

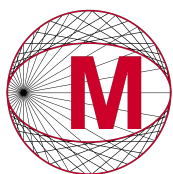
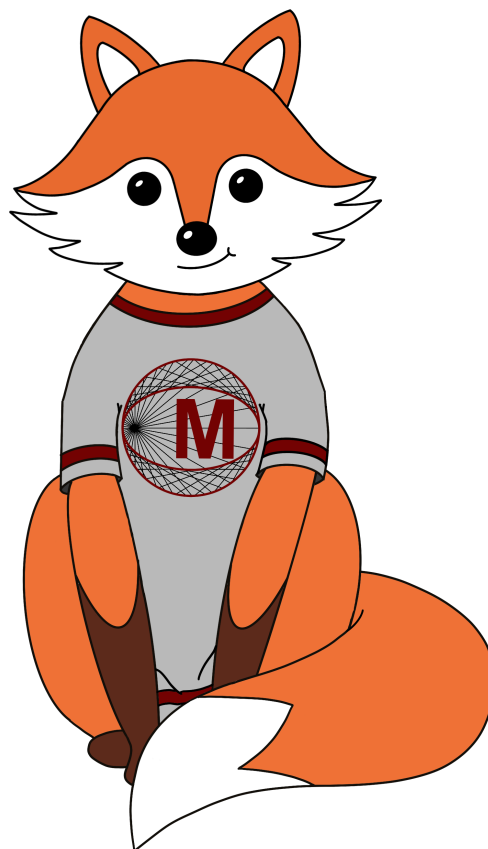
Jahrgang 42

Heft 150

Juni 2022

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von Martin
Mettler

herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der

31. August 2022.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107

Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

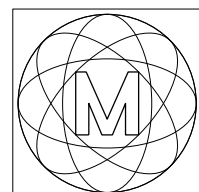
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



Ein Zwei-Würfel-Problem

von Hartwig Fuchs

Professor Quaoar beendet seine Vorlesung über “Elementare Zahlentheorie” meist mit einem arithmetischen Knobelproblem. Heute stellt er seinen Studenten die Aufgabe:

Auf einem Tisch liegen zwei Würfel. Ihr seht von ihnen jeweils drei Seiten, während ich die Würfel nicht anschau. Wenn dann für euch insgesamt 27 Punkte sichtbar sind und mir diese Zahl mitgeteilt wird, kann ich dann entscheiden, wie viele Punkte auf jeder der sechs Würfelseiten stehen?

Der Student Remmi ist der Meinung, mit nur einer numerischen Information sei es unmöglich, die Verteilung der 27 Punkte auf den sechs Würfelseiten zu bestimmen. Dagegen wendet Student Demmi ein, dass es noch eine weitere wichtige, allerdings versteckte Information gibt, nämlich:

- (1) Für jeden Würfel gilt: Auf jeden zwei einander gegenüberliegenden Seiten gibt es stets insgesamt 7 Punkte – und umgekehrt.

Danach löst Demmi die Aufgabe.

Mit A sei die Anzahl der sichtbaren Punkte auf dem einen und mit B deren Anzahl der sichtbaren Punkte auf dem zweiten Würfel bezeichnet. Dann gilt: $A, B \leq 4 + 5 + 6 \leq 15$. Daraus und aus der Voraussetzung $A + B = 27$ folgt $A > 11$ und $B > 11$ – denn wäre etwa $A \leq 11$, so wäre $A + B \leq 11 + 15 < 27$. Daher hat die Gleichung $A + B = 27$ – abgesehen von einer Vertauschung von A und B – nur zwei Lösungen: $A = 15, B = 12$ oder $A = 14, B = 13$.

Mit a, b und c , $a > b > c$, seien die Anzahlen der sichtbaren Punkte auf den Seiten eines Würfels bezeichnet.

1. Fall: Es sei $A = 15$ und $B = 12$.

Aus $A = a + b + c = 15$ folgt $a = 6, b = 5$ und $c = 4$ – bei einem Würfel erblicken die Studenten daher das Punkte-Tripel $(6, 5, 4)$.

Für $B = 12$ erhält man aus $B = a + b + c = 12$ drei Punkte-Tripel: $(6, 5, 1)$, $(6, 4, 2)$ und $(5, 4, 3)$. Das Tripel $(6, 5, 1)$ behauptet: Man sieht die Würfelseiten mit sechs Punkten und mit einem Punkt, beim Tripel $(5, 4, 3)$ wären die Seiten mit vier und mit drei Punkten sichtbar. Wegen $6 + 1 = 7$ bzw. $4 + 3 = 7$ sind beide Tripel gemäß (1) nicht möglich.

Im Fall $B = 12$ sehen die Studenten somit das Punkte-Tripel $(6, 4, 2)$.

- (2) Für $A = 15, B = 12$ gilt: Man sieht $(6, 5, 4)$ und $(6, 4, 2)$ Punkte bei den zwei Würfeln.

Der 2. Fall $A = 14$ und $B = 13$ tritt nicht ein, denn aus $B = a + b + c = 13$ erhält man $(a, b, c) = (6, 5, 2)$ oder $(a, b, c) = (6, 4, 3)$ – beide Tripel sind

wegen $5 + 2 = 7$ bzw. $4 + 3 = 7$ gemäß (1) nicht möglich.

Ergebnis: Sind bei zwei Würfeln insgesamt 27 Punkte für die Studenten sichtbar, dann kann Prof. Quaoar die Verteilung (2) der Punkte auf die sechs sichtbaren Würfelseiten berechnen.

Aus den Archiven der Mathematik

Ein Gleichungssystem des Galileo

von Hartwig Fuchs

Galileo Galilei (1564–1642), bedeutender Astronom, Mathematiker und Physiker, behauptete die Gültigkeit des unendlichen Gleichungssystems:

$$(1) \quad \frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{1+3+5+7+9}{11+13+15+17+19} = \dots$$

Hat er Recht?

Das Bildungsgesetz des Systems (1) ist leicht erkennbar.

Der n -te Ausdruck im Gleichungssystem sei $a_n = \frac{b_n}{c_n}$.

Dann ist $b_n + c_n = (1 + 3 + \dots + 2n - 1) + (2n + 1 + 2n + 3 + \dots + 2n + 2n - 1)$.

Mit der Summenformel*

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

gilt

$$b_n = n^2, c_n = n \cdot 2n + b_n = 3n^2.$$

Daraus folgt $a_n = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$ für jedes n mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Was uns über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

Es gilt:

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 0,207879576350761\dots$$

Nachweis:

Leonhard Euler (1707–1783) hat $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet, sodass $i^2 = -1$ ist. Dann folgt aus der von ihm bewiesenen und als die schönste mathematische Formel geltende Gleichung

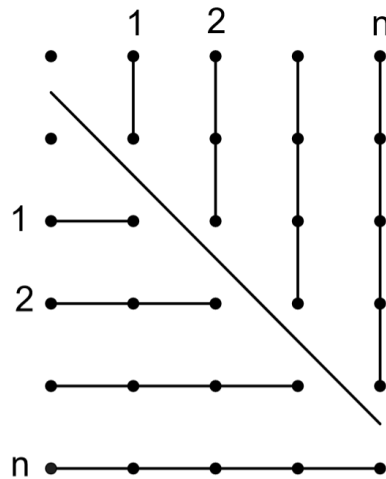
$$e^{\pi i} = -1,$$

dass $(e^{\pi i})^i = (i^2)^i$ und daher $e^{-\pi} = (i^i)^2$, somit $\sqrt{e^{-\pi}} = i^i = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ist. Weil nun $\sqrt{e^{-\pi}}$ die in (1) genannte Zahl 0,207... ist, gilt die Behauptung.

* Es ist $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n - 2(1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{2} \cdot 2n(2n + 1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n \cdot (n + 1) = n^2$.

Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs



$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Warum die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen gezählt wird

von Hartwig Fuchs

Das Problem, ob man die Zahl 1 als Primzahl betrachten sollte oder nicht, ist noch nicht sehr alt.

Den Mathematikern der griechischen Antike, die sich als Erste und dann auch gleich intensiv mit Primzahlen befassten – man denke nur an Euklids berühmten Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt –, ihnen stellte sich die Frage nach der Primalität der 1 nicht. Denn für sie war 1 die Einheit, aus der sich alle Zahlen herleiten und genau deshalb war sie selbst keine Zahl (Euklid in seinem Buch „Elemente“, Definition 2: Eine Zahl ist ein aus Einheiten Zusammengesetztes).

Erst im Mittelalter setzte sich allgemein die Auffassung durch, dass 1 eine Zahl ist – wenn auch noch Jakob Köbel (1470 – 1533), Rechenmeister und Stadtschreiber zu Oppenheim, 1514 in seinem „Eynn ... Rechenbuechlein“ meinte, die 1 sei keine Zahl, wohl aber die Erzeugerin (generatrix) aller Zahlen.

Die Anerkennung der 1 als Zahl führte vermutlich bald zu der Frage, ob man 1 als prime oder aber als nicht prime Zahl betrachten sollte. Zunächst entschieden sich Mathematiker dafür, die 1 als eine Primzahl zu definieren. Ein Beleg dafür ist die 1742 von Christian Goldbach (1690–1764) aufgestellte Vermutung, die in ihrer ursprünglichen Form behauptete: Jede natürliche Zahl > 2 ist die Summe aus drei Primzahlen – woraus man zum Beispiel wegen $3 = 1 + 1 + 1$ und $4 = 1 + 1 + 2$ schließen kann, dass Goldbach die Zahl 1 als Primzahl verstand. Die Primalität von 1 wurde damals mit der naheliegenden Definition begründet.

- (1) Eine natürliche Zahl ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Leonhard Euler (1707–1783), einer der ganz Großen der Mathematik, dessen Wort auch zu seiner Zeit Gewicht hatte, akzeptierte die Festsetzung (1) nicht. Er propagierte eine andere Primzahl-Definition:

- (2) Eine natürliche Zahl ist eine Primzahl, wenn sie *genau* zwei verschiedene Teiler besitzt.

Mit Definition (1) ist die Zahl 1 prim, mit Definition (2) ist sie es nicht.

Wieso ist die Definition (2) nach Eulers Meinung der Definition (1) vorzuziehen?

Euler beruft sich bei seinem Vorschlag auf eine Grundforderung, die jede Wissenschaft erfüllen sollte: Von zwei konkurrierenden Theorien entscheide man sich stets für die einfachere.* Und er rechtfertigt seinen Standpunkt mit Beispielen. Das erläutern wir an den wegen Definition (1) und Definition (2) verschiedenen Ausprägungen von den Aussagen.

Die Anzahl der Teiler einer Zahl

Die Darstellung einer Zahl $n > 1$ als Produkt der Potenzen ihrer Primteiler $p_1, p_2, \dots, p_r$ sei

$$(3) \quad n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_r^{e_r}.$$

Mit der Primzahl-Definition (1) gilt dann:

$$(4) \quad \text{Die Anzahl } A(n) \text{ der Teiler von } n \text{ ist } A(n) = (1 + e_1)(1 + e_2) \cdot \dots \cdot (1 + e_r).$$

Wenn man mit der Definition (2) arbeitet, dann ist 1^{e_i} einer der in Gleichung (3) vorkommenden Faktoren, wobei der Exponent e_i wegen $1^{e_i} = 1$ beliebig wählbar ist. Dann aber ist die Formel (4) völlig unbestimmt und somit trägt sie auch nichts zum Wissen über die Anzahl-Frage bei. Sie ist also überflüssig und entspricht daher nicht dem Ockham-Prinzip.

* Dieses Prinzip trägt den bemerkenswerten Namen „Ockhams Rasiermesser“ (warum wohl?) – es war William of Ockham (1300–1349) der es als Erster formulierte.

Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie

Mit der Definition (2) gilt:

- (5) Jede Zahl $n > 1$ ist als Produkt von Primzahlen darstellbar; abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren ist die Darstellung eindeutig.

Mit der Definition (1) jedoch ist der für die Zahlentheorie unentbehrliche Satz (5) falsch, denn dann kann man in der Produktdarstellung von n an beliebigen Stellen beliebig viele Primfaktoren 1 einfügen – und das zerstört die in Satz (5) behauptete Eindeutigkeit.

Man könnte den Satz (5) nur dadurch retten, indem man ihn durch die Bedingung ergänzt: In der Produktdarstellung von n darf die Primzahl 1 nur ein Mal vorkommen. – Das ist eine Bedingung, die man mit Definition (2) nicht stellen muss. Mit der Definition (1) ist also Ockhams Forderung nicht wieder erfüllt.

