis (Wechselwinkel):

Mit X bzw. Y seien die Schnittpunkte der Strecken AP bzw. BP mit dem Kreis k bezeichnet; diese Punkte X und Y existieren und sind von P und Q verschieden. Nach dem Sehnentangentenwinkelsatz über dem Kreisbogen k_{XQ} ist $\sphericalangle APQ = \sphericalangle XQA$, nach dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel über dem Kreisbogen k_{QY} ist $\sphericalangle QPB = \sphericalangle QPY = \sphericalangle QXY$.

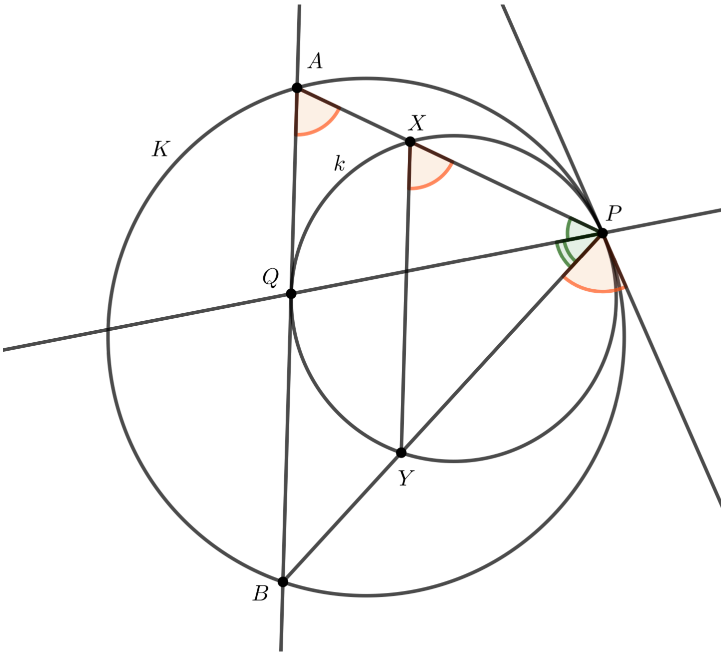


Wir zeichnen zudem die Gerade ein, die im Punkt P gleichzeitig Tangente an den Kreisen K und k ist. Durch Betrachtung dieser Tangente folgt mit dem Sehnentangentenwinkelsatz über den Kreisbögen K_{BP}, k_{YP}, dass $\sphericalangle BAP = \sphericalangle YXP$, die Geraden (AB) und (XY) verlaufen also parallel mit Wechselwinkeln $\sphericalangle XQA$ und $\sphericalangle QXY$. Aus diesen Überlegungen folgt

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle XQA = \sphericalangle QXY = \sphericalangle QPY = \sphericalangle QPB$$

die Gerade (PQ) halbiert den Winkel $\sphericalangle APB$. Das beweist die Behauptung der Aufgabe. □

Zweiter Beweis (Strahlensatz):



Im Dreieck $\triangle ABP$ halbiert die Gerade (PQ) genau dann den Winkel $\sphericalangle APB$, wenn der Punkt Q die Strecke AB im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten teilt, das heißt, wenn $\overline{AQ} : \overline{BQ} = \overline{AP} : \overline{BP}$ (Winkelhalbierendensatz).

Mit X bzw. Y seien die Schnittpunkte der Strecken AP bzw. BP mit dem Kreis k bezeichnet; diese Punkte X und Y existieren und sind von P und Q verschieden. Wir zeichnen zudem die Gerade ein, die im Punkt P gleichzeitig Tangente an den Kreisen K und k ist. Durch Betrachtung dieser Tangente folgt mit den Sehnentangentenwinkelsatz über den Kreisbögen K_{BP}, k_{YP}

$$\sphericalangle BAP = \sphericalangle YXP,$$

die Geraden (AB) und (XY) verlaufen also parallel. Nach dem ersten Strahlensatz mit Scheitel P ist also

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BP}} \iff \frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}. \tag{3.1}$$

Am Kreis k gelten $\overline{AQ}^2 = \overline{AX} \cdot \overline{AP}$ und $\overline{BQ}^2 = \overline{BY} \cdot \overline{BP}$ (Sekanten-Tangenten-Satz), daraus folgt mit (3.1) wegen der positiven Streckenlängen

