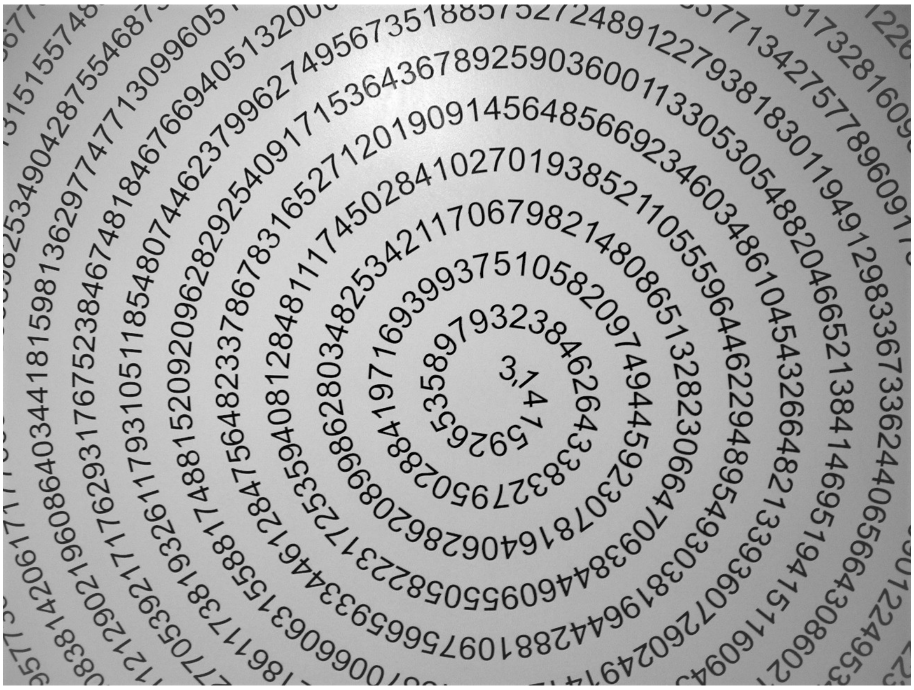
Jahrgang 40 Heft 141 März 2020

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins" hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen"* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.05.2020.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M" und seit 2015 den „Monoid-Fuchs", jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Herzlichen π-Tag

von Marcel Gruner

Jährlich feiern Mathematiker am 14. März den π-Tag. In der US-amerikanischen Datumsschreibweise wird dieser Tag 3/14 notiert und repräsentiert daher die ersten drei Stellen von $\pi \approx 3{,}14$.

Diese Feiern hatten bisher eher inoffiziellen Charakter. Doch um nicht nur π, sondern die gesamte Mathematik, immerhin die Königin der Wissenschaften, angemessen zu würdigen, hat die Unesco letztes Jahr auf Antrag der Internationalen Mathematischen Union (IMU) diesen Tag zum Internationalen Tag der Mathematik erklärt. Es ist geplant, diesen mit einem jährlich wechselnden Motto zu versehen. Dieses Jahr, in dem der Internationale Tag der Mathematik also zum ersten Mal gefeiert wird, lautet das Motto „Mathematik ist überall“.

Noch genauer feiern

Wie bereits geschrieben, wird der π-Tag am 14. März gefeiert, da dieses Datum in der US-amerikanischen Schreibweise die ersten drei Stellen von $\pi \approx 3{,}14$ enthält. Besonders genaue Anhänger der Kreiszahl feiern um 13:59:26 Uhr. Denn zusammen mit dieser Uhrzeit ergibt sich die Angabe 3/14 1:59:26 pm und somit enthält dieser Zeitpunkt sogar eine Genauigkeit der ersten sieben Nachkommastellen.

Ein besonderes Datum war der π-Tag im Jahr 2015. Zusammen mit der Jahreszahl lassen sich für diesen Tag zwei weitere Nachkommastellen ergänzen: 3/14/15. Doch dann muss natürlich um 9:26:53 Uhr angestoßen werden (3/14/15 9:26:53 am). Gleiches gilt übrigens auch für den π-Tag 2115.* Aber den werde ich wohl nicht mehr erleben, wäre ich dann doch schon 133 Jahre alt. Aber vielleicht ja der eine oder die andere unter den Lesern?!

Übertroffen wurde die Genauigkeit sogar noch am 14. März 1592, was aber niemand von uns erlebt hat. Das Datum 3/14/1592 enthält schon sechs Nachkommastellen von π, deren Anzahl sich wiederum mit der Uhrzeit 6:53:58 Uhr erhöhen lässt (3/14/1592 6:53:58 am). Die nächste Approximation ergibt sich am 14. März 15926, aber das wird definitiv niemand mehr von uns auch nur näherungsweise erleben.

Apropos Approximation und näherungsweise: Archimedes näherte π mit dem Bruch $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$ an. Bereits eine sehr gute Näherung – und ganz ohne Computer! Deshalb ist auch der 22. Juli ein (inoffizieller) Feiertag, nämlich π-Annäherungstag.

Ehrentage

Am π-Tag feiern auch einige bedeutende Persönlichkeiten Geburtstag: Hier ist besonders Waclaw Sierpinski zu nennen. Der polnische Mathematiker wurde am 14. März 1882 in Warschau geboren und würde somit dieses Jahr 138 Jahre alt.

---

* Analog gibt es solche Jahre natürlich auch in anderen Jahrhunderten.

Auch zwei deutsche Mathematiker haben am π-Tag Geburtstag: Günter Harder (geboren 1938, Arbeitsgebiete Algebra und Zahlentheorie) und Wulf-Dieter Geyer (1939–2019, Arbeitsgebiete Algebraische Geometrie und die Algebraische Zahlentheorie).
Doch auch in den befreundeten und verwandten Disziplinen finden sich zwei bedeutende Persönlichkeiten, die am π-Tag persönliche Jahrestage haben. So wurde Albert Einstein am 14. März 1879 in Ulm geboren. Leider verstorben am 14. März 2018 ist Stephen Hawking.

Ein Blick über den kreisrunden Tellerrand

Insgesamt gab es einige wichtige Ereignisse am 14. März. Hier eine Auswahl:

- Auf Betreiben des bayerischen Kurfürsten Maximilian I. wurde 1647 im Dreißigjährigen Krieg der Ulmer Waffenstillstand zwischen Bayern, Kurköln, Frankreich und Schweden geschlossen.
- Wilhelm Herschel entdeckte 1784 eine Balkenspiralgalaxie im Sternbild Haar der Berenike
- Giuseppe Verdis Oper Macbeth wurde 1847 in Florenz uraufgeführt.
- Im Jahr 1937 unterzeichnete Papst Pius XI. die in deutscher Sprache verfasste Enzyklika *Mit brennender Sorge*, in welcher er die Politik und Ideologie der Nationalsozialisten verurteilte.
- Die Bundesrepublik Deutschland und die Deutschen Demokratischen Republik unterzeichneten 1974 in Bonn das Protokoll über die Einrichtung Ständiger Vertretungen.
- Frauen müssen bei der Heirat, wenn keine Einigung erfolgt, den Nachnamen des Mannes annehmen?! Das ist verfassungswidrig, stellte das Bundesverfassungsgericht 1991 fest.
- Der erste π-Tag soll 1988 gefeiert worden sein, als Begründer gilt Larry Shaw (1939–2017).
- Endlich! 171 Tage nach der Wahl wurde 2018 endlich eine neue Bundesregierung gebildet. Noch nie hatte das so lange gedauert.
- 31 415 926 535 897 Stellen – so viele Nachkommastellen von π hat Google am π-Tag 2019 veröffentlicht und somit einen neuen Genauigkeitsrekord aufgestellt. Rund 13 TByte Speicherbedarf sind dazu nötig, der Download würde einige Tage dauern.

Um die Sache rund zu machen: Zurück zum π-Tag

Eine Möglichkeit den π-Tag zu feiern ist, einen kreisförmigen Kuchen zu backen – und gemeinsam mit einer leckeren Tasse Kaffee[**] zu verzehren. Im Englischen wird

[**] „Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme umwandelt“, wusste schon Paul Erdös (*26.03.1913 in Budapest, † 20.09.1996 in Warschau; Arbeitsgebiete Kombinatorik, Graphentheorie und Zahlentheorie).

der griechische Buchstabe π genau so ausgesprochen wie das englische Wort pie, was übersetzt Kuchen heißt. Ein kreisförmiger Kuchen mit einem Durchmesser von 20 cm, eine typische Kuchenform-Größe, hat eine Grundfläche von – genau: $\pi\,\mathrm{dm}^2$.

Als π-Tag und Internationaler Tag der Mathematik ist der 14. März – aber nicht nur dieser sondern jeder Tag des Jahres! – ein Tag, sich an der Schönheit der Mathematik zu erfreuen sowie die Mathematik und ihre kreativen Köpfe zu ehren. Und zu diesen kreativen Köpfen gehören alle, die Spaß und Freunde an der Mathematik haben. Und ganz besonders natürlich alle Monoid-Lo(e)ser und -Macher!

Deshalb: Herzlichen Glückwunsch und einen schönen Tag uns allen!

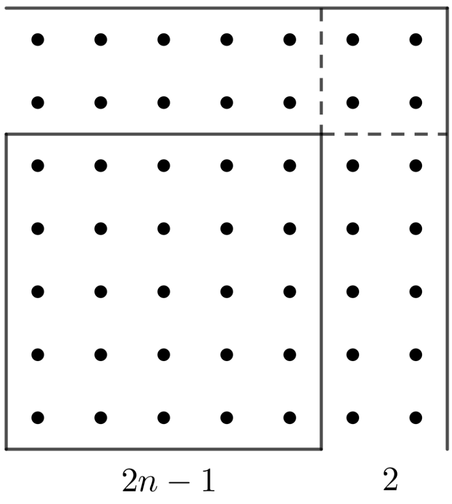
Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

Mit Q_{2n-1} sei die ungerade Quadratzahl $(2n-1)^2$, wobei $n \geq 1$ sei, bezeichnet. Für zwei beliebige aufeinander folgende ungerade Quadratzahlen gilt dann:

$$Q_{2n+1} = Q_{2n-1} + 8n, \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beweis ohne Worte



Der Beweis ohne Worte mit Worten

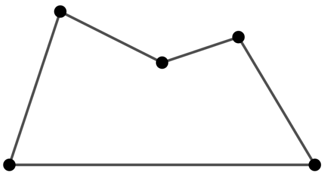
Die Anzahl der Punkte im Quadrat der Seitenlänge $2n-1$ beträgt $(2n-1)^2 = Q_{2n-1}$ und im Quadrat der Seitenlänge $2n+1$ ist sie $(2n+1)^2 = Q_{2n+1}$.

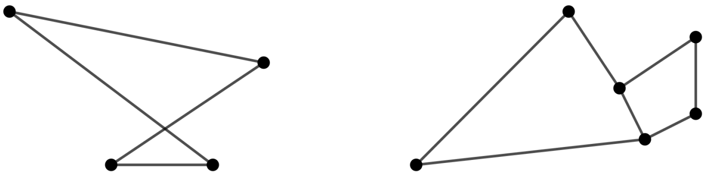
In dem rechtwinkligen Haken der Breite 2 befinden sich $4 \cdot (2n-1) + 4 = 8n$ Punkte. Somit gilt: $Q_{2n+1} = Q_{2n-1} + 8n$.

Der Satz von Pick
Wie ein mathematisches Theorem entsteht
von Hartwig Fuchs

Das Problem

In der Ebene verbindet man n Punkte, wobei $n \geq 3$ ist, durch Strecken so miteinander, dass ein geschlossener Streckenzug S entsteht, der die Ebene in genau zwei Gebiete G_1 und G_2 so zerlegt, dass gilt: $G_1 \cup G_2 \cup S$ ist die Menge aller Punkte der Ebene und $G_1 \cap G_2$ ist die leere Menge. Anschaulich bedeutet das: S trennt G_1 und G_2, hat aber weder mit G_1 noch mit G_2 einen gemeinsamen Punkt.
Das von S umschlossene Gebiet samt den Punkten von S nennt man ein schlichtes Polygon mit n Eckpunkten.


ein schlichtes Polygon


zwei nicht schlichte Polygone

Über die Ebene sei nun ein Gitter aus Quadraten der Seitenlänge 1 gelegt. Dann heißt ein Punkt, der Eckpunkt von vier Quadraten ist, ein Gitterpunkt. Und ein schlichtes Polygon, dessen Eckpunkte sämtlich Gitterpunkte sind, nennt man ein schlichtes Gitterpolygon – kurz: *ein G-Polygon*. Die sechs Figuren auf der nächsten Seite sind Beispiele für G-Polygone.

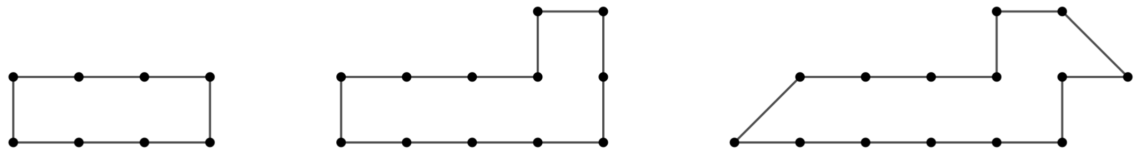
Der österreichische Mathematiker Georg Pick* untersuchte G-Polygone und fand heraus, dass man die Fläche $f(G)$ von solchen Vielecken durch Abzählen von Gitterpunkten bestimmen kann: Man braucht dazu nur die Anzahl $i(G)$ der Gitterpunkte im Innengebiet von G und die Anzahl $r(G)$ der Gitterpunkte auf dem Rand von G zu kennen.
Den Zusammenhang, der zwischen Fläche $f(G)$ von G und den Anzahlen $i(G)$ und $r(G)$ von Gitterpunkten im Innengebiet und auf dem Rand von G besteht, beschreibt der Satz von Pick.

Die Vermutung

Um zu einer Vermutung über eine Beziehung zwischen $f(G), i(G)$ und $r(G)$ zu gelangen, werden zunächst G-Polygone G mit möglichst kleinen Anzahlen von Gitterpunkten im Innengebiet und auf dem Rand von G betrachtet.

* Georg Alexander Pick, * 10.08.1859 in Wien, † 26.07.1942 im KZ Theresienstadt; Hauptarbeitsgebiete Funktionentheorie, Differentialgleichungen und Differentialgeometrie.

Beginnen wir mit G-Polygonen G, die keine Gitterpunkte im Inneren haben – also mit $i(G) = 0$. Für sie lässt sich eine Beziehung zwischen $f(G)$ und $r(G)$ leicht angeben.



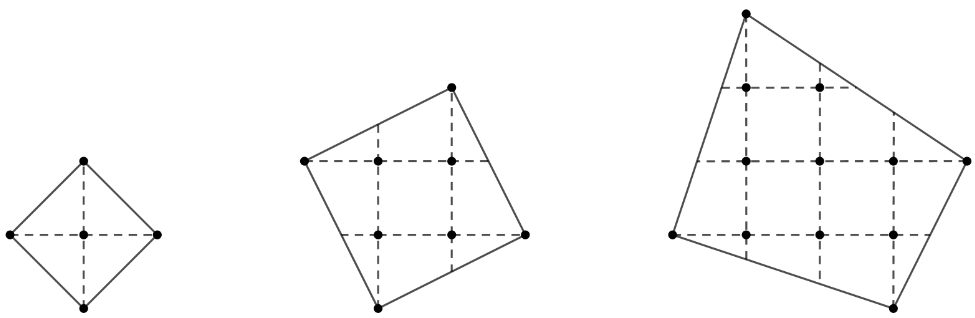
$r = 8$, $f = 3$ $\qquad$ $r = 12$, $f = 5$ $\qquad$ $r = 14$, $f = 6$

Bei diesen drei G-Polygonen besteht die Relation

(1) $f(G) = \frac{1}{2}r(G) - 1$.

Die folgenden G-Polygone haben alle die gleiche Anzahl von Eckpunkten und es zeigt sich, dass für sie gilt

(2) $f(G) = i(G) + 1$.



$i = 1$, $f = 2$ $\qquad$ $i = 4$, $f = 5$ $\qquad$ $i = 8$, $f = 9$

Wegen (1) und (2) vermutete Pick: Zwischen $f(G), i(G)$ und $r(G)$ besteht ein linearer Zusammenhang, das heißt es gilt eine Gleichung vom Typ

(3) $f(G) = \alpha \cdot i(G) + \beta \cdot r(G) + \gamma$ mit zunächst unbekannten positiven Koeffizienten α, β und γ.