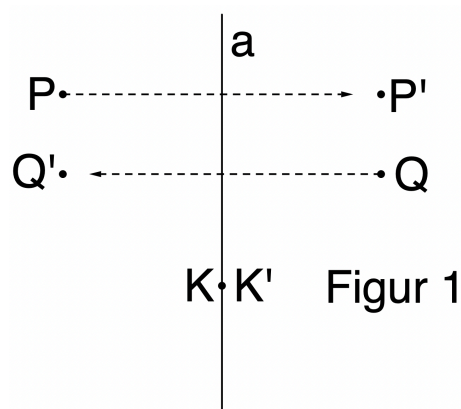
Viele Beispiele wie Gleichung (4) und Satz (5) haben die Mathematiker überzeugt, die Definition (1) aufzugeben – heute arbeitet man nur noch mit der Definition (2).

Spiegeleien

von Hartwig Fuchs

Beim Nachweis geometrischer Zusammenhänge haben sich Spiegelungen nicht selten als nützliche Hilfe erwiesen. Denn Spiegelungen erzeugen Symmetrien und deren Eigenschaften können zu einem gesuchten Beweis beitragen. An einigen geometrischen Problemen zeigen wir, wie man bestimmte Fragestellungen mit der Spiegelmethode erfolgreich untersuchen kann.

Wir werden dabei uns exemplarisch auf die Verwendung von Achsenspiegelungen beschränken.



Konstruktionen wie in Figur 1, die die Spiegelungen von Punkten P , Q , R an einer Achse a in die Spiegelpunkte P' , Q' , R' definieren, kennt jeder aus der Schule. Deshalb sei nur an drei elementare Eigenschaften Zuordnung: Punkt $\rightarrow$ Spiegelpunkt erinnert:

- die Zuordnung $P \rightarrow P'$ ist eindeutig:
- liegen zwei Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Achse a , so liegen P' und Q' auf verschiedenen Seiten von a .
- Ist K ein Punkt der Achse a , so gilt: $K = K'$.

Eine geometrische Figur f betrachte man als eine Menge M von Punkten. Wenn

man sich jeden Punkt aus M an einer Achse a gespiegelt denkt, dann erhält man eine Punktmenge M' , deren Elemente eine geometrische Figur f' bildet – das *Spiegelbild* der Figur f .

Achsenspiegelungen besitzen eine wichtige Eigenschaft, die bei der Betrachtung von geometrischen Figuren eine Rolle spielen kann und manchmal sogar deren Untersuchung erst erfolgreich macht.

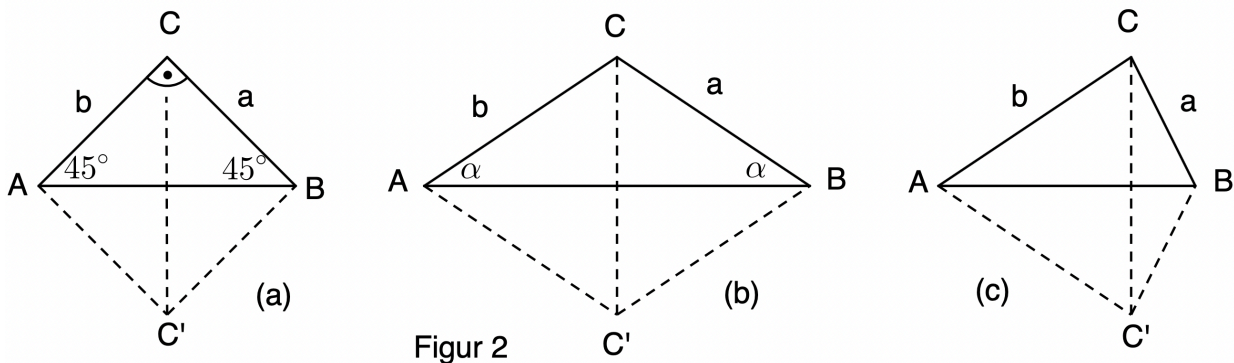
- (1) Bei einer Achsenspiegelung gilt für eine Figur f und ihr Spiegelbild f' : Die Figuren f und f' sind kongruent. Daraus folgt insbesondere: im Original f und in seinem Spiegelbild f' stimmen entsprechende Längen, Winkelgrößen und Flächeninhalte überein.

Nun zu den angekündigten Beispielen zur Arbeit mit Achsenspiegelungen.

Erzeugung geometrischer Figuren

Es sei $f = ABC$ ein Dreieck mit den Seitenlängen $|BC| = a$ und $|AC| = b$. Bei der Spiegelung von f an der Achse AB sei $C \rightarrow C'$. Für das Viereck $v = AC'BC$ (vgl. Figur 2) gilt dann:

- a) Ist f gleichschenkelig rechtwinklig mit $a = b$ und rechtem Winkel bei C , so ist v ein Quadrat.
- b) Ist f gleichschenkelig mit $a = b$, so ist v eine Raute.
- c) Ist AB die längste Seite von f , so ist v ein Drachenviereck.

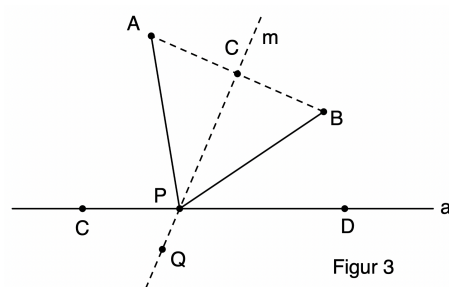


Figur 2

Konstruktion von Figuren mit bestimmten Größeneigenschaften

In der Ebene sei eine Gerade a durch die Punkte C und D und zwei Punkte A und B auf derselben Seite von a gegeben.

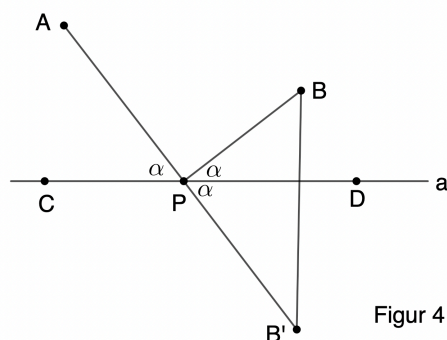
- a) Bestimme den Punkt $P \in a$, der von A und B gleich weit entfernt ist.



Lösung

Es sei m das Mittellot der Strecke AB und P sei der Schnittpunkt von a und m . Für jeden Punkt $Q \in m$ ist $|AQ| = |BQ|$ – und das gilt insbesondere wenn $P = Q$ ist: P ist der gesuchte Punkt.

- b) Man konstruiere den Punkt $P \in a$, für den gilt: $\angle CPA = \angle BPD$.

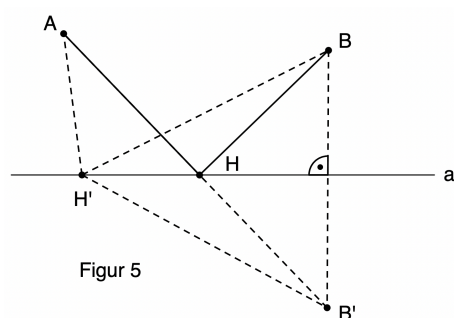


Lösung

Es sei B' der an der Achse a gespiegelte Punkt B und P sei der Schnittpunkt von a und der Strecke AB' . Dann ist $\angle CPA = \angle DPB'$ (Scheitelwinkel) und $\angle DPB' = \angle BPD$, weil PB' Spiegelbild von PB ist. Der gesuchte Punkt ist also P .

Größenvergleiche mit Achsenspiegelungen

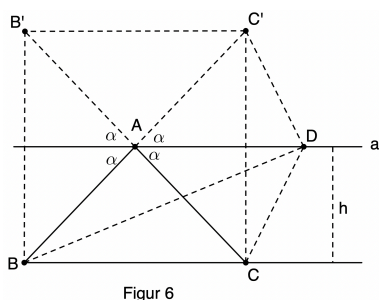
- a) Zwei Orte A und B liegen auf derselben Seite einer Bahnstrecke a . Eine Haltestelle H soll nun an der Strecke a so gebaut werden, dass eine ebenfalls zu bauende Straße AHB aus gradlinigen Teilstücken AH und HB kürzer ist als jede andere Straße $AH'B$ zu einer Haltestelle H' an der Bahnlinie a .



Lösung

Es sei B' der an der Achse a gespiegelte Punkt B , H sei der Schnittpunkt von a und der Strecke AB' und H' sei ein beliebiger Punkt von a mit $H' \neq H$. Dann ist $|AH| + |HB| = |AH| + |HB'| = |AB'|$ sowie $|AH'| + |H'B| = |AH'| + |H'B'| > |AB'|$. Für den Punkt H gilt daher: Die Straße AHB ist kürzer als jede Straße $AH'B$ mit $H' \neq H$.

- b) Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |AC|$ und der Höhe h sowie ABD , wobei $D \neq C$, ein beliebiges Dreieck ebenfalls mit der Höhe h . Dann gilt: Der Umfang von ABD ist größer als der Umfang von ABC .



Lösung

Es sei a die Parallele zu BC durch die Punkte A und D und $AC'B'$ sei an der Achse a gespiegelte Dreieck ACB . Dann ist BC' eine Strecke (vgl. die in der Figur angegebenen Winkel α). Es gilt die Dreiecksungleichung $|BD| + |DC'| > |BC'| = |BA| + |AC'|$. Wegen $|DC'| = |DC|$, $|AC'| = |AC|$ ist $|BD| + |DC| > |BA| + |AC|$, woraus folgt:

$$|BD| + |DC| + |CB| > |BA| + |AC| + |CB|$$

Beweisen geometrischer Sachverhalte

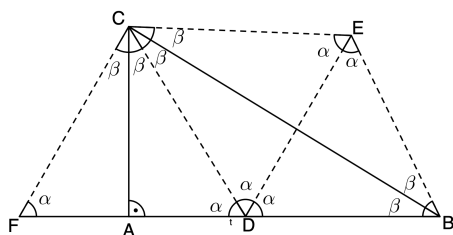
- a) Ein Quadrat, eine Raute und auch ein Drachen, jeweils mit den Diagonalen c und d , haben den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}cd$.

Lösung

Ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $|AB| = c$ und der Höhe $h = \frac{1}{2}d$ sei an der Achse AB gespiegelt (vgl. Figur 2). Für die Fläche F des aus dem Dreieck und seinem Spiegelbild ABC' zusammengesetztem Viereck $AC'BC$ gilt dann:

$$F = |AC'BC| = |ABC| + |AC'B| = 2 \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}cd.$$

- b) In einem Dreieck ABC sei $\angle CAB = 90^\circ$ und $\angle BCA = 60^\circ$. Auf der Strecke AB sei der Punkt D so gewählt, dass die Strecke CD den Winkel $\angle BCA$ halbiert. Dann gilt: $|AD| = \frac{1}{2}|BD|$.



Lösung

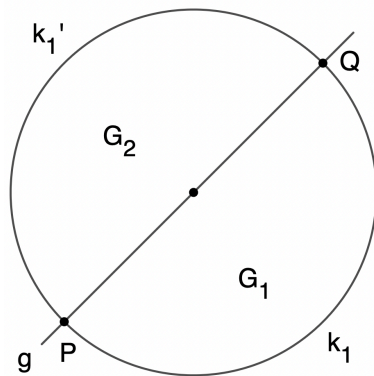
Nach Voraussetzung ist $\alpha = 60^\circ$ und somit $\beta = 30^\circ$ im Dreieck ABC . Wenn man nun das Dreieck ABC an der Achse BC und das Dreieck ADC an der Achse AC spiegelt (vgl. Figur 7), so ergeben sich für die Dreiecke DBE , DEC und DCF die in der Figur angegebenen Winkel.

Daher sind diese Dreiecke gleichseitig. Somit gilt: $|DB| = |DE| = |DC| = |DF| = 2|AD|$. Daraus folgt: $|AD| = \frac{1}{2}|BD|$.

- c) Unter allen geschlossenen Kurven gleicher Länge, die ein konvexes Gebiet G der Ebene beranden, sei k diejenige, die das größte Gebiet G^* begrenzt.

* Wir setzen hier ohne Beweis voraus, dass eine solche Kurve k mit zugehörigem Gebiet G maximaler Fläche existiert – tatsächlich dürfen wir das.

Wenn dann eine Gerade g die Länge von k halbiert, so halbiert sie auch die Fläche $|G|$ von G .