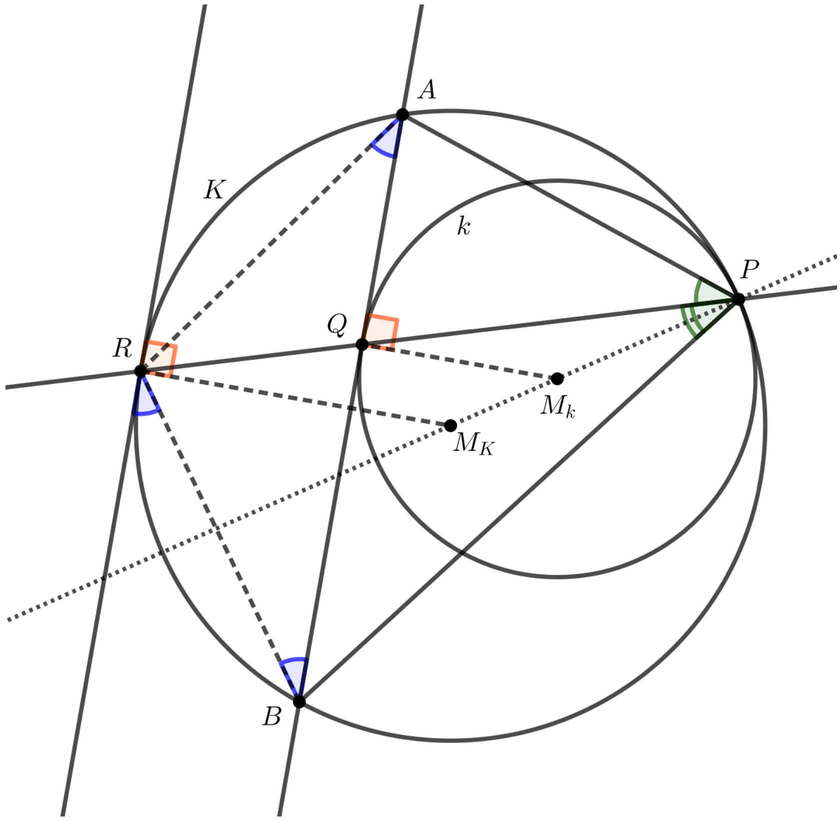
$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \sqrt{\frac{\overline{AX} \cdot \overline{AP}}{\overline{BY} \cdot \overline{BP}}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}};$$

das beweist wegen des Winkelhalbierendensatzes die Behauptung der Aufgabe.

□

Dritter Beweis (Zentrische Streckung):

Der Mittelpunkt des Kreises K werde mit M_K bezeichnet. Weil nach Aufgabenstellung der Kreis k den größeren Kreis K von innen im Punkt P berührt, liegt der Mittelpunkt M des kleineren Kreises k im Inneren der Strecke $M_K P$. Wir betrachten die zentrische Streckung Z mit Zentrum P und Streckfaktor $\lambda := \overline{M_K P} \cdot \overline{M_K P}^{-1} > 1$.



Diese zentrische Streckung bildet M_k auf M_K ab und lässt den Punkt P fest; der Punkt Q werde unter Z auf den Punkt R abgebildet. Für eine beliebige zentrische Streckung ist bekannt, dass sie eine Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade, eine Strecke der Länge s auf eine Strecke der Länge $\lambda \cdot s$ und damit auch einen Kreis auf einen Kreis und einen Winkel auf einen kongruenten Winkel abbildet. Unter Z wird demnach der Kreis k auf den Kreis K und die Gerade (AB) auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet, die im Punkt R Tangente an K ist, weil sie orthogonal zur Strecke M_KR verläuft.
Aus dem Sehnentangentenwinkelsatz über dem Kreisbogen K_{RB} und den Wechselwinkeln der Tangente und der Geraden (AB) folgt $\sphericalangle RAB = \sphericalangle ABR$ und mit dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel

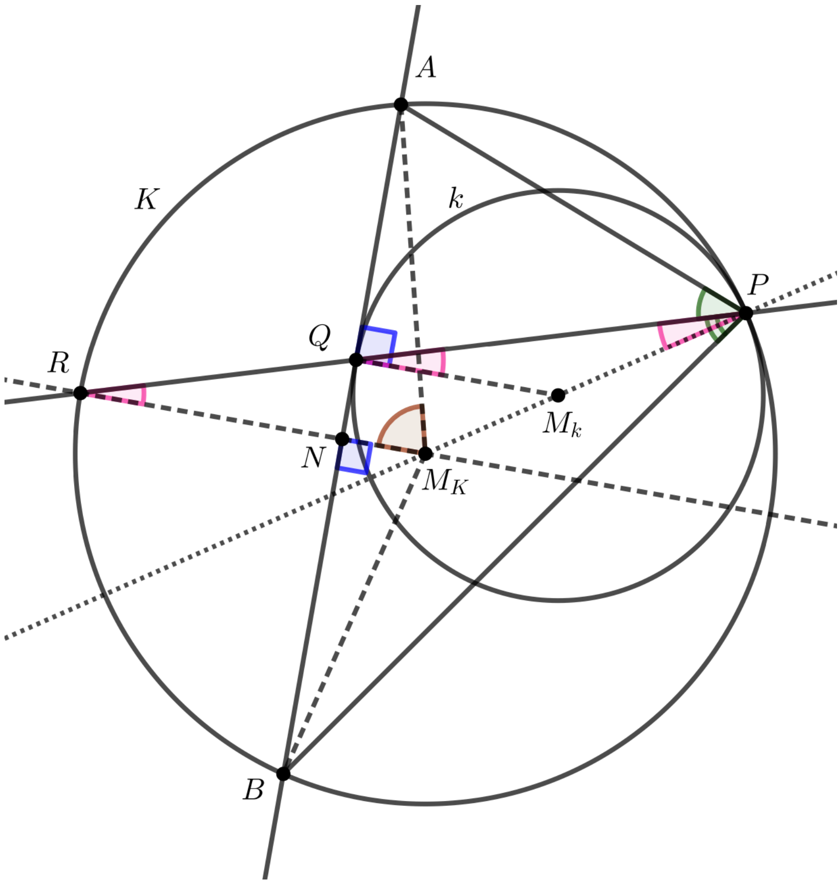
$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle RPB = \sphericalangle RAB = \sphericalangle ABR = \sphericalangle APR = \sphericalangle APQ;$$

