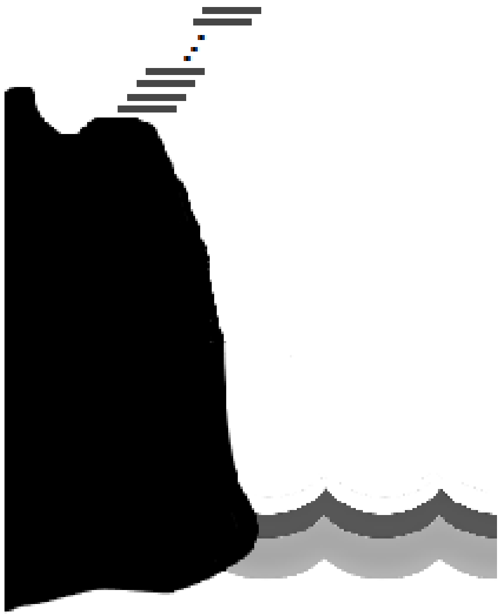
Jahrgang 39 Heft 140 Dezember 2019

# MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

**Wichtig:** Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

**Für Schüler/innen der Klassen 5–8** sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.02.2020.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:


**Johannes Gutenberg–Universität**
**Institut für Mathematik**
**Monoid-Redaktion**
**55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de


Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

# 10 Jahre Mainzer Mathe-Akademie
## Die Mainzer Mathe-Akademie 2019
von Felicia Vogl

Vom 28. August bis zum 1. September trafen sich zum zehnten Mal 30 Schülerinnen und Schüler zur Mainzer Mathe-Akademie an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Bei der MMA bekommen wir teilnehmenden Schüler einen ersten Einblick ins Unileben und setzen uns mit mathematischen Themen, die über die normale Schulmathematik hinausgehen, auseinander.
Dazu sucht sich jeder Schüler eines von drei Themengebieten aus, zu welchem er im weiteren Verlauf einen Kurs besucht. Das gewonnene Wissen wird dann am letzten Tag den Schülern aus den anderen Gruppen präsentiert. Dieses Jahr waren die Themen: „Treffen sich zwei Parallelen im Unendlichen“ (Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni), „Information und Codierung“ (Prof. Dr. Manfred Lehn) und „Spieltheorie“ (PD Dr. Matthias Schneider). Außerdem werden die Teilnehemer von studentischen Helfern und zwei Lehrkräften, Herrn Gruner und Herrn Mattheis, betreut.
Wir Teilnehmer wurden im Jugendhaus Don Bosco untergebracht, wo wir die Möglichkeit bekamen, uns kennen zu lernen, Spiele zu spielen oder auch einen Film zu schauen.
Außerdem hatten wir Schüler während der gesamten MMA zwischen den Programmpunkten Zeit, um uns mit den Studenten, Teilnehmern und Dozenten über das Mathematikstudium zu unterhalten.
Während der MMA gab es neben den Kursen auch andere Programmpunkte. So gab es am ersten Tag einen Kennenlernabend, wo alle Schüler inklusive der studentischen Helfer und Lehrer sich gegenseitig vorstellten und im Anschluss zusammen etwas spielen konnten. Am Donnerstag gingen wir zum Minigolfspielen und hatten nachher die Möglichkeit, einen Film im Don Bosco zu schauen. Freitag Mittag gab es dann eine ZDF-Führung und zum ersten Mal einen Bunten Abend, bei dem jeder die Chance bekam, seine Talente den anderen vorzuführen. Am Samstag gab es dann noch eine Uni-Führung, bei der uns der Campus etwas genauer gezeigt wurde, bevor wir dann mit den Vorbereitungen für die Präsentationen anfingen.
Sonntag ging es nun darum, die Vorträge zu halten. Dabei war das Ziel, den aus den Kursen erlernten Inhalt den anderen Teilnehmern vorzustellen, sodass wir am Ende von allen Themen etwas mitnehmen konnten. Uns wurden bei den Vorbereitungen nicht nur die Zusammenhänge unseres Themas erklärt, sondern auch erzählt, was zu einem guten Vortrag dazugehört.
So gingen die Teilnehmer mit einer ganz besonderen Erfahrung aus der Mainzer Mathe-Akademie am Sonntag wieder nach Hause. Es war eine schöne Zeit, in der wir uns mit Gleichgesinnten treffen und uns über mathematische als auch ander-

weitige Themen austauschen konnten. So ist die MMA für jeden weiterzuempfehlen, der Spaß und Interesse an Mathematik hat. Außerdem wollen wir Teilnehmer uns nochmal für den schönen Aufenthalt bedanken. Ohne die Organisatoren Herrn Gruner und Herrn Mattheis, dem Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz, sowie den Studenten und Dozenten wäre diese zehnte MMA nicht möglich gewesen.
*Felicia Vogl ist Schülerin der 11. Klasse des Rhein-Wied-Gymnasiums in Neuwied. An der MMA nahm sie dieses Jahr zum ersten Mal teil.*

### MMA-Termin 2020

Vielleicht seid Ihr jetzt neugierg geworden und möchtet auch einmal an der MMA teilnehmen, um Euch vier Tage mit Mathematik zu beschäftigen und andere Mathematik-Begeisterte kennenzulernen? Die nächste findet vom 9. bis 13. September 2020 statt. Näherere Informationen findet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter

`https://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`

# Aufgaben zum Neuen Jahr
## von Hartwig Fuchs

### Rationale Zahlen aufsummiert

Bestimme die Summe $S$ aller positiven Brüche $< 1$, deren Nenner $\leq 2019$ ist.

### Wahr oder falsch?

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 2017 \cdot 2018 + 2019 \cdot 2020 =$
$2(1 \cdot 2018 + 2 \cdot 2017 + 3 \cdot 2016 + ... + 2018 \cdot 2 + 2019 \cdot 1)$?

## Zwischenwert gesucht

Es sei $L = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2019}{2020}$ und $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2020}{2021}$.
Bestimme dann eine reelle Zahl $M$ so, dass der Ausdruck $L \star M \star R$ nach geeigneter Ersetzung des Symbols $\star$ durch das Zeichen $>$ oder das Zeichen $<$ eine Ungleichung ist.

## Zwei gleiche Summen

Es sei $M$ eine Menge von 15 verschiedenen Zahlen, die man beliebig aus einer Menge von positiven ganzen Zahlen $\leq 2020$ genommen hat. Ist es dann möglich, $M$ so in zwei Teilmengen zu zerlegen, dass die Summen der Zahlen in beiden Teilmengen gleich sind?

## Teiler von Potenzen

Die 6677-ziffrige Zahl $2020^{2019} - 1$ hat die Teiler 2019 und $2020 \cdot 2021 + 1$.
Trifft diese Behauptung zu?

## Eine Ungleichungskette

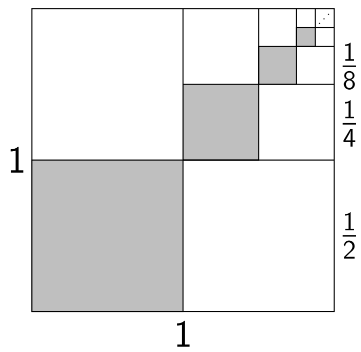
Es sei $S = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1022121}}$
Gilt dann $2019 < S < 2020$?

*Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 40.*

# Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

Es ist $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$

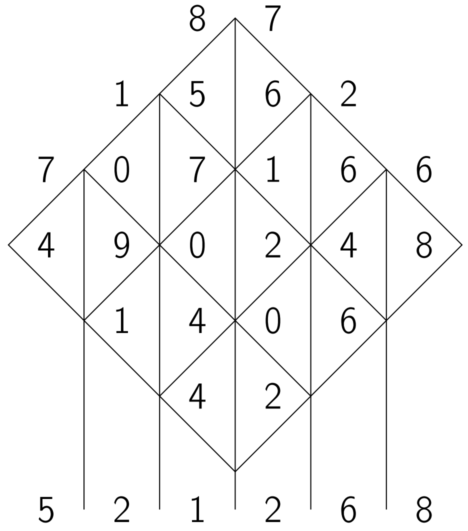



Ein paar Worte dazu:
Jedes schraffierte Quadrat besitzt zwei benachbarte nicht schraffierte Quadrate und diese drei Quadrate haben alle die gleiche Fläche und diese ist $\frac{1}{4^n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Daher gilt: $3(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots) = 1$

# Was uns so über den Weg gelaufen ist...

von H-J. Schuh

$$718 \cdot 726 = 521.268$$




Ein Multiplikationsschema dieser Art hat der persische Mathematiker und Astronom *Ghiyath al-Din Dschamschid bin Mas'ud bin Muhammad al-Kaschi* (ca. 1380 – 1429) vor hunderten von Jahren publiziert.
Zu seiner Zeit war er wohl die herausragende wissenschaftliche Persönlichkeit.
In Frankreich heißt der Kosinussatz *Théorème d'al-Kashi*, da er als erster diesen trigonometrischen Satz in kohärenter Form hergeleitet und dargestellt hat.
Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

# Hättest du es gewusst?
## Was ist eine Parität und was kann man damit machen?

von Hartwig Fuchs

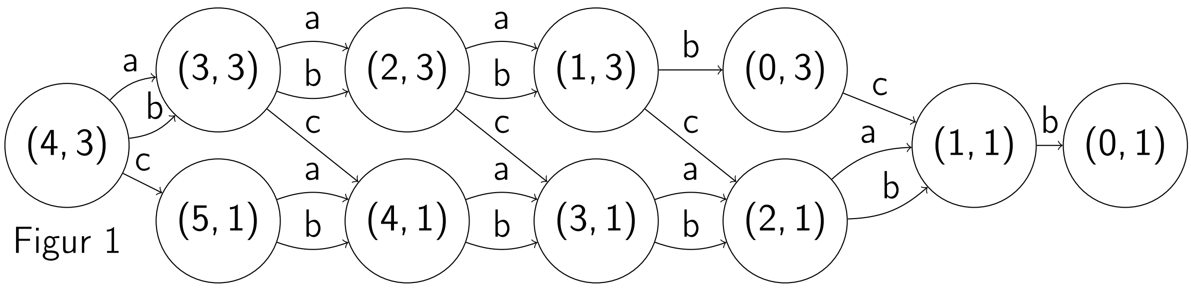
Eine Wahrsagerin besitzt ein sehr erfolgreiches Geschäftsmodell. Sie hat drei weiße und vier schwarze Kugeln in eine Schale gelegt und immer, wenn ihre Kunden sie über den Ausgang eines künftigen Ereignisses befragen, bittet sie die Besucher, ohne hinzusehen zwei Kugeln aus der Schale zu nehmen und dann eine Kugel in die Schale zu legen nach der Regel:

a: Sind beide Kugeln schwarz, so wird eine davon wieder in die Schale gelegt;

b: Sind sie verschiedenfarbig, so wird die weiße Kugel in die Schale zurückgelegt;

c: Sind beide Kugeln weiß, so wird eine schwarze Kugel in die Schale gelegt. Mit einer Ausnahme: Erhält man beim ersten Zug zwei weiße Kugeln, so legt die Wahrsagerin eine zusätzliche fünfte schwarze Kugel in die Schale.
Dieser Vorgang soll so oft wiederholt werden, bis nur noch eine Kugel in der Schale ist.
Die letzte Kugel wird die Frage der Besucher beantworten: Ist die weiß (bzw. schwarz), so wird das künftige Ereignis einen guten (bzw. keinen guten) Ausgang nehmen.
Das Ergebnis des Kugelexperiments entspricht immer den Erwartungen der BesucherInnen: Die letzte Kugel ist stets weiß!
Wieso?

Wir beschreiben das Kugelexperiment graphisch. Dabei bezeichne ein Zahlenpaar $(s, w)$ die Anzahl der weißen $(w)$ und der schwarzen $(s)$ Kugeln, die sich jeweils in der Schale befinden. Nach den drei Regeln a, b und c sind dann die folgenden Verläufe des Kugelorakels möglich:




Figur 1

Die Darstellung 1 zeigt: Aus dem Zustand $(s, w)$ gelangt man mit a und auch mit b in den Zustand $(s-1, w)$, mit c in den Zustand $(s+1, w-2)$. Also verringert sich die Anzahl der Kugeln in jedem Zustand um 1 – das Experiment endet also stets mit genau einer Kugel; die Anzahl der weißen Kugeln bleibt jedoch unverändert, oder sie vermindert sich um 2. Weil nun im Startzustand die Anzahl der weißen Kugeln ungerade ist, bleibt sie es auch im gesamten Verlauf des Experiments – die letzte Kugel muss daher weiß sein.

## Was ist eine Parität?

Die Parität ist eine Eigenschaft ganzer Zahlen*:
Zwei ganze Zahlen haben die gleiche *Parität*, wenn sie beide gerade oder aber beide ungerade sind.

- Die Zahlen $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ haben die gleiche Parität, denn sie sind alle gerade; ebenso haben die Zahlen $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ die gleiche Parität – sie sind alle ungerade.
- Alle Zahlen $a, a \cdot 2, a \cdot 3, \ldots$ haben die gleiche Parität für gerades $a$; dies gilt nicht, wenn $a$ ungerade ist.

* Zahl bedeutet im Folgenden stets ganze Zahl.

- Für ganze Zahlen $a, b$ gilt: $a + b$ und $a - b$ haben die gleiche Parität. Denn haben $a$ und $b$ die gleiche Parität, dann sind $a + b$ und $a - b$ beide gerade; haben $a$ und $b$ verschiedene Paritäten, dann sind $a + b$ und $a - b$ beide ungerade.

**Was kann man mit der Parität machen?**
Die Begründung, wieso das Kugelexperiment der Wahrsagerin stets zum gewünschten Ergebnis führt, ist ein Beispiel dafür, wie ein Problem manchmal mit Hilfe der Parität gelöst werden kann – und zwar dann, wenn die Fakten oder die Situationen, um die es geht, durch ganze Zahlen charakterisierbar sind:
Die Anzahl der weißen Kugeln in der Schale der Wahrsagerin hat in allen Stufen des Experiments die gleiche Parität – sie ist jeweils ungerade.