Lösung

Die Gerade g , welche die Kurve k in den Punkten P und Q schneide und so k in die gleich langen Kurvenstücke k_1 und k_2 zerteile, zerlege das Gebiet G in die Teilgebiete G_1 und G_2 mit der Flächen $|G_1|$ und $|G_2|$. Annahme: Es gilt $|G_1| \neq |G_2|$ – etwa sei $|G_1| > |G_2|$. Wenn man nun k_1 und G_1 an der Achse PQ spiegelt, dann seien k_1' mit der Länge $|k_1'|$ und G_1' mit der Fläche $|G_1'|$ deren Spiegelbilder – für die gilt:

$k_1 \cup k_1'$ ist eine geschlossene Kurve der gleichen Länge $|k|$ wie k , weil $|k_1'| = |k_1| = \frac{1}{2}|k|$ ist. Ferner ist $G_1 \cup G_1'$ ein konvexes Gebiet, für dessen Fläche $|G_1 \cup G_1'|$ wegen $|G_1'| = |G_1| > |G_2|$ gilt:

$$|G_1 \cup G_1'| = |G_1| + |G_1'| > |G_1| + |G_2| = |G|.$$

Nun steht aber $|G_1 \cup G_1'| > |G|$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität von $|G|$. Daher ist die Annahme falsch – es gilt die Behauptung.

Zu Besuch bei ... Galileo Galilei von Martin Mattheis

Sehr geehrter Herr Professor Galilei, wo lebten und wirkten Sie?

Am 15. Februar 1564 wurde ich in Pisa geboren. Damals dachte man, wenn man Pisa hörte, noch an die Stadt im heutigen Italien und nicht an eine absurde Studie. Zunächst wollte ich Mönch werden, wurde dann aber von meinem Vater aus dem Kloster geholt und habe 1581 in Pisa ein Medizinstudium begonnen. Nach vier Jahren habe ich erkannt, dass die Medizin nichts für mich ist und studierte lieber Mathematik. Nach den Bezeichnungen des Jahres 2022 habe ich mich aber in meinem Leben nicht nur mit Mathematik, sondern auch mit Physik, Ingenieurskunst und Astronomie beschäftigt.

Nachdem ich drei Jahre als Professor für Mathematik in Pisa lehrte, wechselte ich 1592 an die Universität in Padua, an der ich bis 1610 wirkte. Dann wechselte ich als Hofmathematiker zum Großherzog der Toskana. Ich behielt den Titel eines Mathematikprofessors, hatte aber keine Lehrverpflichtung mehr, konnte mich also in Ruhe meinen Forschungen widmen. Da ich es wohl mit dem Beobachten der Sonnenflecken übertrieben hatte, erblindete ich leider im Jahr 1638 vollständig. Verstorben bin ich am 8. Januar 1642 in meinem Haus in Arcetri bei Florenz.

Was war ihre bedeutendste Entdeckung?

Was die Bedeutendste ist, mögt ihr selbst beurteilen. Den größten Einfluss auf die nachfolgenden Generationen hatte sicher meine Art und Weise zu naturwissenschaftlichen Erkenntnissen zu gelangen. Anstatt durch die Lektüre der antiken Autoren oder pures Nachdenken kombinierte ich von mir durchgeführte Experimente oder Messungen mit mathematischen Analysen und habe so einiges herausgefunden. Diese Art der Forschung ist auch in eurer Zeit die Methode in den Naturwissenschaften Neues zu entdecken. Diese Vorgehensweise unterscheidet im Jahr 2022 immer noch die Naturwissenschaften von den Geistes- oder den Sozialwissenschaften. Ansonsten habe ich mich unter anderem mit der Schwere fester Körper, der Konstruktion einer hydrostatischen Waage und vor allem den Planetenbahnen beschäftigt. Besonders stolz bin ich auf die Entwicklung des Compasso, eines Vorläufers eurer Taschenrechner, mit dem man – ganz ohne elektrischen Strom – komplizierte Berechnungen ausführen konnte. Mit dem Verkauf von handgefertigten Exemplaren des Compasso habe ich auch ganz gut verdient. Außerdem versuchte ich – leider erfolglos – meine Ideen über ein Thermometer und eine Pendeluhr in die Wirklichkeit umzusetzen.

Heutzutage sind Sie allerdings vor allem für Ihre Astronomischen Entdeckungen bekannt.

Die Bewegungen der Sterne zu verfolgen, fand ich immer schon faszinierend. Durch entsprechende Beobachtungen wurde mir ab 1597 klar, dass sich nicht die Sonne um die Erde, sondern im Gegenteil sich die Erde um die Sonne dreht. Damit folgte ich den entsprechenden Vorarbeiten der Astronomen Johannes Kepler und Tycho Brahe.

Ebenfalls sehr hilfreich bei der Beobachtung des Himmels war meine Verbesserung des von einem Holländer entwickelten Fernrohrs. Durch entsprechend eingebaute, von mir selbst geschliffene Linsen, schaffte ich zunächst eine vierfache und später eine 33-fache Vergrößerung, wodurch ich – im wahrsten Wortsinne – mehr gesehen habe als andere Astronomen.



Wie kamen Sie dadurch in einen Konflikt mit der Inquisition?

Im Rahmen der Untersuchung eines Buches von Paolo Foscarini, der versuchte zu beweisen, dass das Kopernikanische heliozentrische Weltbild – bei dem die Sonne im Mittelpunkt des Universums steht – bestand die Inquisition darauf, dass die Erde der Mittelpunkt des Universums sei. Foscarinis Buch wurde verboten. Das bedeutende Buch „De revolutionibus orbium coelestium“ von Johannes Kepler wurde dagegen nicht verboten, durfte allerdings nur noch in einer Überarbeitung erscheinen, in der klargelegt wurde, dass die Behauptung, dass sich die Erde um die Sonne drehe, niemals als Wahrheit, sondern lediglich als eine Hypothese beschrieben werden durfte. Auch mir wurde dies eindrücklich mitgeteilt, weswegen ich mich danach mit öffentlichen Aussagen über das Weltsystem zurückhielt.

Welches gedruckte Werk von Ihnen ist am bekanntesten?

Im Jahr 1632 erschien mein „Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme“, in welchem ich das kopernikanische und das ptolemäische Weltbild diskutiere. Daraufhin musste ich mich vor einem Inquisitionstribunal verantworten, was sehr heikel war. Nicht selten endeten solche Prozesse für den Angeklagten auf dem Scheiterhaufen. Man warf mir vor allem vor, dass ich nicht deutlich genug gemacht hätte, dass das kopernikanische Weltbild nur eine Hypothese sei. Da ich auch im Vatikan einflussreiche Fürsprecher hatte, blieb mir der Scheiterhaufen erspart, ich stand jedoch von da an bis zu meinem Tode unter Hausarrest. Wenigstens war es mir erlaubt, an weniger heiklen Fragen weiter zu forschen. Und dass ich beim Verlassen des Gerichtssaales gemurmelt haben soll „Und sie bewegt sich doch!“, ist wohl nur eine Legende; ich jedenfalls kann mich daran nicht mehr erinnern. Läppische 360 Jahre später, im Jahr 1992, wurde ich von der katholischen Kirche dann vollumfänglich rehabilitiert.

Ich persönlich finde jedoch mein physikalisches Hauptwerk „Discorsi. Unterredungen und mathematische Beweisführungen zu zwei neuen Wissensgebieten“ über, wie ihr 2022 sagen würdet, Kinematik und Festigkeitslehre wesentlich bedeutsamer.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?

Es ist fast schon ein bisschen peinlich, aber 2022 kennt mich jedes Kind. Von Biographien (im Oktober 2022 erscheint eine neue vom Astrophysiker Mario Livio) über Jugendbücher, (so z. B.: „Max und der Sternenforscher“ von Tanja Wenz) bis hin zu einem Theaterstück von Bert Brecht gibt es unzählige Möglichkeiten, mehr über mich zu erfahren.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch mit auf den Weg geben?

„Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.“

Lieber Herr Professor Galilei, wir danken Ihnen für dieses Gespräch!

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Peter und Paul wiederholen gemeinsam die Bruchrechnung. Damit es nicht zu langweilig wird, verwenden sie Terme für Zähler und Nenner.

Schließlich sagt Peter: „Ich habe hier den Bruch $\frac{21n+4}{14n+3}$.“

Paul entgegnet sofort: „Den kann man bestimmt nicht mit 7 kürzen, denn im Zähler bleibt Rest 4 und im Nenner Rest 3 bei Division durch 7, egal welche natürliche Zahl man für n einsetzt.“ Darauf Peter: „Aber ich lade dich ins Kino ein, wenn du ihn mit einer anderen Zahl kürzen kannst. Du musst mir nur sagen, was du für n eingesetzt hast.“

Paul nimmt natürlich die Wette an und beginnt zu suchen.

Gibt es eine natürliche Zahl n , für die sich der oben angegebene Bruch kürzen lässt? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2022 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 148

In Heft 148 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Auch das „Dengerchen“ verneigt sich zum Jahresende vor der für MONOID so bedeutsamen Jahreszahl.

Ein Seeräuber möchte seinen Schatz von 2021 gleichartigen Goldstücken in drei verschieden große Teile aufteilen. Natürlich soll jeder Teil wenigstens eine Münze enthalten. Wie viele Möglichkeiten der Aufteilung gibt es, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt? (Die Aufteilungen $40 + 1936 + 45$, $45 + 1936 + 40$ und so weiter sollen also nur einmal gezählt werden.) Die Richtigkeit der gefundenen Anzahl ist zu begründen.

Lösung

Da jeder der drei Teile wenigstens eine Münze enthalten soll, legen wir diese drei „Pflichtmünzen“ zunächst beiseite.

Die restlichen 2018 Münzen können auf $\binom{2020}{2} = 2019 \cdot 1010 = 2039190$ verschiedene Arten (1) in drei Teilmengen aufgeteilt werden, die auch leer sein können und nicht unbedingt alle eine verschiedene Anzahl von Münzen enthalten müssen. Dies erkennen wir, wenn wir die 2018 Münzen zusammen mit zwei Streichhölzern irgendwie in eine Reihe nebeneinander legen und die beiden Streichhölzer als Trennlinien zwischen den drei Teilmengen deuten. Liegen dabei

zwei Hölzer direkt nebeneinander oder am Rand, so entstehen leere Teilmengen. Allerdings gibt es dabei unter Umständen gleich große Teilmengen sowie Mehrfachzählungen. Drei gleich große Teile sind bei 2018 Münzen nicht möglich. Zwei gleich große Teile vom Umfang k sind für $k = 0$ bis $k = 1009$ möglich, also auf 1010 verschiedene Arten. Sie werden nach dem Schema aab , aba , baa in (1) jeweils dreimal gezählt.

Wenn alle Anzahlen einer Aufteilung verschieden sind, wird sie nach dem Schema abc , acb , bac , bca , cab , cba in (1) sechsmal gezählt.

Damit beträgt die gesuchte Anzahl aller Möglichkeiten $(2039190 - 3 \cdot 1010) : 6 = 339360$, wobei die „Pflichtmünzen“ einfach jeder Teilmenge hinzugefügt werden.

Vollständig richtige Lösungen wurden von Josefine Kaßner und Oscar Su eingesandt.

Direkt vor dem Aufteilen hat der Seeräuber noch ein 2022. Goldstück gefunden und dem Schatz hinzugefügt. Wie viele Möglichkeiten der Aufteilung gibt es jetzt? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Lese-Ecke

Lesetipps zur Mathematik

von Martin Mattheis

M. Beutelspacher, Albrecht/Wagner, Marcus: Wie man einen Würfel aufpustet

Nach „Wie man durch eine Postkarte steigt“ (2008) und „Warum Kühe gern im Halbkreis grasen“ (2010) hat das Autorenduo Albrecht Beutelspacher und Marcus Wagner mit „Wie man einen Würfel aufpustet“ einen dritten Band mit mathematischen Experimenten zum Nachmachen und Selberbasteln vorgelegt. Im Vorwort von „Wie man durch eine Postkarte steigt“ ist die Intention aller drei Bücher sehr schön beschrieben, deshalb soll die entsprechende Passage hier wörtlich zitiert werden:

„Mathematische Experimente – gibt es das überhaupt?

Wie bei jedem guten Experiment werden Sie staunen, sich wundern und manchmal auch verblüfft sein. Aber die mathematischen Experimente gehen darüber hinaus. Sie geben zu Fragen Anlass (Warum ist das so?), sie regen Vorstellungen an und sie bergen in sich Hinweise zur gedanklichen Klärung. Denn oft macht es an einer speziellen Stelle des Überlegens ‚klick‘ (der berühmte ‚Aha-Effekt‘), und damit sehen Sie wie durch einen Blitz die ‚Lösung‘ beziehungsweise kommen zum Verständnis.“

In dieser Rezension werde ich im Folgenden das 2019 erschienene dritte Buch „Wie man einen Würfel aufpustet“ näher vorstellen. Es gibt darin sieben Kapitel, nach denen die vorgestellten Experimente sortiert werden: Körper, Formen, Kurven, Knobelspiele, Muster, Zahlen und Durchblick.