die Gerade (PQ) halbiert also den Winkel $\sphericalangle APB$. (Äquivalent: Der Punkt R ist Mittelpunkt des Kreisbogens K_{AB}.) Das beweist die Behauptung der Aufgabe. $\square$

Vierter Beweis (Spiegelung an einem Durchmesser von K):

Der Mittelpunkt des Kreises K werde mit M_K bezeichnet. Weil nach Aufgabenstellung der Kreis k den größeren Kreis K von innen im Punkt P berührt, liegt der Mittelpunkt M_k des kleineren Kreises k im Inneren der Strecke M_KP.
Es sei R der zweite Schnittpunkt der Geraden (PQ) mit dem Kreis K, und N sei der Schnittpunkt der Geraden (RM_K) und (AB).

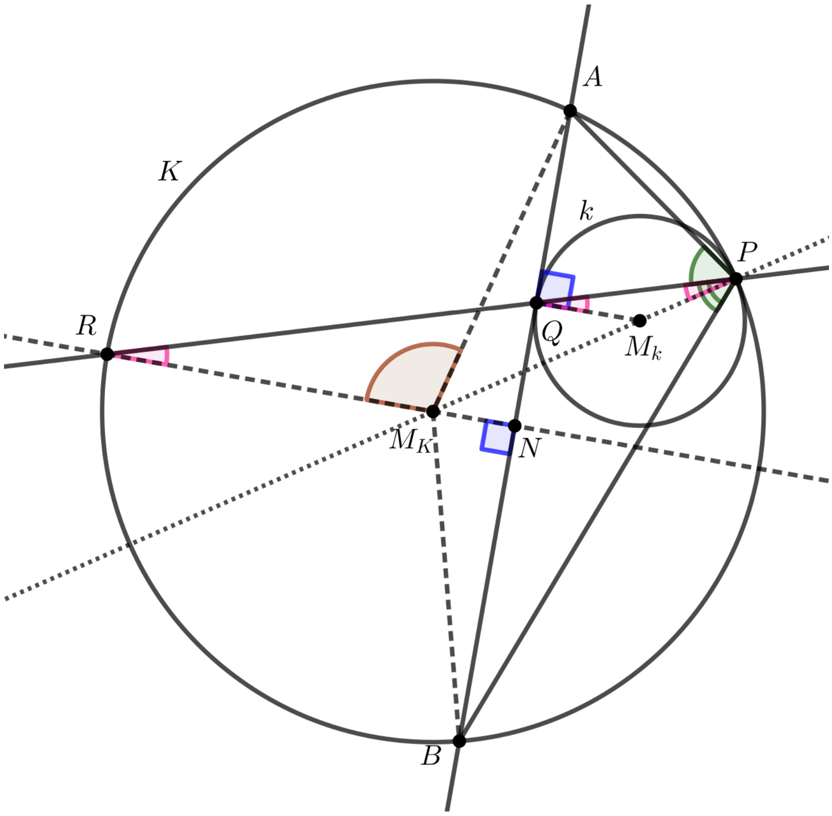
Wir betrachten zunächst den Fall, dass Q nicht auf der Geraden $(M_K P)$ liegt; siehe Skizze.