**Arbeiten mit Paritäten**
Nach dem Prinzip „Learning by doing" sollen nun einige durch Mitwirkung von Paritäten gelöste Probleme beschrieben werden. Zunächst:
*Zwei Vorübungen* für das Problemlösen mit Paritäten.
Jede ganze Zahl $n$ hat eine Darstellung vom Typ:
$n = g_1 + g_2 + ... + g_k + u_1 + u_2 + ... + u_l, g_i$ gerade, $i = 1, 2, ..., k$; $u_j$ ungerade, $j = 1, 2, ..., l$ und $k + l = n$.
Dann gilt:
• Die Anzahl $l$ der ungeraden Summanden hat die gleiche Parität wie $n$.
Nachweis
Ist $n$ gerade (ungerade), dann ist die Summe $u_1 + u_2 + ... + u_l$ gerade (ungerade), was nur der Fall ist, wenn $l$ gerade (ungerade) ist.
Daraus folgt: $n$ und $l$ sind von gleicher Parität.
Es sei $k_1, k_2, ..., k_n$ eine Zahlenfolge, die man durch Umordnung der $n$ Zahlen $1, 2, 3, ..., n$, $n$ ungerade, erhält. Dann gilt:
• Das Produkt $P = (k_1 - 1)(k_2 - 2)...(k_n - n)$ ist eine gerade Zahl.
Nachweis
Annahme: $P$ ist ungerade.
Dann ist jeder Faktor $k_i - i, 1 \leq i \leq n$, ungerade (wäre auch nur ein Faktor $k_i - i$ gerade, so wäre $P$ gerade).
Somit ist $S = (k_1 - 1) + (k_2 - 2) + ... + (k_n - n)$ eine Summe aus ungeradzahlig vielen ungeraden Summanden.

(1) $S$ ist also ungerade

Nun gilt aber $k_1 + k_2 + ... + k_n = 1 + 2 + ... + n$. Daraus folgt:

(2) $S$ ist gerade, denn $S = 0$.

Nach (1) und (2) hätte also die Zahl $S$ zwei verschiedene Paritäten. Weil das nicht möglich ist, muss die Annahme falsch sein; es gilt die Behauptung.

## Parität in der Zahlentheorie

Es sei $n$ eine natürliche Zahl und $2n+1$ sowie $3n+1$ seien Quadratzahlen.

• Dann ist $n$ ein Vielfaches von 8.

Nachweis

(1) Es sei $2n+1=a^2$

Mit $a^2$ ist auch $a$ ungerade und somit $a=2g+1$ für eine Zahl $g$.
Aus (1) folgt: $2n+1=(2g+1)^2=4g^2+4g+1$, sodass $n=2g^2+2g$ und mithin $n$ gerade ist.

(2) Es sei $3n+1=b^2$

Da $n$ gerade ist, sind $b^2$ und damit auch $b$ ungerade. Daher ist $b=2h+1$ für eine Zahl $h$.
Subtrahiert man nun (1) von (2), so erhält man $n$ und

$$\begin{aligned} n &= b^2-a^2 \\ &= (b+a)(b-a) \\ &= (2h+2g+2)(2h-2g) \\ &= 4\cdot(h+g+1)(h-g). \end{aligned}$$

Weil nun $h+g$ und $h-g$ die gleiche Parität besitzen (Warum?), haben $h+g+1$ und $h-g$ verschiedene Paritäten, sodass ihr Produkt gerade und somit ein Vielfaches von 2 ist. Folglich ist $n$ ein Vielfaches von 8.

## Parität in der Geometrie

In der mit einem Koordinatensystem versehenen Ebene sei ein Fünfeck $F$ gegeben, dessen Eckpunkte jeweils Gitterpunkte** sind.
Dann besitzt $F$ zwei Eckpunkte, $A$ und $B$, für die gilt:

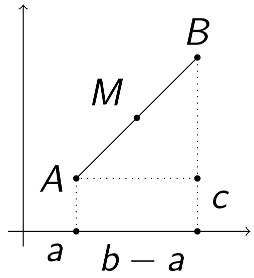
• Der Mittelpunkte $M$ der Fünfeckseite $AB$ ist ein Gitterpunkt.

Nachweis

Für vier Eckpunkte von $F$ sind hinsichtlich der Parität ihrer Koordinaten nur die Kombinationen $(g,g),(g,u),(u,g),(u,u)$ möglich, wobei $g$ eine gerade und $u$ eine ungerade Koordinate bezeichnet.
Nach dem Schubfachprinzip muss dann der Paritätstyp des Koordinatenpaares des fünften Eckpunktes von $F$ mit einem der genannten vier Paritätstypen übereinstimmen.
Es seien daher $A=(a,c)$ und $B=(b,d)$ zwei Eckpunkte von $F$, für die $(a,c)$ und $(b,d)$ vom gleichen Paritätstyp sind.

** Punkte mit ganzzahligen Koordinaten heißen Gitterpunkte

Für die Koordinaten des Mittelpunktes $M = (p, q)$ der Strecke $AB$ gilt dann:
$p = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b)$
$q = c + \frac{1}{2}(d - c) = \frac{1}{2}(c + d)$




Da nun $a$ und $b$ sowie $c$ und $d$ jeweils von gleicher Parität und daher auch $a + b$ sowie $c + d$ gerade Zahlen sind, folgt:
$p$ und $q$ sind ganze Zahlen, sodass $M$ ein Gitterpunkt ist.

## Parität in der Algebra

Es sei $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ mit ganzzahligen $a, b, c$; $f(0)$ sowie $f(-1)$ seien ungerade. Dann gilt:
• Die Gleichung $f(x) = 0$ hat höchstens zwei ganzzahlige Lösungen.
Nachweis
Wegen $f(0) = c$ hat die Zahl $c$ die gleiche Parität wie $f(0)$ und $f(-1)$, ist also ungerade.
Aus $f(-1) = -1 + a - b + c$ folgt $f(-1) - c = -1 + a - b$.
Weil $f(-1) - c$ eine gerade Zahl ist, muss $a - b$ ungeradzahlig sein. Also gilt

(1) $a$ und $b$ haben verschiedene Paritäten

Es seien nun $f(0)$ und $f(-1)$ nach Voraussetzung ungerade.
Wir nehmen an: $f(x) = 0$ hat drei ganzzahlige Lösungen*** $r, s$ und $t$. Dann gilt:

$$f(x) = (x - r)(x - s)(x - t) = x^3 - (r + s + t)x^2 + (rs + st + tr)x - rst$$

Nun ist $rst = c$, $c$ eine ungerade Zahl. Also sind $r, s$ und $t$ ungerade, also sind auch $a = -(r + s + t)$, sowie $b = rs + st + tr$ ungerade. Daraus folgt:

(2) $a$ und $b$ haben die gleiche Parität.

Die Aussagen (1) und (2) bilden eine Widerspruch – die Annahme ist somit falsch.

## Parität und Algorithmen

Es sei $S_0$ die Summe $1 + 3$. Man ersetze nun den Summanden 1 in $S_0$ durch 5 oder 7. Das Ergebnis bezeichnen wir mit $S_1 = 1 + b, b = 7$ oder $b = 9$. Auf die gleiche Weise verfahre man mit $S_1$ und man erhält $S_2 = 1 + ...$ und ebenso ergebe sich $S_3 = 1 + ...$, und so weiter.
Befindet sich dann in einer der so konstruierten hinreichend langen Zahlenfolge $S_0, S_1, S_2, ...$ die Zahl $2019^{2019}$?
Lösung: Wir zeigen, dass in jeder Folge $S_0, S_1, S_2, ...$ alle Folgengleider die gleiche Parität haben. Für jede aus $S_0$ entwickelte Zahlenfolge $S_0, S_1, S_2, ...$ gilt nämlich:

(1) $S_{n+1} = S_n - 1 + 5 = S_n + 4$ oder $S_{n+1} = S_n - 1 + 7 = S_n + 6$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$

*** Eine Gleichung dritten Grades $f(x) = 0$ hat höchstens drei Lösungen.

Aus (1) folgt: Jedes Folgenelement $S_{n+1}$ ergibt sich aus seinem Vorgänger $S_n$ durch Addition einer geraden Zahl und daher haben sämtliche Zahlen $S_i$, $i \geq 0$ die gleiche Parität. Weil nun $S_0$ gerade ist, gilt das auch für jedes $S_i$. Somit kommt die ungerade Zahl $2019^{2019}$ nicht in der Folge $S_0, S_1, S_2, \ldots$ vor.

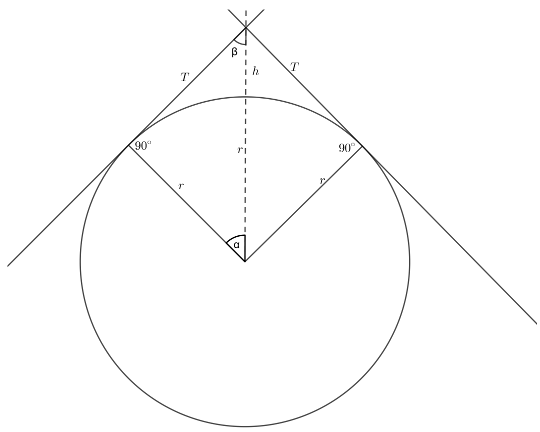
### Eine Bemerkung zum Schluss

Das Paritätsprinzip stellt nur eine mit einem etwas abschreckendem Namen versehene Variante einer umfassenderen mathematischen Methode dar.
Diese Methode erlaubt auch das Arbeiten mit anderen Paaren von komplementären Zahleigenschaften – also Eigenschaften, durch die eine Zahlenmenge in disjunkte Teilmengen zerlegbar ist, zum Beispiel mit Paaren wie (positiv, negativ) auf der Menge der von Null verschiedenen ganzen Zahlen oder (prim, zerlegbar) auf der Menge $\{2, 3, 4, \ldots\}$ oder (perfekt, nicht perfekt) auf der Menge $\{\frac{2^{n-1}\cdot(2^n-1)}{n} = 1, 2, 3, \ldots\}$ .

# Mathematische Entdeckungen

### Der Erdumfang mal anders

Wird ein um einen Kreis mit $U_0 = 2\pi r_0$ gespanntes Band um 1 Meter verlängert, so ist der sich daraus ergebende Radius des größeren Kreises unabhängig von der Größe von $r_0$ bekanntermaßen $r_0 + 0,159m$. Und dies unabhängig von der Größe von $r_0$!
Nun die *veränderte Fragestellung*: Welche Länge muss ein Stock haben, mit dessen Hilfe das um einen Meter verlängerte Band senkrecht vom Kreis abgespannt wird? In der Skizze rechts ist der Stock durch die gestrichelte Linie $h$ dargestellt. Durch die Spannung bilden sich im oberen Bereich des verlängerten Bandes zwei Tangenten $T$ an den Kreis.




Der Autor dieser Aufgabe schreibt einen Preis in Höhe von 50 € aus, welche der Schüler oder die Schülerin mit der ersten eingesandten korrekten Lösung erhält. Ihr könnt die Lösung wie gewohnt per Post oder per Mail einsenden, bitte vergesst aber nicht, eure Kontaktdaten anzugeben.

*Hinweis:* Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2020 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

# Lösung der Aufgabe aus Heft 138

In Heft 138 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

**Eine sich selbst reproduzierende Zahlenfolge**

Im Jahre 1965 gab der Mathematiker W. Kolakoski eine Definition einer Folge $F: f_1, f_2, f_3, ...$ von Zahlen, $f_i \in \{1, 2\}$ an.

Die Folge $F$ ist so festgelegt:

1. Die beiden ersten Elemente der Folge sind $f_1 = 1$, $f_2 = 2$.
2. In $F$ stehen niemals drei gleiche Zahlen hintereinander.
3. Ersetzt man jedes Paar in $F$ benachbarter gleicher Zahlen durch die Zahl 2 und alle übrigen Zahlen aus $F$ durch 1, so erhält man wieder die Folge $F$.

Untersuche nun die Folge $F$ im Hinblick auf die folgenden Fragen:

a) Welche Eigenschaften der Folge $F$ fallen dir auf?

b) Welche sind die ersten 12 Elemente der Folge $F$?

c) Gibt es ein Konstruktionsmuster für die Folge $F$?

d) Wie häufig sind die Zahlen 1 und 2 in einem Anfangsstück von $F$ der Länge $n$ enthalten, zum Beispiel $n = 1000$ oder $n = 10^6$ (Computer!)?

e) Findest du eine Formel, mit der man $f_n$ für ein gegebenes $n$ berechnen kann?

(H.F.)

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt:
Maximilian Göbel, Klasse 12, Internatsschule Schloss Hansenberg, Geisenheim
Clemens Zabel, Klasse 10, Theresianum Mainz
Oscar Su, Klasse 6, Elisabeth Langgässer-Gymnasium, ALzey

Clemens schreibt zur Konstruktion, Aufgabenteile a) bis c):
Zuerst schreibt man die Ziffern 1 und 2 (wegen (1)) in die obere Zeile.
Dann schreibt man die gleichen Ziffern nochmal darunter:

1 2
1 2

Nun fügt man diese 2 wiederum der oberen Folge hinzu:

1 22
1 2

Nun kann man sie nach Bedingung (3) unten dazufügen:

1 22
1 2 2

Daher folgt oben ein Ziffernpaar, nach Bedingung (2) ein Einserpaar:

1 22 11
1 2 2

Dies kann man wiederum der unteren Zeile hinzufügen und nach diesem Prinzip (abwechselnd oben/unten) die Folge beliebig weit konstruieren.
Die Folge beginnt mit

$$1\,2\,2\,1\,1\,2\,1\,2\,2\,1\,2\,2\,1\,1\,2\,1\,1\,2\,2\,1\,2\,1\,1\,2\,1\,2\,2\,1\,1\,2\,1\,1\ldots$$

Zu Aufgabenteil d) beobachtet Oscar, dass die Zahlen 1 und 2 je zu ungefähr 50% erscheinen.
Clemens schreibt: Fasst man die ersten $n$ Zahlen der Kolakoski-Folge zu einem Päckchen zusammen, wobei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl ist, die zweiten $n$ ebenso, und so weiter, so enthält jedes Päckchen entweder genau eine 1 mehr als 2en, oder umgekehrt.
Maximilian beweist, dass von je neun aufeinander folgenden entweder genau eine 1 mehr als 2en, oder umgekehrt auftritt.
Zu Aufgabenteil e):
Eine Formel, die aus gegebenem $n$ direkt das $n$-te Folgenglied berechnet ist unseres Wissens nach nicht bekannt, es handelt sich um ein ungelöstes Problem.

# „Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Der König war alt geworden und wollte sein Erbe verteilen. In dem großen rechteckigen Wald hatte er seinen beiden Kindern das Jagen beigebracht, und dieser Wald sollte durch eine gerade Linie zu gleichen Teilen auf die Kinder verteilt werden. Allerdings gab es in dem Wald eine kleine rechteckige Lichtung. Sie lag nicht in der Mitte, ihre Ränder waren nicht parallel zu den Rändern des Waldes, und auch das Verhältnis ihrer Seitenlängen entsprach nicht dem des ganzen Waldes. Die Kinder liebten diese Lichtung und daher sollte auch sie zu gleichen Teilen jedem der beiden gehören.
Ist es möglich, den Wald mit der Lichtung durch eine einzige Gerade in jeweils zwei gleich große Gebiete zu teilen? (Die Antwort ist zu begründen.)