Im Kapitel Körper geht es darum, durch Falten von Papier räumliche Körper, wie einen Würfel, ein Rhombendodekaeder, ein Kuboktaeder, Bienenwaben, eine Ikosaeder oder eine Tetraeder, das durch ein kleineres Loch passt, herzustellen. Nicht ganz zur Kapitelüberschrift passend, findet man darin aber auch eine Anleitung zur Halbierung eines Quadrats.

Bei Formen wird dann nicht nur gefaltet, sondern auch ausgeschnitten und gepuzzelt. Im nächsten Kapitel Kurven werden ebene, räumliche und anschießende Kurven erfahrbar gemacht: Hyperboloid, wie man eine Ellipse in ein Herz verwandelt und das Volumen von Quader oder Zylinder (die zugrundeliegende Beobachtung dazu findet man schon in den Discorsi von Galileo Galilei).

Als nächstes geht es um Knobelspiele wie Pentominos oder das Qua-Achteck, selbstähnliche Knobelspiele, räumliche Puzzles, wie Würfelvierlinge, Somawürfel, Conway-Würfel, unvollständige Eckwürfel oder um Basteleien wie eine Pop-up-Tetraeder. Im Kapitel Muster versammeln sich Parkettierungen, Spiralen auf Kiefernzapfen und das Primzahlsieb des Eratosthenes wird mit gelochten Karten umgesetzt.

Bei Zahlen dreht es sich um den goldenen Schnitt, Fadenspiele, gestapelte Bücher und binäres Zählen mit den Fingern.

Im letzten Kapitel folgt dann der Durchblick mit gespiegelten Buchstaben bei einer Wasserflasche, Schattenspiele, dem Försterdreieck zur Höhenbestimmung von Bäumen. Die Beschreibungen der Experimente sind so ausführlich, dass sie für jede Altersgruppe geeignet sind, selbst wenn die mathematische Vertiefung für manche der gemachten Beobachtungen für jüngere Schülerinnen und Schüler noch nicht hundertprozentig verstanden werden sollte. Freunde des Mathematikums werden sich zudem an einige der beschriebenen Experimente aus der Ausstellung erinnern.

Fazit: Im Vorwort schreiben die Autoren: „Mathematische Experimente faszinieren nach unserer Erfahrung eigentlich jeden. Das liegt an dem Zusammenspiel von Handeln, Denken und Fühlen.“ Dem kann sich der Rezensent nur anschließen. Beim Stöbern im Buch wird man automatisch bei einem Experiment hängenbleiben, das man spannend findet und sich direkt überlegen, wo man die Materialien in der Wohnung hat, um loszubasteln. Danach wird man genauer überlegen, welche mathematischen Erkenntnisse man gebraucht, bzw. neu entdeckt hat.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch

Beutelspacher, Albrecht/Wagner, Marcus: Wie man einen Würfel aufpustet, Herder 2019, ISBN 978-3-451-60068-5, gebunden 192 Seiten

Art des Buches: Mathematische Bastelanleitungen

Mathematisches Niveau: verständlich

Altersempfehlung: ab 10 Jahren

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 149

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Letzte Ziffer

Bestimme die letzte Ziffer von

$$2022^{2022}.$$

(MG)

Lösung:

Es genügt, die letzte Ziffer der Basis 2022 zu berücksichtigen.

Berechnen wir die ersten 2er-Potenzen, so erhalten wir $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, ... Wir sehen also, dass sich die Einerziffer der 2er-Potenzen und somit auch diejenigen der 2022er-Potenzen mit Periodenlänge 4 wiederholen und sie sind immer 2, 4, 8, 6.

Wegen $2022 = 505 \cdot 4 + 2$ hat 2022^{2022} dieselbe Einerziffer wie 2022^2 , also ist die letzte Ziffer von 2022^{2022} die Ziffer 4.

II. Stefan Banach

Ein Mathematiker ist eine Person, die Analogien zwischen Sätzen finden kann; ein besserer Mathematiker ist jemand, der Analogien zwischen Beweisen erkennen kann, und der beste Mathematiker kann Analogien zwischen Theorien feststellen.

Der polnische Mathematiker Stefan Banach, vom dem obiges Zitat stammt, wurde n Jahre alt im Jahr n^2 . Er starb am 31. August 1945 in Lemberg (dem heute Ukrainischen Lwiw).

Wann wurde er geboren?

Hinweis: Die Aufgabe ist natürlich mathematisch zu lösen. Nachschauen in Lexika oder Enzyklopädien wird nicht als Lösung akzeptiert.

(MG)

Lösung:

Die größte Quadratzahl, die kleiner als 1945 ist, ist $1936 = 44^2$. Da er in diesem Jahr 44 Jahre alt wurde, muss er $1936 - 44 = 1892$ geboren sein.

Tatsächlich wurde er am 30. März 1892 in Krakau geboren.

Bemerkung: Dass Banach im Jahr $43^2 = 1849$ seinen 43. Geburtstag gefeiert hat, lässt sich ausschließen, da er dann im Alter von 139 Jahren gestorben wäre.

III. Ist doch logo – oder?

In einer Nachrichtensendung* für Kinder und Jugendliche wurde zum Thema Inflation Folgendes erklärt:

Auch die Preise für Lebensmittel, vor allem für Obst und Gemüse, sind deutlich gestiegen. So kosten Tomaten zum Beispiel im Moment etwa ein Fünftel mehr als noch vor einem Monat. Das heißt: Vor einem Monat hat man für einen bestimmten Betrag fünf Tomaten bekommen, während es heute für das gleiche Geld nur noch vier Tomaten gibt.

Ist das korrekt? Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Wir akzeptieren die vereinfachte Annahme, dass jede Tomate gleich schwer wäre. (MG)

Lösung:

Die Erklärung ist falsch: Angenommen, man hat letzten Monat für die fünf Tomaten insgesamt einen Betrag P bezahlt. Dann kostet jede Tomate im Schnitt $\frac{P}{5}$. Erhöht sich nun der Preis um ein Fünftel, so kostet jede Tomate nun $\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{5} = \frac{6P}{25}$. Für vier Tomaten muss also $4 \cdot \frac{6P}{25} = \frac{24}{25} \cdot P$, also weniger als der alte Preis P . Der Fehler liegt darin, dass die Nachrichtenredaktion den Prozentsatz auf zwei verschiedene Grundwerte bezogen hat: Einmal („etwa ein Fünftel mehr als noch vor einem Monat“) den alten Preis als Grundwert und einmal („Vor einem Monat [...] fünf Tomaten bekommen, während es heute [...] nur noch vier Tomaten gibt.“) den neuen Preis als Grundwert.

Das korrekte Beispiel wäre gewesen: Vor einem Monat hat man für einen bestimmten Betrag sechs Tomaten bekommen, während es heute für das gleiche Geld nur noch fünf Tomaten gibt, denn bei einem alten Preis von im Schnitt $\frac{P}{6}$ pro Tomate kostet dann jetzt jede Tomate $\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{6} = \frac{P}{5}$ und somit fünf Tomaten insgesamt $5 \cdot \frac{P}{5} = P$.

IV. Monoidale Knobelei

In jedes der leeren Felder soll je ein Buchstabe eingetragen werden so, dass dann in jeder Zeile, in jeder Spalte und in der Diagonalen von links oben nach rechts unten jeder Buchstabe des Wortes MONOID vorkommt.

Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen. Es genügt, wenn Du eine angibst.

(HF)

M	O	N	O	I	D
	O				D
		O			D
					D
					D
D	D	D	D	D	D

* logo!, Sendung vom 13. Oktober 2021, bei ca. 3:37

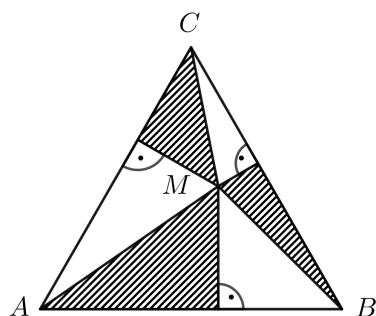
Lösung:

Es gibt folgende Lösungen:

M	O	N	O	I	D
N	O	I	M	O	D
I	M	O	N	O	D
O	N	O	I	M	D
O	I	M	O	N	D
D	D	D	D	D	D

M	O	N	O	I	D
I	O	M	N	O	D
N	I	O	M	O	D
O	N	O	I	M	D
O	M	I	O	N	D
D	D	D	D	D	D

V. Flächen-Vergleich

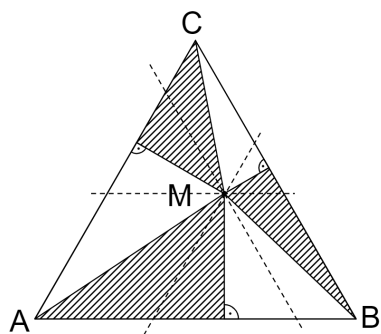


Im gleichseitigen Dreieck ABC sei M ein beliebiger Punkt im Inneren. Verbindet man M mit A , B und C und zeichnet die Lote von M auf die Seiten des Dreiecks, so erhält man sechs Teildreiecke.

Zeige: Die Fläche der drei schraffierten Dreiecke ist so groß wie die Fläche der drei nicht schraffierten Dreiecke.

(gefunden H.F.)

Lösung:



Zeichnet man die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch M (gestrichelte Linie), so erhält man sechs Parallelogramme, die jeweils durch ihre Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt werden – wobei eines der beiden Dreiecke zu einem nicht schraffierten Dreieck gehört. Daraus folgt die Behauptung.

VI. Logisches Puzzle

Von den folgenden fünf Aussagen über positive ganze Zahlen x und y ist genau eine Aussage falsch:

- (1) $x = 2y + 13$.
- (2) $x + y$ ist ein Vielfaches von 3.
- (3) $x + 4y$ ist eine Primzahl.
- (4) y ist ein Teiler von $x + 3$.
- (5) $x > 30$.

Beantworte folgende Fragen:

- a) Welche der fünf Aussagen ist falsch?
- b) Welches Zahlenpaar (x, y) erfüllt die übrigen vier Bedingungen?

(HF)

Lösung:

- a) Annahme: (2) und (3) sind wahr.

Wegen (2) ist $x + y = 3 \cdot v$ für ein ganzzahliges $v > 1$. Damit folgt aus (3): $x + 4y = (x + y) + 3y = 3v + 3y$, so dass $x + 4y$ wegen $v > 1$ und $y > 1$, keine Primzahl ist – ein Widerspruch.

Daraus folgt: Entweder ist (2) falsch oder (3) ist falsch. Dann aber sind (1), (4) und (5) auf jeden Fall wahr.

Wegen (4) ist $x + 3 = v \cdot y$ für ein ganzzahliges $v > 1$, so dass $x = v \cdot y - 3$ ist.

Mit Aussage (1) ergibt sich dann: $v \cdot y - 3 = 2y + 13$, also $(v - 2)y = 16$. Daraus folgt: y ist ein Teiler von 16. Die möglichen Werte von y , von $x = 2y + 13$, von $x + y$ und von $x + 4y$ sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

y	1	2	4	8	16
$x = 2y + 13$	15	17	21	29	45
$x + y$	16	19	25	37	61
$x + 4y$	19	25	37	61	109

Aus der dritten Zeile der Tabelle folgt: Die Aussage (2) ist falsch.

- b) Von den vier Primzahlen in der vierten Zeile der Tabelle erfüllt nur die Primzahl $x + 4y = 109$ wegen $x = 45$ die Bedingung (5). Folglich erfüllt nur das Paar $(45, 16)$ die Bedingungen (1), (3), (4) und (5).

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 31. August 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Quersumme und -produkt

Ihr haltet gerade das MONOID-Heft 150 in den Händen.

Gebt jeweils die kleinste Zahl an,

- a) deren Quersumme 150 ist.
- b) deren Querprodukt (also das Produkt aller ihrer Ziffern) 150 ist.

(MG)

II. Quersumme, Stellenanzahl und Ziffernanzahl

Die Zahl 2022 hat folgende Eigenschaften: Die Quersumme beträgt 6, die Anzahl der Stellen 4, die Anzahl der verschiedenen Ziffern 2.