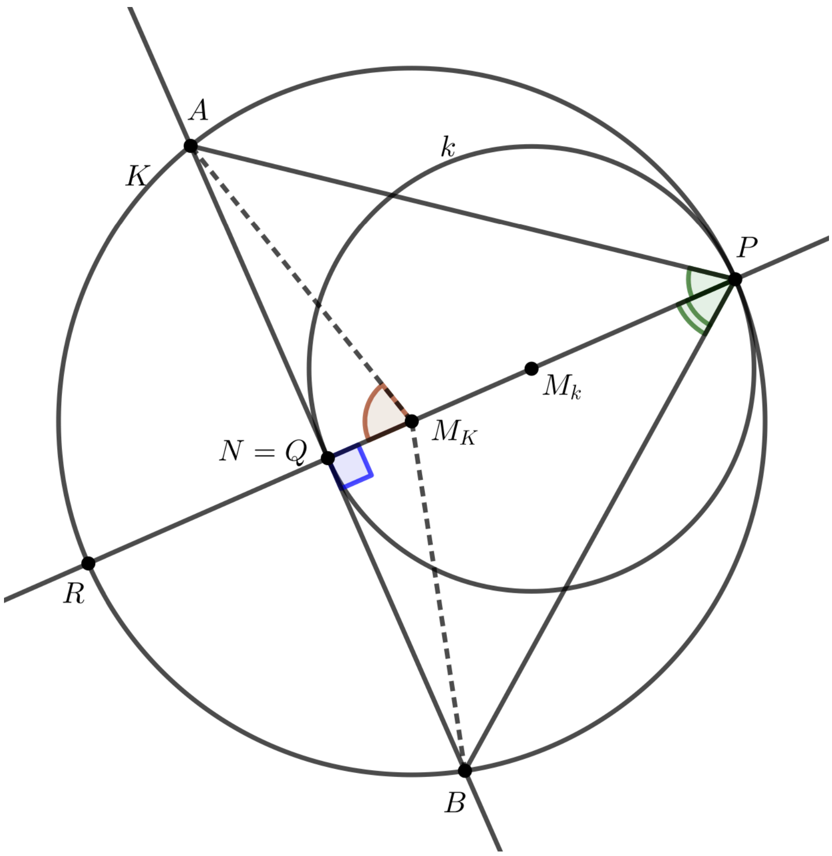
Ohne Einschränkung liege der Punkt Q bezüglich $(M_K P)$ in derselben Halbebene wie der Punkt A.
In diesem Fall ist $\sphericalangle QPM_K$ ein Winkel mit positivem Maß, und in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle PQM_k$ bzw. $\triangle PRM_K$, deren Schenkel Radien von k bzw. K sind, stimmen die Basiswinkel überein, das heißt $\sphericalangle PQM_k = \sphericalangle QPM_k = \sphericalangle RPM_K = \sphericalangle M_K RP$. Die Geraden (QM_k) und (RM_K) verlaufen damit parallel und schneiden die Gerade (AB) beide im rechten Winkel wegen $\sphericalangle RNB = \sphericalangle M_k QA = 90°$.
Die Gerade RM_k ist also Symmetrieachse des Kreises K, welche die Punkte A und B aufeinander abbildet, insbesondere gilt also $\sphericalangle AM_K R = \sphericalangle RM_K B$. Zusammen mit dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel über den Kreisbögen K_{AB} bzw. K_{AR} schließen wir hieraus

$$\begin{aligned}\sphericalangle APR + \sphericalangle RPB = \sphericalangle APB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AM_K B = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle AM_K B + \sphericalangle RM_K B)\\ = \sphericalangle AM_K R = 2 \cdot \sphericalangle APR,\end{aligned}$$

also $\sphericalangle RPB = \sphericalangle APR$ durch Subtraktion von $\sphericalangle APR$ auf beiden Seiten der Gleichungskette.



Diese Argumentation ist unabhängig davon, in welcher Halbebene bezüglich (AB) der Punkt M_K liegt oder ob er auf (AB) liegt; siehe Skizze.
Es bleibt der Fall zu betrachten, dass der Punkt Q auf der Geraden $(M_K P)$ liegt; siehe Skizze.

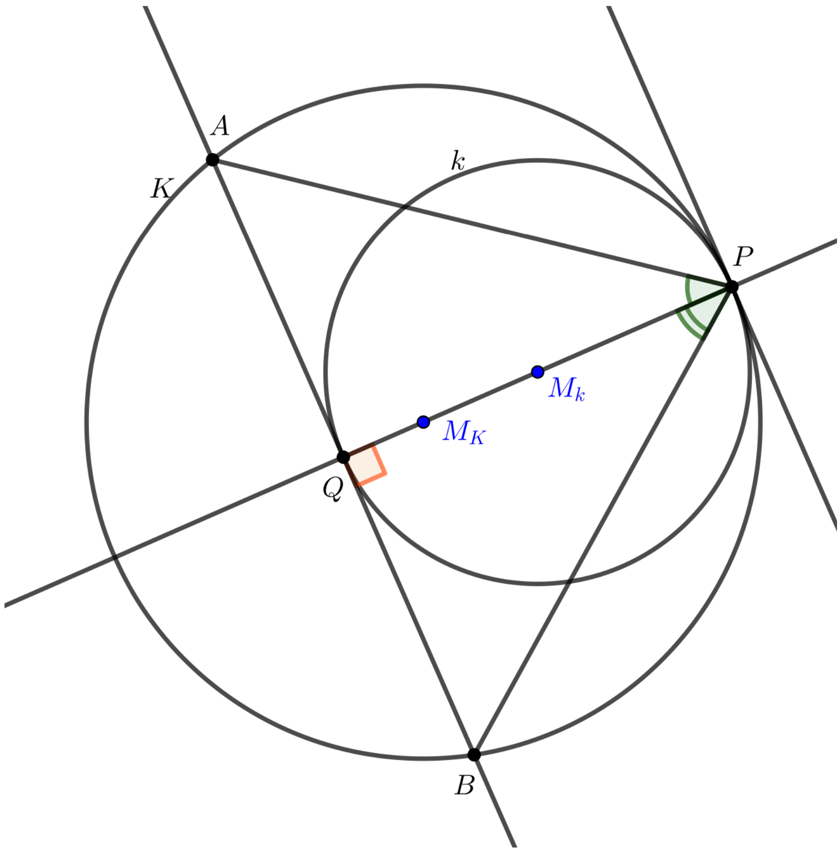


Wegen $\sphericalangle PQA = 90°$ ist die Gerade $(RM_K) = (RP)$ Symmetrieachse des Kreises K, die die Punkte A, B aufeinander abbildet, insbesondere $\sphericalangle AM_K R = \sphericalangle RM_K B$. Damit kann wie oben geschlossen werden, dass $\sphericalangle RPB = \sphericalangle APR$, die Gerade (PQ) also auch in diesem Fall den Winkel $\sphericalangle APB$ halbiert. Das beweist die Behauptung der Aufgabe. □