# Lösung der Aufgabe aus Heft 138

In Heft 138 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Peter und Paul wollen wieder einmal ins Kino gehen. Bekanntlich zahlt der Verlierer ihrer Wette für beide das Eintrittsgeld.
Heute fordert Peter seinen Freund auf, sich zwei natürliche Zahlen zu denken, wobei die größere durch die kleinere der Zahlen teilbar sein muss. Dann soll Paul die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten dieser zwei Zahlen bilden und alle vier Ergebnisse addieren. Peter würde dann aus diesem Resultat

die beiden Zahlen bestimmen, die sich Paul gedacht hat. Läge er falsch, hätte Paul die Wette gewonnen.

Paul nimmt die Wette an, denkt sich zwei Zahlen, rechnet fleißig, ohne dass Peter ihm über die Schulter schauen kann, und verkündet als Resultat schließlich die Zahl 507. Kann Peter die Wette gewinnen und die beiden Zahlen bestimmen? (Die Lösung soll auch eine kurze Begründung enthalten.)

**Lösung**

Wir bezeichnen die größere der beiden Zahlen mit $a$ und die kleinere Zahl mit $b$. Dann gibt es wegen der Teilbarkeitsbedingung eine natürliche Zahl $n$ mit $a = n \cdot b$. Die Rechnung von Paul können wir damit so schreiben:

$(n \cdot b + b) + (n \cdot b - b) + (n \cdot b \cdot b) + (n \cdot b : b) = 507$

Vereinfachen führt auf:

$$\begin{aligned} 2nb + nb^2 + n &= 507 \\ n(2b + b^2 + 1) &= 507 \\ n(b+1)^2 &= 507 \end{aligned}$$

Die Primfaktorzerlegung von 507 liefert $507 = 3 \cdot 13 \cdot 13$, so dass wegen des Quadrats $n = 3$ und $b + 1 = 13$ sein muss, weil die andere Möglichkeit $b + 1 = 1$ wegen $b = 0$ die Division nicht möglich macht. Also ist $b = 12$ und $a = 36$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit dieser einzigen Lösung.

Ganz oder fast vollständig richtige Lösungen haben Marie Bauer, Katrin und Annika Borrmann, Maximilian Göbel, Josefine Kaßner, Philipp Lörcks, Marlene Maager, Sönke Schneider, Oscar Su und Clemens Zabel eingereicht.

*Paul hat sich natürlich geärgert, dass Peter die Wette gewonnen hat. Daher hat er Peter aufgefordert, sich ebenfalls zwei Zahlen zu denken und entsprechend zu rechnen. Peter nannte ihm das Ergebnis 180. Konnte nun Paul die Wette gewinnen? Aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe.*

# Mathematische Lese-Ecke
## Lesetipps zur Mathematik
Martin Mattheis

### Buijsman, Stefan: Espresso mit Archimedes

Der Untertitel verrät gleich, worum es bei dem Buch „Espresso mit Archimedes“ geht: Unglaubliche Geschichten aus der Welt der Mathematik.

Der Autor, Stefan Buijsman, geb. 1995 in Leiden, studierte dort Informatik und Philosophie, machte 2013 an der dortigen Universität einen Masterabschluss in Philosophie. Drei Jahre später promovierte er an der Universität Stockholm über Philosophie der Mathematik

Ausgehend von Google Maps verdeutlicht der Autor an Beispielen, welche Art von Mathematik dahinter steckt, eine optimale Route zu berechnen oder wie Netflix Filmempfehlungen für den einzelnen Nutzer erstellt. Sein Ziel ist es, den Leserinnen und Lesern dabei bewusst zu machen, „dass es sinnvoll ist, heute etwas von Mathematik zu verstehen", da Mathematik unser modernes Leben in sehr vielen Bereichen beeinflusst.
Unklar bleibt dem Rezensenten allerdings, warum der Beck-Verlag - bei dieser Zielsetzung des Autors - den Titel „Espresso mit Archimedes" ausgewählt hat, anstatt den niederländischen Original-Titel wörtlich in „Plus und Minus. Mathematik in der Welt um uns herum" zu übersetzen. Wird den deutschen Leserinnen und Lesern vom Lektorat nicht zugetraut, sich für die uns umgebende Mathematik zu interessieren?
Im zweiten Kapitel entwirft Buijsman nach einem Rückblick auf Platons Zahlenverständnis ein Bild der Mathematik als einer einzig großen Erzählung, in der sich der Einzelne – um zu verstehen, was Mathematik eigentlich ist – vor allem selbst mit mathematischen Fragestellungen befassen muss.
Im dritten Kapitel stellt sich der Autor – ausgehend von einem kleinen Amazonasvolk, dass keine Wörter für Zahlen kennt – vor, wie eine Welt ohne Zahlen und Mathematik aussehen könnte und wie sich Kleinkinder dem Zählen nähern.
Ein weiteres Kapitel beschäftigt sich mit der Alltagsmathematik zur Staatsorganisation in antiken Hochkulturen wie zum Beispiel Mesopotamien und betrachtet dann die Unterschiede mathematischen Denkens in Ägypten, Griechenland und dem alten China.
Weitere Kapitel beleuchten die Entwicklung der Infinitesimalrechnung (inklusive den Prioritätsstreit von Newton und Leibniz) und deren Anwendungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Spieltheorie sowie Graphentheorie (in Anlehnung an das Einführungskapitel mit Google Maps).
Das Schlusskapitel ist dann dem „Nutzen der Mathematik" für unser Leben gewidmet. Buijsman zieht bezüglich der Frage, ob wir die Mathematik, die uns in unserem Alltag in den verschiedensten nützlichen Anwendungen begegnet, wirklich verstehen müssen, die Politik als Vergleichsobjekt heran. Dort müssen wir – auch wenn uns Politik manchmal nicht besonders nahe liegt – wissen, wie das politische System unserer Demokratie funktioniert, weil auch kleine Gesetzesänderungen große Auswirkungen auf unseren Alltag haben können. Genauso hält es der Autor mit der Mathematik, auch wenn wir dort nicht jedes Detail, in dem sie Einfluss auf unser Leben ausübt, präsent haben müssen und nicht jede Zahl, die uns begegnet nachrechnen müssen, so sollten wir doch verstehen, wie z. B. eine politische Umfrage zu deuten ist und was passiert, wenn wir großen Internetkonzernen unzählig viele Informationen über unser Leben überlassen.

*Fazit:*
Insgesamt merkt man dem Buch an, dass sein Autor sich mit Philosophie der Mathematik und nicht mit Mathematik selbst beschäftigt. Es werden lesenswerte Überlegungen über den Umgang von Menschen mit mathematischen Fragestellungen dargelegt, die auch mit Beispielen untermauert werden. Wer sich jedoch als Leserin oder Leser selbst mit mathematischen Aufgaben beschäftigen möchte, der könnte vom Verhältnis *Textlänge : konkreten mathematischen Aussagen* enttäuscht sein.

*Gesamtbeurteilung:* gut ☺☺


**Angaben zum Buch:**
Buijsman, Stefan: Espresso mit Archimedes.
C.H.Beck 2019,
ISBN 978-3-406-73951-4,
gebunden 219 Seiten.

| | |
|---|---|
| Art des Buches: | Sachbuch zur Philosophie der Mathematik |
| Mathematisches Niveau: | verständlich |
| Altersempfehlung: | ab 14 Jahren |

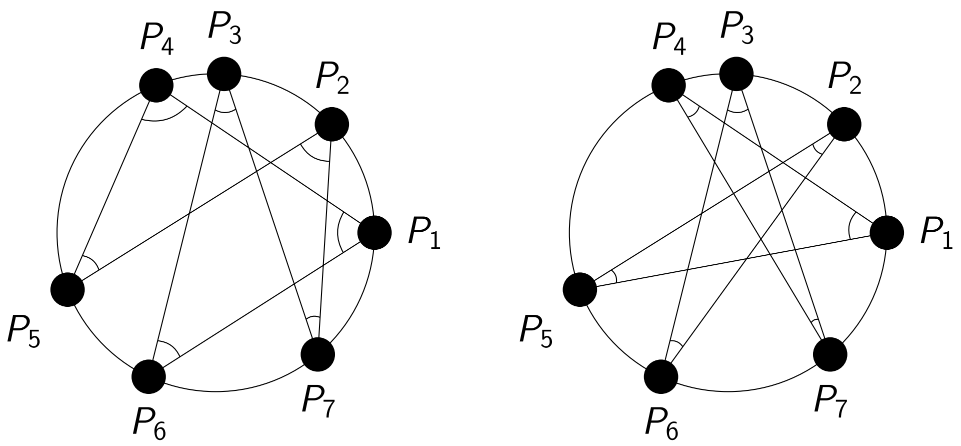
# Die Aufgabe für den Computer-Fan

## Innenwinkelsumme

Gegeben seien ein Kreis $K$ mit beliebigem Radius sowie eine *ungerade* Anzahl $n$ paarweise verschiedener Punkte $P_1, \dots, P_n$ auf $K$. Es sei weiterhin $T$ ein Vieleck mit genau den Eckpunkten $P_1, \dots, P_n$ *in beliebiger Reihenfolge*, das heißt $T$ entspricht den Strecken $\overline{P_{i_1}P_{i_2}}, \overline{P_{i_2}P_{i_3}}, \dots, \overline{P_{i_{n-1}}P_{i_n}}, \overline{P_{i_n}P_{i_1}}$, wobei in der Folge $\{i_1, \dots, i_n\}$ jede Zahl aus $\{1, \dots, n\}$ genau einmal vorkommt.
Wir interessieren uns für die Summe der *Innenwinkel* an jedem der Eckpunkte, also

$$S = \angle P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3} + \angle P_{i_2}P_{i_3}P_{i_4} + \dots + \angle P_{i_n}P_{i_1}P_{i_2}.$$

Beachten Sie, dass das Vieleck „überschlagen“ sein kann, das heißt die verschiedenen Strecken des Vielecks können einander schneiden (siehe auch die Abbildung).




Beispiel für $n = 7$ Punkte mit eingezeichneten Innenwinkeln für die Reihenfolgen $(i_1, \dots, i_7) = (1, 4, 5, 2, 7, 3, 6)$ (links) und $(i_1, \dots, i_7) = (1, 4, 7, 3, 6, 2, 5)$ (rechts).

a) Schreiben Sie ein Programm, welches zufällig eine gegebene Anzahl an Punkten auf einem Kreis anordnet und für eine gegebene (oder ebenfalls zufällige) Reihenfolge die Innenwinkelsumme $S$ berechnet.

b) Versuchen Sie nun, eine Reihenfolge der Punkte so festzulegen, dass die Innenwinkelsumme möglichst klein wird. Was beobachten Sie? (Hinweis: die in der linken Abbildung gezeigte Reihenfolge hat *nicht* die kleinst mögliche Innenwinkelsumme, die in der rechten Abbildung aber schon.)

c) Versuchen Sie, Ihre Beobachtung auch formal zu beweisen.

*Hinweis:* Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2020 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

# Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 137

## Merkwürdige Darstellung natürlicher Zahlen

Wir nennen eine Zahl $n$ segmentteilbar, wenn jede der Ziffern 1,2,3,4,5,6,7,8 und 9 genau einmal in ihr vorkommt ($n$ ist also neunstellig) und wenn die Zahlen $n_i$ gebildet aus den ersten $i$ Ziffern von $n$ für alle $i = 1, \dots, 9$ durch $i$ teilbar sind. (Vergleiche die Aufgabenstellung für die Mathematischen Entdeckungen). Finde alle segmentteilbaren Zahlen.

## Lösung

Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht darin, dass es sehr viele neunstellige Zahlen gibt. Daher würde das Durchprobieren aller neunstelligen Zahlen und jede einzelne auf Segmentteilbarkeit zu überprüfen sehr lange dauern.
Schneller geht es, wenn man sich klar macht, dass es bereits für kleine $i = 1, 2, \dots, 9$ sehr wenige Zahlen gibt, die die geforderte Bedingung für die Segmentteilbarkeit erfüllen. Es bietet sich daher an, die einzelnen Ziffern der Zahl beginnend ganz links zu überprüfen ohne die restlichen Ziffern bereits festgelegt zu haben.
Das folgende Programm tut dies mittels einer *rekursiven* Funktion `segmentteilbar(i,x)`. Dabei ist $i$ die nächste zu überprüfende Ziffer, $x$ die Zahl bestehend aus den ersten $i - 1$ Ziffern.

```
def segmentteilbar(i, x):
    if i == 10:  # Ende erreicht
        print(x) # Zahl ausgeben
        return

    # Alle Ziffern durchprobieren
    for d in range(1, 10):
        # Test, ob Ziffer d bereits benutzt
        benutzt = False
        y = x
        while y > 0:
            if y % 10 == d:
                benutzt = True
            y = y // 10
        # Falls Ziffer noch frei ...
        if not benutzt:
            # ... Ziffer anf\"{u}gen ...
            y = x * 10 + d
            # ... und auf Teilbarkeit testen
            if y % i == 0:
                # n\"{a}chste Ziffer anh\"{a}ngen
                segmentteilbar(i + 1, y)

# Beginn bei Ziffer 1 und Anfangszahl 0
segmentteilbar(1, 0)
```

Lässt man das Programm laufen, so erkennt man, dass es nur *eine* segmentteilbare Zahl gibt: 381654729

# Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 139

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

## I. Claudia kauft ein

Claudia macht eine Einkaufstour. Zunächst kauft sie Getränke für 10% ihres Geldes. Danach gibt sie in der Metzgerei 20% des ihr noch verbliebenen Betrags aus. Dann kauft sie für 30% des Rests Lebensmittel. Zum Schluss leistet sie sich für die noch verbliebenen 252 € ein Paar Wanderschuhe.

a) Wie viel Geld hatte Claudia anfangs?

b) Was haben die einzelnen Einkäufe gekostet? (WJB)

*Lösung:*

a) Vor dem Kauf der Schuhe hatte Claudia noch 70% von 80% von 90% des ursprünglichen Betrages $B$, das heißt $0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot B = 252$ €

$$B = \frac{252 \text{ €}}{0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9} = 500 \text{ €}$$

b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Getränke | 10% von 500 € | = | 50 € |
| Wurst und Fleisch | 20% von (500-50) € | = | 90 € |
| Lebensmittel | 30% von (500-50-90) € | = | 108 € |
| Schuhe | (500-50-90-108) € | = | 252 € |

## II. Altersbestimmung

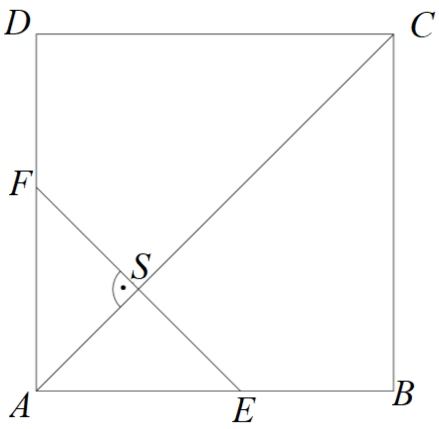
Mathis bemerkt, dass die Telefon-Nummern 264969, 458440 und 661983 seiner drei Freunde bei der Division durch sein Alter (in ganzen Jahren) stets den gleichen Rest ergeben und dass dieser Rest das ganzzahlige Alter seiner Enkelin ist. Wie alt sind Mathis und seine Enkelin? (H.F.)