Wie viele weitere (echte) Zahlen gibt es mit genau diesen Eigenschaften?

Anmerkung: „Echt“ heißt, dass nur die Zahl 6000, aber nicht 0600 zählen soll. (GS)

III. Jahreszahlen und Ziffernanzahl

Die Jahreszahl 2022 hat nur zwei verschiedene Ziffern.

- a) In welchem Jahr hat die Jahreszahl beim nächsten Mal vier verschiedene Ziffern, wann das nächste Mal wieder nur zwei verschiedene Ziffern?
- b) Wie viele vierstellige Jahreszahlen* mit vier verschiedenen Ziffern gibt es?
- c) Wie viele Jahreszahlen mit nur zwei verschiedenen Ziffern gibt es in diesem, also dem 21. Jahrhundert?

Hinweis: Das 21. Jahrhundert umfasst die Jahre 2001 bis 2100.

(MG)

* Die Zahlen sollen also keine führende Nullen haben.

IV. LALL...

In der Gleichung

$$LALL - LAL + LAA - LAAA + A = 20$$

bezeichnen die Buchstaben L und A jeweils Ziffern.

Zeige: Es gibt genau ein Zahlenpaar L und A , für das die Gleichung gültig ist. (HF)

V. Eine Teilbarkeitsregel

Sei p eine Primzahl.

Zeige: Für alle $p > 3$ gilt: Entweder $p + 1$ oder $p - 1$ ist durch 6 teilbar. (WJB)

VI. Ein römisches Testament

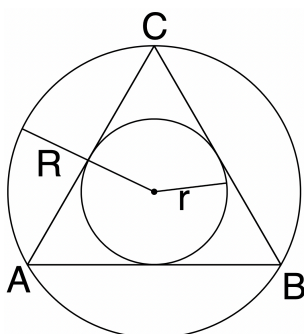
Die folgende Aufgabe geht wohl zurück auf Salvius Julianus (ca. 110–170; genannt Julian der Jurist), der in seinem Hauptwerk Libri XC digestorum, einer Sammlung realer und hypothetischer Rechtsfälle, die Grundlage für eine Systematik des römischen Rechts entwickelte.

Ein reicher Römer legte in seinem Testament die Verteilung seines Besitzes auf seine Ehefrau und ihres noch ungeborenen Kindes so fest: Falls ihm ein Sohn geboren wird, soll er doppelt so viel erben wie seine Mutter. Eine Tochter aber sollte nur halb so viel erhalten wie ihre Mutter. Was der Römer nicht bedacht hatte: Seine Ehefrau gebär Zwillinge,

- a) zwei Söhne
- b) einen Sohn und eine Tochter.

Wie war das Erbe aufzuteilen? (HF)

VII. Ungleichungen am Dreieck



Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a , b , c . Ferner sei R der Radius des Umkreises und r der Radius des Inkreises von ABC .

Überprüfe die Ungleichungen:

$$r < \frac{a + b + c}{6} < R.$$

(HF)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 31. August 2022.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1296: Kugeln und Jahreszahlen

Die Oberfläche A und das Volumen V einer Kugel seien ganzzahlige Vielfache von π . Wie groß ist dann der Radius r der kleinsten (der größten) Kugel, wenn für sie

$$A < 2022\pi < V$$

gelten soll?

Hinweis: Es ist $A = 4\pi r^2$ und $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. (HF)

Aufgabe 1297: Gefärbte Strecken

In der Ebene seien n Punkte so verteilt, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Je zwei Punkte sind durch genau eine farbige Strecke verbunden, wobei genau fünf Farben benutzt wurden.

- a) Wie viele Punkte sind gegeben, wenn sie durch 2043231 Strecken verbunden sind?
- b) Wie viele gleich gefärbte Strecken gibt es mindestens?

(HF)

Aufgabe 1298: Wo liegt der Fehler?

Es soll

$$x_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}, \quad n\text{-mal die } 2$$

berechnet werden.

Dazu überlege ich mir $x_{n+1} = 2^{x_n}$ und $x_{n+1} = x_n^2$. Also muss x_n Lösung der Gleichung $x^2 = 2^x$ sein. Ich überzeuge mich, dass diese Gleichung zwei Lösungen besitzt, nämlich $x = 2$ und $x = 4$. Demnach müsste für jedes n gelten $x_n = 2$ oder $x_n = 4$. Das kann aber nicht sein, es ist ja schon $x_3 = 2^{2^2} = 16$.

Wo liegt also mein Fehler? (WJB)

Aufgabe 1299: Treffen sich zwei Rechtecke



Finde zwei Rechtecke, deren Seitenlängen natürliche Zahlen sind, auf die dieser Dialog zutrifft!
(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 1300: Produkte, die keine Quadratzahlen sein können

Zeige die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

a) Ist p eine Primzahl, so kann

$$p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$$

keine Quadratzahl sein.

b) Ist n eine natürliche Zahl mit $n \leq 100$, so kann

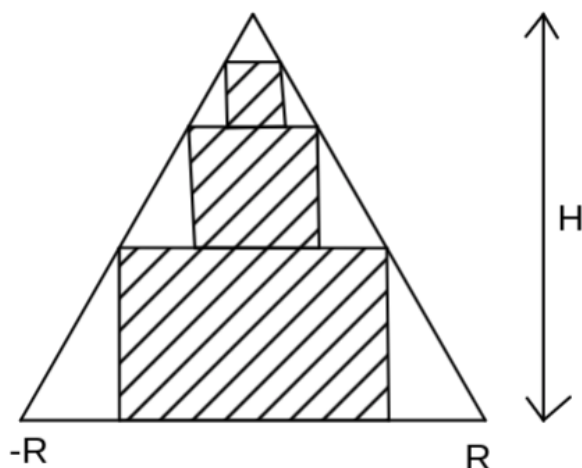
$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

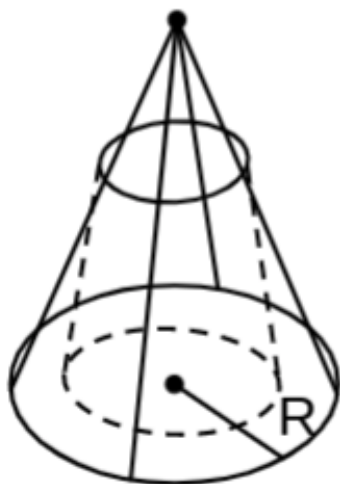
keine Quadratzahl sein.

(WJB)

Aufgabe 1301: Turm

a) Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite $[-R, R]$ und Höhe H . Über der mittleren Hälfte der Grundseite (also $[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$) wird ein Rechteck eingeschrieben. Das gleiche Verfahren wird im Dreieck über diesem Rechteck wiederholt usw. Bestimme die Fläche des so konstruierten "Turms".





- b) Ähnlich wie in Teil a konstruieren wir einen Turm in einem Kegel der Höhe H über einem Kreis mit Radius R , indem wir einen Zylinder mit Radius $\frac{R}{2}$ einbeschreiben und dieses Verfahren mit der Kegelspitze über diesem Zylinder wiederholen usw.

Bestimme das Volumen des Turms.

(WJB)

Aufgabe 1302: Teiler-Anzahlen

Für welche Zahlen $z = 2^m \cdot 3^n$ mit $m \geq 1$ und $n \geq 1$ gilt: Die Anzahl der Teiler von z^3 ist fünfmal so groß wie die Anzahl der Teiler von z ? (HF)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 149

Klassen 9–13

Aufgabe 1289: Summenspiel mit Potenzen

a) Es sei

$$3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m = 9^{2022}.$$

Bestimme den Exponenten m .

b) Es sei

$$4^n + 4^n + 4^n + 4^n = 2^{2022}.$$

Bestimme den Exponenten n .

(MG)

Lösung:

a) Es ist

$$\begin{aligned} &3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m + 3^m \\ &= 9 \cdot 3^m = 3^2 \cdot 3^m = 3^{2+m}. \end{aligned}$$

Andererseits ist $9^{2022} = (3^2)^{2022} = 3^{2 \cdot 2022} = 3^{4044}$.

Ein Exponentenvergleich ergibt $2 + m = 4044$, also muss $m = 4042$ sein.

b) Es gilt

$$4^n + 4^n + 4^n + 4^n = 4 \cdot 4^n = 2^2 \cdot 2^{2n} = 2^{2+2n} = 2^{2022}.$$

Ein Exponentenvergleich ergibt hier $2 + 2n = 2022$, also $n = 1010$.

Aufgabe 1290: Maximaler Quader

Ein Quader mit Seitenlängen x, y, z und $x + y + z = 12$ soll so gewählt werden, dass sein Volumen möglichst groß ist. Finde die zugehörigen Seitenlängen.
(WJB)

Lösung:

Wir finden zunächst das x , das bei gegebenem y und $z = 12 - x - y$ das Volumen $V(x|y, z)$ maximal macht. Es ist $V(x|y, z) = xyz = xy(12 - x - y) = -x^2y + x(12y - y^2)$. Aus $0 = V'(x|y, z) = -2yx + (12y - y^2)$ ergibt sich $x = \frac{1}{2}(12 - y)$.^{*} Wir setzen dies in $V = xyz = xy(12 - x - y)$ ein und erhalten $\frac{1}{2}(12 - y)y(12 - y - \frac{1}{2}(12 - y)) = \frac{1}{4}(12 - y)^2y$ und maximieren jetzt als Funktion von y . Aus $0 = V'(y) = \frac{1}{2}(12 - y)y \cdot (-1) + \frac{1}{4}(12 - y)^2$ folgt wegen $y < 12$ und daher $12 - y > 0$, dass $0 = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}(12 - y) = 6 - \frac{2}{3}y$ mit Lösung $y = 4$, also $x = \frac{1}{2}(12 - 4) = 4$ und $z = 12 - xy = 4$.

Beim Quader mit dem maximalen Volumen handelt es sich also um den Würfel.

Aufgabe 1291: Rechteck im Rechteck

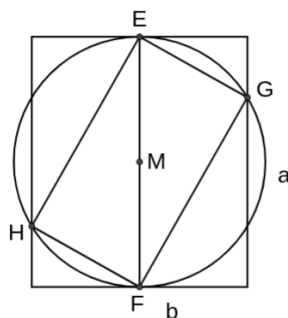
Zeichne ein äußeres Rechteck mit den Maßen $a = 10$ cm und $b = 14$ cm.

- Konstruiere ein inneres Rechteck so, dass die Eckpunkte des inneren Rechtecks auf den Seiten des äußeren Rechtecks liegen. Dabei soll der Flächeninhalt des inneren Rechtecks halb so groß sein wie der Flächeninhalt des äußeren Rechtecks.
- Welche Maße hat das innere Rechteck?

Lösung:

- E und F seien die Mittelpunkte der Strecke b , M sei der Mittelpunkt der Strecke EF . Ziehe einen (Thales)-Kreis um M mit $r = \frac{1}{2}EF$.
 G und H sind die zwei weiteren Punkte des inneren Rechtecks.

^{*} Die bei der Umformung nötige Division durch y ist dabei erlaubt, da $y < 0$ ist.



- b) c und d seien die Seitenlängen des inneren Rechtecks.

Dann gilt:

$$\text{I } c^2 + d^2 = 14^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

$$\text{II } c \cdot d = 70 \quad (\text{Flächeninhalt})$$

Durch Einsetzen und Substituieren ergibt sich:

$$c = \sqrt{98 - \sqrt{4704}} \approx 5,42 \text{ cm}$$

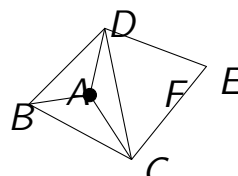
$$d = \sqrt{98 + \sqrt{4704}} \approx 12,91 \text{ cm}$$

Aufgabe 1292: Winkel zwischen Geraden

- Zeige: Sind in der Ebene sechs oder mehr Punkte gegeben, von denen je drei nicht auf einer Geraden liegen, so gibt es ein von drei dieser Punkte gebildetes Dreieck, dessen größter Winkel mindestens 120° beträgt.
- Zeige, dass die Behauptung aus Aufgabenteil a für fünf Punkte nicht gilt.
- Ist folgende Aussage richtig? Sind vier Geraden gegeben, von denen sich nicht drei in einem Punkt schneiden, so hat mindestens eines der von ihnen gebildeten Dreiecke einen Winkel von mindestens 120° . (WJB)

Lösung:

- Die Winkelsumme im Sechseck ist $720^\circ = 6 \cdot 120^\circ$. Die Aussage ist deshalb richtig, wenn sechs Punkte ein konvexes Sechseck bilden.
Ist die konvexe Hülle der Punkte ein Fünf-, Vier- oder Dreieck, so gibt es einen Punkt A , der im Inneren eines von drei der anderen Punkte B, C, D gebildeten Dreieck liegt, vergleiche nebenstehende Abbildung.



Die drei Winkel bei A ergänzen sich zu 360° , also erfüllt eines der Dreiecke ACD, DBA, BCA die Behauptung.

- Bilden die fünf Punkte ein regelmäßiges Fünfeck, so sind die größten auftretenden Winkel in den Ecken gleich $540^\circ : 5 = 108^\circ$.
- die vier Geraden haben genau sechs Schnittpunkte. Die Aussage folgt also aus Teil a) dieser Aufgabe.

Aufgabe 1293: Höhe im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit verschieden langen Katheten CA und CB ist die Höhe h aus dem Eckpunkt C stets kürzer als die halbe Hypotenuse.

Trifft das zu? (H.F.)

Lösung:

Der Punkt M sei der Mittelpunkt des Halbkreises von Thales mit dem Durchmesser AB . Dann gilt: $|MA| = |MB| = |MC|$.

Es sei F Fußpunkt der Höhe h . Dann ist die Hypotenuse CM im rechtwinkligen Dreieck CFM die längste Seite, das heißt $h = |CF| < |CM|$. q. e. d.

Aufgabe 1294: Kindergeburtstag

Anton und Berta sind Zwillinge und feiern ihren Geburtstag. Sie haben drei weitere Geschwisterpaare eingeladen.

- Für ein Spiel stehen 13 Stühle in einer Reihe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die acht Kinder auf dieser Stuhlreihe zu platzieren, wenn zwei Geschwisterkinder stets nebeneinandersitzen und die Kinder innerhalb eines Geschwisterpaares auch noch ihre Plätze tauschen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es unter den obigen Bedingungen, wenn die 13 Stühle im Kreis angeordnet sind?

(Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:

- Betrachten wir jede Zweiergruppe als *eine* Einheit, so ergeben sich insgesamt 9 Positionen, 5 Stühle (S) und vier mal eine Gruppe ($G_1 - G_4$). Eine mögliche Verteilung könnte z.B. so aussehen:

S	S	G_3	S	G_2	G_1	S	S	G_4
-----	-----	-------	-----	-------	-------	-----	-----	-------

E stellt sich also die Frage, wie viele verschiedene Reihenfolgen es hier gibt.**

Für die Anzahl dieser Permutationen gilt: $P = \frac{9!}{5!} = 3024$

Da nun innerhalb jeder Gruppe der Platz getauscht werden kann, gilt für die gesamte Anzahl der Möglichkeiten M :

$$M = \frac{9!}{5!} \cdot 2^4 = 48384$$

b)

$$M = \frac{8!}{5!} \cdot 2^4 = 5376^{***}$$

** Permutation mit Wiederholung

Aufgabe 1295: Größter gemeinsamer Teiler

Wie heißt der größte gemeinsame Teiler von $2a^3 + 3a$ und $2a^4 + 5a^2 + 1$, wobei a eine beliebige ganze Zahl ≥ 1 ist? (HF)

Lösung:

Vorweg: Wenn g ein gemeinsamer Teiler der ganzen Zahlen m und n ist, dann ist g auch ein gemeinsamer Teiler von $m - kn$ für jedes ganzzahlige k –denn aus $m = g \cdot m'$ und $n = g \cdot n'$ folgt $m - nk = g(m' - kn')$.

Annahme: Es sei g ein gemeinsamer Teiler von $X = 2a^3 + 3a$ und von $Y = 2a^4 + 5a^2 + 1$ –wir schreiben dafür kurz: $\frac{g}{X}$ und $\frac{g}{Y}$.

Aus $\frac{g}{Y}$ und $\frac{g}{X}$ folgt $\frac{g}{Y - aX}$, also $\frac{g}{2a^4 + 5a^2 + 1 - a(2a^3 + 3a)}$ sodass $\frac{g}{2a^2 + 1}$.

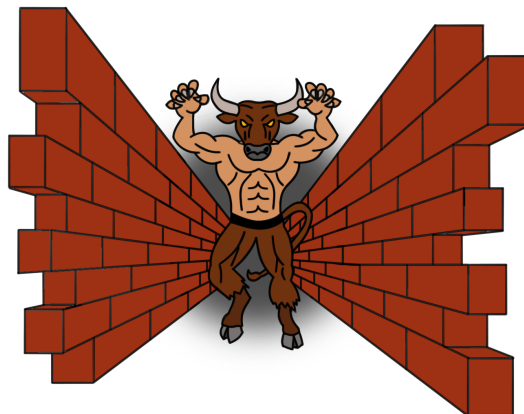
Aus $\frac{g}{X}$ und $\frac{g}{2a^2 + 1}$ ergibt sich: $\frac{g}{X - a(2a^2 + 1)}$, also $\frac{g}{2a}$.

Und schließlich erhält man aus $\frac{g}{2a^2 + 1}$ und $\frac{g}{2a}$ dass $\frac{g}{2a^2 + 1 - a(2a)}$ und somit $\frac{g}{1}$.

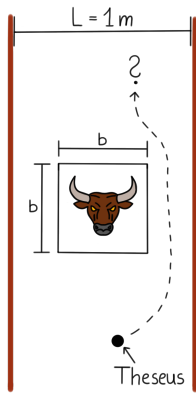
Folglich ist $g = 1$ der größte gemeinsame Teiler von $2a^3 + 3a$ und $2a^4 + 5a^2 + 1$ für jedes ganze ≥ 1 .

Mathematische Entdeckungen

Der Minotaurus im Gang



Theseus folgt im Labyrinth in Knossos einem (unendlich) langen geraden Gang. Plötzlich versperrt ihm der gefährliche Minotaurus den Weg. Wenn der Minotaurus Theseus berührt, ist es aus... Glücklicherweise läuft der Minotaurus nur halb so schnell wie Theseus. Schafft Theseus es, durch ein geschicktes Manöver an dem Minotaurus vorbeizukommen und seinen Weg fortzusetzen?



Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Minotaurus quadratisch ist mit Seitenlänge b . Das Quadrat ist mit zwei Seiten immer parallel zu den Wänden des Ganges ausgerichtet. Theseus hingegen ist punktförmig. Die Wände des Ganges sind parallel im Abstand $L = 1m$.

Betrachte folgende Szenarien (mit wachsendem Schwierigkeitsgrad):

- Der Minotaurus und Theseus dürfen sich zu jedem Zeitpunkt nur in eine der vier Richtungen links, rechts, oben, unten bewegen.
- Der Minotaurus darf sich nur in eine der vier Richtungen bewegen, aber Theseus darf auch schräg gehen.
- Der Minotaurus und Theseus dürfen beide auch schräg gehen.

Schafft Theseus es jeweils, am Minotaurus vorbeizukommen?

(AcK)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 31. August 2022 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 148

Im Heft 148 stellten wir euch folgende Aufgabe:

Sei $n = a_0 a_1 \dots a_k$ eine $(k + 1)$ -ziffrige Zahl.

n beschreibt sich selbst, wenn für jede ihrer Ziffern a_i gilt: Die Ziffer a_i gibt an, wie viele Ziffern i die Zahl n besitzt.

- Erkläre, warum eine sich selbst beschreibende Zahl höchstens 10-ziffrig ist.
- Erkläre, warum 1210 sich selbst beschreibt.
- Kann eine 10-ziffrige sich selbst beschreibende Zahl $a_0 \geq 7$ oder $a_0 \leq 5$ erfüllen?
- Bestimme alle 10-ziffrigen sich selbst beschreibenden Zahlen.
- Der neugierige Leser möge alle sich selbst beschreibenden Zahlen – oder wenigstens einige von ihnen – bestimmen.

(CHA)

Lösung

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt:

Paulina Herber
Josefine Keßner
Oscar Su

Alle stellen fest:

- a) Es gibt nur die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, also auch nur $a_0, \dots, a_9$.
- b) 1210 enthält genau eine 0, zweimal 1, eine 2 und keine 3.
- d) Die einzige 10-ziffrige sich selbst beschreibende Zahl ist 6210001000
- e) Die vollständige Liste lautet:
1210
2020
21200
3211000
42101000
521001000
6210001000

Zu c) beobachtet Josefine zunächst, dass die Quersumme der Anzahl Ziffern entsprechen muss, also $= 10$ ist.

Sie schließt $a_0 \geq 7$ wie folgt aus:

Aus $a_0 = 9$ würde $0 = a_1 = \dots = a_9$ folgen, im Widerspruch dazu, dass die Quersumme 10 betragen müsste.

Aus $a_0 = 8$ würde folgen: $a_8 = 1$ und die übrigen $a_i = 0$, was wiederum im Widerspruch zur Quersumme 10 stünde.

Aus $a_0 = 7$ würde folgen: $a_7 = 1$ und die übrigen $a_i = 0$ außer a_1 . Die Quersumme erzwingt $a_1 = 2$, im Widerspruch dazu, dass nur $a_7 = 1$ ist.

Paulina schließt $a_0 \leq 5$ wie folgt aus:

Aus $a_0 \leq 5$ folgt, es gibt höchstens 5-Mal die Ziffer 0. Also steht an mindestens 5 Stellen ein Eintrag $\neq 0$, es sind mindestens 5 verschiedene Ziffern von 1 bis 9 vorhanden. Addiert man die kleinsten 5 Ziffern, erhält man $1+2+3+4+5 = 15$, was wiederum größer als (statt gleich der) Quersumme ist. Widerspruch!

Die Aufgabe für den Computer-Fan

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOO
oo
tt
Sssssssssssssssssssss
MMMMMMMMMMmmmmmm
pppppppppppp
KKkkkkk
Ffffff
hhhhh
rrrr
lll
gg
zz
b
c

Welches Gedicht haben wir hier für Euch aufgeräumt?

Der Schweizer Künstler Ursus Wehrli hat sich einen Namen gemacht durch sein Projekt „Kunst aufräumen“, bei dem er beispielsweise bekannte Gemälde *auf-räumt*: In vielen dieser aufgeräumten Werke sind die dargestellten Gegenstände nach Größe, Farbe oder Form sortiert aufgestapelt, so dass das ursprüngliche Bild kaum noch zu erahnen ist. Eine kleine Internet-Suche liefert sehr amüsante Bilder.

Während aufgeschlossene Kunstlehrer mittlerweile ihre Klassen nach dem selben Schema Gemälde aufräumen lassen, ist diese Kunstform in der Lyrik noch sträflich vernachlässigt worden. Erkennt Ihr das Gedicht, das wir hier für Euch aufgeräumt haben? So viele unterschiedliche Vokale kommen ja nicht drin vor... In unserer aktuellen Aufgabe für den Computerfan fordern wir Euch auf, ein Programm zu schreiben, das Gedichte aufräumt und so darstellt, wie im Beispiel. Etwas genauer soll das Programm folgendes tun:

- Als Eingabe erhält das Programm einen Text eines Gedichtes, am besten mit allen Leerzeichen, Satzzeichen, Zeilenumbrüchen. So lässt es sich am einfachsten aus den üblichen Quellen herauskopieren.
- Als Ausgabe gibt das Programm einen Text aus nach folgenden Regeln.
 - In der ersten Zeile ist der häufigste Buchstabe des Textes zu finden, und zwar so oft, wie er im Text vorkommt.

- Zuerst werden zu jedem Buchstaben die Großbuchstaben ausgegeben (entsprechend ihrer Anzahl) und dann die Kleinbuchstaben, also z. B. EEEeeeeee, wenn in dem Text drei große E und sechs kleine e auftauchen.
- Bei Gleichstand gilt die alphabetische Reihenfolge aäbcbdefghijklmnoöp- qrsßtuüvwxyz.
- Die Umlaute ä, ö und ü und die Ligatur ß gelten als eigenständige Buchstaben.
- Leerzeichen werden nicht ausgegeben.
- Satzzeichen haben wir nicht mit ausgegeben

Neben dem Programm reicht Ihr bitte zusätzlich eine aufgeräumte Fassung von Goethes Erlkönig mit ein. Den Text findet Ihr z. B. auf Wikipedia.

Als Zusatznutzen habt Ihr gleich ein Projekt für den Kunst- oder Deutschunterricht erledigt. Ein paar interessante Interpretationen Eures Werkes als Kritik am Poststrukturalismus der Gegenwartskunst fallen Euch bestimmt dazu ein. :-)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2022 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 148

In Heft 148 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Lampen

Im Mathematikum in Gießen gibt es ein Ausstellungsstück, das aus einem großen Holzkreis besteht, auf dem sieben Lampen im Kreis angebracht sind. Vor jeder Lampe ist ein Tastschalter, der den Schaltzustand der zugehörigen Lampe *und ihres linken und rechten Nachbarn* umkehrt: Ist die Lampe eingeschaltet, so geht sie aus; ist sie ausgeschaltet, so geht sie an. Ebenso die beiden Lampen links und rechts. Wird eine Taste zweimal gedrückt, so haben alle Lampen wieder den Zustand wie zuvor.

Die Besucher haben nun die Aufgabe, bei einer beliebigen Schaltstellung aller sieben Lampen die Tastschalter zu drücken, bis alle Lampen wieder aus sind.

- a) Zeige mit Hilfe eines Computerprogramms, dass dies für jede Schaltstellung geht und gib eine Funktion an, die zu einer Schaltstellung die Knöpfe angibt, die gedrückt werden müssen.

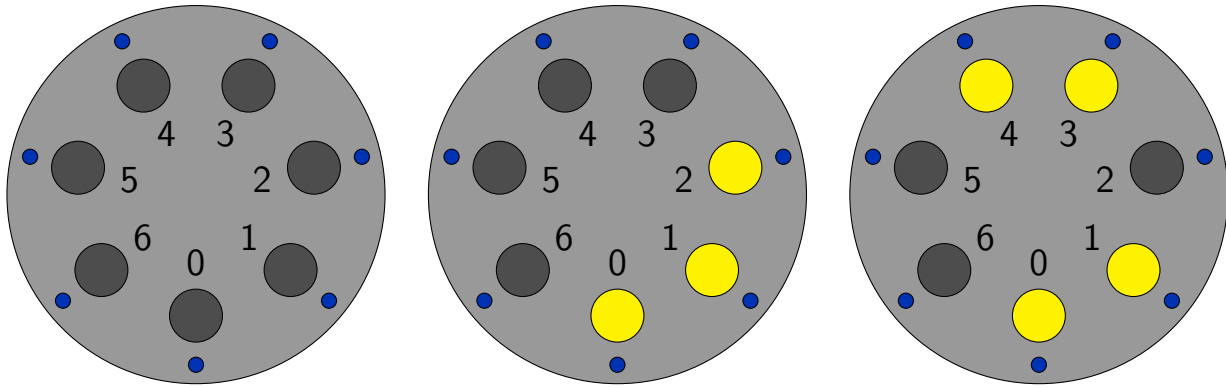


Abbildung 1: Links: Grundstellung, alle Lampen sind aus. Mitte: Der Knopf 1 wurde gedrückt und die Lampen 0, 1 und 2 sind an. Rechts: Die Knöpfe 1 und 3 wurden gedrückt und die Lampen 0, 1, 3 und 4 sind an.

- b) Betrachten wir nun eine Abwandlung, bei der wir sechs statt sieben Lampen und Tastschalter haben. Man finde mit Hilfe eines Computerprogramms eine Schaltstellung, von der aus wir *nicht* alle Lampen ausschalten können.
- c) Wie viele solcher „unmöglichen“ Schaltstellungen gibt es, wenn wir $n = 3, 4, \dots, 12$ Lampen haben?

Hinweis: Eine Schaltstellung kann durch eine Folge $s = (s_0, s_1, s_3, s_4, s_5, s_6)$ mit $s_i \in \{0, 1\}$ kodiert werden, wobei $s_i = 1$ heißt, dass die Lampe mit der Nummer i an ist und $s_i = 0$, dass sie aus ist. Die Tasten, die gedrückt werden müssen, können ebenso durch $t = (t_0, \dots, t_6)$, $t_i \in \{0, 1\}$ kodiert werden, wobei $t_i = 0$ heißt, dass Taste i nicht gedrückt wurde und $t_i = 1$, dass sie gedrückt wurde. Auf die Reihenfolge, in der die Tasten gedrückt werden, kommt es nicht an. Deshalb hat auch das, sagen wir, fünffache Drücken von Taste i dasselbe Ergebnis, wie das dreifache oder einfache Drücken von Taste i . Es reicht also zu notieren, *ob* Taste i gedrückt wird. Insgesamt suchen wir also für jedes s dasjenige t , sodass alle Lampen aus sind.

Eine Simulation des Spiels: <https://scratch.mit.edu/projects/618668754>. (Ack)

Lösung

```
def neue_stellung(s,t):
    # In Schaltstellung s werden die Tasten t gedrueckt.
    # Die neue Schaltstellung wird zurueckgegeben
    anzahl=len(s) # Anzahl der Lampen
    r=s[:]        # Eine Kopie von s wird angelegt.
    for i in range(0,anzahl):
        if t[i]==1: # fuer jeden gedruckten Taster werden
                    # drei Lampen geschaltet
            r[i]=1-r[i]
            r[(i-1)%anzahl]=1-r[(i-1)%anzahl]
            r[(i+1)%anzahl]=1-r[(i+1)%anzahl]
    return(r) # Die neue Stellung wird zurueckgegeben

def tasten_zu_stellung(s):
    # Zur Schaltstellung s wird die Liste der Tasten
    # zurueckgegeben. Die Liste ist leer, falls
```

```

# die Taststellung unmöglich ist.
# Es werden alle Taststellungen ausprobiert und die gefundenen
# Loesungen zu einer Liste zusammengefuegt.
# Dies wird rekursiv gemacht in der Funktion t_z_s
def t_z_s(s,t):
    if len(t)<len(s): # noch nicht alle Tasterstellungen festgelegt
        # Listen der Loesungen zusammenfuegen
        return(t_z_s(s,t+[0])+t_z_s(s,t+[1]))
    if neue_stellung(s,t)==[0]*len(s):
        # Loesung t gefunden, als Liste zurueckgeben
        return([t])
    return([]) # t ist keine Loesung, leere Liste zurueck

return(t_z_s(s,[]))

def unmögliche_stellungen(anzahl):
    # Erstellt Liste der Schaltstellungen, die nicht
    # auf "alle aus" gebracht werden koennen
    def probiere(s,anzahl_lampen):
        if len(s)<anzahl_lampen:
            return(probiere(s+[0],anzahl)+probiere(s+[1],anzahl))
        if tasten_zu_stellung(s)==[]:
            return([s])
        return([])
    return(probiere([],anzahl))

>>> unmögliche_stellungen(6)
[[0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 1],
 [0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 0],
 [0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 0, 1, 1],
 [0, 0, 1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1, 1, 0],
 [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 1, 0],
 [0, 1, 0, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1, 1, 0], [0, 1, 0, 1, 1, 1],
 [0, 1, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0, 1, 0],
 [0, 1, 1, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 1, 1, 0], [0, 1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 0, 1, 0],
 [1, 0, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1, 1, 1],
 [1, 0, 1, 0, 0, 0], [1, 0, 1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 0, 1, 0],
 [1, 0, 1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 0, 0, 1, 0], [1, 1, 0, 0, 1, 1],
 [1, 1, 0, 1, 0, 0], [1, 1, 0, 1, 0, 1], [1, 1, 0, 1, 1, 0],
 [1, 1, 1, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0, 1, 0], [1, 1, 1, 0, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 0]]

>>> for i in range(3,13):
    print(i,len(unmögliche_stellungen(i)))
3 6
4 0
5 0
6 48
7 0
8 0
9 384
10 0
11 0
12 3072

```

Auf Euklids Spuren

von Hartwig Fuchs

Euklid (um 300 v.Chr.), einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike, hat einen grundlegenden Satz über Primzahlen in einer bewundernswert elementaren Weise bewiesen.

(1) *Der Primzahl-Satz des Euklid*

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Euklids Beweis geht von der simplen Tatsache aus:

- (2) Es sei $n = a + b$ mit teilerfremden Zahlen* a und b . Wenn a durch eine Zahl $t > 1$ teilbar ist, so ist b und damit auch n nicht durch t teilbar.

Euklid macht nun die *Annahme*: Es gibt eine größte Primzahl p .

Für das Produkt $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$ aller Primzahlen $\leq p$ gilt dann: $n + 1$ ist durch keine der Primzahlen $\leq p$ teilbar. Folglich ist $n + 1$ nicht prim und daher durch eine Primzahl $\leq p$ teilbar – ein Widerspruch – oder $n + 1$ ist eine Primzahl, was wegen $n + 1 > p$ einen Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität von p darstellt. Damit ist die Annahme falsch und es gilt (1).

Euklids Primzahlsatz enthält keinerlei Information darüber, wie die Primzahlen in der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen verteilt sind – wobei es doch für Zahlentheoretiker sehr wichtig ist, zu wissen:

- Gibt es unterhalb einer vorgegebenen Schranke viele oder wenige Primzahlen. Genauer: Wie viele sind es (quantitativer Aspekt der Verteilung)?
- Gibt es Regeln, nach denen Primzahlen in $\mathbb{N}$ lokalisierbar sind (struktureller Aspekt der Verteilung)?

Beide Fragen waren über 2000 Jahre lang ungelöste Probleme in der Mathematik, ohne dass man auch nur einen Ansatz zu ihrer Lösung finden konnte.

Erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts entdeckten A. M. Legendre (1752–1833) und der erst 15-Jährige** C. F. Gauss (1777–1855) eine mögliche quantitative Eigenschaft der Primzahl-Verteilung, die C. La Vallée-Poussin (1866–1962) und J. Hadamard (1865–1963) im Jahr 1896 tatsächlich nachweisen konnten.

Der Primzahl-Satz von Legendre und Gauss

* "Zahl" bedeutet im Folgenden stets "natürliche Zahl"

** Dies ist durch einen Brief von Gauß an den Astronomen Enke im Jahr 1849 belegt.

- (3) Für die Anzahl $\pi(x)$ aller Primzahlen $\leq x$ gilt näherungsweise: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$, später von Gauß deutlich verbessert zu $\pi(x) \approx \int_2^x \frac{du}{\ln u}$.

Beispiel: Wie gut sind die beiden Näherungsformeln für $\pi(x)$?

Es sei $d(x) = \pi(x) - \frac{x}{\ln x}$ und $D(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\ln u}$

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$d(x)$	$\int_2^x \frac{du}{\ln u}$	$D(x)$
10^3	168	144	24	178	10
10^4	1229	1085	144	1246	17
10^5	9592	8685	907	9630	38
10^6	78498	72382	6216	78628	130

Legendre hat als Ergebnis seiner Untersuchung der Primzahl-Verteilung in N neben deren quantitativer Eigenschaft (3) auch eine arithmetische Struktur entdeckt.

Dazu vorweg ein Beispiel: Primzahlen in einer *arithmetischen Folge****

- (4) Es sei A die arithmetische Folge $(7, 11, 15, 19, \dots)$. Dann gilt: In der Folge A gibt es unendlich viele Primzahlen.

Mit einer Modifikation von Euklids Argumenten beim Beweis von (2) lässt sich (4) leicht herleiten.

Annahme: In A gibt es nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_e$, wobei p_e die größte sei.

Jede Zahl aus A ist von der Form $k \cdot 4 + 3$ – und umgekehrt ist jede Zahl der Form $k \cdot 4 + 3$ in A . Für die Zahl $n = 4p_1p_2 \cdots p_e + 3$ gilt daher:

$n \in A$ und n ist nicht prim wegen $n > p_e$.

Nach dem Fundamentalsatz der Zahlentheorie**** ist n als ein Produkt darstellbar, in dem nur einige oder alle Primzahlen p_i $i = 1, 2, \dots, e$, einfach oder mehrfach als Faktoren vorkommen. Da jedoch 3 und jedes p_i wegen $p_i \geq 7$ jeweils teilerfremd sind und $4p_1p_2 \cdots p_e$ durch jedes p_i teilbar ist, folgt aus (2), dass n durch kein p_i teilbar ist – ein Widerspruch.

Die Annahme ist somit falsch – es gilt (4).

Legendre hat vermutet, dass eine Aussage wie (4) nur ein Sonderfall eines für fast jede arithmetische Folge gültigen Satzes ist – eine Vermutung, die 1837/1839 von J.P.C. Dirichlet (1805 - 1859) bewiesen wurde.

*** Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \dots$ heißt arithmetisch, wenn für jedes $k, k \geq 0$: $a_k = ka + b, a > 1, b \geq 0$

**** Dieser Satz besagt: jede Zahl $n > 1$ ist als ein Primzahl-Produkt darstellbar und diese Darstellung ist – abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren – eindeutig

Der Primzahl-Satz von Dirichlet

- (5) Für jede arithmetische Folge $A = (k \cdot a + b)$ mit teilerfremden Zahlen $a > 1$ und $b \geq 1$ gilt: In A gibt es unendlich viele Primzahlen.

Jedoch: Keine arithmetische Folge enthält alle Primzahlen.

So etwa kommt in der Folge $(k \cdot 4 + 1)$ keine Primzahl der Form $k \cdot 4 + 3$ vor. Man kann jedoch Paare, Tripel usw. von arithmetischen Folgen angeben, auf die sämtliche Primzahlen mit eventuell endlich vielen Ausnahmen verteilt sind.

Beispiel:

Jede Primzahl $\neq 2, 3, 5$ befindet sich in einer der arithmetischen Folgen $(k \cdot 6 + 1)$ oder $(k \cdot 6 + 5)$.

Nachweis des Beispiels:

Jede Zahl $n \geq 6$ hat genau eine der Formen $n = 6 \cdot k + i$ mit $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Als Primzahlen kommen $n = k \cdot 6$, $n = k \cdot 6 + 2$, $n = k \cdot 6 + 3$ und $k \cdot 6 + 4$ nicht in Frage.

Jede Primzahl > 5 hat also die Form $k \cdot 6 + 1$ oder $k \cdot 6 + 5$.

Die Aussage (5) enthält keinerlei Hinweise auf die Verteilung der in einer arithmetischen Folge***** enthaltenen Primzahlen – tatsächlich hat man dafür bisher noch keine Regel entdeckt.

Beispiel:

Eine Zahl $k \cdot 12 + 5$ bezeichnen wir mit p , falls sie prim ist und mit n , wenn sie nicht prim ist für die unregelmäßige Primzahl-Verteilung in der Folge $(k \cdot 12 + 5)$.

$k \cdot 12 + 5$	17	29	41	53	65	77	89	101	113
p oder n ?	p	p	p	p	n	n	p	p	p
$k \cdot 12 + 5$	125	137	149	161	173	185	197	...	
p oder n ?	n	p	p	n	p	n	p	...	

Die Regellosigkeit der Primzahl-Verteilung, die sich bei der Folge $(k \cdot 12 + 5)$ andeutet und die man auch bei jeder anderen arithmetischen Folge antrifft, ist nicht durchgehend – sie wird inselhaft von Serien mit einer bestimmten Anzahl L , mit $L \geq 2$, aufeinander folgenden Primzahlen – unterbrochen. So kommen in der Folge $(k \cdot 12 + 5)$ bereits bei $k \cdot 12 + 5 \leq 197$, eine Primzahl-Serie der Länge $L = 2$, $L = 3$ und $L = 4$ vor.

Das führt zu einer interessanten Frage: Gibt es zu jeder Zahl $L \geq 2$ eine arithmetische Folge, die eine Primzahl-Serie der Länge L besitzt?

***** Im Folgenden ist damit eine Folge $(k \cdot a + b)$ mit teilerfremden a und b gemeint.

Zu Beginn des 21. Jahrhunderts lösten B. Greene und T. Tao das Problem, wobei sie allerdings weitaus mehr bewiesen, nämlich:

Der Satz von Greene und Tao

(6) Zu jeder Zahl $L \geq 2$ gibt es unendlich viele Primzahl-Serien der Länge L .

Beispiel: Einige Primzahl-Serien der Länge $L = 3$:

Folge $(ka + b)$	$(k \cdot 2 + 1)$	$(k \cdot 4 + 3)$	$(k \cdot 6 + 1)$	$(k \cdot 10 + 3)$
Primzahl-Serie	3, 5, 7	3, 7, 11	7, 13, 19	3, 13, 23
Folge $(ka + b)$	$(k \cdot 24 + 19)$	$\dots$		
Primzahl-Serie	19, 43, 67	$\dots$		

Mit (6) ist gezeigt, dass es im Verteilungsmuster der Primzahlen lokale Regelmäßigkeiten, nämlich Primzahl-Serien, gibt. Lassen sich eventuell noch weitere Strukturen finden, wenn man andere, also nicht arithmetische Folgen betrachtet?

Dieser Frage ist J. Bertrand (1822–1900) nachgegangen. Er betrachtete die geometrischen Folgen $(2^n \cdot a)$ der Zahlen $a, 2 \cdot a, 2^2 \cdot a, \dots$ mit $a \geq 1$. Dabei gelangte er zu der Vermutung, die man später das “Postulat von Bertrand” nannte:

(7) Zwischen jeden zwei Gliedern $2^m \cdot a$ und $2^{m+1} \cdot a$ einer Folge $(2^k \cdot a)$ gibt es stets eine Primzahl.

Setzt man $2^m \cdot a = n$, dann lautet (7) in einer griffigen Formulierung:

Satz von Tschebyscheff

(8) Zwischen den Zahlen n und $2n$ gibt es stets eine Primzahl, sobald $n \geq 2$ ist.

P. Tschebyscheff (1821–1894) hat 1852 den Satz (8) bewiesen. Man kann ihn leicht herleiten, wenn man die nicht elementar beweisbare Aussage (9) voraussetzt.

(9) Für jedes Paar (p_r, p_{r+1}) benachbarter Elemente aus der nach wachsender Größe geordneten Folge $p_1, p_2, p_3, \dots$ der Primzahlen gilt: $p_{r+1} < 2p_r$.

Nachweis von (8): Wenn p_r die größte Primzahl $p_r \leq n$ für ein $n \geq 2$ ist, dann ist $n < p_{r+1}$. Mit der Voraussetzung (9) und $2p_r \leq 2n$ folgt daraus:

$$n < p_{r+1} < 2p_r \leq 2n. \text{ Also gilt (8).}$$

Tschebyscheff und Andere konnten später sogar zeigen, dass Satz (8) auch dann noch gilt, wenn man in (7) die Zahl $2n$ durch $(1 + d) \cdot 2$, $d > 0$ beliebig klein, ersetzt, falls n eine von d abhängige Mindestgröße besitzt.

Durch diese Verallgemeinerung des Satzes von Tschebyscheff ist das Potential der geometrischen Folgen, mit ihnen weitere Strukturen in der Verteilung der Primzahlen zu finden, erschöpft.

Um hier eventuell weiter zu kommen, hat man auch andere, nicht geometrische Folgen, betrachtet, insbesondere die Folge der Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \dots$. Für die letzte Folge hat man versucht nachzuweisen:

(10) Zwischen zwei Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$, $n \geq 1$, gibt es stets eine Primzahl.

Man hat zwar bisher kein Intervall $(n^2, (n+1)^2)$ ohne eine Primzahl gefunden – aber einen Beweis für (10) gibt es (noch) nicht.

Weitere Strukturen in der Primzahl-Verteilung zu finden scheint ein hartes mathematisches Problem zu sein – vermutlich werden sie nicht so elementar sein wie die lokalen Muster (5), (6), (8).

Kurz und schmerzlos Logarithmus einer natürlichen Zahl von Hartwig Fuchs

Eine Lösung x der Gleichung $10^x = c$, c eine positive reelle Zahl, nennt man den Logarithmus von c zur Basis 10 – in Zeichen*: $x = \log c$.

Falls c eine rationale Potenz von 10 ist, dann ist auch $\log c$ eine rationale Zahl. Sei nämlich $c = 10^{\frac{a}{b}}$, a und b positive ganze Zahlen, dann folgt $x = \frac{a}{b}$ aus $10^x = 10^{\frac{a}{b}}$ so dass gilt: $\log c = \frac{a}{b}$ ist also rational.

Für jedes andere c dagegen ist $\log c$ eine Irrationalzahl. Das lässt sich leicht herleiten für den Fall, dass c eine natürliche Zahl, jedoch keine Potenz von 10 ist. Es gilt nämlich:

Ist c eine natürliche Zahl, die keine positive ganze Potenz von 10 ist, dann ist $\log c$ eine Irrationalzahl.

Zum *Beweis* der Behauptung machen wir die Annahme: Es sei $\log c = \frac{a}{b}$ mit natürlichen Zahlen a und b und c keine Potenz von 10.

Dann ist $10^{\frac{a}{b}} = c$.

Wir schreiben nun $c = 2^u \cdot 5^v \cdot d$ mit ganzen Zahlen $u \geq 0$, $v \geq 0$, $d \geq 1$ und d teilerfremd mit 2 und 5. Damit ist $10^a = c^b = 2^{ub} \cdot 5^{vb} \cdot d^b$.

Ist $d \neq 1$, dann ist d ein Teiler von $10^a = 2^a \cdot 5^a$ – ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von d , 2 und 5.

Sei also $d = 1$. Aus $10^a = 2^a \cdot 5^a = 2^{ub} \cdot 5^{vb}$ folgt durch Vergleich der Exponenten $a = ub$ und $a = vb$, so dass $u = v$ ist. Dann aber ist $2^{ub} 5^{vb} = (2 \cdot 5)^{ub}$ eine ganze Potenz von 10 – im Widerspruch zur Annahme.

Diese ist somit falsch und deshalb gilt die Behauptung.

* Sind mehrere Basen im Spiel, zum Beispiel 10 und 2, so schreibt man deutlicher $\log_{10} c$ und $\log_2 c$ usw.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 147

Altötting, Staatliche Berufsschule:

Kl. 10: Lena Baumgartner 12.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 9: Oscar Su 68,5;

Kl. 12: Lukas Born 22.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:

Kl. 6: Yousef Mehana 3,5;

Kl. 7: Linus Saloch 11,5, Mika Schäfer 31, Hagen Hohbein 9.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:

Kl. 8: Philippos Dimitriou 39.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:

Kl. 5: Felix Lang 3, Julia Hans 4, Nina Petry 4;

Kl. 11: Therese Horstkötter 4.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:

Kl. 5: Jabir Aouzi 16;

Kl. 8: Sarah Markhof 14, Mark Garkuscha 8.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:

Kl. 11: Pascal Bohlinger 23,5.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 7: Victor Mayer 9;

Kl. 12: Raphael Mayer 11;

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:

Kl. 9: Jona Richartz 6.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:

Kl. 12: Salvatore Ippolito 24;

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 7: Jasmin Borrmann 19;

Kl. 8: Dóra Emilia Mézáros 22, Louisa Lukowiak 10,5;

Kl. 9: Emilie Borrmann 16,5;

Kl. 12: Kathrin Borrmann 31,5, Josephine Kaßner 22, Paulina Herber 37.

Schrobenhausen, Gymnasium

Kl. 8: Luca Sindel 28.

Simbach am Inn, Tassilo-Gymnasium:

Kl. 8: Alexander Koblbauer 26.

Tangermünde, Diesterweggymnasium:

Kl. 7: Mai Linh Dang 22;

Kl. 10: Tu Sam Dang 31,5;

Kl. 12: Miriam Büttner 46.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:

Kl. 10: Philipp Lörcks 48.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:

Kl. 8: Marie Baumgartner 8,5.

Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:

Kl. 8: Greta Waldmüller 23.

Mainzer Mathe-Akademie

28. September – 2. Oktober 2022

Bei der Mainzer Mathematik-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathematik-Akademie anzumelden, die vom 28. September bis 2. Oktober an der Universität Mainz stattfindet.

Ein genauerer Programmplan kann rechtzeitig auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Voraussichtlich wird die MMA unter 2G-plus-Regel (also geimpft oder genesen plus Test) stattfinden.

Unterbringung

Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:

<https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/>

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2022/23 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).

Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:

www.facebook.com/monoid.matheblatt

www.facebook.com/monoid.redaktion

www.instagram.com/monoid.matheblatt

Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.

Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite

<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/>.

(MG)

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Silke Schneider

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe

Zusammenstellung und Satz: Alina Gehlhaar

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub

Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)

Inhalt

Ein Zwei-Würfel-Problem	3
Aus den Archiven	4
Was uns über den Weg gelaufen ist	4
Beweis ohne Worte	5
Hartwig Fuchs: Warum die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen gezählt wird	5
Spiegeleien	7
M. Mattheis: Zu Besuch bei Galileo Galilei	11
H. Sewerin: Das Denkerchen	14
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	15
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 149	17
Neue Mathespielereien	21
Neue Aufgaben	23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 149	25
Mathematische Entdeckungen	29
Die Aufgabe für den Computer-Fan	32
Auf Euklids Spuren	36
Hartwig Fuchs: Kurz und schmerzlos – Logarithmus einer natürlichen Zahl	40
Rubrik der Löser und Löserinnen	41
Einladung zur Mainzer Mathematik-Akademie 2022	42
Mitteilungen	43
Redaktion	43
Impressum	44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>