Fünfter Beweis:

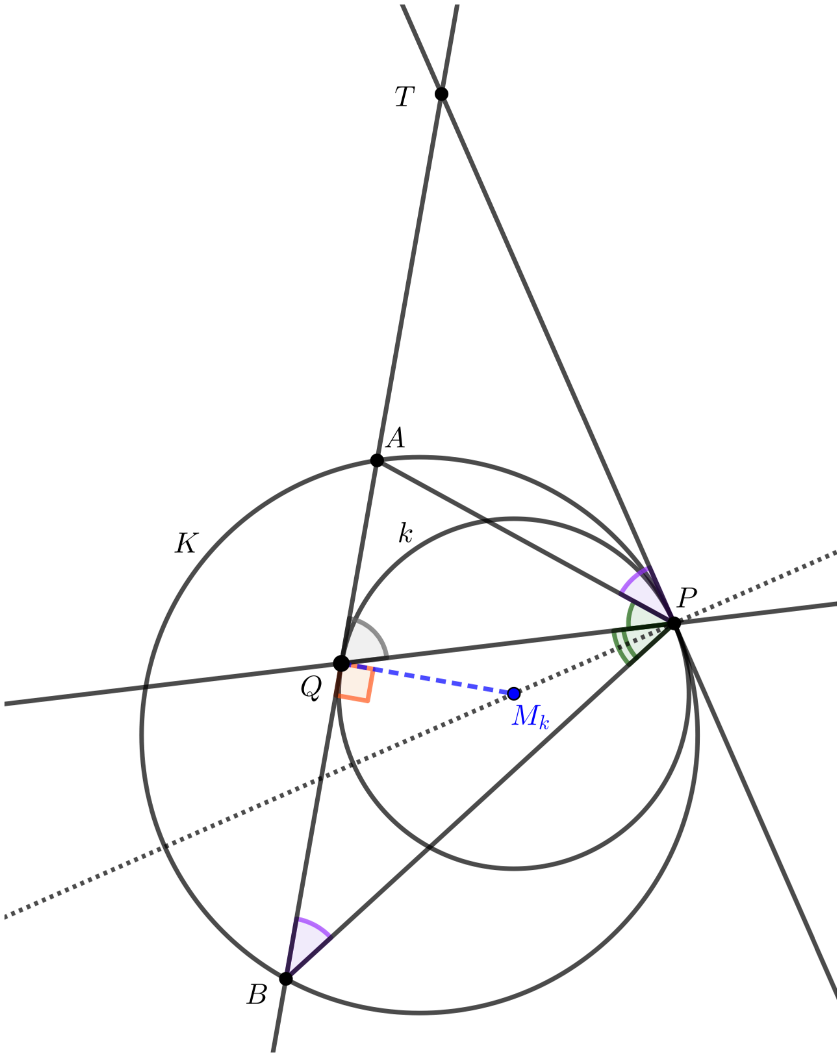
Es sei der Mittelpunkt des Kreises K mit M_K bezeichnet. Weil nach Aufgabenstellung der Kreis k den größeren Kreis K von innen im Punkt P berührt, liegt der Mittelpunkt M_K des kleineren Kreises k im Inneren der Strecke $M_K P$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Tangenten an k in den Punkten P und Q Parallelen sind; das ist genau dann der Fall, wenn PQ ein Durchmesser des Kreises k ist.



Auf Grund der Aufgabenstellung ist Q dann der neben P zweite Schnittpunkt der Gerade $(M_K P)$ mit dem Kreis k, die Punkte A, B gehen durch Spiegelung an $(M_K P)$ mit $\overline{AQ} = \overline{QB}$ ineinander über, und es ist $\sphericalangle PQA = \sphericalangle BQP = 90°$.

Die Dreiecke $\triangle PAQ$ und $\triangle BPQ$ sind demnach kongruent (Kongruenzsatz SWS), woraus $\sphericalangle APQ = \sphericalangle QPB$ folgt; die Gerade (PQ) halbiert also in diesem Fall den Winkel $\sphericalangle APB$.



Verlaufen im allgemeinen Fall die Tangenten an k in den Punkten P, Q nicht parallel, so schneiden sie sich in einem Punkt, den wir T nennen. Das Dreieck $\triangle QPT$ ist gleichschenklig mit Basis QP, denn die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle TM_KP$ und $\triangle M_KTQ$ sind kongruent (Kongruenzsatz SsW). Damit stimmen die Basiswinkel $\sphericalangle TPQ = \sphericalangle TPA + \sphericalangle APQ$ und $\sphericalangle PQT$ überein.