*Lösung:*

Leider hat sich in die Aufgabenstellung ein Tippfehler eingeschlichen: Die dritte Telefonnummer hätte 601983 lauten sollen. Wer begründet hat, warum die Aufgabe nicht lösbar ist, hat die für die Lösung vorgesehenen Punkte bekommen. Im kommenden Heft geben wir Euch erneut die Chance, die Aufgabe mit der korrigierten Aufgabenstellung zu lösen.

## III. Länge einer Diagonalen

Im Quadrat $ABCD$ seien der Punkt $E$ auf der Seite $AB$ und der Punkt $F$ auf der Seite $AD$ so gewählt, dass gilt:

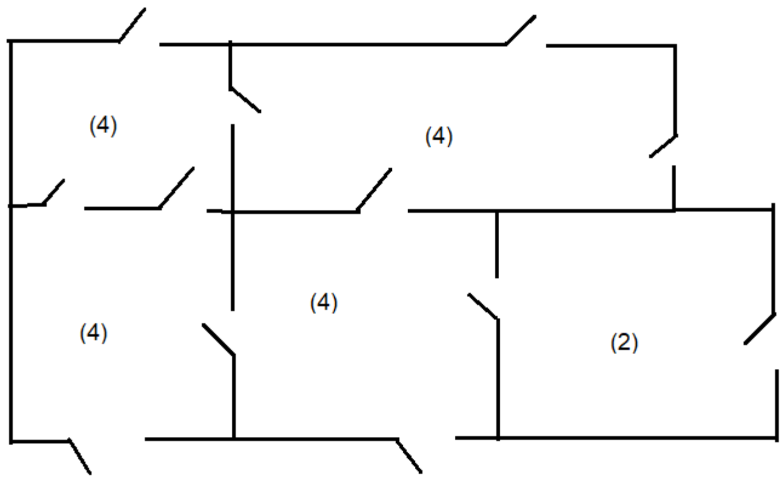



Die Strecke $EF$ ist orthogonal zur Diagnoale $AC$ und wenn $S$ der Schnittpunkt von $EF$ und $AC$ ist, dann sei $|SC| = |EF| = 12$.
Wie lang ist dann die Diagonale $AC$? (H.F.)

*Lösung:*
Es ist $|\angle SAF| = |\angle EAS| = 45°$. Daher gilt $|\angle AFS| = 45°$ und $|\angle SEA| = 45°$. Die Dreiecke $ASF$ und $AES$ sind also gleichschenklig und es gilt $|AS| = |ES|$ sowie $|AS| = |SF|$. Daraus folgt $|ES| = |SF| = \frac{1}{2}|EF| = 6$ und deshalb ist auch $|AS| = 6$.
Damit gilt: $|AC| = |AS| + |SC| = 6 + 12 = 18$.

## IV. Frische Luft

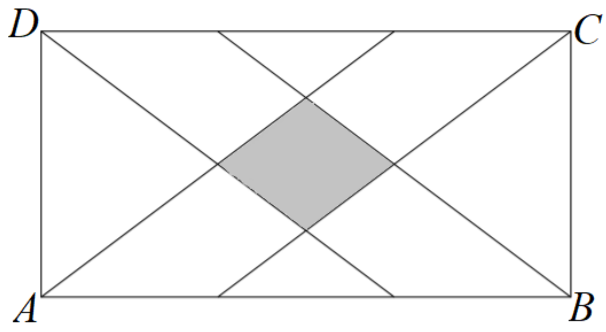
In einem Gebäude sind manche Räume durch Türen miteinander verbunden. Außerdem gibt es Türen ins Freie.
Zeige: Gibt es (wie im skizzierten Beispiel) in jedem Raum eine gerade Anzahl von Türen, so ist auch die Anzahl der Türen ins Freie gerade. (WJB)




*Lösung:*
Ist $A$ die Anzahl der Außentüren, $I$ die der Innentüren und $S$ die Summe der Türen in den einzelnen Räumen, so ist $S = A + 2I$ (da jede Innentür bei zwei Räumen mitgezählt wird). $S$ und $2I$ sind gerade, also auch $A$.

## V. Flächenverhältnis im Rechteck

In einem Rechteck werden die Seiten in drei gleiche Teile geteilt. Die Teilungspunkte werden jeweils mit der weiter entfernten Ecke verbunden.

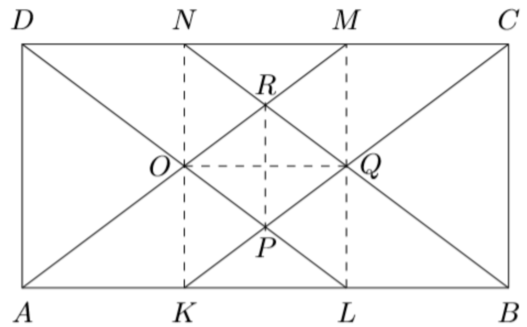



a) Zeige, dass das Verhältnis der Fläche des gefärbten Rechtecks zur Fläche des Rechtecks unabhängig von den Seitenlängen des Rechtecks ist und bestimme dieses Verhältnis.

b) Gilt diese Aussage auch für beliebige Parallelogramme $ABCD$? (WJB)

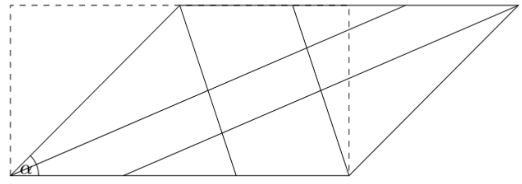
*Lösung:*

a)




Die Dreiecke $AOD$, $KQN$, $MOL$ und $CQB$ sind deckungsgleich. Damit ist $|\overline{OQ}| = \frac{1}{3}|\overline{AB}|$. Die Dreiecke $KLP$, $QOP$, $OQR$ und $MNR$ sind deckungsgleich. Damit ist $|\overline{PR}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$. Die Fläche der Raute ist also $\frac{1}{2}|\overline{PR}| \cdot |\overline{OQ}| = \frac{1}{2}\frac{1}{3}|\overline{AB}| \cdot \frac{1}{2}|\overline{BC}|$, also $\frac{1}{12}$ der Rechtecksfläche $|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|$.

b)




Die Scherung (vgl. Abbildung) führt das Parallelogramm über in das gestrichelte Rechteck. Dabei bleiben alle (Teil-)Flächen erhalten somit ist auch hier die Fläche des inneren Parallelogramms gleich $\frac{1}{12}$ der Gesamtfläche.

## VI. Addition ohne Übertrag (H.F.)

Wie viele Paare von ganzen Zahlen $\geq 0$ gibt es, die beide höchstens zehnstellig sind und bei deren Addition kein Übertrag stattfindet?

*Lösung:*

Jede in Frage kommende Zahl sei mit 10 Ziffern geschrieben, also zum Beispiel 0000000027 an Stelle von 27 und so weiter.

Es seien dann $x = x_1x_2x_3...x_{10}$ und $y = y_1y_2y_3...y_{10}$. und

$$x + y = \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{10} \\ + & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{10} \\ \hline & z_1 & {}_2 & z_3 & z_4 & \dots & z_{10} \end{array}$$

Es sei $x_{10} + y_{10} = z_{10} \leq 10$. Diese Ungleichung ist erfüllt, falls gilt:

für $x_{10} = 0$ kann $y_{10}$ einen der 10 Werte 0, 1, 2, ..., 9 annehmen.

für $x_{10} = 1$ kann $y_{10}$ einen der 9 Werte 0, 1, 2, ..., 8 annehmen.

...

für $x_{10} = 9$ kann $y_{10}$ nur den Wert 0 annehmen.

Somit gibt es für die letzten Ziffern $x_{10}$ und $y_{10}$ von $x$ und $y$ $10+9+8+...+1 = 55$ Möglichkeiten.

Die gleiche Überlegung trifft für $x_9, y_9, ...$ sowie für $x_1, y_1$ zu.

Deshalb gibt es insgesamt $55^{10} \approx 2,5 \cdot 10^{17}$ Zahlenpaare $x, y$ bei deren Addition an keiner Stelle ein Übertrag stattfindet.

## VII. Verpackung von Früchten

In einer Obstplantage wurden an einem Tag 21600 Apfelsinen, 18000 Mandarinen und 4500 Pampelmusen geerntet.

Diese Früchte sollen in Kisten verpackt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:

1) alle Kisten enthalten die gleiche Anzahl von Früchten;

2) in jeder Kiste sind nur Früchte der gleichen Sorte;

3) die Anzahl der Früchte in den Kisten ist möglichst groß.

Wie viele Früchte sind in jeder Kiste und wie viele Kisten werden gefüllt? (H.F.)

*Lösung:*

Wegen $21600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 18000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ und $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ haben diese drei Zahlen den größten gemeinsamen Faktor $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$.

Wenn man daher in jede Kiste 900 Früchte legt, dann hat man 24 Kisten mit Apfelsinen, 20 Kisten mit Mandarinen und 5 Kisten mit Pampelmusen – das sind insgesamt 49 Kisten.

# Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

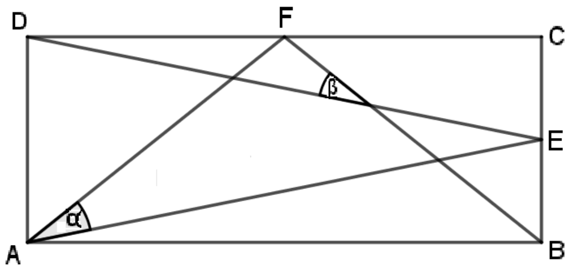
## I. Amerika-Reise

Astrid will sich gründlich auf eine USA-Reise vorbereiten. Sie geht mit 380€ im Geldbeutel Bildbände amerikanischer Städte einkaufen. Zuerst kauft sie einen Band über New York. Zum Preis dieses Bandes könnte sie keine drei weiteren Bände kaufen. Dann kaufte sie einen Band über Chicago. Bei dessen Preis hätte sie insgesamt 5 Bände kaufen können. Das Buch über Los Angeles kostet 14€ weniger als das über New York, und 6€ weniger als das über San Francisco. San Francisco ist um 17€ teurer als Chicago. Den Band über New York und der über Chicago kann sie jeweils mit Scheinen (ohne Münzen) passend bezahlen.
Wie viel Geld hat sie nach den Einkäufen übrig? (WJB)

## II. Spielerei

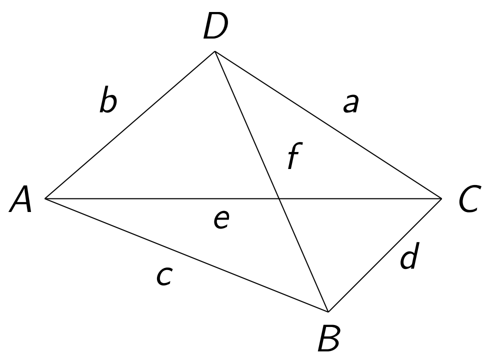
Die Freundinnen Ute, Miriam und Alexandra sind zusammen 100 Jahre alt. Utes Alter ist durch 17, Miriams durch 15 und Alexandras durch 9 teilbar. Die älteste der Freundinnen ist weniger als doppelt so alt wie die jüngste. Wie alt sind die drei? (WJB)

## III. Wie groß sind die Winkel?




Im Rechteck $ABCD$ seien $E$ und $F$ Seitenmittelpunkte. Die Transversalen $AF$ und $AE$ bilden den Winkel $\alpha$ und $ED$ sowie $BF$ schneiden sich unter dem Winkel $\beta$ (siehe die Figur).
Sind dann die Winkel $\alpha$ und $\beta$ gleich groß? Begründe deine Entscheidung. (H.F.)

## IV. Ungleichungen am Viereck




Ein Viereck $ABCD$, das keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt, hat die Seitenlängen $a, b, c, d$ und die Diagonalenlängen $e, f$.
Begründe:
Der Umfang des Vierecks ist größer als die Summe seiner Diagonalenlängen. (H.F.)

## V. Zahl gesucht

Die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen sei ein Vielfaches von 10 und ihr Produkt sei eine siebenziffrige Zahl mit der ersten Ziffer 5 (von links).
Wie heißen die vier Zahlen? (H.F.)

## VI. Anzahl von Teilern

a) Welche zweistelligen Zahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern, das heißt lassen sich durch eine ungerade Anzahl verschiedener Zahlen teilen?
b) Wie viele natürliche Zahlen kleiner als eine Millionen haben eine ungerade Anzahl von Teilern? (WJB)

## VII. Die Geheimzahl

Lars soll sich eine fünfstellige Geheimzahl merken. Nach ein paar Tagen erinnert er sich aber nur noch daran, dass die dreistellige Zahl aus den ersten drei Ziffern multipliziert mit der zweistelligen Zahl aus den letzten beiden Ziffern 4318 ergibt. Dies reicht aber nicht, um die Zahl zu rekonstruieren, aber als ihm einfällt, dass die mittlere Ziffer der dreistelligen Zahl deren größte Ziffer ist, gelingt es ihm.
Welches war die Geheimzahl? (WJB)

## VIII. Altersbestimmung

*Im letzten Heft hatte sich hier ein Tippfehler eingeschlichen. Wer in diesem Heft die Aufgabe richtig löst, wird die dafür vorgesehenen Punkte erhalten.*

Mathis bemerkt, dass die Telefon-Nummern 264969, 458440 und 601983 seiner drei Freunde bei der Division durch sein Alter (in ganzen Jahren) stets den gleichen Rest ergeben und dass dieser Rest das ganzzahlige Alter seiner Enkelin ist. Wie alt sind Mathis und seine Enkelin? (H.F.)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Das Unendliche ist dort, wo der Unsinn vernünftig wird. “

**Carl Friedrich Weizsäcker**

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

# Neue Aufgaben

Klassen 9–13

## Aufgabe 1253: Theodor Tellers Testament

In seinem Testament bestimmt Theodor Teller: „Keines meiner Kinder soll gleich viel erben, sondern jeweils das ältere mehr als das jüngere. Als Anteile sind nur Stammbrüche, also $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... zulässig.“

a) Wie müssen die drei Kinder teilen?

b) Wie ist zu teilen, wenn es vier Kinder sind?

c) Wie geht es weiter bei 5, 6, ... Kindern? (WJB)

## Aufgabe 1254: Spannende Funktionen

Für welche überall stetigen Funktionen gilt bei festem $n \in \mathbb{N}$

a) $f(nx) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

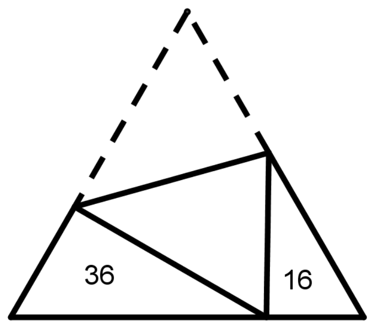
b) $g(x^n) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$,

c) Gibt es auch Funktionen mit der Eigenschaft a), die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind? (WJB)

## Aufgabe 1255: Das gefaltete Dreieck

Ein Blatt Papier, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat, wird so gefaltet, dass seine obere Spitze auf die Grundseite fällt und die beiden Flächen, in denen das Papier nicht doppelt liegt, Inhalte von $36 cm^2$ beziehungsweise $16 cm^2$ haben.

Wie groß ist der Flächeninhalt insgesamt?(Christoph Sievert)




## Aufgabe 1256: Achtung, Baum fällt!

Der Stamm einer $17m$ hohen Tanne wird durch einen Sturm $10m$ über dem Boden geknickt. Der obere Teil bleibt hängen und bildet mit dem unteren Teil den Winkel $\alpha$. Die Spitze befindet sich jetzt $4m$ über dem Erdboden. Wie groß ist $\alpha$? (WJB)

## Aufgabe 1257: Sind gleiche Eckpunkt-Zahlen möglich?

Die Eckpunkte eines $2n-$Ecks, $n \geq 2$, seien im Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1, 2, ..., $2n$ nummeriert (Startkonfiguration $K_0$).

Man vergrößere oder verkleinere zwei beliebige benachbarte Zahlen beide um 1. Kann man dann von $K_0$ aus durch Wiederholungen dieser Operation zu einer Konfiguration gelangen, bei der sämtliche Eckpunkt-Zahlen gleich sind? (H.F.)

### Aufgabe 1258: Anteile schulpflichtiger Kinder

Wir betrachten folgende (erfundene) Tabelle für die Anteile der Familien gestaffelt nach der Anzahl der schulpflichtigen Kinder:

| Anzahl schulpflichtiger Kinder | Anteil an allen Familien |
|---|---|
| 0 | 60% |
| 1 | 20% |
| 2 | 10% |
| 3 | 10% |

Hier soll nicht genau diskutiert werden, was genau eine „Familie“ ist. Die gesellschaftliche Diskussion hierzu ist ja in vollem Gange. vereinfachend nehmen wir an, dass eine Familie eine Gruppe von Menschen ist, und dass die schulpflichtigen Kinder einer Familie Geschwister sind.

a) Auf einem Schulfest sprichst du ein zufällig ausgewähltes Schulkind an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es aus einer Familie mit genau zwei schulpflichtigen Kindern?

b) Wie viele schulpflichtige Geschwister hat ein schulpflichtiges Kind im Mittel?

c) Angenommen, die Bevölkerungsstatistik fasst in der vierten Zeile alle Familien mit drei **oder mehr** schulpflichtigen Kindern zusammen. Lässt sich die Wahrscheinlichkeit aus (a) immer noch bestimmen? (Achim Klenke)

# Gelöste Aufgaben aus Monoid 139

Klassen 9–13

### Aufgabe 1246: Wahr oder falsch?

Es gibt zwei natürlichen Zahlen $n$ und $m$ derart, dass $m = \sqrt{15n + 12}$ ist.
Begründe dies. (WJB)

*Lösung:*

Die letzte Ziffer von $15n + 12$ ist 2 oder 7. Die letzte Ziffer von $m^2$ ist 0, 1, 4, 9, 6 oder 5. $m^2 = 15n + 12$ ist also nicht möglich.

### Aufgabe 1247: Zahlen gesucht

Zwei Zahlen $x$ und $y$ addieren sich zu 20. Multipliziere ihre Differenz mit ihrem Produkt. Für welche Werte $x$ und $y$ ist das Ergebnis maximal,

a) wenn wir für $x$ und $y$ nur ganze Zahlen zulassen?

b) ohne diese Einschränkung? (WJB)

*Lösung:*

Mit $y = 20 - x$ müssen wir $f(x) = x(20 - x)(2x - 20)$ maximal machen.
Dabei nehmen wir, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, an: $10 \leq x \leq 20$.

a) Wir berechnen $f(x)$ für $x = 10, 11, 12, ..., 20$ und erhalten die Tabelle

| x | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 198 | 384 | 546 | 672 | 750 | 768 | 714 | 576 | 342 | 0 |

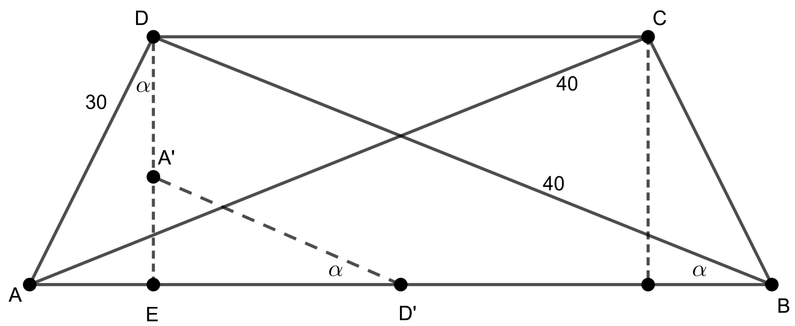
$f(x)$ ist also für $x = 16$ am größten. Die gesuchten Zahlen lauten also $x = 16$ und $y = 20 - 16 = 4$ oder $x = 4$ und $y = 16$.

b) $f(x) = x(20 - x)(2x - 20) = -2x^3 + 60x^2 - 400x$
$f'(x) = -6x^2 + 120x - 400$
Die Nullstellen von $f'(x)$ sind
$-\frac{120}{2\cdot(-6)} \pm \frac{1}{2\cdot(-6)}\sqrt{(120^2 - 4 \cdot (-6)(-400)} \approx +10 \pm 5{,}77.$
Das Maximum wird also bei 15,77 erreicht.

**Aufgabe 1248: Umfang und Fläche eines Trapezes**

Im Trapez $ABCD$ mit $AB||CD$ und $|AD| = |BC| = 30$ haben die Diagonalen $AC$ und $BD$ die Länge 40 und sie sind orthogonal zu den Trapezseiten $CB$ und $DA$. Berechne den Umfang $U$ und die Fläche $F$ des Trapezes. (H.F.)

*Lösung:*



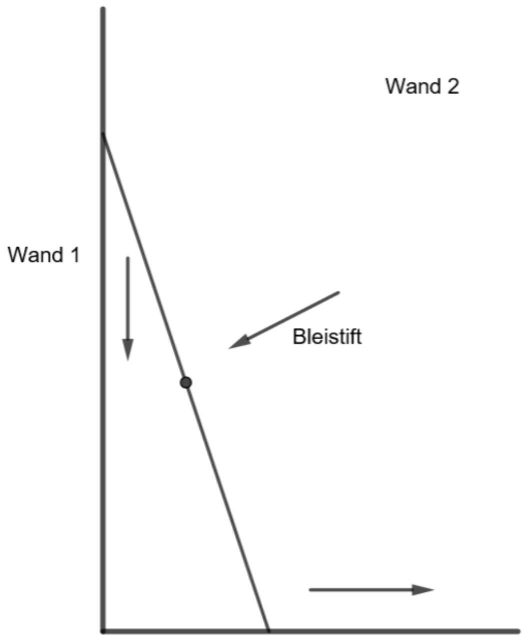

Das Dreieck $ABC$ ist rechtwinklig. Daher ist $|AB| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$.

Dreht man das Dreieck $AED$ um $E$ in das Dreieck $ED'A'$, so sind die Strecken $A'D'$ und $DB$ parallel, weil $\angle EAD = \angle EA'D' = \angle BDE$ ist.
Daher sind die Dreiecke $ED'A'$ und $ABD$ ähnlich und mit $|A'D'| = 30$ ist $\frac{|EA'|}{|A'D'|} = \frac{|DA|}{|AB|} = \frac{30}{50}$. Folglich ist $|EA'| = 18$ und daher $|AE| = 18$.

Daraus erhält man $|CD| = |AB| - 2|AE| = 50 - 36 = 14$.
Der Umfang $U$ des Trapezes ist $U = |AB| + 2 \cdot |AD| + |CD| = 50 + 60 + 14$.
Somit ist $U = 124$.
Weil $|ED| = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$ hat das Trapez die Fläche $F = \frac{|AB|+|CD|}{2}$.
$|ED| = 32 \cdot 24 = 768$.

## Aufgabe 1249: Rutschende Leiter

In der Ecke eines Raumes lehnt eine Leiter an Wand 1. In der Mitte dieser Leiter ist ein Bleistift befestigt. Die Spitze dieses Bleistiftes berührt Wand 2. Rutscht die Leiter nun weg, hinterlässt der Stift eine Spur an Wand 2.



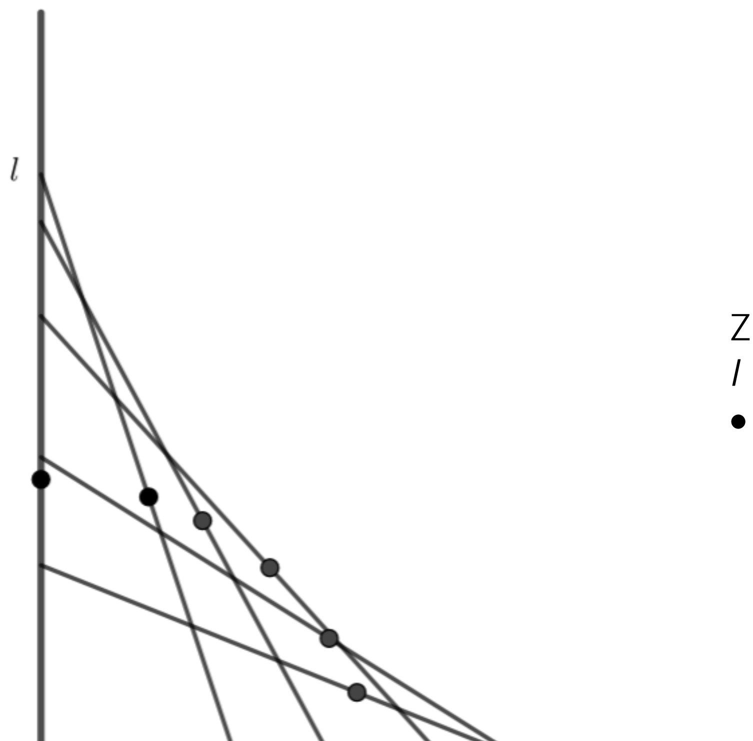

a) Gib in einer Skizze an, welchen Weg die Bleistiftspitze zurücklegen wird.

b) Wie lautet die Funktionsgleichung der Bleistiftlinie?

(Christoph Sievert, Bornheim)

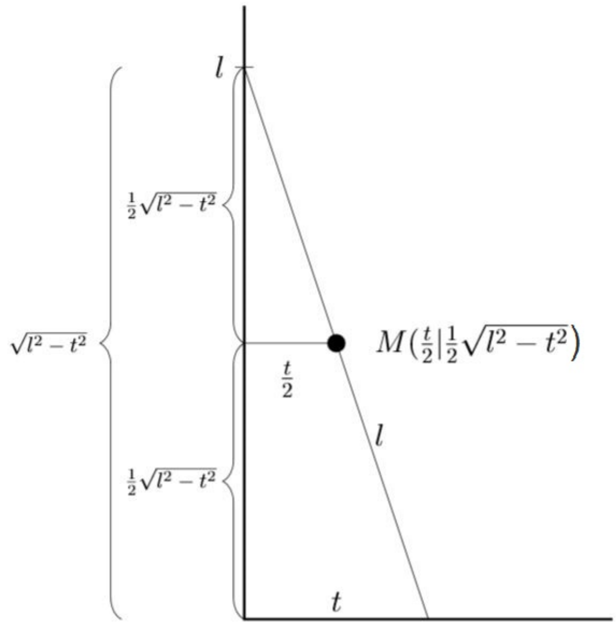
*Lösung:*

a)




Zeichnerische Lösung:
$l$ Länge der Leiter;
• Mittelpunkte der Leiter

b)




Setze $\frac{t}{2} = x$, dann ergibt sich die folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2}$$

eine Kreisgleichung mit dem Mittelpunkt im Ursprung und Radius $\frac{l}{2}$.

## Aufgabe 1250: Spiele

a) Anfangs liegen 100 Stäbchen auf dem Tisch. Sophia spielt mit ihrer Freundin Annette folgendes Spiel: Abwechselnd nimmt jede von ihnen ein oder zwei Stäbchen weg. Wer das letzte Stäbchen nimmt, verliert das Spiel. Wenn Annette als erste zieht, dann kann Sophia sicher sein zu gewinnen. Wie muss sie dazu spielen?

b) Sophia und Annette ändern die Spielregeln. Zuerst liegen wieder 100 Stäbchen auf einem Haufen. Wer beginnt, teilt diesen Haufen in zwei Teile, wobei jeder Teil mindestens aus einem Stäbchen besteht. Danach teilt jede von ihnen im Wechsel eines der jeweils vorhandenen Teile wieder in zwei Teile, solange bis alle Teile aus nur einem Stäbchen bestehen. Jetzt gilt: Wer beginnt, gewinnt. Warum? (WJB)

*Lösung:*

a) Wenn Annette $3n + 1$ Stäbchen vorfindet (dies ist die Anfangssituation mit $n = 33$) und ein Stäbchen nimmt, so nimmt Sophia zwei; nimmt Annette zwei, so nimmt Sophia eines. Damit liegen anschließend für Annette noch $3(n - 1) + 1$ Stäbchen vor. Dies lässt sich so fortsetzen, bis für Annette noch $3 \cdot 0 + 1$ Stäbchen da liegen. Dieses letzte Stäbchen muss Annette nehmen und verliert damit.

b) Am Anfang, das heißt nach 0 Spielzügen, haben wir einen Haufen. Nach dem ersten Zug zwei Teile, nach dem zweiten drei Teilmengen und so weiter. Nach dem 99. Zug sind es 100 Teilmengen, diese notwendigerweise einelementig, also nicht weiter teilbar. Wer beginnt, macht die Züge Nr. 1, Nr. 3, und so weiter. Insbesondere auch Zug 99, nach dem es nicht mehr weiter geht.

### Aufgabe 1251: Zufällige drei Punkte

Wähle auf einem Kreis drei Punkte $A$, $B$ und $C$ zufällig und unabhängig von einander. Bestimme den Erwartungswert des Winkels $\gamma$ bei $C$ im Dreieck $ABC$!(WJB)

*Lösung:*

Für jede mögliche Kombination der Werte $\delta, \varepsilon, \varphi$ (mit $\delta + \varepsilon + \varphi = 180°$) sind die 6 Zuordnungen $(\alpha, \beta, \gamma) = (\delta, \varepsilon, \varphi)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (\delta, \varphi, \varepsilon)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (\varepsilon, \delta, \varphi)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (\varepsilon, \varphi, \delta)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (\varphi, \delta, \varepsilon)$ und $(\alpha, \beta, \gamma) = (\varphi, \varepsilon, \delta)$ gleich wahrscheinlich. Also sind die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für $\alpha = \delta$, für $\alpha = \varepsilon$ und für $\alpha = \varphi$ jeweils gleich $\frac{1}{3}$ und damit ist die bedingte Erwartung gleich $\frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varphi = \frac{1}{3} \cdot 180° = 60°$ unabhängig von der Bedingung. Damit ist auch der (unbedingte) Erwartungswert gleich 60°.

### Aufgabe 1252: Vielfache von 19

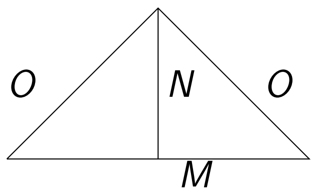
Es seien $x$ und $y$ ganze Zahlen, für die $2x + 3y$ ein Vielfaches von 19 ist.
Dann gilt: $11x + 7y$ ist ein Vielfaches von 19.
Beispiel: Für $x = 10$ und $y = 6$ ist $2x + 3y = 2 \cdot 19$ und
$11x + 7y = 152 = 8 \cdot 19$. (H.F.)

*Lösung:*

Es ist $11x + 7y = 19 \cdot (x + y) - 4 \cdot (2x + 3y)$.
Da sowohl $19 \cdot (x + y)$ als auch $4 \cdot (2x + 3y)$ Vielfache von 19 sind, ist auch ihre Differenz – also $11x + 7y$ – ein Vielfaches von 19.

# Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs




Im Wort *MONOID* sollen gleiche beziehungsweise verschiedene Buchstaben durch gleiche beziehungsweise verschiedene Ziffern ersetzt werden, wobei die Ziffern so zu bestimmen seien:

In einem gleichschenkligen Dreieck sie $M$ die Länge der Basis, $O$ sei die Länge der beiden gleich langen Seiten und $N$ sei die Höhe; $I$ sei ein Viertel der Fläche des Dreiecks und $D$ sei die Hälfte seines Umfangs.

Welche Zahl entspricht dann dem Wort *MONOID*?

**Lösung**

Vorweg

Die Fläche des Dreiecks beträgt $\frac{1}{2}M \cdot N$, sodass gilt:

(1) $I = \frac{1}{8}M \cdot N$

Für das rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenusenlänge $O$ ist

(2) $O^2 = (\frac{1}{2}M)^2 + N^2$

Aus (2) folgt: Da $N$ und $O$ ganze Zahlen sind, muss auch $\frac{1}{2}M$ ganzzahlig sein. Also ist $M = 2, 4, 6$ oder 8.

a) Es sei $M = 2$ oder $M = 4$.
Da $I$ ganzzahlig ist folgt aus (1), dass $N \geq 2$ ist.
Nun ist aber $(\frac{1}{2}M)^2 + N^2$ weder für $\frac{1}{2}M = 1$ noch für $\frac{1}{2}M = 2$ eine Quadratzahl $O^2$ wegen
$1 + N^2 < 4 + N^2 < (1 + 2N) + N^2 = (1 + N)^2 \leq O^2$, also ist die Bedingung (2) weder für $M = 2$ noch für $M = 4$ erfüllt.

b) Es sei $M = 8$
Aus (1) folgt dann: $I = \frac{1}{8} \cdot 8N = N$
Weil aber nach Voraussetzung $I \neq N$ ist, gilt $M \neq 8$

c) Es sei $M = 6$
Wegen (1) ist dann $I = \frac{1}{8} \cdot 6N$ und weil $I$ ganzzahlig ist, muss $N = 4$ oder $N = 8$ sein.
Ist $N = 8$, so ist $I = 6$, was wegen $M = 6$ ausgeschlossen ist. Also ist $N = 4$.
Aus (2) ergibt sich damit $3^2 + 4^2 = O^2$, sodass $O = 5$ ist.
Ferner folgt aus (1): $I = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 4 = 3$ und schließlich ist $D = \frac{1}{2}(6 + 2 \cdot 5) = 8$

Somit ist $MONOID = 654538$.

# Die Diskriminante in Aktion

von Hartwig Fuchs

## Der Lange Weg zur Diskriminante

Die ersten mathematischen Probleme, die auf quadratische Gleichungen führen, sind auf Papyrusrollen aus Ägypten um 1700 v.Chr. und auf altbabylonischen Keilschrifttafeln beschrieben.
Wir wissen nicht, wie solche Gleichungen damals gelöst wurden – vermutlich aber durch systematisches numerisches Probieren.
Erste Ansätze für algebraische Lösungsregeln finden sich viel später in der indischen Mathematik bei Aryabhata (um 476 - 550) sowie bei Brahmagupta (598 - nach 665), der bereits Lösungsanweisungen in Wortform für konkrete quadratische Gleichungen angibt.
Die allgemeine Lösungsformel für Gleichungen zweiten Grades – so wie wir sie kennen – hat Sridhara (um 900) hergeleitet. Er hat die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ – indem er sie zunächst durch $a$ dividiert und dann auf beiden Seiten den Term $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$ addiert – umgeformt zu $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, woraus sich fast unmittelbar ergibt: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Der Term $D = b^2 - 4ac$ heißt die *Diskriminante* der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

## Aktionsbereich von Diskriminanten

Diskriminanten entscheiden über die Lösbarkeit/Unlösbarkeit quadratischer Gleichungen in reellen Zahlen – woher auch ihr Name rührt, der frei übersetzt bedeutet: „Die den Unterschied macht“.

## Lösbarkeitskriterium für quadratische Gleichungen:

(1) Eine Gleichung $ax^2+bx+c=0$ mit $a \neq 0$ hat genau dann reelle Lösungen, wenn ihre Diskriminante $D=b^2-4ac \geq 0$ ist.

Mit (1) sind die Anwendungsmöglichkeiten von Diskriminanten bei weitem nicht erschöpft. So spielt sie insbesondere eine nicht unbedeutende Rolle in der elementaren Algebra etwa bei der Untersuchung von Gleichungen, von Ungleichungen und Funktionen, in denen quadratische Terme vorkommen.

## Gleichungen und Diskriminanten

($B_1$) Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung
($G_1$) $2x^2+6xy+5y^2-2x-4y+1=0$

Wir lösen die Aufgabe 1 mit Hilfe einer Diskriminante – eine Lösungsmethode, die nicht nur bei ($G_1$), sondern auch in vielen anderen Fällen zum Ziel führt (vergleiche unten $B_2$ und $B_3$).
Wir betrachten ($G_1$) als eine Gleichung 2. Grades in $x$ mit Koeffizienten, die von $y$ abhängen, also:

($G_1'$) $2x^2+(6y-2)x+(5y^2-4y+1)=0$

($G_1'$) hat reelle Lösungen in $x$, falls für die Diskriminante $D$ von ($G_1'$) gilt: $D \geq 0$.
Nun ist
$D=(6y-2)^2-8(5y^2-4y+1)=-4(y^2-2y+1)=-4(y-1)^2 \geq 0$ nur, wenn $(y-1)^2=0$, wenn also $y=1$ ist.
Dann aber ist $x=-1$ und $(-1,1)$ ist die einzige reelle Lösung von ($G_1$).

($B_2$:) Man zeige, dass die Gleichung ($G_2$) $x^3-y^3=1729$ genau vier verschiedene ganzzahlige Lösungen hat.

Es ist $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=1729=1\cdot 7\cdot 13\cdot 19$.
Wir setzen $x-y=a$ und $x^2+xy+y^2=b$.
Mit $x=y+a$ erhält man aus der letzten Gleichung
($G_2'$) $3y^2+3ay+a^2-b=0$
mit $D=9a^2-12(a^2-b)=12b-3a^2$.
Nun ist $y$ nur dann ganzzahlig, wenn $D$ eine Quadratzahl ist und wenn $a$ und $b$ ganzzahlige Teiler von 1729 sind. So kommen für $a$ und $b$ nur die jeweils 8 Werte der folgenden Liste in Frage (Zeile 1 und 2).

| $a$ | 1 | 7 | 13 | 19 | $7 \cdot 13$ | $7 \cdot 19$ | $13 \cdot 19$ | $7 \cdot 13 \cdot 19$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | $7 \cdot 13 \cdot 19$ | $13 \cdot 19$ | $7 \cdot 19$ | $7 \cdot 13$ | 19 | 13 | 7 | 1 |
| $D$ | 20745 | 2817 | $33^2$ | $3^2$ | | $D \leq 0$ | | |

Aus der Zeile 3 der Liste ergibt sich:
Nur für $a = 13, b = 133$ und für $a = 19, b = 91$ ist $D$ eine Quadratzahl. Setzt man nun diese $a-$ und $b-$Werte in $(G_2')$ ein, so ergeben sich die vier Lösungen $y = -12, y = -1$ und $y = -10, y = -9$; die zugehörigen $x$-Werte erhält man aus $(G_2)$. Daher hat $(G_2)$ tatsächlich nur 4 ganzzahlige Lösungen: $(1, -12), (12, -1), (9, -10)$ und $(10, -9)$.

($B_3$:) Die Summe der Kantenlängen eines Quaders beträgt 24 und seine Oberfläche ist $\frac{21}{2}$. Welches ist die größtmögliche Länge, die eine Kante eines solchen Quaders haben kann?

Bezeichnet man die Kantenlängen eines Quaders mit $x, y$ und $z$, dann gilt
(1) $4(x + y + z) = 24$
(2) $2(xy + yz + xz) = \frac{21}{2}$
Aus (1) und (2) folgt nach Elimination von $z$ die quadratische Gleichung in $x$:
($G_3$) $x^2 + (y-6)x + (y^2 - 6y + \frac{21}{4}) = 0$ mit der Diskriminante $D = (y-6)^2 - 4(y^2 - 6y + \frac{21}{4}) = -3(y+1)(y-5)$.

Damit $(G_3)$ reelle Lösungen hat, muss $D \geq 0$, also $(y+1)(y-5) \leq 0$ sein. $y + 1 < 0$ ist nicht möglich, da sonst $y < 0$ wäre. Also ist $y + 1 \geq 0$ und $y - 5 \leq 0$. Wegen $y > 0$ folgt: $0 < y \leq 5$; der maximale $y$-Wert ist also 5.
Da die Gleichungen (1) und (2) symmetrisch in $x, y$ und $z$ sind, gilt entsprechend: 5 ist der maximale $x$-Wert und ebenso der maximale $z$-Wert. Die größtmögliche Länge einer Quaderkante ist daher 5.

## Ungleichungen und Diskriminanten

Auch bei quadratischen Ungleichungen $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$ gibt die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ oft entscheidende Hinweise auf deren Lösbarkeit.

## Ein Lösbarkeitskriterium für quadratische Ungleichungen

(2) Die Ungleichung $ax^2 + bx + c \geq 0$ mit $a > 0$ gilt für alle reellen $x$, wenn die Diskriminante $D = b^2 - ac \leq 0$ ist und umgekehrt.

Man forme (2) äquivalent um in die Ungleichung
(2') $a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a^2}) \geq 0$
Falls $D \leq 0$ ist, dann gilt (2') für alle reellen $x$, weil $a > 0$ und $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ ist.
Umgekehrt: Gilt (2') für alle reellen $x$, dann muss (2') insbesondere auch für $x = -\frac{b}{2a}$ gelten – was aber nur möglich ist, wenn $D \leq 0$ ist.

($B_4$) Man zeige, dass die Ungleichung ($U_1$) $x^2 + 5xy + 7y^2 \geq 5x + 14y - 7$ für alle reellen $x$ und $y$ gilt.

Schreibt man $U_1$ als eine quadratische Ungleichung in $x$, so erhält man ($U_1$') $x^2+5(y-1)x+7(y^2-2y+1)\geq 0$.
Die Diskriminante von ($U_1$') ist $D=25(y-1)^2-28(y-1)^2=-3(y-1)^2$. Nun ist $D\leq 0$ für jedes reelle $y$. Daraus folgt mit dem Kriterium (2):
($U_1$') und damit ($U_1$) gelten für jedes reelle $x$, wie auch immer $y$ gewählt wird.

($B_5$) Man bestimme $a$ so, dass jedes reelle $x$ eine Lösung der Gleichung
($U_2$) $\quad -1\leq \frac{ax^2+2x+1}{x^2+1}\leq 2$ ist.

Wegen $x^2+1>1$ teile man ($U_3$) in zwei Ungleichungen auf:
($U_2$') $-x^2-1\leq ax^2+2x+1$ und ($U_2$'') $ax^2+2x+1\leq 2x^2+2$
Aus ($U_2$') folgt $(a+1)x^2+2x+2\geq 0$ mit der Diskriminante $D_1=4-8(a+1)$.
($U_2$') gilt nach (2) für alle reellen $x$, falls $D\leq 0$, also $-\frac{1}{2}\leq a$ ist.
Aus ($U_2$'') folgt $(2-a)x^2-2x+1\geq 0$ mit der Diskriminante $D_2=4-4(2-a)$.
($U_2$'') gilt für alle reellen $x$, falls $D_2\leq 0$, also $a\leq 1$ ist.
Für die gesuchten Werte von $a$ gilt somit: $-\frac{1}{2}\leq a\leq 1$.

## Ebene Kurven und Diskriminanten

Es gibt Kurven in der mit einem $x$-$y$-Koordinatensystem versehenen Ebene, in deren Beschreibung quadratische Gleichungen/Ungleichungen eine Rolle spielen. Daher darf man erwarten, dass Diskriminanten bei der Untersuchung solcher Kurven sich als nützlich erweisen könnten.

($B_6$) Bestimme alle reellen Zahlen $y$, für die es ein $x$ gibt, sodass $(x,y)$ jeweils ein Punkt der Kurve $K_1$ mit der Gleichung ($K_1$) $y=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$ ist.

$(x,y)$ ist ein Punkt von $K_1$, wenn das Zahlenpaar $(x,y)$ eine Lösung der Gleichung ($K_1$) ist. Für welche $y$ ist also $(x,y)$ eine Lösung von ($K_1$)?
Wir formen ($K_1$) zunächst um in $y(x-1)^2-(x^2+1)=0$ und dann weiter in ($K_1$') $(y-1)x^2-2yx+(y-1)=0$ mit der Diskriminante $D=4y^2-4(y-1)^2=8y-4$. Nach dem Lösbarkeitskriterium (1) für quadratische Gleichungen hat ($K_1$') nur dann Lösungen $x$, wenn $D=8y-4\geq 0$ und daher $y\geq\frac{1}{2}$ ist. Daraus folgt: Für jeden Punkt $(x,y)$ der Kurve $K_1$ ist $y\geq\frac{1}{2}$.

($B_7$) Man bestimme die tiefsten Punkte $(x,y)$ der Kurve $K_2$ mit der Gleichung ($K_2$) $y=(x-2)(x+3)(x^2+x)$.

Zunächst ist $y=(x^2+x-6)(x^2+x)$, woraus man die Gleichung erhält:
($K_2$') $(x^2+x)^2-6(x^2+x)-y=0$
Setzt man nun $x^2+x=z$ so lautet dann ($K_2$'): $z^2-6z-y=0$ und diese Gleichung besitzt nur dann Lösungen, wenn ihre Diskriminante $D=36+4y\geq 0$, also $y\geq -9$ ist. Der kleinstmögliche Wert für $y$ ist daher $y=-9$.
Die zu $y=-9$ gehörigen Kurvenpunkte ergeben sich aus der Gleichung $z^2-6z-9=0$. Es ist daher $z=3$, sodass $x^2+x=3$ und deshalb $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.
Die Kurve $K_2$ hat also zwei niedrigste Punkte: $(x_1,-9)$ und $(x_2,-9)$.

($B_8$) Bestimme alle positiven Zahlen $a$ so, dass für jedes dieser $a$ gilt: Zu jeder beliebig gewählten reellen Zahl $x$ gibt es eine reelle Zahl $y$ derart, dass $(x, y)$ ein Punkt der Kurve $K_a$ mit der Gleichung $(K_a)$ $y = \sqrt{ax^2 - x + a}$ ist.

Es sei $(x, y)$ ein Punkt einer der Kurven $K_a$.
Damit für jedes reelle $x$ auch die Koordinate $y$ reell ist, muss für den Radikand in der Gleichung $(K_2)$ gelten: $ax^2 - x + a \geq 0$.
Diese Ungleichung trifft nach dem Kriterium (2) – siehe oben – nur dann für alle reellen $x$ zu, wenn ihre Diskriminante $D = 1 - 4a^2 \leq 0$ ist. Daraus folgt wegen $a > 0$, dass $a \geq \frac{1}{2}$ sein muss, damit für jedes reelle $x$ auch $y = \sqrt{ax^2 - x + a}$ reell ist.

# Die harmonische Reihe II

von Valentin Blomer

Das letzte Mal haben wir die Folge

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

untersucht und festgestellt, dass sie mit wachsendem $n$ über alle Schranken wächst, allerdings unglaublich langsam. Wir erinnern uns an die Schnecke auf dem Gummiband und wollen ein zweites Beispiel betrachten.

## Eine Brücke

Wir stehen an einer Klippe und haben 1m lange Bretter zur Verfügung. Damit wollen wir einen Überstand bauen, der möglichst weit über die Klippe hinausragt. Wir haben aber außer den Brettern keine Nägel oder anderes Werkzeug, wir können nur die Bretter versetzt übereinander legen und müssen sicherstellen, dass der Überstand nicht kippt und zusammenbricht.
Wenn wir $n$ Bretter zur Verfügung haben, machen wir das folgendermaßen. Das $n$-te Brett legen wir so, dass es $\frac{1}{2n}$ Meter über die Klippe hinausragt. Das $(n-1)$-te Brett legen wir darüber, so dass es $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$ Meter über die Klippe hinausragt. Das $(n-2)$-te Brett legen wir darüber, so dass es $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-4}$ Meter über die Klippe hinausragt. So fahren wir fort, bis wir das Brett mit der Nummer 1 zuoberst legen und zwar so, dass es $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-4} + ... + \frac{1}{2}$ Meter über die Klippe hinausragt.
Wenn das alles so klappt und der Überstand aus Brettern nicht zusammenbricht, dann ragt das oberste Brett

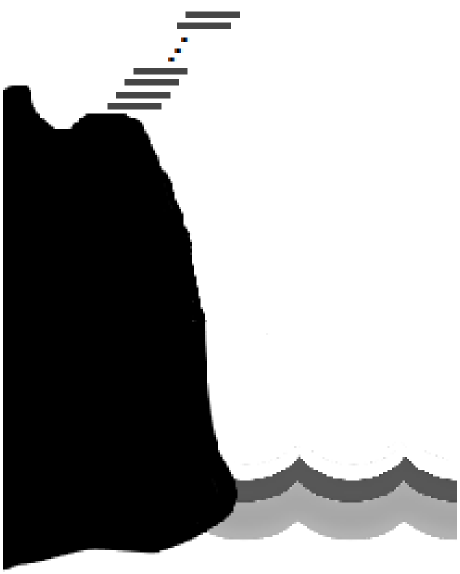
$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-4} + ... + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} S_n$$

Meter über die Klippe hinaus. Ist $n$ groß genug, kann das beliebig weit sein!

Warum hält diese Konstruktion? Dazu müssen wir zeigen, dass für jedes $1 \leq k \leq n-1$ der Schwerpunkt der obersten $k$ Bretter gerade noch über dem $(k+1)$-ten Brett liegt und der Schwerpunkt aller $n$ Bretter nicht jenseits der Klippe. Das rechnen wir jetzt einfach nach. Der Schwerpunkt der obersten $k$ Bretter liegt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\Bigg(\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+ \quad \ldots \quad +\frac{1}{2n}\Big)\\
&\quad+\Big(-\frac{1}{2} \qquad +\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+ \quad \ldots \quad +\frac{1}{2n}\Big)\\
&\quad+\Big(-\frac{1}{2} \qquad\qquad +\frac{1}{6}+ \quad \ldots \quad +\frac{1}{2n}\Big)\\
&\quad+ \quad \ldots\\
&\quad+\Big(-\frac{1}{2}+ \qquad\qquad +\frac{1}{2k}+\ldots+\frac{1}{2n}\Big)\Bigg)\\
&=\frac{1}{k}\Big(-\frac{k}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{k \text{ mal}}+\frac{k}{2k+2}+\ldots+\frac{k}{2n}\Big)=\frac{1}{2k+2}+\ldots+\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Meter über der Klippe. Dies ist aber gerade der Endpunkt des $(k+1)$-ten Brettes, also fällt der Überstand gerade so nicht zusammen. Mit der gleichen Rechnung mit $k = n$ sieht man, dass der Schwerpunkt aller $n$ Bretter gerade am Rand der Klippe liegt (die rechte Seite der obigen Rechnung ist dann 0). Der Überstand bekommt also an keiner Stelle Übergewicht!
Um insgesamt zum Beispiel 10 Meter über die Klippe zu kommen, brauchen wir 272400600 Bretter, denn $\frac{1}{2}S_{272400600} \approx 10$. (Wir werden gleich feststellen, wie man das berechnet.)



Um diesen Überstand zu bauen, sind wir schon eine Weile beschäftigt, und der wird auch ziemlich hoch, und wenn wir nicht ganz sauber arbeiten, fällt er doch zusammen. Aber in der Theorie klappt es, nur mit Brettern ohne jegliches weitere Werkzeug. Und wenn wir ganz fleißig sind, können wir sogar 100m über die Klippe kommen. Dann benötigt man aber mehr Bretter, als es Atome im Universum gibt...

**Wie schnell wächst die harmonische Reihe?**

Zum Schluss wollen wir möglichst genau abschätzen, wir groß $S_n$ ist. Ein einfaches Argument geht folgendermaßen mit Hilfe der Integralrechnung und der Stammfunktion von $t \mapsto 1/t$. Die Fläche unter der oberen Treppenkurve zwischen 1 und $n$ ist

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} = S_{n-1},$$

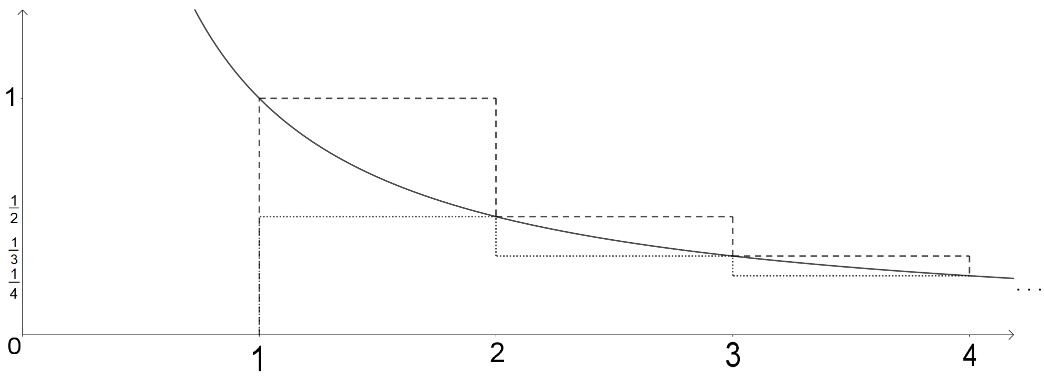
die Fläche unter der unteren Treppenkurve zwischen 1 und n ist

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = S_n - 1,$$

die Fläche unter dem Funktionsgraphen von $1/t$ zwischen 1 und $n$ ist

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n,$$

wobei $\log$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet.*




Es gilt also $S_n - 1 < \log n < S_{n-1}$ und damit

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$$

für $n \geq 1$. Damit sehen wir schon, dass $S_n$ etwa wie $\log n$ wächst (und insbesondere unbeschränkt ist). Wir können aber noch genauer argumentieren und die Differenz zwischen der Fläche unter der Kurve $t \mapsto 1/t$ und der darunter liegenden Treppenkurve bestimmen. Dazu sei $\lceil x \rceil$ für eine reelle Zahl $x$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich $x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \log n - \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{\lceil t \rceil} \right) dt = 1 + \log n - \int_1^n \frac{\lceil t \rceil - t}{t \lceil t \rceil} dt \\ &= 1 + \log n - \int_1^\infty \frac{\lceil t \rceil - t}{t \lceil t \rceil} dt + \int_n^\infty \frac{\lceil t \rceil - t}{t \lceil t \rceil} dt. \end{aligned}$$

* In der Schule wird das oft als ln bezeichnet, das ist aber sonst eher unüblich.

Das schreiben wir als

$$S_n = \log n + \gamma + T_n$$

mit

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\lceil t \rceil - t}{t \lceil t \rceil} dt, \quad T_n = \int_n^\infty \frac{\lceil t \rceil - t}{t \lceil t \rceil} dt.$$

Was machen wir mit diesen beiden Integralen? Nun ja, wegen $0 \leq \lceil t \rceil - t \leq 1$ gilt

$$0 \leq T_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n}.$$

Ist $n$ groß, so ist $T_n$ also sehr klein und kann bei Näherungsrechnungen vernachlässigt werden. Das Integral in der Definition von $\gamma$ ist ein merkwürdiges Integral, aber man kann es mithilfe eines Computers leicht (näherungsweise) ausrechnen. Daraus erhält man

$$\gamma = 0{,}577216 \ldots$$

Das ist die sogenannte Euler-Mascheroni Konstante (Euler berechnete – selbstverständlich ohne Computer – bereits die ersten Dezimalstellen). Wir erhalten

$$S_n \approx \log n + 0{,}577$$

Wenn man nun noch nachschaut, was $\log 10$ ist und die Logarithmusgesetze benutzt, so kann man, wie zu Beginn der letzten Folge festgestellt, tatsächlich $S_{10^{80}} \approx 80 \log 10 + 0.577$ näherungsweise im Kopf ausrechnen!
Das geht durch folgende trickreiche Rechnung: Es gilt

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = 1 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right).$$

An dieser Stelle brauchen wir ein bisschen Integralrechnung. Für reelle Zahlen $a, b > 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

also ist

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=1}^n \int_k^n \frac{1}{t^2} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^2} dt + \int_2^n \frac{1}{t^2} dt + \ldots + \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2} dt \\ &= 1 + \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt + 2 \int_2^3 \frac{1}{t^2} dt + 3 \int_3^4 \frac{1}{t^2} dt + \ldots + (n-1) \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2} dt \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt. \end{aligned}$$

An dieser Stelle führen wir die Gauß-Klammer ein: Für eine reelle Zahl $x$ ist $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x$. Damit kann man etwas künstlich schreiben

$$k\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt=\int_k^{k+1}\frac{[t]}{t^2}dt,$$

denn für $k \leq t < k+1$ ist ja** $[t] = k$. Wir können jetzt die Intervalle $[1,2), [2,3), \ldots [n-1,n)$ zusammenkleben und erhalten

$$S_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{[t]}{t^2}dt = 1+\int_1^n\frac{[t]}{t^2}dt.$$

Wenn wir jetzt noch

$$\{t\} = t-[t]$$

für den „Nachkomma-Anteil“ einer reellen Zahl schreiben, so ist

$$S_n = 1+\int_1^n\frac{t-\{t\}}{t^2}dt = 1+\int_1^n\frac{1}{t}dt-\int_1^n\frac{\{t\}}{t^2}dt.$$

Das mittlere Integral können wir ausrechnen, das ist der natürliche Logarithmus, den wir mit $\log n$ hier bezeichnen. Es ist also

$$S_n = \log n + 1 - \int_1^n\frac{\{t\}}{t^2}dt.$$

Was machen wir mit dem letzten Integral? Es gilt:

$$\int_1^n\frac{\{t\}}{t^2}dt = \int_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}dt-\int_n^\infty\frac{\{t\}}{t^2}dt,$$

und wegen $0 \leq \{t\} < 1$

$$0 \leq T_n := \int_n^\infty\frac{\{t\}}{t^2}dt \leq \int_n^\infty\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{n}.$$

Wir fassen zusammen: Es gilt

$$S_n = \log n + \gamma - T_n$$

mit

$$\gamma = 1-\int_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}dt, \quad 0 \leq T_n \leq \frac{1}{n}.$$

Die Zahl $\gamma$ ist eine merkwürdige Konstante.

** Dass für den Schlusspunkt $t = k+1$ allerdings $[t] = k+1$ gilt, spielt für das Integral keine Rolle, das Integral sieht keine einzelnen Punkte.

# Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 4

## Rationale Zahlen aufsummiert

Zunächst gilt für jede natürliche Zahl $m \geq 2$:

$$\tfrac{1}{m} + \tfrac{2}{m} + \tfrac{3}{m} + \ldots + \tfrac{m-1}{m} = \tfrac{1}{m}(1+2+3+\ldots+m-1) = \tfrac{1}{m}\tfrac{(m-1)m}{m} = \tfrac{m-1}{2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{3}{4}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{2019} + \tfrac{2}{2019} + \tfrac{3}{2019} + \ldots + \tfrac{2019}{2020}\right) \\ &= \tfrac{2-1}{2} + \tfrac{3-1}{2} + \tfrac{4-1}{2} + \ldots + \tfrac{2020-1}{2} = \tfrac{1}{2}(1+2+3+\ldots+2019) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2019 \cdot 2020}{2} = \tfrac{1}{4} \cdot 2019 \cdot 2020 \end{aligned}$$

## Wahr oder falsch?

$$\begin{array}{c|cccccc|l} & & & & & & & \text{Zeilensumme} \\ & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & \cdots\ 1 & 1 & \to 1 \cdot 2019 \\ & & 2 & 2\cdots & 2 & \cdots\ 2 & 2 & \to 2 \cdot 2018 \\ & & & 3\cdots & 3 & \cdots 3 & 3 & \to 3 \cdot 2017 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \quad\vdots \\ & & & & & 2018 & 2018 & \to 2018 \cdot 2 \\ & & & & & & 2019 & \to 2019 \cdot 1 \\ \hline \text{Spalten-} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \\ \text{summe} & \frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 3 & \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot 4 & & & \frac{1}{2}\cdot 2019 \cdot 2020 & \end{array}$$

Zur Berechnung einer Spaltensumme wurde die Formel $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$benutzt. Weil nun die Summe aller Spaltensummen mit der Summe aller Zeilensummen übereinstimmt, ist die eingangs gegebene Gleichung wahr.

## Zwischenwert gesucht

Für jede natürliche Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt $\frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdots \left(\frac{2019}{2020}\right)^2 \\ &> \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2018}{2019} \cdot \frac{2019}{2020}\right) = \frac{1}{2020} \\ &> \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2018}{2019} \cdot \frac{2018}{2019}\right) \cdot r, \end{aligned}$$

mit $r = \left(\frac{2020}{2021}\right)^2 < 1$. Dann ist $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2018}{2019} \cdot \frac{2018}{2019}\right) \cdot r = R^2$.

Für $M = \sqrt{\frac{1}{2019}}$ ist daher $L > M > R$, also

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2018}{2019} > \sqrt{\frac{1}{2019}} > \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2019}{2020}.$$

## Zwei gleiche Summen

Die Menge $M$ hat $2^{15} - 1 = 32767$ verschiedene Teilmengen, die nicht leer sind. Die Anzahl der verschiedenen Summen aus Zahlen von $M$ ist $\leq 30195$, weil $2006 + 2007 + ... + 2020$ die größtmögliche Summe ist.

Da es zu jeder Teilmenge eine Summe gibt und da die Anzahl der Teilmengen größer als die Anzahl verschiedener Summen ist, können die Summen aus zwei Teilmengen nicht alle verschieden sein.

## Teiler von Potenzen

Vorweg: Für positive ganze Zahlen $a$ und $b$ gilt:

$$a^b - 1 = (a-1)(a^{b-1} + a^{b-2} + ... + a^1 + 1).$$

Es sei nun $z = x^{3y} - 1$ mit ganzzahligem $x \geq 1$ und $3y = x$.

Setzt man dann $a = x^3$ und $b = y$ in obige Gleichung ein, so ist

$$z = x^{3y} - 1 = (x^3)^y - 1 = (x^3 - 1)((x^3)^{y-1} + (x^3)^{y-2} + ... + x^3 + 1).$$

Nach obiger Gleichung gilt auch $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ und so ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} z &= (x-1)(x^2 + x + 1)((x^3)^{y-1} + ...) \\ &= (x-1)(x \cdot (x+1) + 1)((x^3)^{y-1} + ...). \end{aligned}$$

Also hat $z$ die Teiler $x - 1$ und $x(x+1) + 1$.

Für $x = 2020$ folgt daraus: $z = 2020^{2019} - 1$ hat die Teiler 2019 und $2020 \cdot 2021 + 1$.

Die Behauptung trifft daher zu.

## Eine Ungleichungskette

Für $n \geq 2$ ist einerseits

$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

Setzt man nun $n = 2, 3, 4, ..., 1022121$, so ist

$S < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + ... + 2(\sqrt{1022121} - \sqrt{1022120})$

$= 2(\sqrt{1022121} - \sqrt{1}) = 2020$

Andererseits ist

$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

Setzt man $n = 2, 3, 4, ..., 1022121$, so ist

$S > 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) + ... + 2(\sqrt{1022122} - \sqrt{1022121})$

$= 2(\sqrt{1022122} - \sqrt{2}) > 2019$

Folglich gilt: $2019 < S < 2020$.

# Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 135

**Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg:**
**Kl. 10:** Lisa Schäfer 10;
**Kl. 11:** Hannah Schmitt 7, Fiete Schopp 7.

**Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium** (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
**Kl. 5:** Finn Baumann 28, Sarah Braunecker 6, Leon Conrad 18,Anna Lena Drescher 21, Gabriel Faber 21, Mya Fuchs 28, Jonah Fürst 6, Johannes Greis 33, Pauline Groschke 4, Luca Guth 21, Chiara Kreis 8, Roberta Tintea 5;
**Kl. 6:** Oscar Su 105, Kevin Tran 37, Jan Christian Weber 21;
**Kl. 7:** Lars Schall 21;
**Kl. 8:** Linus Kemmeter 8, Nils Koch 13;
**Kl. 9:** Lukas Born 50;
**Kl. 11:** Torben Bürger 51.

**Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Schule:**
**Kl. 5:** Leyla 2, Liam Genscher 2;
**Kl. 6:** Carina 2, Kiara Dallmeier 2, Hannah Neele Frank 2, Coleen Genscher 2, Raphael Hanold 1, Max Hauser 1, Karl Hoffmann 16, Sarah Hoffmann 16.

**Bielefeld, Gymnasium am Waldhof:**
**Kl. 9:** Roxana Mittelberg 7.

**Dortmund, Leibniz-Gymnasium:**
**Kl. 8:** Oliver Bill 19.

**Frankenthal, Karolinen-Gymnasium** (betr. Lehrerin: Frau Haag)**:**
**Kl. 7:** Philip Memmer 22;
**Kl. 8:** Julia El Sayed 25, Elisa Hoch 25, Merit Millsimmer 25, Emilie Schnirch 20;
**Kl. 10:** Tim Kruse 44.

**Friedberg, Augustinerschule:** **Kl. 6:** Konstantin Herbst 32;
**Kl. 9:** Nico Brockmeier 23, Aleksandra Herbst 49.

**Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:**
**Kl. 10:** Sönke Schneider 66;
**Kl. 12:** Maximilian Göbel 64.

**Gießen, Landgraf-Ludwig-Gymnasium:**
**Kl. 8:** Hanna Mattner 9, Maret Schlinkneider 8, Tom Rieger 11, Jasmin Schulz 15.

**Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:**
**Kl. 5:** Kira Gaspar 12;
**Kl. 8:** Raphael Schmittner 27;
**Kl. 9:** Jakob Zimmermann 41;
**Kl. 10:** Marie Bauer 24.

**Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule**
**Kl. 7:** Ali Said 8, Fabienne Schuy 9;
**Kl. 8:** Theresa Horstkötter 14, Johannes Sabel 6;
**Kl. 11:** Dominik Horstkötter 42;
**Kl. 13:** Melanie Schuy 20.

**Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:**
**Kl. 5:** Mark Garkuscha 9, Severin Hackl 12, Eva Hovadikova 6, Amelie John 5, Iwais Karimi 11, Sarah Markhof 10, David Mücke 12, Elisa Pape 8, Nam-anh Pham 11, Sonja Schischkov 6;
**Kl. 6:** Linus Peczkowski 6;
**Kl. 7:** Michael Bauer 13, Stefanie Forchhammer 16, Valerie Schiberna 6.

**Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:**
**Kl. 11:** Dennis Mayle 57.

**Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium:**
**Kl. 10:** Cedric Friedrich 19.

**Linz, Martinus Gymnasium:**
**Kl. 5:** Daniel Waldek 18;
**Kl. 8:** Simon Waldek 38.

**Mainz-Gonsenheim, Martinus Schule:**
**Kl. 2:** Johannes Wünstel 13.

**Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:**
**Kl. 7:** Gregor Salaru 117;
**Kl. 9:** Raphael Mayer 28.

**Mainz, Frauenlob-Gymnasium** (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
**Kl. 11:** Max Herwig 45,5;
**Kl. 12:** Ivan Khomutovskiy 45, Florian Weinzinger 45,5.

**Mainz, Theresianum:**
**Kl. 10:** Clemens Zabel 65.

**Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:**
**Kl. 6:** Jona Richartz 19.

**Oberursel, Gymnasium** (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
**Kl. 5:** Jasmin Borrmann 7, Luis Brinkmann 34, Frederick Fink 10, Sophie Kunz 11, Dora Meszaros 34, Jaden Stix 21;

**Kl. 6:** Emilie Borrmann 34;
**Kl. 8:** Elisabeth Budimann 32, Annika Etz 35, Henriette Heibock 6, Natalia Kobeszko 19, Emilia Korfmacher 35, Rebecca Pergament 38, Martin Daniel Schanne 36;
**Kl. 9:** Kathrin Borrmann 40,5, Paulina Herber 68, Josefine Kaßner 71;
**Kl. 10:** Annika Borrmann 27;
**Kl. 11:** Oliver Storck 21;
**Kl. 12:** Jonas Blumenroth 66, Jonas Buhrke 35, Lennard Freud 54, Jonas Glückmann 67, Luise Kaßner 46, Friedrich Kievernagel 46, Jannik Matthiesen 25, Fabian Rasch 46, Elisa Windorf 38;
**Kl. 13:** Kristin Teichert 15, Jan Wabnig 17.

**Tangermünde, Diesterweggymanisum:**
**Kl. 7:** Tu Sam Dang 60;
**Kl. 9:** Miriam Büttner 65.

**Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:**
**Kl. 7:** Philipp Lörcks 84.

**Wittlich, Cusanus-Gymnasium:**
**Kl. 8:** Mareike Bühler 49.

**Worms, Gauß-Gymnasium:**
**Kl. 6:** Finn Huber 6, Jan Wickenheiser 12;
**Kl. 7:** Alexander Haun 29;
**Kl. 8:** Fatima Hemood 23.

# Die Monoid-Preisträger 2019


**Das Goldene M:** Florian Weinzinger (Frauenlob-Gymnasium Mainz).
**Monoid-Fuchs:** Philipp Lörcks (Friedrich-Wilhelm-Gymnasium Trier).

**Sonderpreis:** Gregor Salaru (Otto-Schott-Gymnasium, Mainz-Gonsenheim), Jonas Glückmann (Gymnasium Oberursel)
**Forscherpreis:** Maximilian Göbel (Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasium, Schwedt/Oder).


**1. Preise:** Gregor Salaru, Oscar Su, Philipp Lörcks, Josephine Kaßner, Florian Weinzinger, Jonas Glückmann, Ivan Khomutovskiy, Miriam Büttner, Paulina Herber, Max Herwig, Jonas Blumenroth, Clemens Zabel, Sönke Schneider, Tu Sam Dang, Maximilian Göbel, Dennis Mayle

**2. Preise:** Lennard Freund, Lukas Born, Aleksandra Herbst, Kevin Tran, Torben Bürger, Fabian Rasch, Friedrich Kievernagel, Jakob Zimmermann, Kathrin Borrmann, Martin Daniel Schanne

**3. Preise:** Mareike Bühler, Simon Waldek, Luis Brinkmann, Konstantin Herbst, Nico Brockmeier, Raphael Mayer, Luise Kaßner, Jona Buhrke, Peter Gispert, Tim Kruse

**Monoid-Jahresabonnements 2019:** Dominik Horstkötter, Raphael Schmittner, Emilie Borrmann, Annika Borrmann, Jannik Matthiesen, Johannes Greis, Rebecca Pergament, Marie Bauer, Elisa Windorf, Mya Fuchs, Annika Etz, Emilia Korfmacher, Dora Meszaros, Jan Christian Weber, Elisabeth Budiman, Oliver Bill, Anna Lena Drescher, Gabriel Faber, Alexander Haun, Stefanie Forchhammer, Frederik Günter, Finn Baumann, David Mücke, Jona Richartz, Elisa Hoch, Julia El Sayed, Merit Millsimmer, Fiona Ruschke, Lars Schall


Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2018/2019 herzlich zu ihren Gewinnen.
Der Preis für den Träger des Goldenen M wurde gestiftet vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und dem Institut für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Der Preis für den Träger des Monoid-Fuchs von Dr. Ralf Genannt. Der Forscherpreis wurde von Casio gestiftet. Die Sonderpreise wurden von Dr. Ralf Genannt und dem Förderforum des Gymnasiums Oberursel gesponsert. Die 1.-3. Preise wurden gesponsert von den Freunden der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. Die Monoid-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

# Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 10 € für das Kalenderjahr 2020 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- Die Homepage `http://monoid.mathematik.uni-mainz.de/` ist zur Zeit leider nicht erreichbar, da sie intern auf einen anderen Server umzieht. Wir hoffen, dass in Kürze wieder darauf zugegriffen werden kann.
- **Mainzer Mathe-Akademie:** Die nächste Mainzer Mathe- Akademie (MMA) findet vom 9. bis 13. September 2020 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter: `www.Mathe.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`.

# Die Redaktion

**Leitung:** Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
**Mitglieder:** Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
**Weitere Mitarbeiter:** Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
**Zusammenstellung und Satz:** Vera Ruß

**Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen:** Michelle Porth
**Betreuung der Abonnements und Versand:** Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 39 | Heft 140 | Dezember 2019

## Inhalt



**Abonnementbestellungen** per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
**Herausgeber:** Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.



### Impressum

**Anschrift:** Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
**Telefon:** 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
**E-Mail:** `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
**Homepage:** `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`