Einen Anhaltspunkt für die möglichen Werte von α, β und γ erhält man, wenn man in dieser Gleichung zum Beispiel die f-, i- und r-Werte der Polygone oben mit $f = 3, f = 6$ und $f = 9$ einsetzt. Man erhält dann das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 8 + \gamma \\ 6 &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 14 + \gamma \\ 9 &= \alpha \cdot 8 + \beta \cdot 4 + \gamma. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems ist $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -1$.

Damit erhält man eine konkrete Fassung der *Vermutung von Pick:*

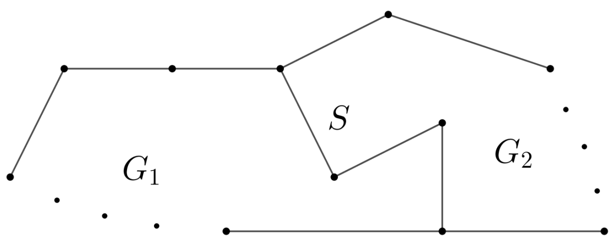
(4) Jedes G-Polygon G hat die Fläche $f(G) = i(G) + \frac{1}{2}r(G) - 1$.

Eine Vorüberlegung

Die mit jedem G-Polygon verknüpfte Zahl $i(G)+\frac{1}{2}r(G)-1$ sei die *Pick-Zahl* $p(G)$ von G genannt; p selbst heißt die Pick-Funktion. Die Pick-Funktion besitzt die Eigenschaft der Additivität – das bedeutet:

(Satz 1) Für zwei G-Polygone G_1 und G_2 mit einem Gitter-Streckenzug S als gemeinsamem Randstück, die aber sonst elementfremd sind, gilt

$$p(G_1 \cup G_2) = p(G_1) + p(G_2).$$



Nachweis

Die Anzahl der Gitterpunkte von S sei s.

Dann hat $G_1 \cup G_2$ insgesamt $i(G_1) + i(G_2) + s - 2$ Innenpunkte und $r(G_1) - s + 2 + r(G_2) - s = r(G_1) + r(G_2) - 2s + 2$ Randpunkte.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} p(G_1 \cup G_2) &= i(G_1 \cup G_2) + \tfrac{1}{2}r(G_1 \cup G_2) - 1 \\ &= (i(G_1) + i(G_2) + s - 2) + \tfrac{1}{2}(r(G_1) + r(G_2) - 2s + 2) - 1 \\ &= i(G_1) + \tfrac{1}{2}r(G_1) - 1 + i(G_2) + \tfrac{1}{2}r(G_2) - 1 \\ &= p(G_1) + p(G_2). \end{aligned}$$

Der Satz 1 wird später beim Beweis des Satzes von Pick benötigt.

Vorstufen des Beweises

Ausgehend von der Tatsache, dass ein Rechteck R mit den Seitenlängen m und n die Fläche $f(R) = mn$ besitzt, zeigt man:

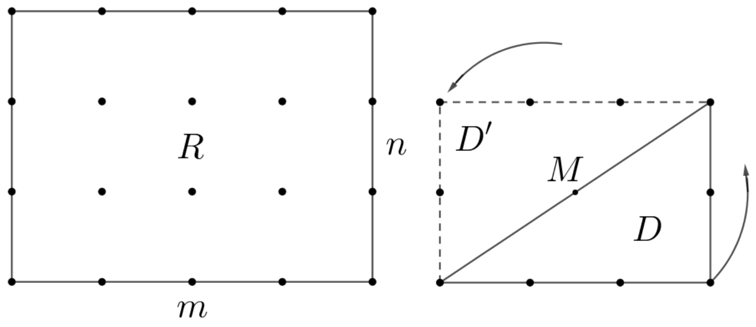
(Satz 2) Ein Gitter-Rechteck R, dessen Seiten auf Gitterlinien liegen, hat die Fläche $f(R) = i(R) + \frac{1}{2}r(R) - 1$; kurz: $f(R) = p(R)$.

Beweis dieses Sonderfalls der Vermutung (4)

Die Seitenlängen von R seien m und n. R besitzt $i(R) = (m-1) \cdot (n-1)$ Innenpunkte, sowie $r(R) = 2(m+1)+2(n-1) = 2(m+n)$ Randpunkte. Daraus folgt: $p(R) = i(R)+\frac{1}{2}r(R)-1 = (m-1)(n-1)+\frac{1}{2}\cdot 2(m+n)-1 = mn = f(R)$. Also gilt: $p(R) = f(R)$ – womit die Vermutung (4) für Gitterrechtecke bewiesen ist.

(Satz 3) Ein rechtwinkliges Gitter-Dreieck D, dessen Katheten auf Gitterlinien liegen, hat die Fläche $f(D) = i(D) + \frac{1}{2}r(D) - 1$; kurz: f(D)=p(D).

Bemerkung: Die Flächenfunktion f besitzt die Eigenschaft der Additivität – das heißt insbesondere, dass unter den gleichen Voraussetzungen für die G-Polygone G_1 und G_2 wie in Satz 1 gilt: $f(G_1 \cup G_2) = f(G_1) + f(G_2)$.



Beweis von Satz 3
Es sei M der Mittelpunkt der Hypotenuse des Dreiecks D. Man drehe D mit Drehzentrum M um 180° (siehe die Figur oben) – das gedrehte Dreieck sei D'.
Für D und D' gelten: $f(D) = f(D')$ sowie $p(D) = p(D')$.
Daraus folgt: $f(R) = f(D \cup D') = f(D) + f(D') = 2f(D)$ sowie mit Satz 1 $p(R) = p(D \cup D') = p(D) + p(D') = 2p(D)$. Aus Satz 2 erhält man dann wegen $f(R) = p(R)$, dass $2f(D) = 2p(D)$ und deshalb $f(D) = p(D)$ – was zu zeigen war.

Den Satz 3 verallgemeinert man nun so, dass er für jedes Gitterdreieck zutrifft.

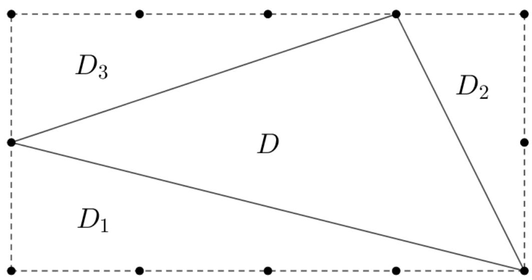
(Satz 4) Für jedes Gitterdreieck gilt: $f(D) = p(D)$.

Beweis
Man ergänze D durch Gitter-Dreiecke D_1, D_2 und D_3 zu einem Gitter-Rechteck $R = D \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Dann ist

$$f(R) = f(D) + f(D_1) + f(D_2) + f(D_3)$$

und nach Satz 1 gilt

$$p(R) = p(D) + p(D_1) + p(D_2) + p(D_3).$$



Weil nun die Dreiecke D_1, D_2 und D_3 so beschaffen sind, dass Satz 3 auf sie anwendbar ist, gilt: $f(D_1) = p(D_1), f(D_2) = p(D_2), f(D_3) = p(D_3)$.
Damit, und weil nach Satz 2 $f(R) = p(R)$ ist, folgt

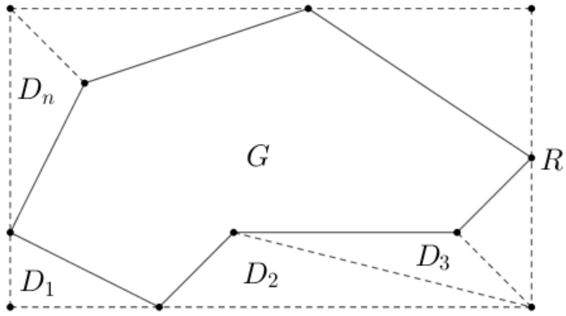
$$f(D) + f(D_1) + f(D_2) + f(D_3) = p(D) + p(D_1) + p(D_2) + p(D_3).$$

Dann aber ist $f(D) = p(D)$ und das war zu zeigen.

Der Beweis

Mit Satz 2 und Satz 3 ist die Vermutung (4) von Georg Pick zwar nur für zwei Klassen ganz elementarer G-Polygone, nämlich für G-Rechtecke und G-Dreiecke bewiesen. Aber damit hat man tatsächlich die entscheidenden Vorarbeiten zum Beweis von (4) für beliebige G-Polygone geleistet. Denn $p(G)$ kann jeweils allein mit Hilfe von G-Dreiecken und einem G-Rechteck bestimmt werden.

Ein G-Polygon G sei durch G-Dreiecke $D_1, D_2, ..., D_n$ zu einem G-Rechteck R ergänzt wie in der Figur. Es gilt dann $R = G \cup D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$.

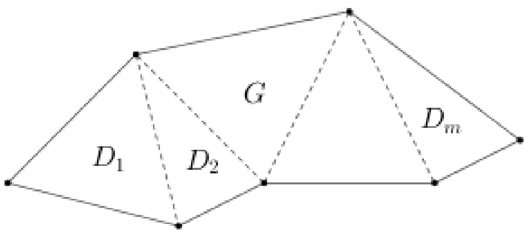


Aus der Additivität von f und aus Satz 1 folgt dann:

$f(R) = f(G) + f(D_1) + ... + f(D_n)$ und $p(R) = p(G) + p(D_1) + ... + p(D_n)$. Wegen Satz 1 ist $f(R) = p(R)$ und wegen Satz 4 gilt: $f(D_1) = p(D_1)$, $f(D_2) = p(D_2), ...f(D_n) = p(D_n)$, sodass schließlich $f(G) = p(G)$ ist.

Somit gilt der *Satz von Pick:*
Jedes G-Polygon G hat die Fläche $f(G) = i(G) + \frac{1}{2}r(G) - 1$.

Beweis-Variante



Jedes G-Polygon G kann in aneinandergrenzende G-Dreiecke $D_1, D_2, ..., D_m$ zerlegt werden wie in der Figur.
Es ist also $G = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_m$. Ähnlich wie oben kann man dann mit den Sätzen 1 und 4 den Satz von Pick beweisen.

Mathematische Entdeckungen

Teilbarkeit durch 3

Gegeben sei eine nicht abbrechende Folge von Differenzen

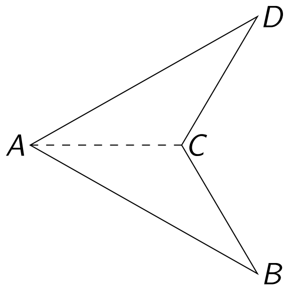
$$a - 1, a^2 - 1, a^3 - 1, ...$$

wobei a eine der Zahlen 2, 3, 4, ... sei und $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, und so weiter bedeutet. Untersuche, welche der Differenzen durch 3 teilbar sind. Beginne Deine Untersuchungen mit dem Fall $a = 2$, danach betrachte den Fall $a = 3$ und so weiter – so weit Du möchtest.
Versuche Deine Ergebnisse zu begründen. (HF)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2020 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 139

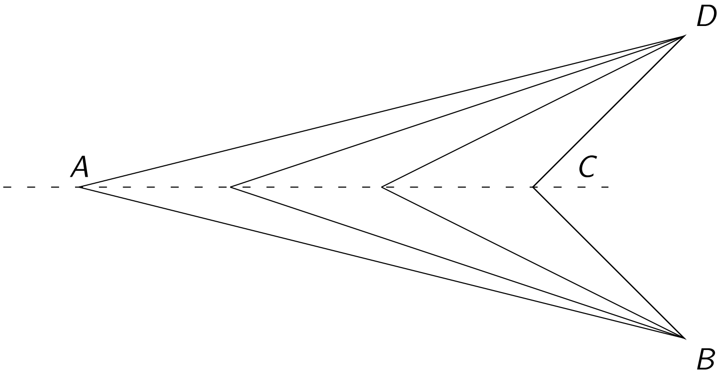
In Heft 139 stellten wir Euch folgende Aufgabe:



Flächenzerlegung

Man zerlege ein achsensymmetrisches Viereck $ABCD$ wie in der Figur in n flächengleiche Dreiecke, wobei $n = 3$, 4, 5, 6, ... sei.

Mit dieser Aufgabe haben sich Clemens Zabel (Klasse 11, Theresianum, Mainz) und Philipp Lörcks (Klasse 7, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Trier) beschäftigt.



Beide haben den Fall behandelt, dass n gerade ist: Sie zerteilen die Strecke $\overline{AC}$ in $\frac{n}{2}$ gleich lange Abschnitte, welche gemeinsam mit den Punkten B und D jeweils ein Dreieck bilden.
Diese $2 \cdot \frac{n}{2} = n$ Dreiecke haben gleich lange Grundseiten und Höhen, also gleichen Flächeninhalt.

Für ungerade n ist das Problem wesentlich schwieriger und verwandt zu dem Satz von Monsky (1970), nach dem ein Quadrat nicht in eine ungerade Anzahl von Dreiecken gleichen Flächeninhalts zerlegt werden kann.

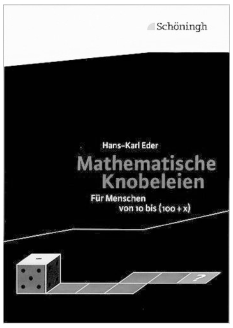
Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
Martin Mattheis

Eder, Hans-Karl: Mathematische Knobeleien

Im Vorwort schreibt der Autor in Bezug auf die vorgelegten Aufgaben, die zum Teil in der Samstagsausgabe einer Tageszeitung erschienen waren: „Viele eingereichte Lösungen zeigten den Ideenreichtum, die Kreativität und die mathematische Begabung der Menschen, die sich mit den Problemstellungen auseinandersetzten, fernab einer Bewertung, allein dem Ziel verpflichtet, einen Lösungsweg zu finden und die Lösung zu meistern.“ Entsprechend viel Spaß mit den Aufgaben ist allen Lösern zu wünschen. Die Aufgaben sind spannend und ansprechend illustriert. Thematisch entstammen die Knobeleien unterschiedlichen mathematischen Teil-

gebieten. Die meisten Aufgaben sind für alle Altersstufen lösbar und erfordern eher Kreativität als konkrete mathematische Werkzeuge. In der zweiten Hälfte des Buches befinden sich die Lösungen der Aufgaben und ausführliche Lösungswege zum Nachvollziehen.
Fazit:
Wer nach Erscheinen des MONOID-Heftes und der Abgabe seiner Lösung weiterhin seine „Gehirnmuskeln" trainieren will, der ist mit den Knobelaufgaben gut aufgehoben.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:
Eder, Hans-Karl: Mathematische Knobeleien. Für Menschen von 10 bis $(100 + x)$
Schöningh 2009,
ISBN 978-3-14-037004-2,
PB 104 Seiten.

Art des Buches:	Sammlung mit Knobelaufgaben
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 10 Jahren

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Zahlenirrgarten

Wir sind in einem Zahlenirrgarten gefangen. Zu Beginn befinden wir uns auf der Zahl $s \in \mathbb{N}$, der Ausgang ist bei der Zahl $z \in \mathbb{N}$ und wir versuchen, möglichst schnell den Ausgang zu erreichen. Dabei dürfen wir stets nur einen der folgenden Schritte durchführen:

- Multiplizieren der aktuellen Zahl mit 2.
- Dividieren der aktuellen Zahl durch 2, falls sie durch 2 teilbar ist.
- Addieren von 2 zur aktuellen Zahl.

Beispiel: von $s = 13$ zu $z = 4$ kommt man durch die folgenden Schritte:

$$13 \xrightarrow{*2} 26 \xrightarrow{+2} 28 \xrightarrow{/2} 14 \xrightarrow{+2} 16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{/2} 4$$

$$13 \xrightarrow{*2} 26 \xrightarrow{+2} 28 \xrightarrow{+2} 30 \xrightarrow{+2} 32 \xrightarrow{/2} 16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{/2} 4$$

a) Schreiben Sie ein Programm/eine Funktion, das/die für zwei Zahlen $s, z \in \mathbb{N}$ eine Folge von Schritten ausgibt, um von s nach z zu gelangen (oder eventuell feststellt, dass das nicht möglich ist).
b) Liefert Ihr Programm die *minimale* Anzahl von Schritten? Begründung!
c) Erweitern Sie Ihr Programm so, dass es für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Schritten funktioniert:
   - Multiplizieren der aktuellen Zahl mit a.
   - Dividieren der aktuellen Zahl durch b, falls sie durch b teilbar ist.
   - Addieren von c zur aktuellen Zahl.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2020 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.
Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 138

Zahnstocherzahlen

In dieser Aufgabe geht es darum, natürliche Zahlen mit Hilfe von Zahnstochern darzustellen. Die einfachste Möglichkeit ist, eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch n Zahnstocher wie in einer Strichliste darzustellen, zum Beispiel $8 = ||||||||$.
Lässt man aber andere Darstellungen zu, kommt man u. U. mit weniger aus.

a) Zusätzlich lassen wir Darstellungen zu, bei denen mit zwei Zahnstochern ein Multiplikations-Kreuz ($\times$) gelegt werden kann: $8 = ||||\times||$.
   In diesem Fall benötigt man ebenfalls acht Zahnstocher. Was ist die kleinste Zahl, für die man auf diese Weise weniger Zahnstocher benötigt?
b) Für Primzahlen nützt die Darstellung mittels Multiplikation natürlich nichts. Aber man kann mittels zweier Zahnstocher auch ein Additions-Plus ($+$) legen (wobei die übliche Regel „Multiplikation vor Addition“ zu beachten ist): $9 = ||||\times||+|$.
   In diesem Fall werden sogar elf Zahnstocher benötigt. Was ist die kleinste Zahl, für die diese Darstellung besser ist als die vorherige?
c) Als drittes wollen wir auch die Subtraktion zulassen, wobei dafür nur ein Zahnstocher benötigt wird: $7 = ||||\times||-|$.
   Was ist die kleinste Zahl, für die diese Darstellung besser ist als die vorherigen?
d) Was sind die jeweils besten Darstellungen für 1111?

Lösung

a) Für jede feste Zahl n gibt es genau zwei Möglichkeiten: Entweder die Zahl wird ohne Multiplikation $\times$ dargestellt oder mit. Im ersten Fall benötigt man natürlich genau n Zahnstocher. Im zweiten Fall, also wenn $n = i \times j$, benötigt man zwei Zahnstocher für das $\times$ sowie die Zahnstocher für die beiden Faktoren i und j. Man sieht ein, dass i und j mindestens 2 und maximal $\sqrt{n}$ sein können und, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, einer der Faktoren, sagen wir i, selbst *nicht* als Produkt weiterer Faktoren dargestellt wird. Gehen wir also davon aus, dass wir bereits die bestmöglichen Darstellungen für alle Zahlen kleiner als n kennen. Dann können wir die bestmögliche Darstellung für n finden, indem wir alle möglichen Darstellungen $n = i \times j$ durchprobieren und jeweils die Anzahl der benötigten Zahnstocher für i, für j und für das $\times$ bestimmen. Die kleinste Anzahl an Zahnstochern ist die gesuchte für n. Das folgende Python-Programm führt diesen Algorithmus durch, wobei nacheinander die jeweils besten Darstellungen für $k = 1, \dots, n$ bestimmt werden.

```
from math import floor, sqrt
n = 2222
# Die beste Darstellung für n=0 ist klar
darstellung = [(0, "")]
for k in range(1, n + 1):
  # Wir nehmen die beste Darstellung ohne "+"
  n_best = k # Anzahl der Zahnstocher
  d_best = "|" * k # Die Darstellung selbst
for i in range(2, floor(sqrt(k)) + 1):
    if k % i == 0: # Nur falls i ein Teiler von n ist
      j = k // i # Nun gilt n = i * j
      n_i = darstellung[i][0] # Beste Darstellung für i
      n_j = darstellung[j][0] # Beste Darstellung für j
      if n_i + n_j + 2 < n_best: # Darstellung ist besser?
        n_best = n_i + n_j + 2
        d_best = darstellung[i][1] + "x" + darstellung[j][1]
  # Beste Darstellung für k speichern
  darstellung.append((n_best, d_best))
for k in range(1, n+1):
  print("n = {}: {} ({} Zahnstocher)".format(
    k,
    darstellung[k][1],
    darstellung[k][0]))
```

Die kleinste Zahl, für die eine Darstellung mit „$\times$“ die beste ist, ist $n = 9$:

```
n = 9: |||x||| (8 Zahnstocher)
```

b) Lässt man zusätzlich ein $+$ zu, so geht man analog vor. Entweder die beste Darstellung für n enthält *kein* $+$, dann ist es genau die in Aufgabe a) bestimmte. Oder sie enthält mindestens ein $+$, dann ist $n = i + j$ mit, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $i \leq \frac{n}{2}$ und i wird selbst ohne „+“ dargestellt.

```
from zahnstochermul import *
darst_plus = [(0, "")]
for k in range(1, n + 1):
    # Zu Beginn ist die beste bekannte Darstellung diejenige
  ohne "+" aber vielleicht mit "*"
    (n_best, d_best) = darstellung[k]
    # Diesmal alle Aufteilungen k = i + j mit 1 <= i <= k/2

for i in range(1, floor(k/2) + 1):
        j = k - i
        # Der kleine Summand darf Produkt sein
        n_i = darstellung[i][0]
        # Der größere Summand j darf selbst
# eine Summe sein
        n_j = darst_plus[j][0]
        if n_i + n_j + 2 < n_best: # Darstellung besser?
            n_best = n_i + n_j + 2
            d_best = darstellung[i][1]+ "+" +darst_plus[j][1]
    # Darstellung für k speichern
    darst_plus.append((n_best, d_best))

for k in range(1, n+1):
    print("n = {}: {} ({} Zahnstocher)".format(
        k, darst_plus[k][1], darst_plus[k][0]))
```

Die kleinste Zahl, für die eine Darstellung mit „+“ die beste ist, ist $n = 13$:

```
n = 13: |+|||x|||| (12 Zahnstocher)
```

c) Ähnlich geht man vor, wenn man Darstellungen $n = i - j$ zulässt. Der Einfachheit halber betrachten wir nur denn Fall, i eine Summe und j ein Produkt ist. Hier ist zu beachten, dass i größer ist als n, wir benötigen für die Bestimmung der Darstellung für n also Summendarstellungen für zum Beispiel $i = n + 1, \dots , 2n$.

```
from zahnstocherplus import *
darst_minus = [(0, "")]
for k in range(1,n // 2 + 1):
    # Wir nehmen die beste Darstellung ohne "-"
    (n_best, d_best) = darst_plus[k]
    # Diesmal alle Aufteilungen k = i - j mit k < i <= 2*k
    for i in range(k+1, 2*k + 1):
        j = i - k
        n_i = darst_plus[i][0]
        n_j = darstellung[j][0]
        if n_i + n_j + 1 < n_best:
            n_best = n_i + n_j + 1
            d_best = darst_plus[i][1]+ "-" +darstellung[j][1]
    darst_minus.append((n_best, d_best))
for k in range(1, n // 2+1):
    print("n = {}: {} ({} Zahnstocher)".format(
        k,
        darst_minus[k][1],
        darst_minus[k][0]))
```

Die kleinste Zahl, für die eine Darstellung mit „−" die beste ist, ist $n = 19$:

```
n = 19: ||||x|||||-| (13 Zahnstocher)
```

d) Die besten Darstellung für $n = 1111$ sind:

```
n = 1111: |||||||||||x|....|
          (114 Zahnstocher, 1111 = 11 * 101)
n = 1111: |||||||||||+||||x|||||x|||||x|||||||||||
          (44 Zahnstocher)
n = 1111: ||x||||x||||x|||||x|||||||-|||x|||
          (39 Zahnstocher)
```

„Das Denkerchen"

von Horst Sewerin

Jan hat mit seinen Eltern eine ungewöhnliche Art der Taschengeldberechnung ausgemacht. In jedem Monat, in dem er eine Arbeit mit einer 4 oder einer schlechteren Note schreibt, verliert er einen festen Betrag von seinem Taschengeld. In jedem anderen Monat wird der normale Taschengeldsatz um einen ebenfalls festen Satz erhöht.

Nach mehreren Monaten zieht er gemeinsam mit seinen Eltern Bilanz. „Betrachtet man jeweils sieben aufeinanderfolgende Monate, so ist deine Bilanz immer negativ“, sagt der Vater. „Wenn wir aber jeweils elf aufeinanderfolgende Monate betrachten, so ist meine Bilanz immer positiv“, entgegnet Jan.

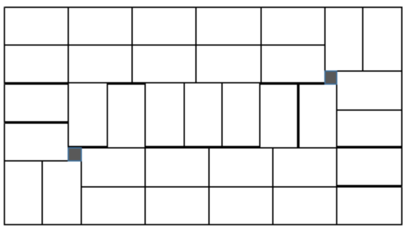
Welches ist die größte Anzahl von Monaten, für die beide Aussagen richtig sind? Oder geht das gar nicht? (Die Antwort ist zu begründen.)

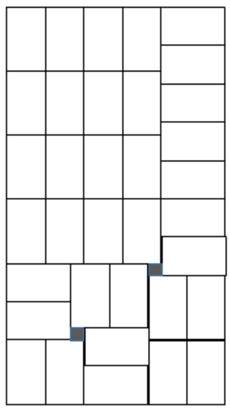
Lösung der Aufgabe aus Heft 139

In Heft 139 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Auf dem Dach der neuen Turnhalle befindet sich seit den Sommerferien ein quadratisches Gitter mit 17 mal 31 Feldern. „Weißt Du, was das soll?“, fragt Paul seinen Freund Peter. „Das ist das Gerüst für eine Solaranlage“, entgegnet Peter. „Die einzelnen Elemente der Anlage sind 3 mal 5 Felder groß und werden horizontal oder vertikal genau auf die Gitterlinien montiert, ohne dass es Überlappungen gibt.“ Paul rechnet kurz und sagt darauf: „17 mal 31 ist 527, 3 mal 5 ist 15, und 15 geht 35-mal in 527. Also müssten 35 solcher Elemente auf das Gitter passen.“ „Dann versuch es doch einmal zu zeichnen. Wenn Du es schaffst, lade ich Dich ins Kino ein; wenn nicht, lädst Du mich ein“, schlägt Peter vor. Paul willigt ein und zieht sich mit einem Block Karopapier zurück. Ist 35 tatsächlich die größte Anzahl von 3×5-Rechtecken, die man wie angegeben in einem 17×31-Gitter unterbringen kann? Die Antwort ist zu begründen.

Lösung

Tatsächlich ist es möglich, 35 solcher Rechtecke auf dem Dach unterzubringen. Paul kann die Wette mit einer punktsymmetrischen oder einer nicht symmetrischen Verteilung gewinnen, wie die beiden Beispiele zeigen.





Vollständig richtige Lösungen haben Johannes Kehrberger, Sönke Schneider und Oscar Su eingereicht. Alle anderen Teilnehmer haben versucht zu beweisen, dass die Belegung nur mit höchstens 34 kleinen Rechtecken möglich ist. Damit befinden sie sich in bester Gesellschaft, wie ein Blick in die Geschichte dieser Aufgabe zeigt. Der australische Mathematikwettbewerb National Mathematics Competitions verwendet Multiple-choice-Fragen mit einer richtigen und vier falschen Antworten. 1997 wurde folgende Aufgabe vorgeschlagen*:

Die größte Anzahl von 3×5-Rechtecken, die man ohne Überlappen in einem 17×31-Rechteck unterbringen kann, beträgt
(A) 30 (B) 31 (C) 32 (D) 34 (E) 35.

Setzen wir alle kleinen Rechtecke horizontal bzw. vertikal, können 30 Rechtecke untergebracht werden. Der große Rest von 77 Einheitsquadraten lädt ein, eine bessere Lösung zu suchen.
Wenn die Breite ganz ausgenutzt werden soll, geht dies nur mit zwei horizontalen und sieben vertikalen bzw. fünf horizontalen und zwei vertikalen Rechtecken. Damit kommen wir auf 31 Rechtecke. Mit vier 15×8-Blöcken können wir 32 Rechtecke unterbringen – dafür gibt es wieder zwei Ränder. Wenn wir die Höhe ganz ausnutzen, brauchen wir vier horizontale und ein vertikales Rechteck. Diese Bedeckung benötigt 34 Rechtecke und wurde als Lösung des Aufgabenvorschlags mitgegeben, denn eine Belegung mit 35 Rechtecken und einem Rest von bloß zwei Einheitsquadraten erschien unmöglich. Die Möglichkeit (E) 35 wurde als falsche Antwort für die Teilnehmer aufgenommen, welche lediglich 527 durch 15 teilten.
Da es aber ein Prinzip des Aufgabenausschusses ist, falsche Antworten nur dann anzunehmen, wenn sie als falsch nachgewiesen sind, und da die vorschlagende Person die Unmöglichkeit der Bedeckung mit 35 Rechtecken nicht nachweisen konnte, fiel die Aufgabe bei der Auswahl durch.

So weit, so gut. Aber die Geschichte ist hier noch nicht zu Ende. Nach der Ausschusssitzung fand ein Abendessen mit anderen Beteiligten statt, und die Aufgabe wurde rasch verbreitet. Bald sah man Kugelschreiber über Servietten huschen und Menükarten mit Beweisversuchen die Runde machen. Bis zum Ende des Hauptgerichts wurden mehrere „Beweise“ für die Unmöglichkeit von 35 Rechtecken erstellt. Bis zum Nachtisch hatte man leider bei allen Beweisversuchen Lücken gefunden. Aber den Teilnehmern war klar, dass man in einer ruhigen Stunde, mit Karopapier und ohne Essensduft, mit der Widerlegung erfolgreicher sein würde. Allerdings war dann die Überraschung unter den gestandenen Mathematikerinnen und Mathematiker riesengroß...

* nach David Clark/Janet Hunt: One That Got Away: A Rejected Problem, Journal of the World Federation of National Mathematics Competitions, volume 11 number 1 (1998)

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 140

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Amerika-Reise

Astrid will sich gründlich auf eine USA-Reise vorbereiten. Sie geht mit 380 € im Geldbeutel Bildbände amerikanischer Städte einkaufen. Zuerst kauft sie einen Band über New York. Zum Preis dieses Bandes könnte sie keine drei weiteren Bände kaufen. Dann kauft sie einen Band über Chicago. Bei dessen Preis hätte sie insgesamt fünf Bände kaufen können. Das Buch über Los Angeles kostet 14 € weniger als das über New York, und 6 € weniger als das über San Francisco. San Francisco ist um 17 € teurer als Chicago. Den Band über New York und den über Chicago kann sie jeweils mit Scheinen (ohne Münzen) passend bezahlen.

Wie viel Geld hat sie nach den Einkäufen übrig? (WJB)

Lösung:

Die Preise bezeichnen wir mit den Anfangsbuchstaben der jeweiligen Städte. Es gelten dann

$$N > \frac{380}{4} = 95,$$
$$C \leq \frac{380}{5} = 76 \text{ und}$$
$$L = N - 14 = S - 6,$$

das heißt $S = N - 8$ und $C = S - 17 = N - 25$.

N und C sind Vielfache von 5.

Wir versuchen es zunächst mit dem kleinsten möglichen Wert für N:

$N = 100$, $L = 86$, $S = 92$, $C = 75$. Damit ist $N + L + S + C = 353$.

Dies ist die einzige Lösung, da $N > 100$ zu $C > 76$ führt.

Astrid hat also $(380 - 353)$ € $= 27$ € übrig.

II. Zusammen 100 Jahre alt

Die Freundinnen Ute, Miriam und Alexandra sind zusammen 100 Jahre alt. Utes Alter ist durch 17, Miriams durch 15 und Alexandras durch 9 teilbar. Die älteste der Freundinnen ist weniger als doppelt so alt wie die jüngste.

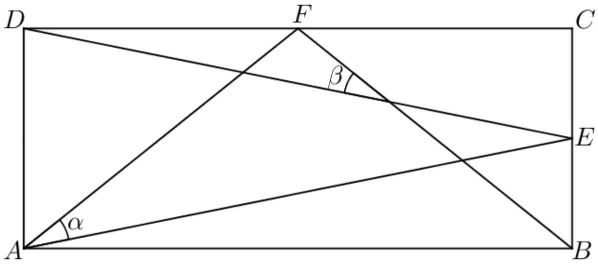
Wie alt sind die drei? (WJB)

Lösung:

Wäre Ute 17, so wäre eine der anderen beiden älter als $\frac{(100-17)}{2} = 41{,}5$ Jahre, also mehr als doppelt so alt. Wäre Ute $3 \cdot 17 = 51$, so wäre eine der anderen jünger als $\frac{(100-51)}{2} = 24{,}5$ Jahre, also weniger als halb so alt. Ute ist also $2 \cdot 17 = 34$ Jahre alt.

Miriam kann nicht 15 Jahre alt sein, da $34 > 2 \cdot 15$ ist. Sie kann aber auch nicht $3 \cdot 15 = 45$ Jahre alt sein, da sonst für Alexandra nur $100 - 45 - 34 = 21 < \frac{45}{2}$ übrig bleibt.
Also ist Ute 34 Jahre alt, Miriam 30 Jahre und Alexandra 36 Jahre.

III. Wie groß sind die Winkel?



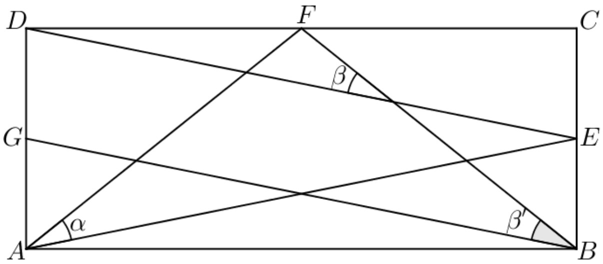
Im Rechteck *ABCD* seien *E* und *F* Seitenmittelpunkte. Die Transversalen *AF* und *AE* bilden den Winkel α und *ED* sowie *BF* schneiden sich unter dem Winkel β (siehe die Figur).

Sind dann die Winkel α und β gleich groß? Begründe Deine Entscheidung. (H.F.)

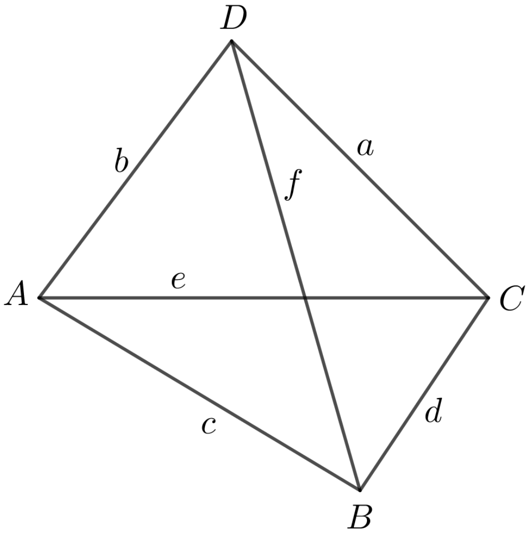
Lösung:

Zeichne in die Figur den Mittelpunkt *G* der Strecke *DA* und die Transversale *BG*.

BG ist parallel zu *ED* und deshalb sind die Winkel $\angle FBG$ und β als Stufenwinkel gleich groß. Ferner sind aus Gründen der Symmetrie die Winkel α und β' gleich groß. Folglich gilt: $\alpha = \beta$.



IV. Ungleichungen am Viereck



Ein Viereck *ABCD*, das keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt, hat die Seitenlängen *a*, *b*, *c*, *d* und die Diagonalenlängen *e*, *f*.
Begründe: Der Umfang des Vierecks ist größer als die Summe seiner Diagonalenlängen. (H.F.)

Lösung:
Mit der Dreiecksungleichung gilt: Im Dreieck ACD ist $a + b > e$ und im Dreieck ABC ist $c + d > e$.
Addition der Ungleichungen ergibt: $a + b + c + d > 2e$. (1)
Ganz entsprechend erhält man aus den Dreiecken ABD und BCD:
$b + c > f$ und $a + d > f$, sodass jetzt $a + b + c + d > 2f$. (2)
Aus (1) und (2) folgt: $2(a+b+c+d) > 2(e+f)$, woraus die Behauptung folgt.

V. Zahl gesucht

Die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen sei ein Vielfaches von 10 und ihr Produkt sei eine siebenziffrige Zahl mit der ersten Ziffer 5 (von links).
Wie heißen die vier Zahlen? (H.F.)

Lösung:
Es sei n die kleinste der gesuchten Zahlen. Dann gilt:
(1) $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) \equiv 0 \mod 10$
$\iff 4x + 6 \equiv 0 \mod 10 \iff 4x \equiv 4 \mod 10$
$\iff x \equiv 1 \mod 10$ oder $x \equiv \quad \mod 10$
(auf die letzte Aussage kommt man durch Überprüfen aller Restklassen $\mod 10$).
Da das Produkt als erste Ziffer eine 5 hat und siebenziffrig ist gilt

$$6000000 > x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \geq 5000000$$

beziehungsweise

$$6000000 > x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x \geq 5000000.$$

Damit gelten auch
(2) $6000000 > x^4 \iff \sqrt[4]{6000000} > x$, wobei $\sqrt[4]{6000000} \approx 49{,}4923$ ist
und:
(3) $(x + 3)^4 > x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \geq 5000000$
$\iff x + 3 > \sqrt[4]{5000000} \iff x > \sqrt[4]{5000000} - 3$
wobei $\sqrt[4]{5000000} - 3 \approx 47{,}2871 - 3 = 44{,}2871$ ist.
Also ist nach (2) und (3) $45 \leq n \leq 49$; da nach (1) die Endziffer 1 oder 6 sein muss folgt $n = 46$. Dies lässt sich durch Probe leicht bestätigen:
$46 + 47 + 48 + 49 = 190 = 19 \cdot 10$ und $46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 = 5085024$.
(Philipp Lörcks, Klasse 8, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, Trier)

VI. Anzahl von Teilern

a) Welche zweistelligen Zahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern, das heißt lassen sich durch eine ungerade Anzahl verschiedener Zahlen teilen?
b) Wie viele natürliche Zahlen kleiner als eine Millionen haben eine ungerade Anzahl von Teilern? (WJB)

Lösung:

Hat eine Zahl n den Teiler m, so hat sie auch den Teiler $\frac{n}{m}$. Ist $n \neq m^2$, so haben wir damit zwei verschiedene Teiler. Die Zahlen mit einer ungeraden Anzahl von Teilern sind also die Quadratzahlen.

a) Zweistellige Quadratzahlen sind 16, 25, 36, 49, 64 und 81.
b) Es sind dies die Quadratzahlen unterhalb von 1000^2, davon gibt es 999.

VII. Die Geheimzahl

Lars soll sich eine fünfstellige Geheimzahl merken. Nach ein paar Tagen erinnert er sich aber nur noch daran, dass die dreistellige Zahl aus den ersten drei Ziffern multipliziert mit der zweistelligen Zahl aus den letzten beiden Ziffern 4318 ergibt. Dies reicht aber nicht, um die Zahl zu rekonstruieren, aber als ihm einfällt, dass die mittlere Ziffer der dreistelligen Zahl deren größte Ziffer ist, gelingt es ihm.

Welches war die Geheimzahl? (WJB)

Lösung:

$4318 = 2 \cdot 17 \cdot 127$, wobei 2, 17 und 127 Primzahlen sind. Also sind $127 \cdot 34$ und $254 \cdot 17$ die möglichen Zerlegungen. Nur in 254 ist die mittlere Ziffer die größte, also war die Geheimzahl 25417.

VIII. Altersbestimmung

Mathis bemerkt, dass die Telefon-Nummern 264969, 458440 und 601983 seiner drei Freunde bei der Division durch sein Alter (in ganzen Jahren) stets den gleichen Rest ergeben und dass dieser Rest das ganzzahlige Alter seiner Enkelin ist. Wie alt sind Mathis und seine Enkelin? (H.F.)

Lösung:

M sei das Alter von Mathis, E das seiner Enkelin, T_1, T_2, T_3 seien die drei Telefon-Nummern. Damit gelten $T_1 = M \cdot x_1 + E$, $T_2 = M \cdot x_2 + E$, $T_3 = M \cdot x_3 + E$ mit ganzen Zahlen x_1, x_2, x_3.

Dann sind die Differenzen

$$T_2 - T_1 = M \cdot x_2 + E - (M \cdot x_1 + E) = M \cdot (x_2 - x_1) = 193471 \text{ und}$$
$$T_3 - T_1 = M \cdot x_3 + E - (M \cdot x_1 + E) = M \cdot (x_3 - x_1) = 337014$$

beide Vielfache von M. Folglich ist auch $337014 - 193471 = 143543$ ein Vielfaches von M. Diese Differenz hat die Primfaktorzerlegung $143543 = 23 \cdot 79 \cdot 79$.

Da $M = 23$ auszuschließen ist (Mathis hat eine Enkelin!), ist $M = 79$ und folglich $E = 3$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Maximale Summe

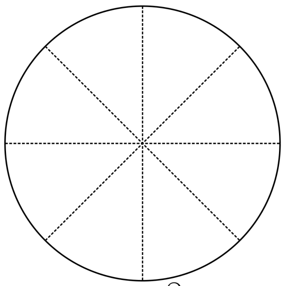
Das Produkt von 2020 natürlichen Zahlen sei 2020.
Was ist die größtmögliche Summe, die diese Zahlen haben können? (H.F.)

II. Ein magischer quadratischer Ring

Fülle die leeren Felder so mit Zahlen zwischen 16 und 22, dass die Summe jeder Seite des Quadrats gleich ist. (H.F.)

15			12
14			13

III. Kreisteilungen



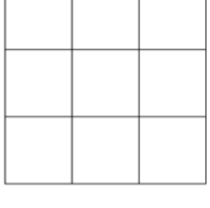
$n = 8$

Es ist leicht, einen Kreis durch Strecken – nämlich Durchmesser – in 2, 4, 8, 16, ... kongruente Teile zu zerlegen. Kann man einen Kreis auch durch gekrümmte Linien in 2, 4, 8, 16, ... kongruente Teilfiguren zerlegen? (H.F.)

IV. Zerlegung eines Quadrats

Untersuche, in wie viele Quadrate ein gegebenes Quadrat zerlegt werden kann – wobei die Teilquadrate gleich oder verschieden groß sein dürfen.

Beispiel:



Das nebenstehende Quadrat ist in neun Quadrate zerlegt. Deshalb kann es auch in 36 Quadrate zerlegt werden. (H.F.)

Hinweis: Versuche es zunächst in vier oder sechs Quadrate zu zerlegen. Findest Du ein Muster?

V. Buchstaben-Rätsel

Ersetze jeden Buchstaben durch eine Ziffer, sodass eine richtige Addition entsteht. Verschiedene Buchstaben sollen dabei durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.
Hinweis: Setze $E = 7$. (Andy Liu)

$$\begin{array}{ccccccc} & E & L & E & F & A & N & T \\ + & & & T & I & G & E & R \\ \hline & G & I & R & A & F & F & E \end{array}$$

VI. Bruchgleichung

Bestimme alle positiven, ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{10}.$$

(H.F.)

VII. Wer war der Täter?

Als Professor Quaoar seine Studienstube betritt, muss er feststellen, dass die Scheibe eines Fensters durch einen Fußball, der in einer Ecke des Zimmers liegt, zertrümmert wurde. Es ist klar, dass einer der vier Buben Fr$x$do, mit $x =$ a, e, i, o, die vor dem Haus stehen, den Ball ins Fenster gekickt hat.
Prof. Quaoar sagt zu den Jungen: „Ich gebe euch den Ball nur dann zurück, wenn ich weiß, wer der Täter war.“ Darauf antworten die Buben:

Frado (A): „Frido war es nicht.“
Fredo (E): „Ich war es nicht.“
Frido (I): „Frodo war es nicht.“
Frodo (O): „Frido hat gelogen.“

Der listige Frodo, der Quaoars Vorliebe für logische Rätsel kennt, sagt dann noch: „Genau eine der vier Behauptungen A, E, I, O ist wahr.“
Kann das stimmen? Begründe Deine Antwort. (H.F.)

Für Euch: Monoid-Mathe-Mittwoch

Aufgrund der Corona-Pandemie müssen wir derzeit alle daheim bleiben. Vielen Dank allen, die sich daran halten.
Um Euch die Zeit daheim etwas zu verkürzen, stellen wir Euch wöchentlich auf unserer Internetseite zusätzliches „Knobelfutter“ zur Verfügung. Schaut also einfach mal auf

`https://monoid.mathematik.uni-mainz.de`

Dort erhaltet Ihr auch weitere Informationen.
Viel Spaß beim Knobeln und ganz wichtig: Bleibt gesund!

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

Aufgabe 1260: Ein Gleichungssystem mit Quadratzahlen

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 2+3+4 &= 3^2 \\ 3+4+5+6+7 &= 5^2 \\ 4+5+6+7+8+9+10 &= 7^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man denke sich das Gleichungssystem nach dem Muster der vier gegebenen Gleichungen beliebig weit fortgesetzt.

a) Gibt es dann eine Gleichung, deren rechte Seite 2019^2 ist? Falls ja, wie heißt die Gleichung?

b) Wie lautet das Bildungsgesetz des Gleichungssystems? (H.F.)

Aufgabe 1261: Wie wie viele Ecken?

Die Innenwinkel – gemessen in Grad – eines konvexen n-Ecks*, n eine gerade Zahl, bilden eine Folge von Zahlen:
Die kleinste Zahl ist 120 und die Differenz der Gradzahlen benachbarter Innenwinkel (abgesehen vom ersten und vom letzten Innenwinkel) ist stets 5. Gibt es ein solches n-Eck und wenn ja, wie viele Ecken hat es? (H.F.)

Aufgabe 1262: Explosionsgefahr

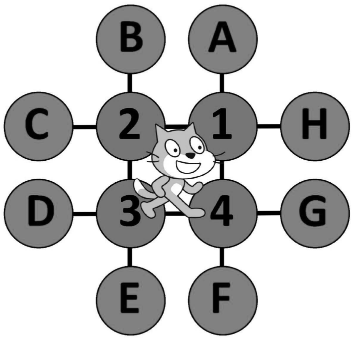
Der Sprengmeister in einem Steinbruch löst die Sprengung mit Hilfe einer Lunte aus, bei der das Feuer pro Sekunde $a = 5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ vorankommt. Er selbst geht mit einer Geschwindigkeit von $b = 7{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, um sich im Abstand von $d = 30\,\text{m}$ in Sicherheit zu bringen.

a) Wie lang muss er die Lunte mindestens machen, um rechtzeitig zum Zeitpunkt der Sprengung in Sicherheit zu sein?

b) Wie lang muss die Lunte sein, wenn er nach Zünden der Lunte noch $u = 2\,\text{s}$ braucht, um aus der knieenden Stellung aufzustehen, und seine „Flucht“ zu beginnen? (WJB)

* Ein n-Eck ist konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt

Aufgabe 1263: Die Katze im kleinen Karree



Die Katze bewegt sich auf den eingekreisten Feldern nach folgender Regel: Steht sie auf einem Zahlenfeld, so wählt sie sich zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$) eines der vier Nachbarfelder (egal ob Zahl oder Buchstabe). Dies wiederholt sie so lange, bis sie auf einem Buchstabenfeld landet. Steht sie auf einem Buchstabenfeld, so bleibt sie dort stehen.

Wenn die Katze auf dem Feld 1 startet, mit welcher Wahrscheinlichkeit $p(x)$ landet sie schließlich auf dem Buchstabenfeld x mit $x = A, B, ..., H$?

Hinweis: Lasse die Katze zunächst auf einem zufälligen Feld starten und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jedes Zahlenfeld. Hier bekommst Du die Wahrscheinlichkeiten leicht heraus. Lasse die Katze nun mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in 2 starten, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in 4 und rechne die Wahrscheinlichkeiten $r(x)$ für ein Ende in Feld x aus.

Überlege Dir nun, wie Du die $p(x)$ aus den $r(x)$ ausrechnest. Überlege Dir nun, wie Du die $p(x)$ aus den $r(x)$ ausrechnest. (A. Klenke)

Aufgabe 1264: Summen von Potenzen

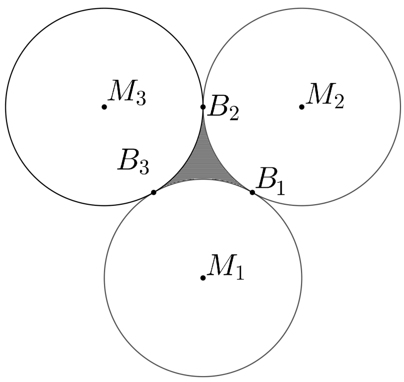
Seien $A(n)$ die Summe der dritten Potenzen der 5 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen $n, n+1, ..., n+4$ und $B(n)$ die Summe von sechs aufeinander folgenden dritten Potenzen beginnend mit n^3.

a) Finde die kleinste Primzahl der Form $A(n)$.

b) Zeige, dass $B(n)$ für jedes n durch 3 teilbar, also keine Primzahl, ist.

c) Zeige, dass $B(n)$ sogar durch 9 teilbar ist. (WJB)

Aufgabe 1265: Drei Kreise



Drei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 und alle mit dem Radius $r = 1$ berühren sich von außen in den Punkten B_1, B_2 und B_3. Berechne den Flächeninhalt der gefärbten Figur $B_1B_2B_3$. (H.F.)

Aufgabe 1266: Gemeinsamer Teiler benachbarter Zahlen

Zwei aufeinander folgende positive ganze Zahlen haben nur den gemeinsamen Teiler 1.

Du weißt es – kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 140

Klassen 9–13

Aufgabe 1253: Theodor Tellers Testament

In seinem Testament bestimmt Theodor Teller: „Keines meiner Kinder soll gleich viel erben, sondern jeweils das ältere mehr als das jüngere. Als Anteile sind nur Stammbrüche, also $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... zulässig.“

a) Wie müssen die drei Kinder teilen?

b) Wie ist zu teilen, wenn es vier Kinder sind?

c) Wie geht es weiter bei 5, 6, ... Kindern? (WJB)

Lösung:

a) Das älteste Kind muss mehr als $\frac{1}{3}$ erben, also die Hälfte. Von der anderen Hälfte erhält das zweite mehr als die Hälfte, also vom Ganzen mehr als $\frac{1}{4}$. Damit ist nur $\frac{1}{3}$ möglich und das jüngste Kind erhält den Rest: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

b) Jetzt erhält das Älteste mehr als $\frac{1}{4}$, also $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$. Der Rest muss dann nach der Regel in a) aufgeteilt werden. Falls das Älteste $\frac{1}{2}$ hat heißt das für die anderen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$, insgesamt $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.
Hätte das Älteste nur $\frac{1}{3}$, so wären die übrigen $\frac{2}{3}$ aufzuteilen zu $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ und das zweite Kind hätte damit $\frac{1}{3}$, also nicht weniger als der erste.

c) Wir argumentieren wie in b) um zu sehen, dass immer das älteste Kind die Hälfte bekommt und die andere Hälfte unter den jüngeren Geschwistern so aufgeteilt wird, als würde die Anzahl der Kinder insgesamt um 1 kleiner.

Aufgabe 1254: Spannende Funktionen

Für welche überall stetigen Funktionen gilt bei festem $n \in \mathbb{N}$

a) $f(nx) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

b) $g(x^n) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$,

c) Gibt es auch Funktionen mit der Eigenschaft a), die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind? (WJB)

Lösung:

a) Die Bedingung $f(nx) = f(x)$ für alle x bedeutet auch

$$f(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{n}}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n^2}\right) = ... = f\left(\frac{x}{n^i}\right) = ... = \lim_{i\to\infty} f\left(\frac{x}{n^i}\right)$$
$$= f(0).$$

Also ist f konstant.

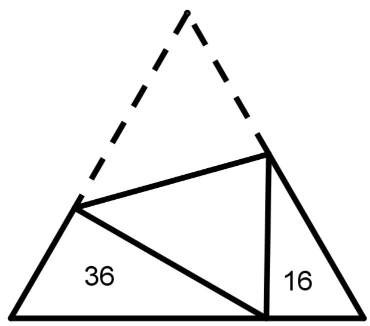
b) Setzen wir $f(z) = g(e^z)$, so gilt, falls $g(x^n) = g(x)$, dass $f(z) = g(e^z) = g(e^{nz}) = f(nz)$. Aus a) folgt dann, dass f und deshalb auch g konstant sind.

c) Die Argumentation aus a) erlaubt, dass für positive x ein anderer Grenzwert vorliegt als für negative x. Für Funktionen $f(x) = a$ für $x \geq 0$ und $f(x) = b$ für $x < 0$ gilt offenbar $f(nx) = f(x)$ für alle x.

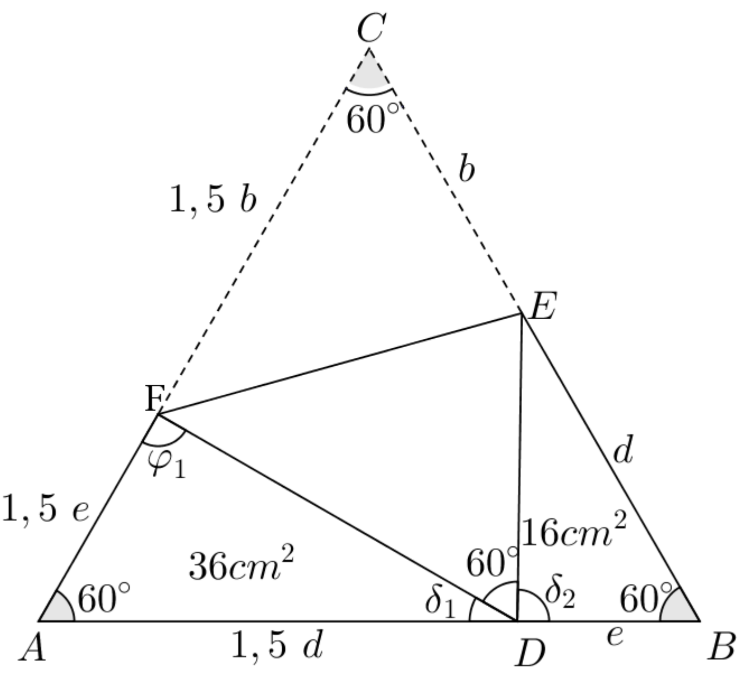
Aufgabe 1255: Das gefaltete Dreieck

Ein Blatt Papier, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat, wird so gefaltet, dass seine obere Spitze auf die Grundseite fällt und die beiden Flächen, in denen das Papier nicht doppelt liegt, Inhalte von 36 cm² beziehungsweise 16 cm² haben.
Wie groß ist der Flächeninhalt insgesamt?

(Christoph Sievert, Bornheim)



Lösung:



1. Die beiden Dreiecke *ADF* und *DBE* sind ähnlich.
Am Punkt *D* gilt: $\delta_1 + 60° + \delta_2 = 180°$, also $\delta_1 + \delta_2 = 120°$. Im Dreieck $\triangle ADF$ gilt $\delta_1 + \varphi_1 = 120°$. Daraus folgt $\varphi_1 = \delta_2$. Die Flächen stehen im Verhältnis $16 : 36 = 1 : 2{,}25$, also stehen die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2{,}25} = 1 : 1{,}5$.

2. Es sei s die Seitenlänge des $\triangle ABC$; dann gelten

$$(1)\ s = d + b$$
$$(2)\ s = 1{,}5b + 1{,}5e$$
$$(3)\ s = 1{,}5d + e$$
$$(4)\ 16 = \tfrac{1}{2}ed \cdot \sin 60^\circ \text{ (Fläche in } \triangle DBE\text{)}.$$

Aus (1) und (2) folgt $s = 3d - 3e$ und aus (3) und (4) folgt $d = \frac{8}{3}e$.
Aus diesen beiden Gleichungen folgen wiederum

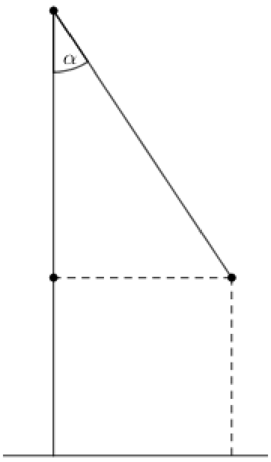
$$e = \sqrt{8\sqrt{3}}$$
$$d = \tfrac{8}{3}\sqrt{8\sqrt{3}}$$
$$s = 5 \cdot \sqrt{8\sqrt{3}}.$$

Damit ist $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = 150cm^2$.

Aufgabe 1256: Achtung, Baum fällt!

Der Stamm einer 17 m hohen Tanne wird durch einen Sturm 10 m über dem Boden geknickt. Der obere Teil bleibt hängen und bildet mit dem unteren Teil den Winkel α. Die Spitze befindet sich jetzt 4 m über dem Erdboden. Wie groß ist α? (WJB)

Lösung:



$\cos\alpha = \frac{6}{7}$
$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{6}{7} \approx 31^\circ$

Aufgabe 1257: Sind gleiche Eckpunkt-Zahlen möglich?

Die Eckpunkte eines $2n$–Ecks, $n \geq 2$, seien im Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1, 2, ..., $2n$ nummeriert (Startkonfiguration K_0).
Man vergrößere oder verkleinere zwei beliebige benachbarte Zahlen beide um 1. Kann man dann von K_0 aus durch Wiederholungen dieser Operation zu einer Konfiguration gelangen, bei der sämtliche Eckpunkt-Zahlen gleich sind? (H.F.)

Lösung:
Das von den $2n$ Punkten in der Ebene gebildete $2n-$Eck sei die Konfiguration K_0 genannt.
Es sei $K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow ...$ eine aus K_0 durch die Eckpunkt-Operation erzeugte Kette von Konfigurationen.
In K_n seien $m_1, m_2, ...$ die den Ecken des $2n-$Ecks im Uhrzeigersinn zugeordneten Zahlen. Eine bei der Lösung des Problems nützliche Größe ist dann

$$S = m_1 - m_2 + m_3 - m_4 + ... + m_{2n-1} - m_{2n},$$

denn beim Übergang von K_i zu K_{i+1} ändert S seinen Wert nicht.
Also hat S bei jeder Konfiguration $K_1, K_2, K_3, ...$ den gleichen Wert wie bei K_0. Für K_0 aber gilt

$$\begin{aligned} S &= 1 - 2 + 3 - 4 + ... + (2n-1) - 2n \\ &= (1+1) - 2 + (3+1) - 4 + ... + ((2n-1)+1) - 2n - n \cdot 1 = -n \end{aligned}$$

Gäbe es nur eine Konfiguration K_n mit $m_1 = m_2 = ... = m_{2n}$, dann hätte S dort den Wert $S = 0$, sodass $-n = 0$ wäre – im Widerspruch zur Voraussetzung $n \geq 2$. Eine Konfiguration mit lauter gleichen Eckpunkt-Zahlen ist nicht möglich.

Aufgabe 1258: Anteile schulpflichtiger Kinder

Wir betrachten folgende (erfundene) Tabelle für die Anteile der Familien gestaffelt nach der Anzahl der schulpflichtigen Kinder:

Anzahl schulpflichtiger Kinder	Anteil an allen Familien
0	60%
1	20%
2	10%
3	10%

Hier soll nicht genau diskutiert werden, was genau eine „Familie" ist. Die gesellschaftliche Diskussion hierzu ist ja in vollem Gange. Vereinfachend nehmen wir an, dass eine Familie eine Gruppe von Menschen ist, und dass die schulpflichtigen Kinder einer Familie Geschwister sind.

a) Auf einem Schulfest sprichst du ein zufällig ausgewähltes Schulkind an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es aus einer Familie mit genau zwei schulpflichtigen Kindern?
b) Wie viele schulpflichtige Geschwister hat ein schulpflichtiges Kind im Mittel?
c) Angenommen, die Bevölkerungsstatistik fasst in der vierten Zeile alle Familien mit drei *oder mehr* schulpflichtigen Kindern zusammen. Lässt sich die Wahrscheinlichkeit aus (a) immer noch bestimmen? (Achim Klenke, Uni Mainz)

Lösung:

a) Aus 10 Familien stammen im Mittel
2 einzelne schulpflichtige Kinder
1 Paar schulpflichtiger Kinder
1 Tripel schulpflichtiger Kinder.
Das sind insgesamt $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$ Kinder. Davon stammen zwei aus einer Familie mit zwei schulpflichtigen Kindern. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$.

b) Die Wahrscheinlichkeit für null oder 1 schulpflichtige Geschwister ist, wie in (a) gerechnet, gleich $\frac{2}{7}$. Die Wahrscheinlichkeit für zwei schulpflichtige Geschwister ist entsprechend $\frac{3}{7}$. Als Mittelwert ergibt sich $0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{8}{7}$.

c) Wenn aus „drei" nun „drei oder mehr" wird, können wir die Wahrscheinlichkeit nicht mehr bestimmen. Beispielsweise nehmen wir an, dass 10% der Familien vier schulpflichtige Kinder haben (statt nur drei). Dann bekämen wir in der Rechnung aus (a)
1 Quadrupel schulpflichtiger Kinder
und damit aus den 10 typischen Familien insgesamt 8 Kinder. Die Wahrscheinlichkeit aus (a) würde dann $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

Im Wort *MONOID* ersetze man verschiedene beziehungsweise gleiche Buchstaben durch verschiedene beziehungsweise gleiche Ziffern, wobei folgende Bedingungen gelten sollen:

(1) $4(M + N + D) = M \cdot N \cdot D$ sowie

(2) $M < O < N < I < D, M \neq 0$ und D ist nicht prim.

Wie lautet die gesuchte Zahl?

Lösung

Wegen $M \geq 1$ ist $N \geq 3$ und $D \geq 5$. Da D nicht prim ist, gilt: $D = 6$ oder $D = 8$ oder $D = 9$.

1. Für $D = 9$ gibt es keine Lösung.
   Denn angenommen es sei $D = 9$. Dann lautet die Bedingung (1):
   $$4(M + N + 9) = M \cdot N \cdot 9.$$
   Daraus folgt: 9 ist ein Teiler von $M + N$ und wegen $M + N < 18$ gilt: $M + N = 9$.

Für $M = 1$ ist $N = 8$ und nach (2) daher $D \geq 10$ – ein Widerspruch.
Für $M = 2$ ist $N = 7$ und $4(2+7+9) \neq 2 \cdot 7 \cdot 9$.
Für $M = 3$ ist $N = 6$ und $4(3+6+9) \neq 3 \cdot 6 \cdot 9$.
Ist $M \geq 4$, so ist $N \leq 5$ – ein Widerspruch, denn $O \geq 5$.

2. Für $D = 8$ gibt es keine Lösung.
Denn angenommen es sei $D = 8$. Aus Bedingung (2) folgt dann $3 \leq N \leq 6$ und Bedingung (1) lautet $4(M+N+8) = M \cdot N \cdot 8$, also $M+N+8 = M \cdot N \cdot 2$. Daher ist $M + N$ eine gerade Zahl, woraus dann wegen $N \leq 6$ folgt, dass $1 \leq M \leq 4$ gilt.
$M \geq 3$ ist nicht möglich, weil dann mit Bedingung (1) gelten würde
$$72 \geq 4(4+6+8) = 4(M+N+8) = M \cdot N \cdot 8 \geq 120,$$
was offensichtlich falsch ist.
Für $M = 1$ ist $N = 3$ oder $N = 5$, für $M = 2$ ist $N = 4$ oder $N = 6$. In der Tabelle ist gezeigt, dass (1) für keine dieser vier Kombinationen (M, N) zutrifft.

(M, N)	$(1, 3)$	$(1, 5)$	$(2, 4)$	$(2, 6)$
$4(M+N+8)$	48	56	56	64
$M \cdot N \cdot 8$	24	40	64	96
Gilt (1)?	nein	nein	nein	nein

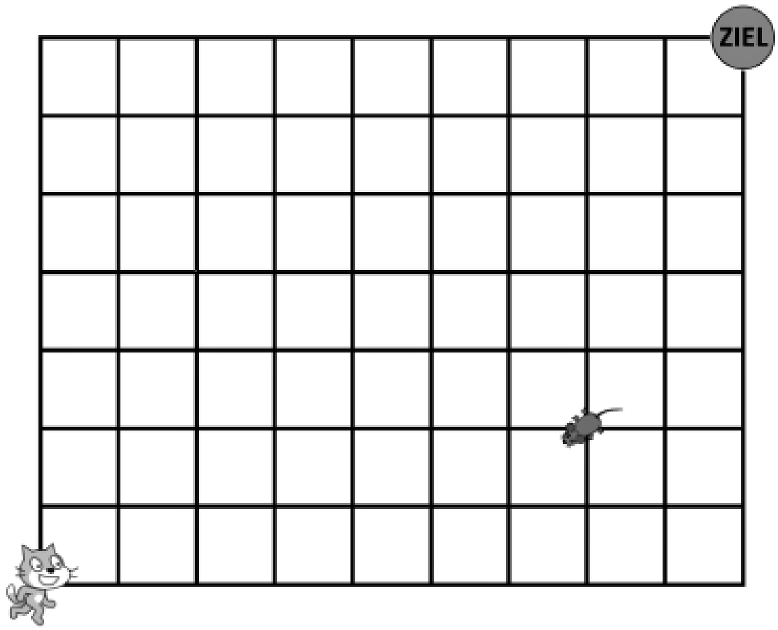
3. Für $D = 6$ gibt es genau eine Lösung.
Es sei $D = 6$. Daher ist $N \leq 4$ und wegen (2) gilt $3 \leq N \leq 4$, sodass $M = 1$ oder $M = 2$ ist.
Für $M = 1$ folgt aus Bedingung (1), dass $4 \cdot (1 + N + 6) = 1 \cdot N \cdot 6$ ist, woraus $N = 14$ folgt – ein Widerspruch.
Ist $M = 2$, dann ist $N = 4$ und aus (2) mit $D = 6$ folgt: $O = 3$. Wegen $I < D$ ist $I = 5$.

Somit ist $MONOID = 234356$ die (einzige) gesuchte Zahl.

Die Mäusejagd

von Achim Klenke

Die Katze startet ihre Jagd auf die Maus auf dem Gitterpunkt $(7, 2)$ links unten nach folgender Methode: Sie wirft eine (faire) Münze. Je nach Ergebnis geht sie einen Schritt Richtung Osten (rechts) oder Norden (oben). An der nächsten Kreuzung wiederholt sie das Vorgehen. Sobald sie am Nordrand oder Ostrand des Plans ankommt, geht sie schnurstracks in die rechte obere Ecke.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fängt sie die Maus?



Eine Computersimulation in der Programmiersprache Scratch findet sich unter
`https://scratch.mit.edu/projects/343222639`.
Scratch ist eine kostenfreie Programmierumgebung, konzipiert, um Kindern kreative Lernerlebnisse zu ermöglichen. Unter `scratch.mit.edu/about` findet ihr mehr Informationen.

Lösung

Die Position der Maus befindet sich neun Schritte vom Start entfernt: sieben nach rechts und zwei nach oben. Die Katze trifft die Maus genau nach ihrem neunten Schritt, oder sie trifft sie gar nicht. Unter diesen neun Schritten müssen genau zwei nach Norden erfolgen. Wir beschreiben die ersten neun Schritte durch eine Buchstabenfolge, zum Beispiel NNONOOONN. Dies soll heißen, dass die Katze erst nach Norden geht, dann noch einmal nach Norden, dann nach Osten, dann wieder Norden und so weiter. Weil es für jeden Buchstaben zwei Möglichkeiten gibt, gibt es insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$ mögliche Buchstabenfolgen. Jede von diesen Folgen kommt mit gleicher Wahrscheinlichkeit, weil die Münze, mit der geworfen wird, fair ist. Der Katze fängt die Maus genau dann, wenn in der Buchstabenfolge genau zwei Mal N auftaucht. Wie viele Folgen der Länge Neun mit genau zwei Ns gibt es?
Es wird einfacher, wenn wir das eine N klein (n) und das andere groß (N) in die Folge schreiben. Wenn wir also OONOnOOOO und OOnONOOOO unterscheiden, bekommen wir doppelt so viele Möglichkeiten. Das sieht schwierig aus, ist aber einfach zu berechnen.

Wählen wir zunächst die Position des N aus: Es gibt dafür neun Möglichkeiten. Danach wählen wir die Position des n aus. Dafür gibt es noch acht Möglichkeiten, weil eine Position schon vom N versperrt ist. Insgesamt gibt es also $8 \cdot 9 = 72$

Möglichkeiten, wenn wir N und n unterscheiden. Weil wir das aber nicht wollten, müssen wir die 72 noch halbieren. Es gibt also 36 Möglichkeiten, zwei nicht unterscheidbare Ns in der Buchstabenfolge der Länge 9 unterzubringen. Insgesamt waren es 512 mögliche Folgen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, die Maus zu fangen, beträgt also $\frac{36}{512} = \frac{9}{128} = 7{,}03\,\%$.

Bundeswettbewerb Mathematik 2020

BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Beweise: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.

Beweis: Für jedes ganze $k \geq 1$ gilt für die positiven ganzen Zahlen m und n mit $m = n + 1 = 2k + 1$,

$$50^m - 50^n = 50^{2k} \cdot (50 - 1) = 50^{2k} \cdot 49 = (50^k \cdot 7)^2, \qquad (1.1)$$

das heißt, für jedes $k \geq 1$ ist der linke Ausdruck in (1.1) eine Quadratzahl. Da m, n und der Term $(50^k \cdot 7)^2$ mit k streng monoton wachsen, sind diese Quadratzahlen auch alle verschieden.

Für den zweiten Teil der Aufgabe erinnern wir uns daran, dass eine natürliche Zahl nur dann eine Quadratzahl sein kann, wenn sie durch 3 teilbar ist oder bei der Division durch 3 den Rest 1 lässt. Denn jede positive ganze Zahl a lässt sich in der Form $3k + r$ mit einer ganzen Zahl $k \geq 0$ und $r \in \{0, 1, 2\}$ schreiben; für die Quadratzahl a^2 gilt dann

$$(3k + r)^2 = 3 \cdot (3k^2 + 2rk) + r^2 \text{ für } r \in \{0, 1, 2\}. \qquad (1.2)$$

Die Zahl r^2 kann Werte aus $\{0, 1, 4\}$ annehmen, und weil $4 = 3+1$, besagt (1.2), dass der Dreierrest von a^2 stets 0 oder 1 ist. Aus (1.2) folgt in der Umkehrung:

Hilfssatz: *Lässt eine positive ganze Zahl b bei der Division durch 3 den Rest 2, so kann b keine Quadratzahl sein.*

Es ist $2020 = 2019 + 1 = 3 \cdot 673 + 1 \equiv 1 \mod 3$ und damit folgt nach den Rechenregeln für Restklassen für alle positiven ganzen Zahlen m und n (via vollständiger Induktion) $2020^m \equiv 2020^n \equiv 1 \mod 3$ und

$$2020^m + 2020^n \equiv 2 \mod 3. \qquad (1.3)$$

Mit dem Hilfssatz schließen wir aus (1.3), dass keine Quadratzahl die Form $2020^m + 2020^n$ mit positiven ganzen Zahlen m und n haben kann. □

Bemerkung: Ist $m = n + r$ mit $r \geq 2$, so ist keine der Zahlen $50^m - 50^n$ aus dem ersten Teil der Aufgabe eine Quadratzahl, wie wir durch Widerspruch nachweisen: Denn ist $50^m - 50^n = 50^n \cdot (50^r - 1)$ eine Quadratzahl, so muss $50^r - 1$ selbst eine Quadratzahl sein, denn die Faktoren 50^n und $50^r - 1$ sind teilerfremd. Wegen $50^r - 1 = 4 \cdot (2^{r-2} \cdot 5^{2r} - 1) + 3$ gilt $50^r - 1 \equiv 3 \mod 4$, aber Quadratzahlen lassen bei Division durch 4 nur die Reste 0 oder 1.

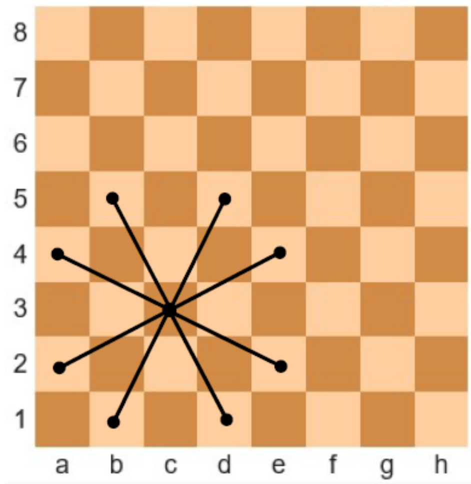
Aufgabe 2

Konstantin zieht auf einem $n \times n$-Schachbrett ($n \geq 3$) mit einem Springer mit möglichst wenigen Zügen vom Feld in der unteren linken Ecke auf das Feld in der unteren rechten Ecke. Danach nimmt Isabelle diesen Springer und zieht von dem Feld in der unteren linken Ecke mit möglichst wenigen Zügen auf das Feld in der oberen rechten Ecke.
Für welche n benötigen beide dafür gleich viele Züge?
Hinweise: Der Springer darf nur wie im Schachspiel üblich gezogen werden. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu begründen.

Lösung: Nur für $n = 7$ benötigen Konstantin und Isabelle gleich viele Züge.

Beweis: Auf dem Schachbrett in Skizze 2.1 sind alle im Schachspiel üblichen Züge eines Springers markiert, der vor dem Zug auf dem Feld $c3$ steht.

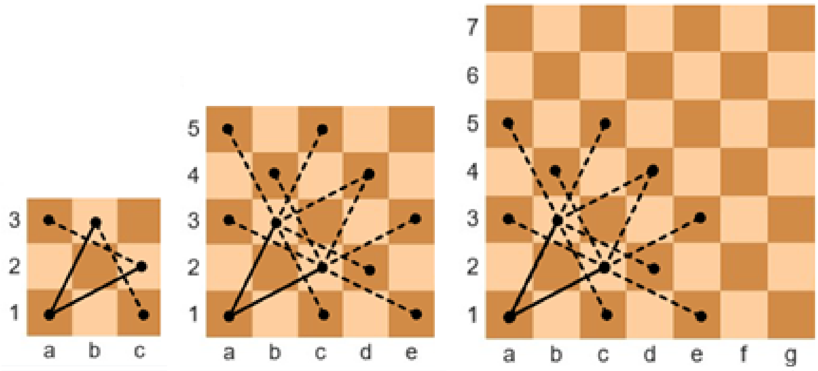
Mit jedem möglichen Zug wechselt die Farbe des Feldes, auf dem der Springer (vor bzw. nach dem Zug) steht. Haben also die beiden Ziel-Felder von Konstantin bzw. Isabelle in der unteren rechten Ecke bzw. der oberen rechten Ecke eine unterschiedliche Farbe (das ist genau für gerade n der Fall), kann die Anzahl der Züge, die Konstantin bzw. Isabelle benötigen, nie gleich sein, da Konstantin in diesem Fall eine ungerade Anzahl von Zügen benötigt, Isabelle jedoch eine gerade Anzahl.



Skizze 2.1: Alle Springerzüge von c3 aus

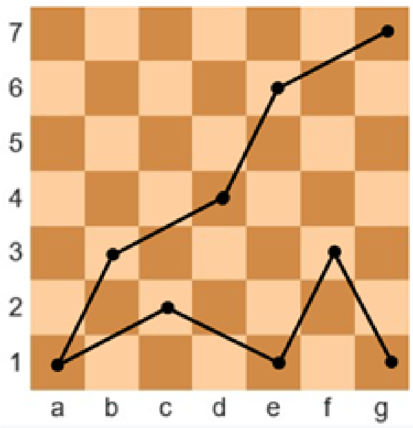
Eine Lösung mit gleich vielen Zügen kann also nur für ungerade n existieren. Konstantin und Isabelle benötigen dann eine gerade Anzahl von Zügen, um auf ihr jeweiliges Ziel-Feld zu gelangen. Damit ist bei beiden die minimale Anzahl von Zügen bis zum jeweiligen Ziel auch eine gerade Zahl.
Für $n = 3$ und $n = 5$ benötigen Konstantin und Isabelle unterschiedlich viele Züge. Denn Konstantin benötigt sowohl auf dem 3×3-Schachbrett als auch auf dem

5×5-Schachbrett nur (optimale) zwei Züge, um zu seinem Ziel-Feld zu kommen, nämlich die Zugfolge $a1 - b3 - c1$ für $n = 3$ und die Zugfolge $a1 - c2 - e1$ für $n = 5$; siehe Skizze 2.2. Felder des Schachbretts (jenseits von $a1$), die mit einem Zug oder zwei Zügen erreichbar sind, sind in Skizze 2.2 mit einem Punkt markiert.



Skizze 2.2. Felder, die ein Springer bei n=3, n=5, n=7 mit zwei Zügen erreichen kann

Dabei sind mit durchgezogenen Linien alle auf diesen Schachbrettern möglichen ersten Züge des Springers von $a1$ aus markiert, mit gestrichelten Linien alle möglichen zweiten Züge, die nicht zum Ausgangsfeld $a1$ zurückführen. Es ist ersichtlich, dass Isabelle ihr Ziel-Feld nicht in zwei Zügen erreichen kann; sie benötigt dafür also (mindestens) vier Züge. Tatsächlich benötigt Isabelle für $n = 3$ oder $n = 5$ genau vier Züge, weil sie in zwei Zügen das Feld in der oberen *linken* Ecke erreicht und dann analog zu Konstantin ziehen kann. Auf dieselbe Weise sind in Skizze 2.2 auch für $n = 7$ die Felder des Schachbretts markiert, die (jenseits von $a1$) mit einem oder zwei Zügen erreicht werden können.

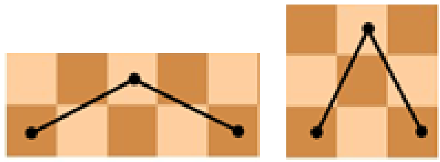


Skizze 2.3: Konstantin und Isabelle benötigen beide optimal vier Züge bei n=7

Wir sehen dort, dass für $n = 7$ weder Konstantin noch Isabelle ihr Ziel-Feld mit zwei Zügen erreichen können, sie benötigen also mindestens vier Züge. Auf dem Schachbrett in Skizze 2.3. sind solche zwei Zugfolgen mit jeweils vier Zügen notiert, mit denen Konstantin bzw. Isabelle zu ihrem Ziel-Feld gelangen. Für $n = 7$ benötigen Konstantin und Isabelle also die gleiche Anzahl von Zügen, um optimal zu ihrem Ziel-Feld zu gelangen.

Wir betrachten nun die Situation auf $n \times n$-Schachbrettern mit beliebigem ungeraden $n = 4k \pm 1$, wobei $k \geq 2$, und werden zeigen, dass Konstantin und Isabelle für $n \geq 9$ unterschiedlich viele Züge benötigen, wenn beide mit möglichst wenigen Zügen ihr Ziel-Feld erreichen. Konstantin kann bei $n = 4k \pm 1$ sein Ziel-Feld mit $2k$ Zügen erreichen. Denn mit je zwei Zügen kann er ein Feld erreichen, dass vier Felder (Zugfolge $K4$) bzw. zwei Felder (Zugfolge $K2$) weiter rechts und in derselben Zeile wie sein Ausgangs-Feld liegt.

Ist $n = 4k - 1$, so zieht Konstantin $(k-1)$-mal $K4$ und einmal $K2$; ist $n = 4k + 1$, so zieht Konstantin k-mal $K4$. In beiden Fällen erreicht er mit den insgesamt $2k$ Zügen sein Ziel-Feld.


Skizze 2.4: Konstantins Zugfolgen K4 (links) und K2 (rechts)

Wir weisen abschließend nach, dass Isabelle auf einem $n \times n$-Schachbrett mit $n = 4k \pm 1$ stets mehr als $2k$ Züge benötigt, um ihr Ziel-Feld zu erreichen. Hierzu sei, unabhängig von Zügen des Springers, für ein Feld F des $n \times n$-Schachbretts die Zahl w, $0 \leq w \leq n-1$, die Anzahl der Felder, um die man sich waagrecht nach rechts bewegen muss, um von $a1$ nach F zu gelangen; die Zahl s, $0 \leq s \leq n-1$, sei entsprechend die Anzahl der Felder, um die man sich senkrecht nach oben bewegen muss, um von $a1$ nach F zu gelangen. Wir definieren mit diesen Bezeichnungen $d(F) = w + s$; beispielsweise sind $d(a1) = 0 + 0 = 0, d(c3) = 2 + 2 = 4, d(d1) = 3 + 0 = 3$ oder $d(e4) = 4 + 3 = 7$. Aus einer Betrachtung wie in Skizze 2.1 lässt sich herleiten, dass für alle Felder G, die man mit einem Springer-Zug vom Feld F aus erreichen kann, $d(G) \leq d(F) + 3$ gilt, und damit für beliebige, aber fest gewählte $2k$ Springer-Züge, die von $a1$ zu einem Feld F_{2k} führen,

$$d(F_{2k}) \leq 2k \cdot 3 = 6k. \tag{2.1}$$

Für Isabelles Ziel-Feld Z_I gilt

$$d(Z_I) = n - 1 + n - 1 = 2n - 2 = 8k \pm 2 - 2 \in \{8k - 4, 8k\}. \tag{2.2}$$

Mit einem Vergleich von (2.1) und (2.2) stellen wir fest, dass das Feld F_{2k} nicht mit dem Ziel-Feld Z_I übereinstimmen kann: denn $6k < 8k - 4$ für alle $k \geq 3$ und $6k < 8k$ für alle $k \geq 2$; also $d(F_{2k}) \neq d(Z_I)$ für ungerades $n \geq 9$. (Für $k = 2$ ist $6k = 8k - 4$; das entspricht dem oben betrachteten Fall $n = 7$.) $\square$

Aufgabe 3

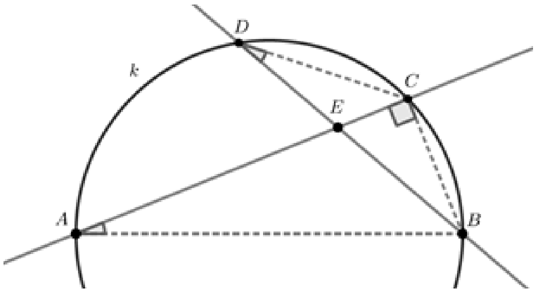
Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k. Die Gerade (AE) schneide k außer in A noch im Punkt C, die Gerade (BE) schneide k außer in B noch im Punkt D.
Beweise: Der Wert von $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E.

Vorbemerkung: Liegt der Punkt E im Inneren der Strecke AB, so fallen die Punkte C und B sowie die Punkte D und A zusammen. Damit gilt in diesem Fall

$$\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE} = \overline{AB} \cdot (\overline{AE} + \overline{BE}) = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{AB}^2. \tag{3.1}$$

Wir weisen in den folgenden Beweisen nach, dass der Ausdruck $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ den Wert $\overline{AB}^2$ unabhängig von der Lage des Punktes E annimmt, und können dort jeweils annehmen, dass E nicht im Innern der Strecke AB liegt.

Erster Beweis:



Die Skizze links zeigt die Konstruktion der Aufgabenstellung. Wir beobachten mit dem Satz von Thales, dass $\measuredangle ACB = \measuredangle ECB = 90°$ gilt, die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle EBC$ also rechtwinklige Dreiecke sind. Außerdem sind $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$, weil sie Umfangswinkel über derselben Sehne BC sind.

Weil zudem $\measuredangle AEB = \measuredangle CED$ (Scheitelwinkel) ist, stimmen in den Dreiecken $\triangle ABE$ und $\triangle CDE$ zwei Winkel überein, die Dreiecke sind also ähnlich. Die Ähnlichkeit der Dreiecke bedeutet

$$\overline{AE} : \overline{DE} = \overline{BE} : \overline{CE} \iff \overline{AE} \cdot \overline{CE} = \overline{BE} \cdot \overline{DE}; \tag{3.2}$$

die Beziehung in (3.2) ist auch als Sehnensatz bekannt. In den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle EBC$ und $\triangle ABC$ gilt nach dem Satz von Pythagoras, dass

$$\overline{BE}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{BC}^2 \text{ und } \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2. \tag{3.3}$$

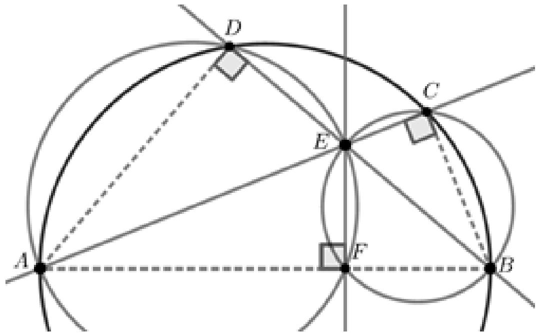
Damit schließen wir für den Ausdruck der Aufgabenstellung, weil der Punkt E im Inneren der Strecken AC und BD liegt, mit (3.2) und (3.3), dass

$$\begin{aligned}
\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE} &= (\overline{AE} + \overline{CE}) \cdot \overline{AE} + (\overline{BE} + \overline{DE}) \cdot \overline{BE} \\
&= \overline{AE}^2 + \overline{AE} \cdot \overline{CE} + \overline{BE} \cdot \overline{DE} + \overline{BE}^2 \\
&= \overline{AE}^2 + 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{CE} + \overline{CE}^2 + \overline{BC}^2 \\
&= (\overline{AE} + \overline{CE})^2 + \overline{BC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2;
\end{aligned}$$

das war (zusammen mit der Vorbemerkung) zu zeigen. □

Zweiter Beweis:

Wie in der nebenstehenden Skizze sei F der Fußpunkt des Lotes von E auf AB, also $\measuredangle EFA = \measuredangle BFE = 90°$. Wegen des Satzes von Thales sind auch $\measuredangle ADE = \measuredangle ACB = \measuredangle ECB = 90°$. Damit ergänzen sich in den Vierecken $\square AFED$ bzw. $\square FBCE$ gegenüberliegende Winkel zu 180°; sie sind also Sehenvierecke mit entsprechenden Umkreisen.



Nach dem Sekantensatz gilt $\overline{AC} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AF}$ (Punkt A und Kreis um $\square FBCE$) bzw. $\overline{BD} \cdot \overline{BE} = \overline{BA} \cdot \overline{BF}$ (Punkt B und Kreis um $\square AFED$).

Addition dieser Gleichungen ergibt

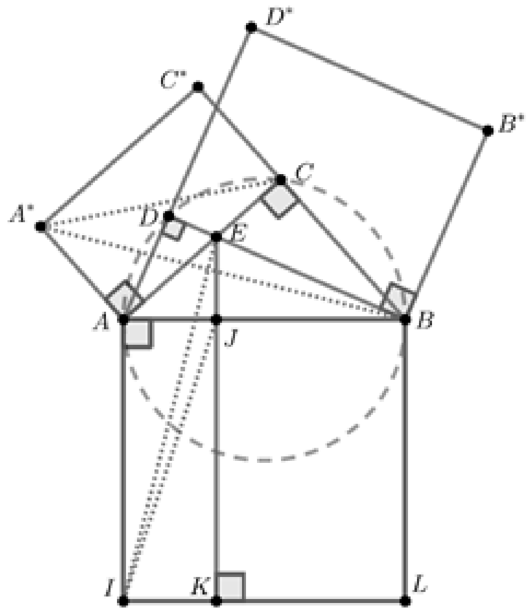
$$\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE} = \overline{AB} \cdot \overline{AF} + \overline{BA} \cdot \overline{BF} = \overline{AB} \cdot (\overline{AF} + \overline{BF}) = \overline{AB}^2, \quad (3.4)$$

wobei wir nutzen, dass F im Inneren der Strecke AB liegt, weil E im Inneren des Kreises mit Durchmesser AB liegt. (3.4) war (zusammen mit der Vorbemerkung) zu zeigen. □

Vorbemerkung zu den beiden nächsten Beweisen: Das Produkt zweier Streckenlängen kann man in der Geometrie darstellen als Flächeninhalt eines Rechtecks mit entsprechenden Seitenlängen. In unserem Fall betrachten wir Rechtecke mit Seitenlängen $\overline{AE}$ und $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BE}$ und $\overline{BD}$. Solche Rechtecke können wir auf verschiedene Arten konstruieren: Über der Seite AC mit Höhe $\overline{AE}$ (vgl. dritter Beweis) oder über der Seite AE mit Höhe $\overline{AC}$ (vgl. vierter Beweis).

Dritter Beweis: Dieser Beweis folgt den Ideen, die bereits der antike Mathematiker Euklid beschrieben hat, dort in Zusammenhang mit einem Beweis des Satzes von Pythagoras. Der Beweis benutzt, dass Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben, wenn Grundseite und Höhe jeweils übereinstimmen.

Wir errichten wie in der nebenstehenden Skizze über der Strecke AC ein Rechteck $\square ACC^*A^*$, in dem $\overline{AA^*} = \overline{AE}$; wegen $\measuredangle ACB = 90°$ (Satz von Thales) liegen die Punkte B, C und C^* auf einer Geraden. Ebenso errichten wir über der Strecke BD ein Rechteck $\square DBB^*D^*$, in dem $\overline{BB^*} = \overline{BE}$; auch die Punkte A, D und D^* liegen wegen $\measuredangle ADB = 90°$ auf einer Geraden. Die Aufgabe ist bewiesen, wenn wir nachweisen, dass die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Rechtecke mit dem Flächeninhalt des Quadrats $\square ABLI$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}$ übereinstimmt.

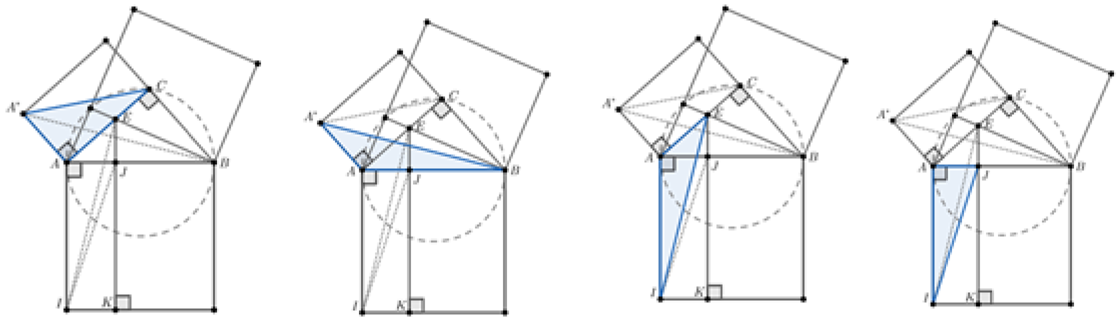


Die Senkrechte zu AB , die durch den Punkt E verläuft, schneide wie in der Skizze AB bzw. IL in den Punkten J bzw. K . Wir beobachten: Die Dreiecke $\triangle A^*AC$ und $\triangle A^*AB$ haben dieselbe Grundseite A^*A und Höhe AC. Die Dreiecke $\triangle A^*AB$ und $\triangle EAI$ sind kongruent auf Grund des sws-Kongruenzsatzes. Außerdem hat das Dreieck $\triangle EAI = \triangle AIE$ dieselbe Grundseite AI und dieselbe Höhe AJ wie das Dreieck $\triangle AIJ$. Für die entsprechenden Flächeninhalte gilt daher

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AA^*} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AC} = |\triangle A^*AC| = |\triangle A^*AB| = |\triangle EAI| = |\triangle AIJ|.$$

Die Argumentation ist übersichtlicher in der nachfolgenden Skizze dargestellt. Weil die Dreiecke $\triangle AIJ$ und $\triangle KJI$ kongruent sind, können wir dies auch als

$$\overline{AC} \cdot \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \overline{AA^*} = 2 \cdot |\triangle AIJ| = |\square AIKJ| \tag{3.5}$$



formulieren. Ganz analog folgern wir

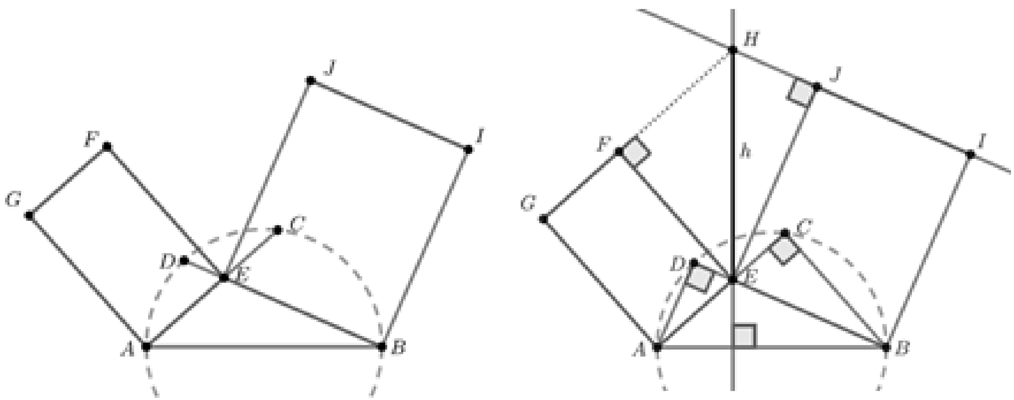
$$\begin{aligned} \overline{BD} \cdot \overline{BE} &= 2 \cdot |\triangle BB^* D| = 2 \cdot |\triangle BB^* A| \\ &= 2 \cdot |\triangle BEL| = 2 \cdot |\triangle LBJ| = |\square LBJK|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Addieren wir die Gleichungen (3.5) und (3.6), so erhalten wir schließlich

$$\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE} = |\square AIKJ| + |\square LBJK| = |\square AILB| = \overline{AB}^2,$$

und das war (zusammen mit der Vorbemerkung) zu zeigen. $\square$

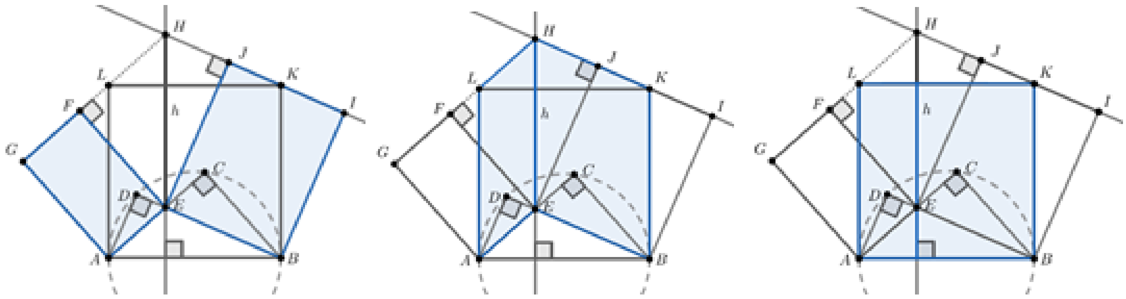
Vierter Beweis: Auch dieser Beweis orientiert sich an Beweisideen (einer Verallgemeinerung) des Satzes von Pythagoras; sie werden dem antiken Mathematiker Pappus zugeschrieben (Flächenformel des Pappus). Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABE$ der Aufgabenstellung und errichten wie in der nachfolgenden Skizze über der Strecke AE ein Rechteck $\square AEFG$, in dem $\overline{AG} = \overline{AC}$. Ebenso errichten wir über der Strecke EB ein Rechteck $\square EBIJ$, in dem $\overline{BI} = \overline{BD}$. Die Aufgabe ist bewiesen, wenn wir nachweisen, dass die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Rechtecke mit dem Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge $\overline{AB}$ übereinstimmt.



Wir ergänzen hierzu die Figur in der Skizze links durch die Senkrechte h auf AB durch den Punkt E sowie die Beobachtung, dass $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = 90°$ (Satz von Thales); siehe in der Skizze rechts. Die Gerade (IJ) schneide h im Punkt H. Dann sind die Dreiecke $\triangle HEJ$ und $\triangle ABD$ kongruent: Weil $h \perp AB$ und $EJ \perp DB$ gilt $\measuredangle JEH = \measuredangle DBA$, außerdem sind $\measuredangle ADB = \measuredangle HJE = 90°$ und nach Konstruktion ist $\overline{EJ} = \overline{BI} = \overline{BD}$. Die Kongruenz folgt damit aus dem wsw-Kongruenzsatz. Wenn analog H^* als der Schnittpunkt der Geraden (GF) mit der Senkrechten h definiert wird, folgt dass die Dreiecke $\triangle EH^*F$ und $\triangle ABC$ kongruent zueinander sind. Insbesondere ist

$$\overline{EH} = \overline{AB} = \overline{EH^*}, \tag{3.7}$$

die Punkte H und H^* fallen also zusammen. Die Eckpunkte K bzw. L eines Quadrats über AB mit der Seitenlänge $\overline{AB}$ liegen wegen (3.7) auf (IJ) bzw. (GF) wie in der nachfolgenden Skizze eingezeichnet. Wir verwenden nun in zwei Schritten, dass Parallelogramme mit gleicher Grundseite und Höhe dieselbe Fläche haben,



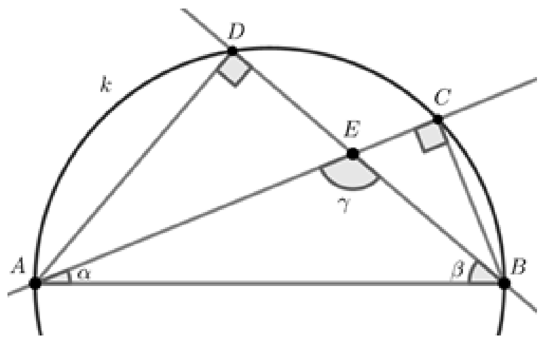
also

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE} &= |\square AEFG| + |\square EBIJ| \\ &= |\square AEHL| + |\square EBKH| \\ &= |\square ABKL| = \overline{AB}^2;\end{aligned}$$

und das war (zusammen mit der Vorbemerkung) zu zeigen. $\square$

Fünfter Beweis:

Es seien wie in der nebenstehenden Skizze im Dreieck $\triangle ABE$ die Winkel mit $\alpha := \measuredangle BAC, \beta := \measuredangle DBA$ und $\gamma := \measuredangle AEB$ bezeichnet. Mit dem Satz von Thales beobachten wir außerdem, dass die Winkel $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = 90°$, die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABD$ also rechtwinklig sind. In ihnen gilt demnach



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos(\alpha) \text{ und } \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \cos(\beta). \tag{3.8}$$

Im Dreieck $\triangle ABE$ wenden wir den Sinussatz an, er besagt

$$\frac{\overline{BE}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{AE}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} \iff \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \text{ und } \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}. \qquad (3.9)$$

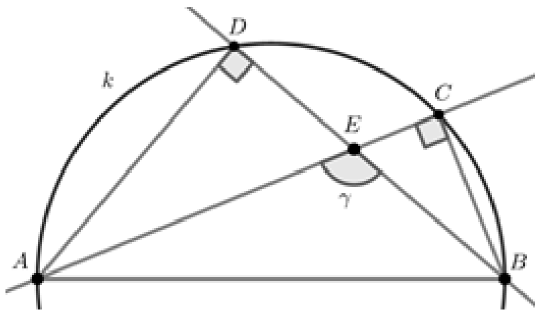
Aus (3.8) und (3.9) schließen wir zusammen mit einem Additionstheorem für den Sinus:

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AE}+\overline{BD}\cdot\overline{BE}}{\overline{AB}^2} = \frac{(\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)+\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha))}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}{\sin(\gamma)} = 1,$$

und das war (zusammen mit der Vorbemerkung) zu zeigen. □

Sechster Beweis:

Es sei wie in der nebenstehenden Skizze im Dreieck $\triangle ABE$ der Winkel $\gamma := \measuredangle AEB$. Mit dem Satz von Thales beobachten wir außerdem, dass die Winkel $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = 90^\circ$, also auch die beiden Dreiecke $\triangle EBC$ und $\triangle AED$ rechtwinklig sind. In ihnen gilt demnach



$$\cos(180^\circ - \gamma) = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}. \qquad (3.10)$$

Mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle ABE$ folgt zusammen mit $-\cos(\gamma) = \cos(180^\circ - \gamma)$ und den Beziehungen aus (3.10), dass

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 - 2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{BE}\cdot\cos(\gamma)\\ &= \overline{AE}\cdot(\overline{AE} + \overline{BE}\cdot\cos(180^\circ-\gamma)) + \overline{BE}\cdot(\overline{BE}+\overline{AE}\cdot\cos(180^\circ-\gamma))\\ &= \overline{AE}\cdot(\overline{AE}+\overline{CE}) + \overline{BE}\cdot(\overline{BE}+\overline{DE}) = \overline{AE}\cdot\overline{AC} + \overline{BE}\cdot\overline{BD};\end{aligned}$$

und das war (zusammen mit der Vorbemerkung) zu zeigen. □

Aufgabe 4

Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ sowie $a_n = \max\limits_{0<d<n} a_d \cdot a_{n-d}$ für $n \geq 4$. Bestimme die Primfaktorzerlegung von $a_{19702020}$.

Hinweise: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.
Der Ausdruck $a_n = \max\limits_{0<d<n} a_d \cdot a_{n-d}$ bezeichnet den größten Wert aller Zahlen $a_1 \cdot a_{n-1}, a_2 \cdot a_{n-2}, \ldots, a_{n-1} \cdot a_1$.

Lösung: Das Folgenglied $a_{19702020}$ ist eine Potenz des Primfaktors 3 mit Exponent $\frac{1}{3} \cdot 19702020 = 6567340$, also

$$a_{19702020} = 3^{6567340}. \qquad (4.1)$$

Beweis: Wir berechnen nun zunächst einige Folgenglieder:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
2 = a_2 &= 2^1 \cdot 3^0 \\
3 = a_3 &= 2^0 \cdot 3^1 \\
4 = a_4 &= \max a_1 \cdot a_3, a_2 \cdot a_2 = \max 0, 4 = 2^2 \cdot 3^0 \\
6 = a_5 &= \max a_1 \cdot a_4, a_2 \cdot a_3 = \max 0, 6 = 2^1 \cdot 3^1 \\
9 = a_6 &= \max a_1 \cdot a_5, a_2 \cdot a_4, a_3 \cdot a_3 = \max 0, 8, 9 = 2^0 \cdot 3^2 \\
12 = a_7 &= \max a_1 \cdot a_6, a_2 \cdot a_5, a_3 \cdot a_4 = \max 0, 12, 12 = 2^2 \cdot 3^1 \\
18 = a_8 &= \max a_1 \cdot a_7, a_2 \cdot a_6, a_3 \cdot a_5, a_4 \cdot a_4 = \max 0, 18, 18, 16 = 2^1 \cdot 3^2 \\
27 = a_9 &= \max a_1 \cdot a_8, a_2 \cdot a_7, a_3 \cdot a_6, a_4 \cdot a_5 = \max 0, 24, 27, 24 = 2^0 \cdot 3^3
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Die Folgenglieder zeigen in ihrem Aufbau eine hohe Regelmäßigkeit, die wir im Folgenden (per vollständiger Induktion) erkunden. Wir beweisen nämlich für alle $n \geq 5$, dass

$$a_n = a_3 \cdot a_{n-3} = 3 \cdot a_{n-3}. \tag{4.3}$$

Oben haben wir bereits zur Induktionsverankerung nachgerechnet, dass

$$
\begin{aligned}
a_5 &= 6 = 3 \cdot 2 = 3 \cdot a_2, \\
a_6 &= 9 = 3 \cdot 3 = 3 \cdot a_3, \\
a_7 &= 12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot a_4, \\
a_8 &= 18 = 3 \cdot 6 = 3 \cdot a_5.
\end{aligned}
$$

Für den Schluss von $k \leq n-1$ auf n (Induktionsschluss) können wir also $n \geq 9$ voraussetzen. Wegen $a_1 = 0$ ist

$$
\begin{aligned}
3 \cdot a_{n-3} &= \max_{0<d<n-3} 3 \cdot a_d \cdot a_{n-3-d} = \max_{2 \leq d \leq n-5} 3 \cdot a_d \cdot a_{n-3-d} \\
&= \max_{2 \leq d \leq n-5} a_d \cdot \left(3 \cdot a_{n-3-d}\right) = \max_{2 \leq d \leq n-5} a_d \cdot a_{n-d};
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

hierbei nutzen wir in der letzten Gleichung von (4.4) die Induktionsvoraussetzung, die wegen $n-1 \geq n-d \geq 5$ anwendbar ist. Die zusätzlichen Werte $a_d \cdot a_{n-d}$ mit $n-4 \leq d \leq n-2$ beeinflussen die letzte Maximum-Bildung max in (4.4) nicht: Für $d \in \{n-4, n-3, n-2\}$ sei $c := n-d$; dann ist $a_d \cdot a_{n-d} = a_{n-c} \cdot a_c = a_c \cdot a_{n-c}$ mit $2 \leq c \leq 4 \leq n-5$. Damit folgt aus (4.4) und $a_1 = 0$, dass

$$3 \cdot a_{n-3} = \max_{2 \leq d \leq n-5} a_d \cdot a_{n-d} = \max_{2 \leq d \leq n-2} a_d \cdot a_{n-d} = \max_{0<d<n} a_d \cdot a_{n-d} = a_n,$$

und dies beweist den Induktionsschritt.

Aus (4.3) lässt sich schnell ein explizites Bildungsgesetz für die Folgenglieder a_n mit $n \geq 2$ herleiten. Es sei die positive ganze Zahl n von der Form $n = 3k$ mit $k \geq 2$; dann sind

$$a_{3k-2} = 2^2 \cdot 3^{k-2}, a_{3k-1} = 2^1 \cdot 3^{k-1}, a_{3k} = 2^0 \cdot 3^k; \tag{4.5}$$

dabei gilt wegen $a_3 = 3$ die rechte Gleichung in (4.5) auch für $k = 1$.

Wir beobachten nun abschließend, dass $19702020 = 3 \cdot 6567340$, und damit folgt die Lösung (4.1) direkt aus (4.5). □

Bemerkung: Die Folgenglieder a_n, $n \geq 2$, tauchen auch in einem anderen Zusammenhang auf: Betrachten wir Zerlegungen der Zahl n in positive ganze Summanden $s_1, s_2, ..., s_k$, also $n = s_1 + s_2 + ... + s_k$, dann ist a_n der größtmögliche Wert, den das Produkt $s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k$ annehmen kann. Die optimalen Summanden s_i entsprechen dabei den Primfaktoren in (4.5). In dieser Form wurde zum Beispiel bei der Internationalen Mathematik-Olympiade 1976 nach a_{1976} gefragt. Außerdem ergeben sich die Folgenglieder a_n, $n \geq 2$, auch aus der rekursiven Definition $a_n = \max\limits_{0<d<n} a_d \cdot (n-d)$, wenn $a_1 = 1$ (abweichend zur Aufgabenstellung); siehe https://oeis.org/A000792. Interessanterweise ist in dieser rekursiven Definition nicht sofort ersichtlich, dass die a_n nur die Primfaktoren 2 oder 3 haben.

Wir danken Herrn StD a.D. Fegert und Herrn OStR Dr. Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Erratum

Erratum zu den „Aufgaben zum Neuen Jahr" in MONOID 140

Unsere Leserin Andrea Finger (Kelheim) weist darauf hin, dass die Aufgabenstellung der Aufgabe „Rationale Zahlen" aufsummiert folgendermaßen lauten soll:
Bestimme die Summe S aller positiven Brüche < 1, deren Nenner ≤ 2020 ist.
Die dazu passende, korrigierte Lösung lautet:

Zunächst gilt für jede natürliche Zahl $m \geq 2$:

$$\tfrac{1}{m} + \tfrac{2}{m} + \tfrac{3}{m} + ... + \tfrac{m-1}{m} = \tfrac{1}{m}(1 + 2 + 3 + ... + m - 1) = \tfrac{1}{m}\tfrac{(m-1)m}{2} = \tfrac{m-1}{2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{3}{4}\right) + ... + \left(\tfrac{1}{2020} + \tfrac{2}{2020} + \tfrac{3}{2020} + ... + \tfrac{2019}{2020}\right) \\ &= \tfrac{2-1}{2} + \tfrac{3-1}{2} + \tfrac{4-1}{2} + ... + \tfrac{2020-1}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + 2 + 3 + ... + 2019) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2019 \cdot 2020}{2} = \tfrac{1}{4} \cdot 2019 \cdot 2020 \end{aligned}$$

Des Weiteren wurde in der Aufgabenstellung zu der Aufgabe „Wahr oder falsch?“ ein Term vergessen. Die korrigierte Aufgabenstellung lautet:
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 2017 \cdot 2018 + 2018 \cdot 2019 + 2019 \cdot 2020 =$
$2(1 \cdot 2019 + 2 \cdot 2018 + 3 \cdot 2017 + ... + 2018 \cdot 2 + 2019 \cdot 1)$?

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 139

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Anton Krempl 11, Marek Moldehn 3, Philipp Reis 11;
Kl. 6: Anna Lena Drescher 5, Mya Fuchs 5, Johannes Greis 11;
Kl. 7: Oscar Su 37, Kevin Tran 12, Jan Christian Weber 11;
Kl. 8: Lars Schall 8;
Kl. 10: Lukas Born 18;
Kl. 12: Torben Bürger 20.

Dortmund, Leibniz-Gymnasium:
Kl. 9: Oliver Bill 7.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 5: Mika Schäfer 3;
Kl. 11: Marvin Wenzel 20.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 7: Konstantin Herbst 18;
Kl. 10: Nico Brockmeier 19, Aleksandra Herbst 16.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 11: Sönke Schneider 19;

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 6: Lia Boyanova 8, Mark Garkuscha 1, Eva Hovadikova 2, Iwais Karimi 7, Sarah Markhof 6, Nam-anh Pham 7;

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter:
Kl. 11: Dennis Mayle 21.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 9: Simon Waldek 4.

Mainz, Martinus-Schule:
Kl. 3: Johannes Wünstel 1,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 8: Gregor Salaru 33;
Kl. 10: Raphael Mayer 7.

Mainz, Theresianum:
Kl. 11: Clemens Zabel 19.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 12: Johannes Kerhberger 8.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jasmin Borrmann 9, Leonard Köhler 4, Leon David Mayer 2, Lotta Pietschmann 9;
Kl. 6: Klara Backmann 13, Luis Brinkmann 19, Louisa Lukowiak 13;
Kl. 7: Emilie Borrmann 10;
Kl. 10: Kathrin Borrmann 11, Paulina Herber 14, Josefine Kaßner 19;
Kl. 11: Jonas Glückmann 23.

Schondorf, Burg-Gymnasium:
Christian Carda 7.

Schrobenhausen, Gymnasium
Kl. 6: Luca Sindel 12.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 5: Mai Linh Dang 5;
Kl. 8: Tu Sam Dang 17;
Kl. 10: Miriam Büttner 20.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 8: Philipp Lörcks 36.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Lilith Gorecki 3,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 9: Mareike Bühler 9.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 7: Jan Wickenheiser 10;
Kl. 8: Alexander Haun 13;
Kl. 10: Lukas Emmel 7, Marco Klein 12.

Mitteilungen

- **Verzögerung:** Leider hat sich aufgrund der Corona-Pandemie der Druck dieses Heftes verzögert. Wir bitten um Entschuldigung. Wir hoffen, dass das nächste Heft wieder pünktlich erscheinen wird. Schaut so lange gerne auf unserer Internetseite `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/` vorbei.
  Dort stellen wir Euch in der nächsten Zeit wöchentlich Aufgaben zum Knobeln und um etwas die Zeit zu vertreiben bereit. Es lohnt sich also.
  Wir wünschen Euch und Euren Familien eine gute Gesundheit, Widerstandskraft und Ruhe in der aktuellen Notlage.
- **π-Tag erstmals auch Tag der Mathematik:** Jährlich feiern Mathematiker am 14. März den π-Tag. Die Unesco hat diesen Tag zugleich zum Internationalen Tag der Mathematik erklärt. Dieses Jahr steht dieser unter dem Motte „Mathematik ist überall". Mehr zum π-Tag könnt Ihr auf Seite 3 lesen.
- **Mainzer Mathematik-Akademie:** Die nächste Mainzer Mathematik- Akademie (MMA) findet vom 9. bis 13. September 2020 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  `https://www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`.
- **Titelbild:** Das Titelbild, welches die Zahl π spiralförmig dargestellt, haben wir im Mathematikum Gießen aufgenommen. Wir danken dem Mathematikum und seinen Mitarbeitern für die freundliche Genehmigung zum Abdruck.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Ruß
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Franziska Geis
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 40 | Heft 141 | März 2020

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`