Nach Sehnentangentenwinkelsatz zum Kreisbogen K_{PA} gilt $\sphericalangle TPA = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PBQ$. Wir schließen hieraus im Dreieck $\triangle BPQ$, dass

$$\sphericalangle PBQ + \sphericalangle QPB = 180^\circ - \sphericalangle BQP = \sphericalangle PQT = \sphericalangle TPQ = \sphericalangle TPA + \sphericalangle APQ,$$

woraus durch Subtraktion von $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle TPA$ in der Gleichungskette auch

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle APQ$$

folgt; die Gerade (PQ) halbiert also auch im allgemeinen Fall den Winkel $\sphericalangle APB$. Das beweist die Behauptung der Aufgabe. $\square$

Aufgabe 4

Für jede positive ganze Zahl k sei a_k der größte Teiler von k, der nicht durch 3 teilbar ist. Die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ wird definiert durch $s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
Beweise:

a) Die Zahl s_n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Anzahl der Einsen in der Darstellung von n im Dreiersystem durch 3 teilbar ist.

b) Es gibt unendlich viele Zahlen n, für die s_n durch 3^3 teilbar ist.

Hinweis: Es ist zum Beispiel $s_6 = 1 + 2 + 1 + 4 + 5 + 2$.

Beweis:

Wir stellen, auch für eine spätere Referenz, Informationen zu den ersten Folgegliedern zusammen. Die Schreibweise $[k]_6$ steht für die Darstellung von k im Dreiersystem.

k	$[k]_6$	a_k	s_k	$s_k (\bmod 3)$
1	1	1	1	1
2	2	2	3	0
3	10	1	4	1
4	11	4	8	2
5	12	5	13	1
6	20	2	15	0
7	21	7	22	1
8	22	8	30	0
9	100	1	31	1
10	101	10	41	2
11	102	11	52	1
12	110	4	56	2
13	111	13	69	0
14	112	14	83	2
15	120	5	88	1
16	121	16	104	2
17	122	17	121	1
18	200	2	123	0
19	201	19	142	1
20	202	20	162	0

Wir beobachten einleitend für die Glieder a_k der Folge $(a_k)_{k\geq 1}$: Ist die positive ganze Zahl k nicht durch 3 teilbar, so ist $a_k = k$. Für eine durch 3 teilbare positive ganze Zahl k, für die also $k = 3j$ für eine positive ganze Zahl j gilt, ist $a_k = a_{3j} = a_j$. Denn jeder Teiler von j ist auch ein Teiler von k, demnach $a_k \geq a_j$, und der größte Teiler von $k = 3j$, der nicht durch 3 teilbar ist, muss auch ein Teiler von j sein, demnach $a_k \leq a_j$.

Diese einleitende Beobachtung eröffnet uns eine rekursive Beschreibung der Folgenglieder s_n, mit $n \geq 1$, in Abhängigkeit vom Rest, den der Index n bei Division durch 3 lässt. Ist n eine durch 3 teilbare positive ganze Zahl, also $n = 3m$ für ein $m \geq 1$, so gilt

$$s_n = s_{3m} = s_m + 3m^2, \tag{4.1}$$

denn wir erkennen durch Umarrangieren, wegen $a_{3i} = a_i$ für alle $i \geq 1$ und aufgrund der Gaußschen Summenformel, dass

$$\begin{aligned} s_n = s_{3m} = \sum_{j=1}^{3m} a_j &= \sum_{i=1}^{m} a_{3i} + \sum_{i=0}^{m-1}(a_{3i+1} + a_{3i+2}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=0}^{m-1}(3i+1+3i+2) = s_m + \sum_{i=0}^{m-1}(6i+3) \\ &= s_m + 6 \cdot \sum_{i=0}^{m-1} i + \sum_{i=0}^{m-1} 3 = s_m + 6 \cdot \frac{(m-1) \cdot m}{2} + 3m = s_m + 3m^2. \end{aligned}$$

Hierauf aufbauend schließen wir

$$s_{3m+1} = s_{3m} + a_{3m+1} = s_m + 3m^2 + 3m + 1 \tag{4.2}$$

und

$$s_{3m+2} = s_{3m} + a_{3m+2} = s_m + 3m^2 + 3m + 1 + 3m + 2 = s_m + 3(m+1)^2. \tag{4.3}$$

Insbesondere folgt aus (4.3), (4.1) und (4.2), dass

$$s_{3m+2} \equiv s_{3m} \equiv s_m (\text{mod } 3) \text{ sowie } s_{3m+1} \equiv (s_m + 1)(\text{mod } 3). \tag{4.4}$$

a) Mit $[n]_6^{(1)}$ sei die Anzahl von Einsen in der Darstellung von n im Dreiersystem bezeichnet. Wir zeigen, dass

$$s_n \equiv [n]_6^{(1)} (\text{mod } 3) \text{ für alle positiven ganzen Zahlen } n \tag{4.5}$$

gilt. Daraus folgt insbesondere direkt, dass s_n genau dann durch 3 teilbar ist, wenn die Anzahl $[n]_6^{(1)}$ der Einsen in der Darstellung von n im Dreiersystem durch 3 teilbar ist. Wir beweisen (4.5) durch vollständige Induktion über die Anzahl z der Stellen von n im Dreiersystem. Für $z = 1$ (Induktionsanfang) überprüfen wir direkt, dass wegen $[1]_6^{(1)} = 1$ und $s_1 = 1 \equiv 1(\text{mod } 3)$ sowie wegen $[2]_6^{(1)}$ und $s_2 = 3 \equiv 0(\text{mod } 3)$ eine Beziehung wie in (4.5) gilt. Für den Induktionsschluss $z \to z + 1$, für $z \geq 1$, sei

$$n = 3^{z+1} \cdot r_{z+1} + 3^z \cdot r_z + \cdots + 3^2 \cdot r_2 + 3^1 \cdot r_1 + 3^0 \cdot r_0$$

mit $r_{z+1} \in \{1, 2\}$ und $r_i \in \{0, 1, 2\}$, mit $0 \leq i \leq z$, ein Index n mit $z + 2$ Stellen im Dreiersystem. Wir schreiben

$$n = 3 \cdot (3^z \cdot r_{z+1} + 3^{z-1} \cdot r_z + \cdots 3^1 \cdot r_2 + 3^0 \cdot r_1) + r_0 =: 3 \cdot m + r_0$$

mit einem Index m, der z Stellen im Dreiersystem hat.

Da Multiplikation mit 3 im Dreiersystem gleichbedeutend ist mit Verschiebung um eine Stelle nach links sowie Anhängen einer 0 als Einerstelle, gilt $[n]_6^{(1)} = [m]_6^{(1)} + 1$ genau dann, wenn $r_0 = 1$ ist, und $[n]_6^{(1)} = [m]_6^{(1)}$, wenn $r_0 \in \{0, 2\}$. Zusammen mit Gleichung (4.4) und der Induktionsvoraussetzung schließen wir im Fall $r_0 = 1$, dass $s_n = s_{3m+1} \equiv (s_m + 1)(\text{mod } 3) \equiv \left([m]_3^{(1)} + 1\right)(\text{mod } 3) \equiv [n]_3^{(1)}(\text{mod } 3)$ und analog im Fall $r_0 \in (0, 2)$, dass

$s_n = s_{rm+r_0} \equiv s_m (\text{mod } 3) \equiv [m]_6^{(1)} (\text{mod } 3) \equiv [n]_6^{(1)} (\text{mod } 3)$ Damit ist (4.5) bewiesen.

b) Wir behaupten, dass für die Folge $(n(i))_{i \geq 1}$ von Indizes mit $n(i) := 3^i \cdot 7 - 1$ alle Zahlen $s_{n(i)}$ durch $3^3 = 27$ teilbar sind. Die $n(i)$ wachsen streng monoton in i und sind somit eine unendliche Folge paarweise verschiedener Zahlen. Dies folgt sofort, denn mit $n(0) := 6$ gilt

$$\begin{aligned} n(i) &= 3^i \cdot 7 - 1 = 3 \cdot (3^{i-1} \cdot 7 - 1) + 2 = 3 \cdot n(i-1) + 2 \\ &> n(1-i) \text{ für alle } i \geq 1. (4.6) \end{aligned}$$

Wir weisen nun für $n(i)$, wobei $i \geq 1$, mit vollständiger Induktion nach, dass die Zahlen $s_{n(i)}$ stets Vielfache von $3^3 = 27$ sind. Für $i = 1$ und $n(1) = 20$ (Induktionsanfang) haben wir in der Tabelle am Beginn $s_{20} = 162 = 6 \cdot 27 = 6 \cdot 3^3$ hergeleitet. Für den Induktionsschluss $i \rightarrow i+1$, wobei $i \geq 1$, nutzen wir die rekursiven Beziehungen in (4.6) und in (4.3), um

$$s_{n(i+1)} = s_{3 \cdot n(i)+2} = s_{n(i)} + 3 \cdot \big(n(i) + 1\big)^2 = s_{n(i)} + 3^{2i+1} \cdot 7^2 \qquad (4.7)$$

zu schließen, und wegen $2i + 1 \geq 3$ für $i \geq 1$ sowie der Induktionsvoraussetzung sind beide Summanden auf der rechten Seite von (4.7) Vielfache von $27 = 3^3$, also ist auch $s_{n(i+1)}$ ein Vielfaches von $27 = 3^3$.

Das beweist die Behauptungen der Aufgabe. □

Errata

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal kleine Fehler ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken. So auch im letzten Heft 148:

- Bei der **Monoidalen Knobelei** (Seite 5) muss in der Aufgabe in der Tabelle das erste Feld in der ersten Zeile frei bleiben, im zweiten Feld eine 1 stehen.
- Im **Beweis ohne Worte** (Seite 7) muss die Definition in der Fußnote heißen: „Ein n-Eck heißt konvex, wenn alle seine Innenwinkel $< 180°$ sind.“
- **Gelöste Aufgaben** (Seite 26): In der Lösung der Aufgabe 1277 hat sich in der Funktionsgleichung der 1. Ableitung ein Tippfehler eingeschlichen. Diese lautet $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$. Die weitere Lösung ist aber korrekt.
- **Gelöste Aufgaben** (Seite 40): In der ersten Zeile der Lösung der Jahreszahl-Aufgabe muss es heißen

  $$S_n = (n^2 - 2n + 1^2) + (n^2 - 4n + 2^2) + \ldots + (n^2 - 2 \cdot 4039n + 4043^2).$$

  Die weitere Lösung ist aber wieder korrekt.

Wir bitten Euch, die Fehler zu entschuldigen.

Die Monoid-Preisträger 2021

Bei der virtuellen Monoid-Jahresfeier am 27. November 2021 wurden die folgenden Preisträger des Schuljahres 2020/21 ausgezeichnet:

Das Goldene M: Miriam Büttner (Diesterweggymnasium, Tangermünde, 11. Klasse).
Monoid-Fuchs: Alexander Koblbauer (Tassilo-Gymnasium, Simbach am Inn, 7. Klasse).
Sonderpreis: Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, 8. Klasse).
Forscherpreis: Philipp Lörcks (Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Trier, 9. Klasse).

1. Preise: Lasse Blum, Tu Sam Dang, Konstantin Herbst, Josefine Kaßner, Philipp Lörcks, Oscar Su, Clemens Zabel.

2. Preise: Lukas Born, Kathrin Borrmann, Mai Linh Dang, Aleksandra Herbst, Johannes Kehrberger, Mika Schäfer, Jacob Schmittner, Luca Sindel.

3. Preise: Jabir Aouzi, Marie Baumgartner, Emilie Borrmann, Jasmin Borrmann, Salvatore Ippolito, Louisa Lukowiak, Sarah Markhof, Jonathan Reuthner, Linus Salloch, Tejas Shivakumar, Jan Christian Weber, Marvin Wenzel.

4. Preise (Monoid-Jahresabonnements 2021): Mats Budäus, Christian Carda, Emil Dörr, Anna Lena Drescher, Gabriel Faber, Julia Hans, Paulina Herber, Hagen Hohbein, Theresa Horstkötter, Raphael Mayer, Victor Mayer, Sarah von Rhein, Jona Richartz, Anna Salaru, Ioan Salaru, Sönke Schneider, Jill Marie Simon, Simon Waldek, Greta Waldmüller, Finja Weiß.

Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2020/21 herzlich zu ihren Gewinnen.

Der Preis für den Träger des Goldenen M und für den Träger des Monoid-Fuchs hat Dr. Ralf Genannt gespendet. Der Forscherpreis wurde von Casio gesponsert. Die 1. bis 4. Preise wurden von den Freunden der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. gestiftet. Die Monoid-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich.

Die Preisvergabe des laufenden Schuljahres findet am Samstag, den 19. November 2021, ab 10 Uhr an der Universität Mainz (hoffentlich in Präsenz!) statt. Wir hoffen, Euch dann alle persönlich begrüßen zu können und wünschen Euch viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 147

Altlötting, Staatliche Berufsschule:
Kl. 10: Lena Baumgartner 6.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 9: Oscar Su 36;
Kl. 12: Lukas Born 11.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 6: Yousef Mehana 3,5;
Kl. 7: Linus Saloch 4,5, Mika Schäfer 14.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 8: Sarah Markhof 8.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 11: Pascal Bohlinger 10,5.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 9: Jona Richartz 6.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 7: Jasmin Borrmann 7;
Kl. 8: Louisa Lukowiak 6,5;
Kl. 9: Emilie Borrmann 5;
Kl. 12: Kathrin Borrmann 9,5, Paulina Herber 16.

Schrobenhausen, Gymnasium
Kl. 8: Luca Sindel 11.

Simbach am Inn, Tassilo-Gymnasium:
Kl. 8: Alexander Koblbauer 26.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 7: Mai Linh Dang 13;
Kl. 10: Tu Sam Dang 19,5;
Kl. 11: Miriam Büttner 23.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 10: Philipp Lörcks 24.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:
Kl. 8: Marie Baumgartner 5,5.

Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:
Kl. 8: Greta Waldmüller 7.

Mitteilungen

- **Mainzer Mathematik-Akademie:** Nach zwei Jahren Corona-bedingter Zwangspause soll dieses Jahr voraussichtlich endlich wieder die Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) stattfinden. Wenn es die Pandemie zulässt, soll sie vom 28. September bis 2. Oktober 2022 und voraussichtlich unter 2G-plus-Regel stattfinden. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  `https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma`.
- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Kalenderjahr 2022 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Soziale Netzwerke:** Monoid ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
  `www.facebook.com/monoid.matheblatt`
  `www.facebook.com/monoid.redaktion`
  `www.instagram.com/monoid.matheblatt`
  Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu Monoid finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
  Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Alina Gehlhaar
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 42 | Heft 149 | März 2022

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid