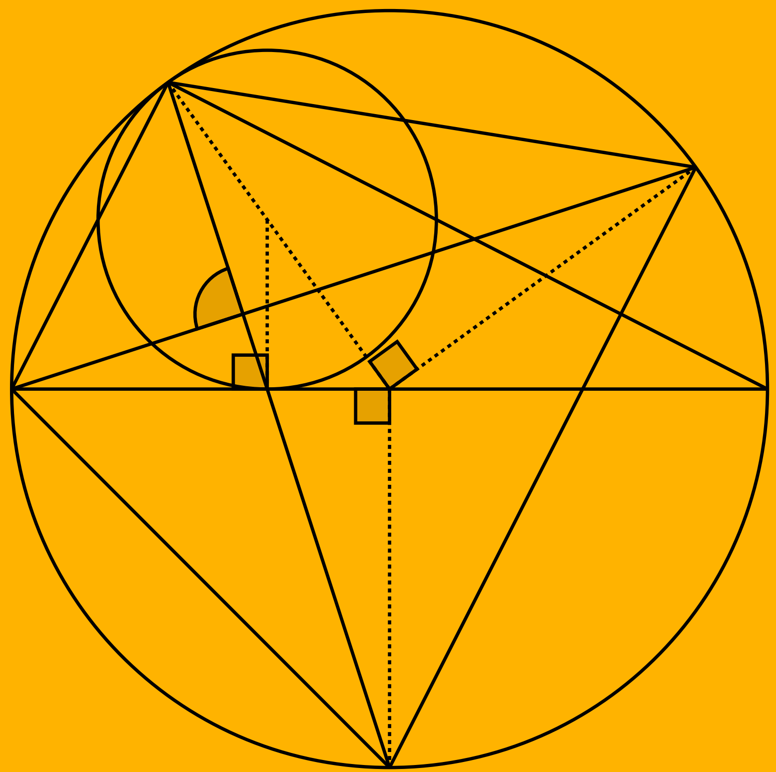
Jahrgang 45 Heft 161 Mär. 2025

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Mai 2025.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Was uns über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

$$2+3+5+7+11+13+17+19+23=100$$

Eine kleine Lügelei

von Hartwig Fuchs

A sagt: „B lügt immer."
B sagt: „C lügt immer."
C sagt: „A und B lügen immer."
Wer also lügt und wer sagt die Wahrheit?
Eine Lösung findet sich auf Seite 5.

Was uns über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

Die Summe von A. Martin, die er 1888 entdeckte:*

(1) $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 24^2 = 70^2$.

Man erhält Martin's Summe aus der Formel $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ – Beweis durch vollständige Induktion – wenn man $n = 24$ setzt. Es ist uns nicht bekannt, ob es noch weitere Summen vom Typ S_2, also Summen $1^2 + 2^2 + 3^3 + ... + n^2 = m^2$ mit $n > 24$ gibt.

Dagegen ist jede Summe $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ mit $n = 1, 2, 3, ...$ eine Quadratzahl. Der Zahlentheoretiker E. Lucas (1842 - 1888) hat 1876 gezeigt:

(2) $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$, $n = 1, 2, 3, ...$

Ein Nachweis von (2) ergibt sich unmittelbar aus den Formeln, die man durch vollständige Induktion beweist:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Die Frage, was man über Summen $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k = m^p$, $k \geq 3$ und $p \geq 2$ aussagen kann, führt tief in die Zahlentheorie, sodass wir ihr nicht nachgehen können.**

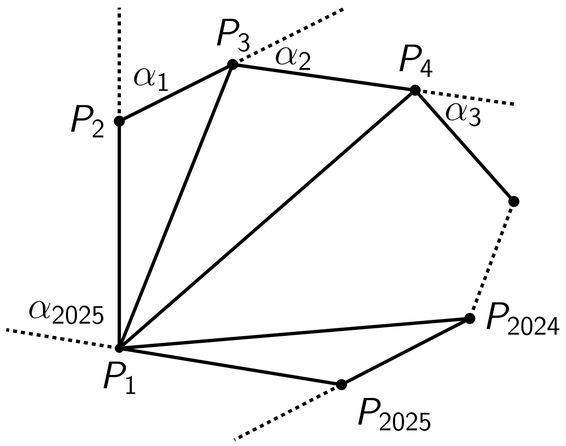
* vgl. L. E. Dickson: History of the theory of numbers, II, S. 321

** vgl. Zentralblatt für Mathematik 71, S. 37.

Eine mathematische Miniatur

von Hartwig Fuchs

Ein geschlossener Winkelzug mit n Ecken $P_1, P_2, \dots, P_n$, $n \geq 3$, bildet den Rand eines konvexen n-Ecks, wenn dessen sämtliche Innenwinkel kleiner als $180°$ sind.



Für ein konvexes 2025-Eck gilt: Die Summe seiner Innenwinkel beträgt $364140°$. Man sieht dies, wenn man das 2025-Eck in die 2023 Dreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, ..., $P_{2024}P_{2025}P_1$ zerlegt. Die Summe der Innenwinkel dieser Dreiecke beträgt $2023 \cdot 180° = 364140°$ und das ist die Innenwinkelsumme des 2025 Ecks. Wie groß ist nun die Summe der in der Figur angegebenen Außenwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2025}$ des 2025-Ecks?

Eine Lösung ohne jede Rechnung

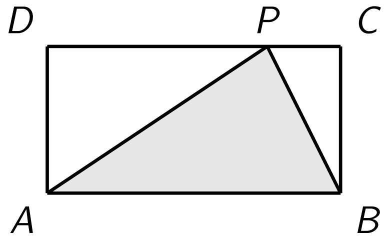
Ein Wanderer umrundet von einer beliebigen Ecke P_i aus das 2025-Eck. Jedes Mal, wenn er dabei zur nächsten Ecke gelangt, macht er eine Drehung in die Geh-Richtung – das gilt auch für die Startecke P_i.

Wenn er sich also in P_i zum letzten Mal dreht, dann hat er sich bei seiner Rundtour insgesamt um $360°$ gedreht – und dies ist die gesuchte Winkelsumme.

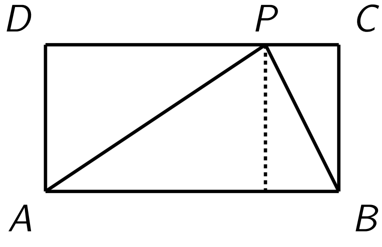
Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

In einem Rechteck $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt der Seite CD. Dann gilt: Die Fläche des Dreiecks PAB ist halb so groß wie die Fläche des Rechtecks $ABCD$.

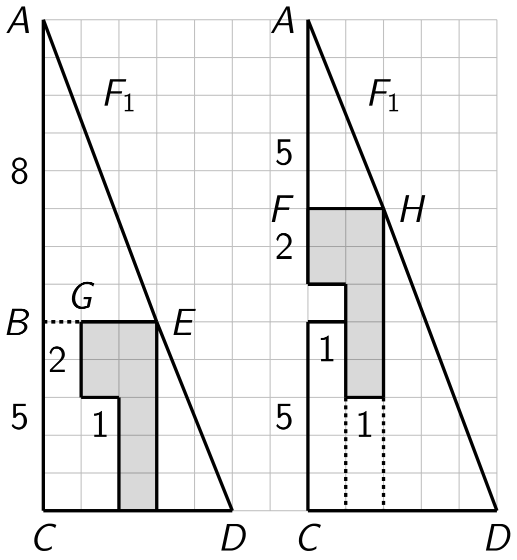


Beweis



Das verschwundene Kästchen

von Hartwig Fuchs



Verschiebt man das schwarze Sechseck wie im Dreieck F_1 so, dass sich die Figur F_2 ergibt, dann sieht man:
Obgleich die Dreiecke ACD kongruent und ebenso die beiden schwarzen Sechsecke deckungsgleich sind, unterscheiden sich die Flächen innerhalb von F_1 und F_2 um die Fläche 1 des 1×1-Quadrates in F_2. Wie erklärst du diesen Widerspruch?

Ein Kästchen hat die Seitenlänge 1

Lösung

In F_1 gilt: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1+|GE|}{|CD|}$ und daher $\frac{8}{13} = \frac{1+|GE|}{5}$,
woraus $|GE| = \frac{27}{13}$ folgt.
In F_2 gilt: $\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|FH|}{|CD|}$ und daher $\frac{5}{13} = \frac{|FH|}{5}$,
woraus $|FH| = \frac{25}{13}$ folgt.
Das markierte Sechseck in F_1 hat die Fläche $|GE| \cdot 5 - 1 \cdot 3 = \frac{96}{13}$, das markierte Sechseck in F_2 besitzt die Fläche $|FH| \cdot 5 - 1 \cdot 3 = \frac{86}{13}$. Die Differenz dieser Flächen ist $\frac{10}{13}$. Die markierten Sechsecke in F_1 und F_2 sind also keineswegs kongruent wie in der Aufgabenstellung behauptet wurde – sie können daher auch nicht durch eine Parrallelverschiebung auseinander hervorgegangen sein. Die Voraussetzungen sind somit falsch. Und aus falschen Voraussetzungen lässt sich immer ein Widerspruch herleiten.

Lösung der kleinen Lügelei von Seite 3

Annahme: (1) C lügt nicht.
Dann ist B ein Lügner. Aus (1) folgt auch, dass A ein Lügner ist und dass daher B nicht lügt – ein Widerspruch.
Die Annahme ist somit falsch. Also gilt (2) C ist ein Lügner. (2) ist aber nur dann zutreffend, wenn gilt: (3) B ist kein Lügner. Und (3) gilt deshalb, weil A ein Lügner ist.
Also: A und C sind Lügner und B sagt die Wahrheit.

Minus mal Minus ist Plus

von Hartwig Fuchs

In der Schule lernt man die arithmetische Rechenregel: „minus mal minus gleich plus“. Mathematisch formuliert lautet sie:
Für reelle nicht negative Zahlen a, b gilt: $(-a)(-b) = ab$.
Wie lässt sich diese Regel begründen? Hier kommt „Ockhams Rasiermesser“ ins Spiel.
William Ockham (vor 1300 bis um 1349/50), ein bedeutender mittelalterlicher Logiker, ist neben vielen anderen auch der damals vermutlich erstmals gestellten Frage nachgegangen, unter welchen Prinzipien man eine Wissenschaft betreiben sollte. Eine wichtige Bedingung, die er genannt hat und die man als sein „Rasiermesser“ bezeichnet, besagt (in heutiger Formulierung):
Hat man zu einer wissenschaftlichen Untersuchung mehrere mögliche Zugänge, so sollte man den einfachsten Weg wählen, der die wenigsten Mittel benötigt.
Um Ockhams Forderung bei der Fragestellung des Wertes eines Produkts $(-a) \cdot (-b)$ nachzukommen, geht man von den naheliegenden und nur auf Altbekannten basierenden Voraussetzungen aus:
Die Rechenregeln der Arithmetik für positive Zahlen, einschließlich der Null, gelten auch für die negativen Zahlen. Setzt man dies voraus so gilt:

(0) $a + (-a) = 0$ und $0 \cdot (-a) = 0$

Mit (0) erhält man die Regeln für Multiplikationen mit negativen Faktoren. Ihre Beweise sind kurz und einfach.

(1) $(+a)(-b) = -(ab)$, wobei man statt $-(ab)$ kürzer $-ab$ schreibt.
Nachweis mit (0):
$(+a)(-b) + ab = a((-b) + b) = a \cdot 0 = 0$.
Aus $(+a)(-b) + ab = 0$ folgt (1).

(2) $(-a)(-b) = ab$.
Nachweis mit (0) und (1).

$$\begin{aligned} -(ab) + (-a)(-b) &= (+a)(-b) + (-a)(-b) \\ &= (a + (-a))(-b) \\ &= 0 \cdot (-b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aus $-(ab) + (-a)(-b) = 0$ folgt (2).

Mathematische Entdeckungen

Bei dem Spiel BLOTTO erhalten die Spieler jeweils ein Brett mit 5×5 Feldern und $n = 100$ Ein-Cent-Stücke. Bei einer Spielrunde verteilen die Spieler nun ihre Ein-Cent-Stücke auf ihrem Brett und zeigen sich danach ihre Verteilung. Jeder spielt gegen jeden.

Der Spieler, der die meisten Ein-Cent-Stücke auf einem Feld platziert hat, gewinnt dieses Feld. Pro gewonnenem Feld erhält ein Spieler einen Punkt. Der Spieler mit den meisten Punkten gewinnt die Spielrunde.

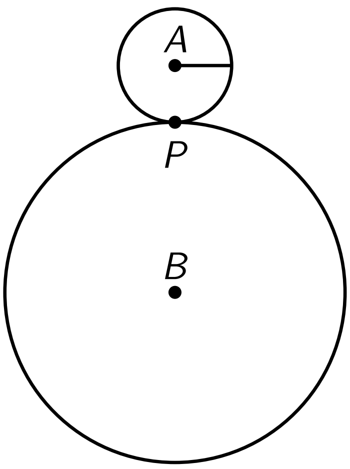
Betrachte den Fall, dass zwei Spieler das Spiel mit 3 Feldern (ohne Brett) spielen und die Zahlen in nicht-absteigender Reihenfolge wählen.

1. Spiele BLOTTO zunächst für den Fall von sechs Münzen pro Spieler. Welche Verteilungen sind möglich und mit welcher gewinnst Du? (bitte begründe).
2. Spiele BLOTTO für den Fall von zwölf Münzen pro Spieler; insbesondere die Verteilung $(2, 4, 6)$. Was beobachtest Du?
3. Spiele BLOTTO für den Fall von 13 Münzen pro Spieler; und zwar eine der Verteilungen $(3, 5, 5), (3, 3, 7)$ oder $(1, 5, 7)$. Was beobachtest Du?

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2025 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Zur Aufgabe aus Heft 159

In Heft 159 stellten wir euch folgende Aufgabe:



Ein kleiner Kreis mit Radius $\frac{1}{3}$ rollt um einen Kreis mit Radius 1 bis an seinen Ausgangspunkt P.

a) Wie oft dreht sich der Kreis um den großen insgesamt und warum?

b) Wenn der kleine Kreis Radius $\frac{1}{n}$ mit n einer ganzen Zahl besitzt, wie oft dreht er sich dann um den großen Kreis und warum?

Wiederentdeckt von Benjamin Landgraf

Lösung

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Daniel Laibach, Gymnasium Nackenheim, Klasse 9, Emilie Borrmann Klasse 11 sowie Jasmin Borrmann Klasse 10, Gymnasium Oberursel.

Alle Drei argumentieren so:
Wir berechnen den Umfang beider Kreise und betrachten, wie oft der Umfang des kleinen Kreises in den des großen hineinpasst. Wir erhalten für den Umfang des großen Kreises

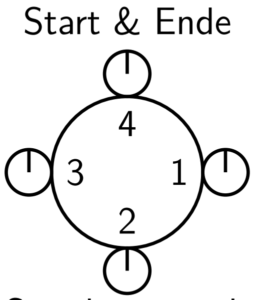
$$1 \cdot 2\pi = 2\pi$$

und für den des kleinen Kreises

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$$

Dividiert man nun die beiden Kreisumfänge, erhält man die Lösung Drei, bzw. allgemein: n.

Sirin Somrani, Klasse 12, IGS Ernst Bloch (Ludwigshafen), schreibt dazu:



Die richtige Lösung ist Vier.
Warum - das wollen wir uns jetzt klarmachen.

Streckt man den Umfang des großen Kreises als Linie und lässt den kleinen Kreis darüber rollen, so dreht sich der kleine Kreis tatsächlich nur 3-mal um seine eigene Achse.

Die Krümmung des großen Kreises spielt aber ebenfalls eine Rolle. Denn zusätzlich zur Bewegung durch das reine Abrollen bewegt sich der kleine Kreis auf einer gekrümmten Bahn um das Zentrum des großen Kreises. Dadurch entsteht eine weitere Umdrehung. Die Anzahl der Umdrehungen für einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{n}$ beträgt somit entsprechend $n+1$ (nicht einfach: n). Probiere es einfach mal mit zwei gleich großen Münzen aus und du wirst bemerken, dass zwei Umdrehungen nötig sind (und nicht nur eine, trotz gleichem Umfangs der Münzen), bis Du wieder am Ausgangspunkt angekommen bist.

Das Wurzelmonster

von Frank Rehm

Wenn man die Regeln bei Wurzelausdrücken und Potenzen verinnerlicht hat, dann können einen etwas pompöse Terme kaum noch erschüttern. Hier ist ein Beispiel dafür, es erinnert an ein Spiel mit den mathematischen Operationen und Spielen macht einfach Spaß! Unser etwas komplizierter Vorschlag, was die Mathematik so alles bieten kann:

Man vereinfache den Term: $A = \frac{\sqrt{27\sqrt[4]{9^3\sqrt{81}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[10]{3^{-5}}}}} = \frac{z}{n}$.

Beim Zähler z beginnen wir mit Potenzen von Drei in der innersten Wurzel und fassen die Exponenten sukzessive zusammen. Zunächst ist wegen $81 = 3^4$ der Exponent gleich $\frac{4}{3}$, mit $9 = 3^2$ und der vierten Wurzel gilt: $\frac{2+\frac{4}{3}}{4} = \frac{5}{6}$. Mit $27 = 3^3$ und der äußeren Quadratwurzel erhält man: $\frac{3+\frac{5}{6}}{2} = \frac{23}{12}$. Im Nenner n erhalten wir analog für die Basis Drei den Exponenten $\frac{\frac{-5}{10}}{2\cdot 3} = -\frac{1}{12}$. Damit ist $A = \frac{z}{n} = 3^{\frac{23}{12}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} = 9$ – wie durch ein Wunder haben sich alle Exponenten quasi in Luft aufgelöst.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

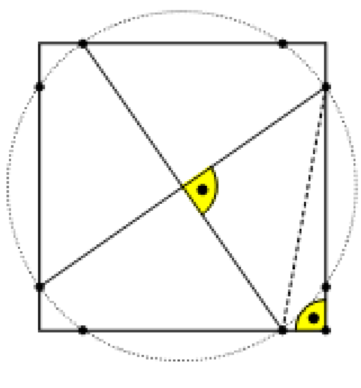
Herr Pommer möchte seinen Garten für das Frühjahr vorbereiten. Im Schuppen findet er vier geradlinige Zaunstücke mit den Längen $1, 4, 7$ und 8 Meter. Mit ihnen möchte er ein Stück des Gartens umzäunen, auf dem er Karottensamen ausbringen will. Was ist die größte Vierecksfläche, die er mit den Zaunstücken umschließen kann? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2025 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 159

In Heft 159 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Es ist eine triviale Aufgabe, ein $10x10$-Quadrat in 100 kongruente Vierecke zu zerlegen, die jeweils einen Umkreis besitzen, dessen Durchmesser $\sqrt{2}$ beträgt. Aber kann man ein $10x10$-Quadrat auch in 100 kongruente Vierecke zerlegen, die jeweils einen Umkreis besitzen, dessen Durchmesser $\sqrt{3}$ beträgt? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung



Ja, das ist möglich. Zuerst zerlegen wir das 10×10-Quadrat in 25 kongruente 2×2-Quadrate. Um den Mittelpunkt jedes dieser Quadrate schlagen wir einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dieser Kreis schneidet den Umfang des Quadrats in acht Punkten. Wir verbinden jeden zweiten dieser Punkte mit seinem Gegenüber und erhalten damit, wie in der Figur dargestellt, vier kongruente Vierecke, die jeweils zwei

gegenüberliegende rechte Winkel besitzen. Daher handelt es sich bei ihnen um Sehnenvierecke; sie besitzen also einen Umkreis, dessen Durchmesser nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=\sqrt{3}$ beträgt.
Lösungen wurden von Emilie Borrmann, Jasmin Borrmann und Lisa Schäfer eingesandt.
Wie weit lässt sich – bei ansonsten gleicher Fragestellung – der Durchmesser der 100 kongruenten Vierecke noch vergrößern (sie müssen ja nicht konvex sein...)? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Ein Blick hinter die Kulissen
Ein Rechentrick
von Hartwig Fuchs

Mattis hat einen neuen Rechentrick entdeckt, den er seinem Freund Matheo zeigen will.
Deshalb gibt er Matheo seinen Taschenrechner und fordert ihn auf: Denk dir eine ganze dreistellige Zahl $n > 100$ und multipliziere sie mit $7, 11, 13, 27$ sowie 37.
Wenn du mir das ausgerechnete Produkt mitteilst, dann nenne ich dir deine gedachte Zahl n.
Matheo möchte sehen, ob Mathis' Trick gelingt.
Er wählt $n = 479$ und berechnet das Produkt $479 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 27 \cdot 37 = 478999521$.
Tatsächlich kann Mathis die von Matheo gedachte Zahl n angeben. Auch in einem zweiten Versuch mit der gedachten Zahl $n = 943$ und dem Produkt $943 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 27 \cdot 37 = 942999057$ findet Mathis ohne Mühe die Ausgangszahl n.
Matheo vermutet bald, dass die schnellen Erfolge seines Freundes darauf beruhen, dass die drei ersten Ziffern der ausgerechneten Produkte jeweils die Zahl $n-1$ bilden. Wenn das stimmt, wie lässt sich das dann erklären?

Erklärung des Rechentricks

Für jede dreistellige Zahl $n \geq 101$ gilt:

(1) $n \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 27 \cdot 37 + n = n \cdot 999999 + n = n \cdot 10^6$.

Aus (1) folgt dann

$$n \cdot 10^6 - n = (n-1) \cdot 10^6 + 10^6 - n.$$

Schreibt man hier $n - 1 = abc$ als Dezimalzahl und beachtet man $10^6 - n \leq 10^6 - 101 = 999899$, so dass $10^6 - n$ eine sechsstellige Zahl mit einer Dezimaldarstellung $10^6 - n = z_q z_w \dots_6$ ist, dann gilt:

$$(n-1) \cdot 10^6 + 10^6 - n = abc000000 + z_1 z_2 \dots z_6 = abcz_1 z_2 \dots z_6.$$

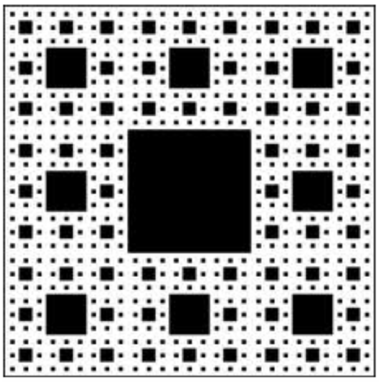
Da man den Wert $abcz_1z_2 \dots z_6$ des Produktes $n \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 27 \cdot 37$ kennt, kennt Mathis auch $n - 1 = abc$ und damit die gedachte Zahl n.

Für Freunde des inspirierten Programmierens

von Jens Gallenbacher

In dieser Rubrik werden in Zukunft Aufgaben aufgegriffen, die bereits im Rahmen des Bundeswettbewerbs Informatik gestellt wurden. Meistens können einfache Instanzen von sehr langweiligen Programmen gelöst werden, die aber für komplexe Instanzen deutlich zu viel Rechenzeit benötigen. Hier sind dann elegante Programme gefragt, die mit informatisch-mathematischer Kreativität erstellt werden. Daher haben wir sie für Monoid noch einmal entdeckt und präsentieren sie Euch hier in einer leicht angepassten, erweiterten Form.
Die Aufgaben der Rubrik wurden im Rahmen des BWINF (www.bwinf.de) gestellt. Die Verwendung erfolgt mit freundlicher Genehmigung der Geschäftsstelle der Bundesweiten Informatikwettbewerbe.
Im Heft wird es für diese Rubrik keine Lösungshinweise geben, da auf den Seiten des BWINF bereits sehr ausführliche Lösungen mit mathematischen Erläuterungen zum Download bereitstehen.

SVG-Fraktale: Aufgabe aus der 1. Runde des 31. Bundeswettbewerbs Informatik



Ein Fraktal ist eine selbstähnliche Figur. Es entsteht, indem ausgehend von einer Grundfigur, geometrische Objekte schrittweise verfeinert werden. Ein bekanntes Fraktal ist zum Beispiel der Sierpinski-Teppich (s. Bild). Scalable Vector Graphics (SVG) ist eine Sprache, in der sich geometrische Objekte mit leicht lesbaren Sprachelementen beschreiben lassen, um sie z. B. in Webbrowsern anzuzeigen.

Eine Definition findet man unter `http://www.w3.org/TR/SVG11/`. Für eine Lösung dieser Aufgabe genügt aber der „SVG-Rahmen“:

<?xml version=”1.0”?>

<svg xmlns=”http://www.w3.org/2000/svg» elemente </svg>

Und die folgenden Elemente:

<rect x=ßahl”y=ßahl”width=ßahl”height=ßahl”fill=”farbe/>

<circle cx=ßahl”cy=ßahl”r=ßahl”fill=”farbe/>

<line x1=ßahl”y1=ßahl”x2=ßahl”y2=ßahlßtroke=”farbeßtroke-width=ßahl/>

Die Grundfigur (erste Stufe) des Sierpinski-Teppichs, ein einfaches weißes Quadrat, wird in einer SVG-Datei so beschrieben:

```
<?xml version=”1.0”?>
<svg xmlns=”http://www.w3.org/2000/svg»
<rect x=”0”y=”0”width=”180”height=”180”fill=”white/>
</svg>
```

Ein Verfeinerungsschritt besteht generell daraus, ein Objekt durch ein oder mehrere neue Objekte zu ersetzen. Beim Sierpinski-Teppich wird jedes weiße Quadrat durch neun kleinere, gleich große Quadrate ersetzt, von denen das mittlere schwarz und alle anderen weiß sind. Die zweite Stufe des Sierpinski-Teppichs wird also in einer SVG-Datei so beschrieben:

```
<?xml version=”1.0”?>
<svg xmlns=”http://www.w3.org/2000/svg»
<rect x=”0”y=”0”width=”60”height=”60”fill=”white/>
<rect x=”60”y=”0”width=”60”height=”60”fill=”white/>
<rect x=”120”y=”0”width=”60”height=”60”fill=”white/>
<rect x=”0”y=”60”width=”60”height=”60”fill=”white/>
<rect x=”60”y=”60”width=”60”height=”60”fill=”black/>
<rect x=”120”y=”60”width=”60”height=”60”fill=”white/>
<rect x=”0”y=”120”width=”60”height=”60”fill=”white/>
<rect x=”60”y=”120”width=”60”height=”60”fill=”white/>
<rect x=”120”y=”120”width=”60”height=”60”fill=”white/>
</svg>
```

Das Bild oben zeigt die fünfte Stufe des Sierpinski-Teppichs.

Vorüberlegungen

a) Überlege, mit welchen Werkzeugen man am besten XML-Dateien (wie SVG) verarbeiten und transformieren kann. Unsere Empfehlung ist XSLT. Für diese Sprache gibt es Tutorials des W3C.*

b) Erstelle zunächst entsprechende SVG-Dateien für unterschiedliche Fraktale manuell. Vorschläge sind:
   - Sierpinski-Teppich (bereits im Beispiel dargestellt)
   - Sierpinski-Dreieck
   - Koch-Kurve
   - Koch-Flocke
   - Hilbertkurve

* https://www.w3.org/

Programmieraufgabe

Schreibe ein Programm, das die Grundfigur oder eine bereits berechnete Verfeinerungsstufe aus einer SVG-Datei einliest und eine neue SVG-Datei erzeugt, die die nächste Stufe beschreibt. Die SVG-Dateien sollen von gängigen Web-Browsern (z. B. Firefox) angezeigt werden können.
Es genügt, wenn eine Ausführung des Programms nur einen Verfeinerungsschritt vornimmt, man kann es dann ja mehrfach anwenden.

Hinweis

Wenn das Programm mehrfach hintereinander ausgeführt wird, kann man das wie eine Rekursion betrachten, die bis zu einer entsprechenden Rekursionstiefe in die Breite ausgeführt wird. Dabei betrachtet man Rekursion als wichtiges informatischen Prinzip von einer anderen Sicht und versteht sie eventuell noch besser.

Bilder aus dem Original-Aufgabenblatt 31, erste Runde mit freundlicher Genehmigung der BWINF-Geschäftsstelle.

Eine Aufgabe aus der mittelalterlichen Mathematik

von Hartwig Fuchs

Leonardo von Pisa (1170 - 1240) – bekannter unter dem Namen Fibonacci – hat mit seinem 1202 erschienenen Buch über den Abakus einen Grundstein für die Entwicklung der heutigen Mathematik aus der mittelalterlichen Mathematik gelegt.* In diesem Buch findet sich die Aufgabe:
$\frac{19}{20}$ einer Zahl ist die Quadratwurzel aus eben dieser Zahl. Wie heißt die Zahl?

Lösung

Im Formalismus der heutigen Mathematik, den es zu Fibonaccis Zeit noch nicht gab:
Die gesuchte Zahl sei x. Dann ist $x = 0$ eine Lösung. Es sei daher nun $x \neq 0$.

$$\frac{19}{20}x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{20}{19}\right)^2$$

Eine wichtige Besonderheit dieser Lösung:
Fibonacci hat $x = 0$ als Lösung zugelassen, obgleich es zu seiner Zeit umstritten war, ob die Null eine Zahl ist. Erst viel später hat man der Null die Zahleneigenschaft zuerkannt.

* Abakus – ein im Mittelalter überall verbreitetes Rechengerät, das bereits die Römer kannten.

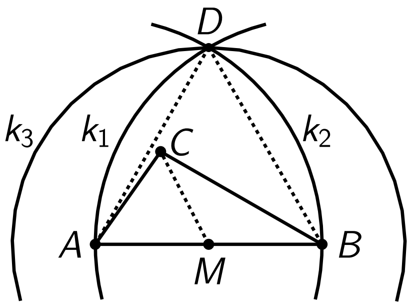
Eine besondere Aufgabe

von Hartwig Fuchs

Es sei ABC ein Dreieck mit der längsten Seite AB. Wenn dann M der Mittelpunkt der Seite AB ist, dann gilt:

(1) $|CM| \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}|AB|$, $|CM|$ und $|AB|$ die Längen der Strecken CM und AB.

Nachweis



Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist – mit $D = C$ in der Figur, dann ist nach dem Satz von Pythagoras: $|CM| = \sqrt{|AB|^2 - \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}|AB|$. Es sei daher nun Dreieck ABC gleichseitig und AB sei seine längste Seite. Dann liegt ABC vollständig in den Kreisen k_1 und k_2, deren Mittelpunkte A und B und die Radien $|AB|$ sind.

Somit liegt ABC vollständig in der Figur $F = k_1 \cap k_2$, deren Rand die Kreisbögen AD und BD sowie die Strecke AB bilden. F liegt dann im Kreis k_3 mit Mittelpunkt M und Radius $|MD| = \frac{1}{2}\sqrt{3}|AB|$. Folglich gilt: $|CM| < \frac{1}{2}\sqrt{3}|AB|$.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 160

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Zufall oder Regel ?

Trifft es zu, dass $\left(2024 + \frac{1}{2024}\right)^2 - \left(2024 - \frac{1}{2024}\right)^2 = 4$ ist?
Gilt Entsprechendes auch für andere Zahlen an Stelle von 2024? (H.F.)

Lösung:

Es gilt für jede natürliche Zahl $n > 1$ (sogar für jede reelle Zahl $x \neq 0$):

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - \left(n - \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 + 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(n^2 - 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = 4.$$

II. Eine Eigenschaft magischer 3×3-Quadrate

Das nebenstehende 3×3-Zahlenquadrat heißt magisch, weil die drei Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen die gleiche Summe $M = 15$ besitzen.

Für die zentrale Zahl $z = 5$ gilt außerdem:

(1) $3 \cdot z = M$.

Überprüfe, ob die Gleichung (1) für jedes magische 3x3-Zahlenquadrat zutrifft. (H.F.)

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Lösung:

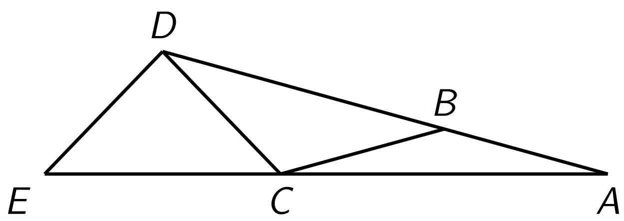
a	b	c
d	z	f
g	h	i

Das nebenstehende Zahlenquadrat sei magisch mit der „magischen“ Summe M. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 3M &= (a + z + i) + (b + z + h) + (c + z + g) \\ &= (a + b + c) + 3z + (g + h + i) \\ &= M + 3z + M \\ &\Rightarrow 3z = M \end{aligned}$$

III. Winkelbestimmung

In dem nebenstehenden Dreieck $\triangle EAD$ gelte: $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$ sowie $\sphericalangle EDA = 100°$. Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle DAE$? (H.F.)



Lösung:

Es sei $\sphericalangle DAE = \alpha$. Dann ist

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DAE = \alpha$, weil $\triangle ABC$ gleichschenklig ist.

$\sphericalangle CBA = 180° - 2\alpha$;

$\sphericalangle DBC = 180° - \sphericalangle CBA = 2\alpha$;

$\sphericalangle CDB = 2\alpha$, weil $\triangle BCD$ gleichschenklig ist.

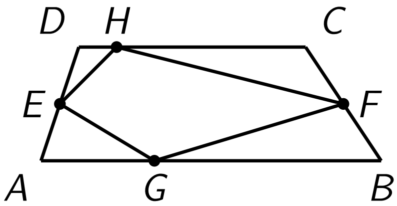
$\sphericalangle BCD = 180° - 2 \cdot 2\alpha$;

$\sphericalangle DCE = 180° - \sphericalangle BCD - \sphericalangle ACB = 180° - (180° - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$.

$\sphericalangle CED = 3\alpha$, weil $\triangle CDE$ gleichschenklig ist.

Im $\triangle ADE$ gilt daher: $180° = 100° + 3\alpha + \alpha$. Daraus folgt: $\alpha = 20°$.

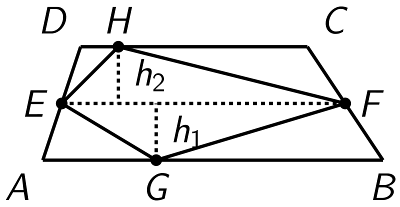
IV. Viereck im Trapez



Im Trapez $ABCD$ mit $AB||CD$ seien E und F die Mittelpunkte der Strecken AD und BC. Wähle einen Punkt G beliebig auf AB und ebenso einen Punkt H auf DC. Welchen Bruchteil der Trapezfläche $|ABCD|$ besitzt die Viereckfläche $|EGFH|$? (H.F.)

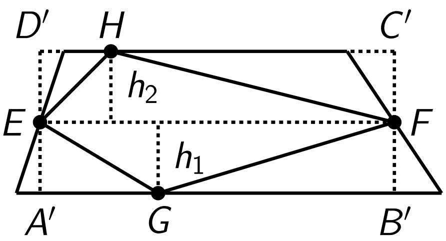
Lösung:

Es sei m die Länge der Mittellinie EF des Trapezes und h sei seine Höhe. Dann gilt: $|ABCD| = m \cdot h$. Zeichne nun die Strecke EF und die Lote von G und von H auf EF. Die Längen der Lote seien h_1 und h_2. Dann gilt für die Fläche des Vierecks $EGFH$:



$|EGFH| = |EGF| + |FEH| = \frac{1}{2}mh_1 + \frac{1}{2}mh_2 = \frac{1}{2}m(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}mh.$
Somit ist: $|EGHF| = \frac{1}{2}|ABCD|$.

Zweite Lösung:

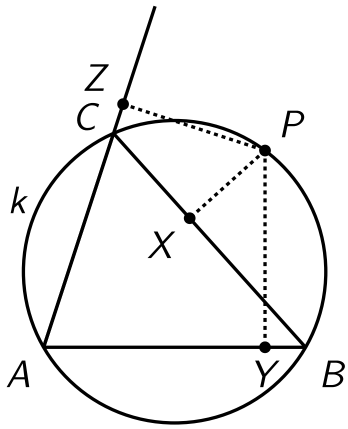


Durch „abschneiden“ und „anlegen“ der in der Zeichnung markierten Teile des Trapez erhalten wir ein Rechteck $A'B'C'D'$ mit dem gleichen Flächeninhalt wie $ABCD$. Dann gilt für die Fläche des Vierecks $EGHF$:

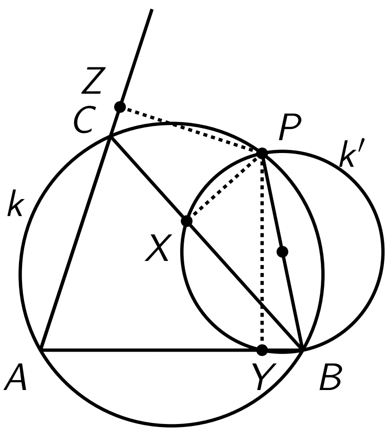
$|EGHF| = \frac{1}{2}m \cdot h_1 + \frac{1}{2}m \cdot h_2 = \frac{1}{2}m(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}mh.$
Somit ist: $|EGHF| = \frac{1}{2}|ABCD|$.

V. Punkte auf einem Kreis

Zeichne einen Kreis k und ein Dreieck ABC, dessen Ecken A, B, C auf dem Kreis liegen. P sei ein beliebiger Punkt auf dem Kreis. Die Lote von P auf die (verlängerten) Dreieckseiten schneiden diese in den Punkten X, Y und Z. Untersuche, ob die Punkte B, P, X, Y auf einem Kreis k' liegen. Bestimme gegebenenfalls Mittelpunkt und Radius des Kreises k'. (H.F.)



Lösung:



Das Dreieck BPX ist rechtwinklig beim Punkt X und das Dreieck BPY ist rechtwinklig bei Y. Deshalb liegen X und Y auf dem Thaleskreis mit dem Durchmesser BP. Der Mittelpunkt des Kreises ist somit der Mittelpunkt der Strecke BP und der Radius des Kreises ist $\frac{1}{2}|BP|$.

VI. Spiegelzahlen

Es seien m und n vierstellige natürliche Zahlen mit der Dezimaldarstellung $m = abcd$ und $n = dcba$, das heißt, $m = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$ und $n = d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$.
Bestimme alle Zahlen m, für die gilt: $4 \cdot m = n$. (H.F.)

Lösung:

Aus $4m = n$ folgt:

(1) $4a \cdot 1000 + 4b \cdot 100 + 4c \cdot 10 + 4d = d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a.$

Aus (1) folgt zunächst wegen $4a \cdot 1000 < 10000$, dass $4a \leq 9$ ist.
Wegen $a \neq 0$ ist also $a = 1$ oder $a = 2$.
Weiter erhält man aus (1): $4d = e \cdot 10 + a$ für ein ganzzahliges e. Somit ist a geradzahlig. Daraus folgt $a = 2$ woraus man $d = 8$ schlussfolgert, aber in (1) ist $d = 3$ ausgeschlossen wegen $4a \cdot 1000 > d \cdot 1000$.
Damit ergibt sich aus (1):

(2) $8 \cdot 1000 + 4b \cdot 100 + 4c \cdot 10 + 32 = 8 \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + 2$
$\Rightarrow 390 \cdot b + 30 = 60 \cdot c.$

Also gilt:

(3) $13b + 1 = 2c$

Wegen $2c \leq 18$ folgt $b = 1$ und somit $c = 7$ (oder $b = 0$ und daher $c = \frac{1}{2}$).
Also ist $m = 2178$ und $n = 8712$ die einzige Lösung.

VII. Finde eine Vermutung

Vervollständige die Tabelle, indem du in ihre Spalten einträgst:

(1) 1. Spalte: die Teiler von 24;
(2) 2. Spalte: die Anzahl der Teiler der Zahlen in der 1. Spalte;
(3) 3. Spalte: die 3. Potenz der Zahlen in der 2. Spalte.

Bestimme dann die Summe A der Zahlen in der 2. Spalte sowie die Summe B der Zahlen in der 3. Spalte.

(1)	(2)	(3)
1	1	1
2	2	2
3	2	8
4	3	27
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(a) Vergleiche A und B – erkennst du eine mögliche Vermutung?
(b) Überprüfe deine Vermutung für die Zahlen 20 und 100. (H.F.)

Lösung:

24	(2)	(3)
1	1	1
2	2	2
3	2	8
4	3	27
6	4	64
8	4	64
12	6	216
24	8	512

$A = 30, B = 900$

20	(2)	(3)
1	1	1
2	2	8
4	3	27
5	2	8
10	4	64
20	6	216

$A = 18, B = 324$

100	(2)	(3)
1	1	1
2	2	8
4	3	27
5	2	8
10	4	64
20	6	216
25	3	27
50	6	216
100	9	729

$A = 36, B = 1296$

Vermutung: Für jedes $n \geq 1$ ist $A^2 = B$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Eine Anordnung nach Größen

Für die paarweise verschiedenen positiven ganze Zahlen x, y und z gilt:

(1) $3x - 4 < 3y + 8$

(2) $3z + y < x + 5$

(3) $5y + 4 < x + 3z$

Ordne x, y und z nach wachsender Größe. (H.F.)

II. Ganzzahlige Lösungen

Gegeben sei die Gleichung $29x + 26y = 1000$, in der x und y positiv und ganzzahlig sind.

a) Bestimme durch mathematische Argumentation, wie viele Zahlenpaare (x, y) es höchstens geben kann, für die die Gleichung stimmt.

b) Welche Zahlenpaare lösen die Gleichung? (H.F.)

III. Eine merkwürdige Rechenregel

Es gilt – wie du nachrechnen kannst:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4}$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \cdot 5}.$$

a) Gib ein weiteres Beispiel nach diesem Muster an.

b) Formuliere eine allgemeine Regel, wie man dieses Muster fortsetzten kann.

(Martin Mettler)

IV. Bakterien

Eine Bakterienkultur verdoppelt sich in einer Minute. Beobachten wir sie in einem Behälter, so ist dieser nach 28min voll. Wann ist er zu 12,5% gefüllt?

(Susi Ulitzec)

V. Quadrat mit Quadratzahlen

In das nebenstehende Quadrat sind die Quadratzahlen der Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass sich die am Rand stehende Summe ergibt.

(Autor/-in unbekannt)

	70 ↓	84 ↓	131 ↓
122 →			
89 →			
74 →			

VI. 100 Zahlen

M sei eine Menge aus 100 unterschiedlichen nicht negativen Zahlen.

a) Für je zwei Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$.
Begründe: Höchstens eine Zahl aus M ist < 1; sie ist aber $\neq 0$.

b) Für je vier Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $< \frac{5}{4}$.
Zeige: Dann ist das Produkt aller Zahlen aus $M < 265$. (H.F.)

VII. Der Würfelturm

Fünf normale Würfel sind willkürlich übereinander gestapelt. Die oben liegende Seite des obersten Würfels zeigt eine Zwei. Wie hoch ist die Summe der sichtbaren Würfelaugen? (Sarah Tröbs)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

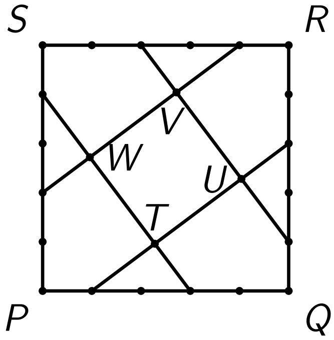
Aufgabe 1365: Ein arithmetisches Problem

Man begründe, dass die Gleichung: $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 7642$ genau eine ganzzahlige Lösung besitzt. Wie heißt diese Lösung? (H.F.)

Aufgabe 1366: Verteilung von Punkten in einem Kreis

Im Innengebiet eines Kreises mit Mittelpunkt M liegen 6075 von M verschiedene, rot gefärbte Punkte. Sie seien so im Innengebiet des Kreises verteilt, dass keine zwei rote Punkte auf dem gleichen Radius liegen.
Zeige: Wie auch immer die roten Punkte im Innengebiet verteilt sind, gilt stets: Man kann das Innere in drei Sektoren mit der jeweils gleichen Anzahl roter Punkte zerlegen. (H.F.)

Aufgabe 1367: Flächeninhalt eines Quadrates



In einem Quadrat $PQRS$ mit der Seitenlänge 25 wird jede Seite in fünf gleich lange Abschnitte geteilt. Dann werden wie in der Abbildung entsprechende Teilpunkte durch Strecken verbunden. Dadurch entsteht in der Mitte ein Quadrat $TUVW$.
Bestimme den Flächeninhalt des Quadrates $TUVW$. (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1368: 100 Zahlen

M sei eine Menge aus 100 unterschiedlichen nicht negativen Zahlen. Für je sechs Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Zeige: Dann ist das Produkt aller Zahlen aus $M > 35$.
Zum Einstieg kannst du dir Aufgabe VI. auf Seite 19 anschauen. (H.F.)

Aufgabe 1369: Im Wettbüro

Acht Fußballmannschaften – dargestellt durch die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und 8 – spielen ein Turnier. Zu diesem Zweck werden vier Paarungen ausgelost. In einem Wettbüro können Prognosen für diese Auslosung eingereicht werden.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand genau zwei richtige Paarungen vorhersagt? (Christoph Sievert)

Aufgabe 1370: Vierstellige Quadratzahl

Welches ist die kleinste vierstellige Quadratzahl, die auf 1 endet?

(Martin Mettler)

Aufgabe 1371: Das Alter zweier Mathematiker

Der Logiker L und der Mathematiker M haben am gleichen Tag Geburtstag. Bei ihrer gemeinsamen Geburtstagsfeier unterhalten sich die beiden Freunde L und M.

L zu M: „Ich habe mir drei natürliche Zahlen gedacht, deren Produkt 2450 ist und deren Summe dein Alter (in ganzen Jahren) angibt."

M zu L nach längerem Nachdenken und Rechnen: „Ich sehe keine Möglichkeit, die drei Zahlen anzugeben."

L zu M: „Jede der drei Zahlen ist kleiner als mein Alter (in ganzen Jahren)."

M zu L: „Jetzt kenne ich die drei Zahlen"

a) Wie heißen die drei Zahlen?

b) Wie alt sind L und M? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 160

Klassen 9–13

Aufgabe 1352: Jahreszahlen

Berechne $\frac{\left(10^{2024}+25\right)^2-\left(10^{2024}-25\right)^2}{(10^{2023}+25)^2-(10^{2023}-25)^2}$. (H.F.)

Lösung:

Es sei $10^{2024} = x$ und $10^{2023} = y$ gesetzt.

Dann ist $(x + 25)^2 - (x - 25)^2 = 4 \cdot 25 \cdot x = 100 \cdot x = 10^{2026}$ und

$(y + 25)^2 - (y - 25)^2 = 100y = 10^{2025}$.

Also hat der angegebene Bruchterm den Wert 10.

Aufgabe 1353: Ganzzahlige Lösungen gesucht

Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$w + x + y + z = w \cdot x \cdot y \cdot z,$$

sofern es sie gibt. (H.F.)

Lösung:

Wegen der Symmetrie der Gleichung in w, x, y und z dürfen wir $w \leq x \leq y \leq z$ annehmen. Dann ist $w + x + y + z \leq 4z$. Aus der Ungleichung folgt, dass dann $wxyz \leq 4z$ und somit

$(*)\quad wxy \leq 4$

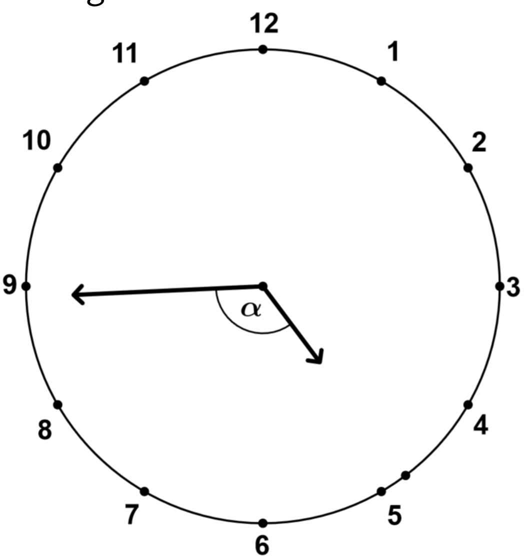
ist.

Es sei $w > 1$, also $w \geq 2$. Dann sind auch $x \geq 2$ und $y \geq 2$, sodass $wxy \geq 8$ ist – im Widerspruch zu $(*)$.
Es sei daher $w = 1$.
Wäre $x > 2$, so wäre $wxy > 4$ im Widerspruch zu $(*)$. Also ist $x = 1$ oder $x = 2$.
Für $x = 1$ ist $y = 1$, 2, 3 oder 4 möglich gemäß der Ungleichung $xy \leq 4$.
Sei $y = 1$. Dann folgt aus der gegebenen Gleichung $1 + 1 + 1 + z = z$ – ein Widerspruch.
Sei $y = 2$. dann ist $1 + 1 + 2 + z = 2z$. Damit ist $z = 4$ und $(1, 1, 2, 4)$ eine Lösung der Gleichung.
Es sei $y = 3$. Dann folgt aus $1 + 1 + 3 + z = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot z$, dass z nicht ganzzahlig ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Sei $y = 4$. Dann ist $(1, 1, 4, 2)$ eine Lösung der gegebenen Gleichung.
Für $x = 2$ ist $y \leq 2$, denn für $y > 2$ wäre $wxy > 4$ im Widerspruch zu $(*)$. Mit $2 = x \leq y \leq 2$ folgt daher $y = 2$. Aus $1 + 2 + 2 + z = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot z$ erhält man den Widerspruch $z = \frac{5}{3}$ zur Voraussetzung.
Aus der Lösung $(1, 1, 2, 4)$ erhält man wegen der Symmetrie der Gleichung in w, x, y und z durch Vertauschung der Komponenten die oben berechnete Lösung $(1, 1, 4, 2)$ sowie zehn weitere Lösungen.

Aufgabe 1354: Aufgaben zur Uhrzeit

Auf einer Uhr ist es 4 Uhr 44 Minuten und $44\frac{4}{9}$ Sekunden. Welchen Winkel bilden die beiden Zeiger? (Christoph Sievert)

Lösung:

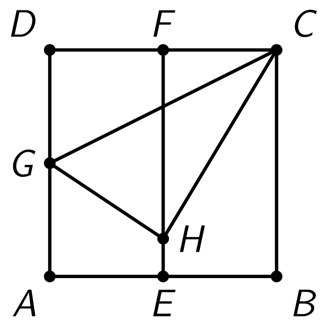


Bis vier Uhr hat der Stundenzeiger einen Winkel von $120°$ überstrichen. Wir betrachten nun die weiteren 44 Minuten und $44\frac{4}{9}$ Sekunden.

kleiner Zeiger	großer Zeiger
$60\text{min} \cong 30°$	$60\text{min} \cong 360°$
$1 min \cong \frac{1}{2}°$	$1 min \cong 6°$
$44\frac{4}{9} min \cong 22\frac{2}{9}°$	$44\frac{4}{9} min \cong 266\frac{2}{3}°$

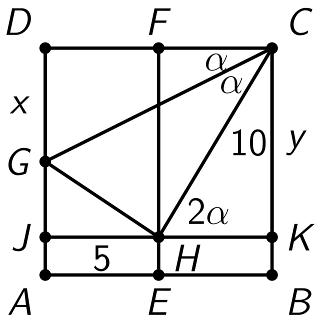
$$\alpha = 266\frac{2}{3}° - 120° - 22\frac{2}{9}° = 124\frac{4}{9}°$$

Aufgabe 1355: Quadratisches Papier



Ein quadratisches Stück Papier $ABCD$ mit der Seitenlänge 10 wird so gefaltet, dass der Punkt C fest bleibt und der Punkt D auf einen Punkt H auf der Mittelachse EF fällt. Der Punkt G auf AD ist ein weiterer Punkt der Faltgeraden.
Wie lang ist die Strecke GD? (Klaus Ronellenfitsch)
Hinweis: Ziehe eine Parallele zu AB durch den Punkt H.

Lösung:



Da die Dreiecke GCD und GCH Spiegelbilder voneinander sind, ist $\sphericalangle DCG = \sphericalangle GCH = \alpha$ und $|HC| = |DC| = 10$.
Die Punkte J, H und K liegen auf einer Parallelen zu AB. Nach dem Satz des Pythagoras ist $y = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{3}$.
Außerdem ist $\sphericalangle KHC = 2\alpha$ ein Wechselwinkel zu $\sphericalangle DCH$.

Daher gilt: $\tan(2\alpha) = \frac{y}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} = \tan(60^\circ)$. Also ist $2\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = 30^\circ$. Nun ist $\frac{x}{10} = \tan(30^\circ) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, also $x = \frac{10}{3}\sqrt{3}$.
Ergebnis: Die Strecke GD hat die Länge $\frac{10}{3}\sqrt{3} \approx 5{,}77$.

Aufgabe 1356: Ein Schuss ins Schwarze

Die Besucher Paulus und Quintus eines Jahrmarkts kommen auch an einer Schießbude vorbei. Spontan entschließen sie sich, eben mal einen Schuss auf eine Zielscheibe abzugeben. Dabei sind Paulus Chancen ins Schwarze zu treffen doppelt so groß wie die von Quintus, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass Paulus *und* Quintus beide vorbeischießen, 50 % ist. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass Paulus ins Schwarze trifft? (H.F.)

Lösung:
Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Quintus ins Schwarze trifft, daher ist $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit, dass er es verfehlt. Dann trifft Paulus mit der Wahrscheinlichkeit $2p$ ins Schwarze und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 2p$ schießt er daneben.
Daraus folgt: Die Wahrscheinlichkeit, dass Paulus und Quintus nicht treffen ist $(1 - 2p)(1 - p) = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.
Weil $p > 1$ ausgeschlossen ist gilt: Paulus Trefferwahrscheinlichkeit ist $2p = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$.

Aufgabe 1357: Niemals Primzahl-Zwillinge

Es sei p eine Primzahl mit $p > 3$.
Dann sind die Zahlen $2p-1$ und $2p+1$ niemals Primzahl-Zwillinge, d. h., $2p-1$ und $2p+1$ sind niemals beide zugleich Primzahlen. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Annahme: Es seien $2p-1$ und $2p+1$ Primzahl-Zwillinge. Unter den drei aufeinander folgenden Zahlen $2p-1, 2p, 2p+1$ ist genau eine durch 3 teilbar.
Wegen $p \neq 3$ ist $2p$ nicht durch 3 teilbar, also ist entweder $2p-1$ oder $2p+1$ durch 3 teilbar. Die einzige Primzahl mit dem Teiler 3 ist 3, so dass entweder $2p-1=3$ oder $2p+1=3$ gilt. Dann aber ist entweder $p=2$ oder $p=1$. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch.
Die Annahme ist daher falsch. Es gilt die Behauptung.

Aufgabe 1358: Scher das Schaf

Ein Schäfer möchte möglichst viel Gewinn beim Verkauf der Wolle seiner Schafe machen. Dafür nimmt er an, dass das Gewicht der Wolle eines Schafes (in kg) mit $W(t) = \sqrt{t}$ (t in Monaten) gegeben ist. Für das Futter, die Unterkunft eines Schafes und den Schäferhund rechnet der Schäfer mit Kosten (in Euro) von $K(t) = 1 + 0{,}2t$. Ein Kilogramm Wolle kann er für 1,60€ verkaufen. Zu welchem Zeitpunkt t sollte der Schäfer seine Schafe scheren, um den größt möglichen Gewinn beim Verkauf der Wolle zu erzielen?
Bewerte die errechnete Lösung im Sachzusammenhang. (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

Der Gewinn beim Verkauf der Schafswolle zum Zeitpunkt t ergibt sich, indem man die Kosten von den Einnahmen subtrahiert. Berücksichtigt man, dass ein Kilogramm Wolle für 1,60€ verkauft werden kann, ergibt sich für den Gewinn (in Euro) die Funktion $G(t) = 1{,}60\sqrt{t} - (1 + 0{,}2t)$. Um das Maximum der Gewinnfunktion $G(t)$ zu bestimmen, benötigt man die erste und zweite Ableitung dieser Funktion. Verwendet man $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $0{,}2 = \frac{1}{5}$ und $1{,}60 = \frac{8}{5}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{8}{5}\cdot t^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{5}t\right)\right) \\ &= \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5\sqrt{t}} - \frac{1}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{5}\cdot t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot t^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{2}{5\sqrt{t}^3} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Nullstelle von $G'(t)$:

$$0 = \frac{4}{5\sqrt{t}} - \frac{1}{5} \qquad\qquad G''(16) = -\frac{1}{160} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{4}{5\sqrt{t}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{t} = 4$$

Somit besitzt die Gewinnfunktion ein Maximum bei $t = 16$ Monaten. Der Schäfer sollte seine Schafe also alle 16 Monate scheren.
Realistisch müssen Schafe jedoch im Sommer geschoren werden und im Winter ihre Wolle behalten, um nicht zu frieren.

Bundeswettbewerb Mathematik
Erste Runde 2025

von Stefan Kermer, Volker Priebe und Bastian Schneider

Aufgabe 1

Fridolin, der Frosch, springt auf der Zahlengerade umher: Er startet bei der Zahl 0, springt in irgendeiner Reihenfolge auf jede der Zahlen $1, 2, \dots, 9$ genau einmal und danach mit seinem letzten Sprung wieder zur Zahl 0 zurück.
Kann die zurückgelegte Gesamtstrecke bei den zehn Sprüngen dabei a) 20, b) 25 Längeneinheiten betragen?

Anmerkungen: Eine Längeneinheit ist der Abstand zwischen 0 *und* 1 *auf der Zahlengerade. Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.*

Behauptung

Die zurückgelegte Gesamtstrecke bei den zehn Sprüngen kann 20, aber nicht 25 Längeneinheiten betragen.

Beweis

Springt Fridolin auf der Zahlengerade von 0 nach 9, von dort nach 8, 7, 6, 5, 4, 3, dann weiter nach 1 und 2 in dieser Reihenfolge und anschließend nach 0, so genügt die Folge dieser zehn Sprünge den Voraussetzungen der Aufgabenstellung, und die zurückgelegte Gesamtstrecke beträgt

$$9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 20$$

Längeneinheiten; die Frage a) der Aufgabenstellung kann also bejaht werden.
Es sei eine beliebige, fest gewählte Folge von zehn Sprüngen auf der Zahlengeraden wie in der Aufgabenstellung gegeben. Vor dem ersten Sprung hat Fridolin die Strecke 0 zurückgelegt, und mit jedem der zehn Sprünge wächst die zurückgelegte Strecke um den Abstand zwischen den beiden Zahlen vor und nach dem Sprung.

Wir beobachten: Ein solcher Abstand ist eine gerade Zahl, wenn Fridolin in einem Sprung auf der Zahlengeraden von einer geraden auf eine gerade Zahl oder von einer ungeraden auf eine ungerade Zahl springt. Hingegen ist der Abstand eine ungerade Zahl, wenn Fridolin in einem Sprung auf der Zahlengeraden von einer geraden auf eine ungerade Zahl oder von einer ungeraden Zahl auf eine gerade Zahl wechselt; solch einen Sprung nennen wir Wechselsprung. Weil Fridolin in der Folge von zehn Sprüngen bei einer geraden Zahl (der Zahl 0) beginnt und mit seinem letzten Sprung wieder bei einer geraden Zahl (der Zahl 0) landet, muss die Anzahl der Wechselsprünge gerade sein, denn mit einer ungeraden Anzahl von Wechselsprüngen würde Fridolins letzter Sprung zwingend zu einer ungeraden Zahl führen.
Die zurückgelegte Gesamtstrecke ist also die Summe aus zehn Abständen, von denen eine gerade Anzahl ungerade (die Abstände der Wechselsprünge) und die Abstände der anderen Sprünge gerade sind; die zurückgelegte Gesamtstrecke ist damit insgesamt eine gerade Zahl. Weil 25 ungerade ist, kann also mit keiner Folge von zehn Sprüngen wie in der Aufgabenstellungen eine Gesamtstrecke von 25 Längeneinheiten zurückgelegt werden, und die Frage b) der Aufgabenstellung ist zu verneinen.
Das beweist die Behauptung. □

Aufgabe 2

Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ betrachten wir in der Dezimaldarstellung von $n!$ die letzte von Null verschiedene Ziffer. Die unendliche Folge dieser Ziffern beginnt wegen $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ und $6! = 720$ mit 2,6,4,2,2. Bestimme alle Ziffern, die mindestens einmal in dieser Folge vorkommen, und zeige, dass jede dieser Ziffern sogar unendlich oft vorkommt.

Anmerkungen: n! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Behauptung

Genau die Ziffern 2, 4, 6, 8 kommen in dieser Folge vor, und jede dieser Ziffern kommt unendlich oft vor.

Beweis

Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ sei mit $L(n)$ die letzte von Null verschiedene Ziffer in der Dezimaldarstellung von n bezeichnet. Für positive ganze Zahlen $n, n' \geq 1$, für die $L(n), L(n')$ beide ungleich 5 sind, lässt sich $L(n \cdot n')$ bestimmen, indem wir die letzte von Null verschiedene Ziffer in der Dezimaldarstellung von $n \cdot L(n')$ bestimmen bzw. die letzte Ziffer in $L(n) \cdot L(n')$ betrachten, das heißt

$$L(n \cdot n') = L(n \cdot L(n')) = L(L(n) \cdot L(n')). \tag{2.1}$$

Denn wegen $L(n), L(n') \neq 5$ ist die Einerziffer von $L(n) \cdot L(n')$ von Null verschieden.
Schon in der Aufgabenstellung hatten wir festgestellt, dass $L(2!) = 2$, $L(3!) = 6$,

$L(4!) = 4$, $L(5!) = 2 = L(6!)$. Weitere Berechnungen führen uns zu $9! = 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 720 \cdot 504 = 362880$, also $L(9!) = 8$. Die Ziffern 2, 4, 6, 8 kommen also mindestens einmal in der Folge $L(n!)$, $n \geq 2$, der Aufgabenstellung vor. Für ein beliebiges, aber fest gewähltes n, $n \geq 2$, sei

$$n! = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot l \tag{2.2}$$

mit nicht negativen ganzen Zahlen α_2, α_5 und einer ungeraden ganzen Zahl l, die teilerfremd zu 5 ist. Wenn wir zeigen, dass stets $\alpha_2 > \alpha_5$ gilt, so schließen wir

$$n! = 2^{\alpha_2-\alpha_5} \cdot l \cdot (2 \cdot 5)^{\alpha_5} = 2^{\alpha_2-\alpha_5} \cdot l \cdot 10^{\alpha_5}, \text{also } L(n!) = L(2^{\alpha_2-\alpha_5} \cdot l),$$

und wegen $\alpha_2 - \alpha_5 > 0$ muss $L(2^{\alpha_2-\alpha_5} \cdot l)$ gerade sein. Damit kommen ausschließlich die Ziffern 2, 4, 6, 8 in der Folge $L(n!)$, $n \geq 2$, vor.

Wir zeigen nun, dass in (2.2) stets $\alpha_2 > \alpha_5$ gilt. Für eine positive reelle Zahl x bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ (Gaußklammer, Abrundungsfunktion) die größte nicht negative ganze Zahl, die kleiner als oder gleich x ist. Dann sind für $p \in \{2, 5\}$

$$\alpha_p = \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \ldots = \sum_{i \geq 1, p^i \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor; \tag{2.3}$$

die zweite Gleichung gilt, weil $\lfloor n \cdot p^{-i} \rfloor = 0$, sobald $p^i > n$. Die erste Gleichung in (2.3) verifizieren wir folgendermaßen: jede p-te ganze Zahl zwischen 1 und n, also $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ viele, ist ein Vielfaches von p und trägt damit einen Faktor p in (2.2) bei; jede p^2-te Zahl, also $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ viele, ist ein Vielfaches von p^2 und trägt einen weiteren Faktor p in (2.2) bei und so weiter. Gilt $5^k \leq n < 5^{k+1}$, $k \geq 1$, so gilt $2^{2k} = 4^k < 5^k \leq n$ und wir schließen, dass

$$\alpha_5 = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{2k} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor < \alpha_2;$$

das war zu beweisen.

Wir zeigen, dass jede der Ziffern 2, 4, 6, 8 unendlich oft in der Folge $L(n!)$, $n \geq 2$, auftritt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine unendliche Teilfolge $(n_k)_{k \geq 1}$ der positiven ganzen Zahlen mit $n_k = 5^k$, $k \geq 1$, und zeigen, dass für $k = 4i + r \geq 1$ mit $i \geq 0$ und $0 \leq r \leq 3$

$$L(n_k!) = L\left(2^k\right) = L(2^r) = \begin{cases} 6, & r = 0 \\ 2^r, & 1 \leq r \leq 3. \end{cases} \tag{2.4}$$

Die erste Gleichung von (2.4) beweisen wir im Anschluss. Die zweite und dritte Gleichung von (2.4) sind direkt einsichtig, denn $L(2^r) = 2^r$ für $1 \leq r \leq 3$,

$L\left(2^4\right) = L(16) = 6$ und generell für $i \geq 1$

$$L\left(2^{4i+r}\right) = L\left(\left(2^4\right)^i \cdot 2^r\right) = L\left(6^i \cdot 2^r\right) = L\left(6 \cdot 2^r\right) = \begin{cases} 6, & r = 0 \\ 2^r, & 1 \leq r \leq 3. \end{cases} \tag{2.5}$$

Für den Beweis der ersten Gleichung von (2.4) betrachten wir zunächst für ein beliebiges, fest gewähltes $n = 5m$, $m \geq 1$, und ein j mit $0 \leq j \leq m-1$ das Produkt $(5j+1) \cdot (5j+2) \cdot (5j+3) \cdot (5j+4)$; es ist

$$\begin{aligned} &(5j+1) \cdot (5j+2) \cdot (5j+3) \cdot (5j+4) \\ &= [(5j+1) \cdot (5j+4)] \cdot [(5j+2) \cdot (5j+3)] \\ &= (25j(j+1)+4) \cdot (25j(j+1)+6) \\ &= 625j^2(j+1)^2 + 250j(j+1) + 24 \\ &= 125 \cdot [j(j+1)(5j(j+1)+2)] + 24. \end{aligned}$$

Weil unter den vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen $5j+1$, $5j+2$, $5j+3$ und $5j+4$ eine durch 4 und eine weitere, davon verschiedene durch 2 teilbar sein muss, ist das Produkt auf der linken Seite der vorigen Gleichungskette durch 8 teilbar. Wegen $24 = 3 \cdot 8$ und $125 = 5^3$ ist somit auch der Term in der eckigen Klammer am Ende der Gleichungskette von der Form $8b_j$ mit einer positiven ganzen Zahl b_j. Für $n = 5m$, $m \geq 1$, können wir $n!$ damit folgendermaßen berechnen

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{j=0}^{m-1} (5j+1) \cdot (5j+2) \cdot (5j+3) \cdot (5j+4) \cdot (5j+5) \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} 5(j+1) \cdot \prod_{j=0}^{m-1} (5j+1) \cdot (5j+2) \cdot (5j+3) \cdot (5j+4) \\ &= 5^m \cdot m! \cdot 2^m \cdot \prod_{j=0}^{m-1} (5b_j \cdot 100 + 12) \\ &= 10^m \cdot m! \cdot \prod_{j=0}^{m-1} \left((50b_j+1) \cdot 10 + 2\right). \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren und wiederholte Anwendung von (2.1) schließen wir, dass $L\left(\prod_{j=0}^{m-1}((50b_j+1) \cdot 10 + 2)\right) = L\left(2^m\right)$, damit für $n = 5m$, also $m = \frac{n}{5}$,

$$L(n!) = L(2^m \cdot m!) = L\left(2^{\frac{n}{5}} \cdot \left(\frac{n}{5}\right)!\right) = L\left(2^{\frac{n}{5}} \cdot L\left(\left(\frac{n}{5}\right)!\right)\right). \tag{2.6}$$

Für die $n_k = 5^k$, gilt $\frac{n_k}{5} = n_{k-1}$, $k \geq 1$, wobei wir $n_0 := 1$ setzen. Außerdem ist für $k \geq 2$

$$
\begin{aligned}
n_{k-1} - 1 = 5^{k-1} - 1 &= (5-1) \cdot \left(5^{k-2} + 5^{k-3} + \cdots + 1\right) \\
&= 4 \cdot \left(5^{k-2} + 5^{k-3} + \cdots + 1\right),
\end{aligned}
$$

und wir können aus (2.5) bestimmen, dass für $k \geq 2$

$$
L\left(2^{\frac{n_k}{5}}\right) = L\left(2 \cdot 2^{n_{k-1}-1}\right) = L\left(2 \cdot \left(2^4\right)^{\frac{n_{k-1}-1}{4}}\right) = 2. \tag{2.7}
$$

Durch rekursive Anwendung von (2.6) mit (2.7) und wiederholte Anwendung von (2.1) schließen wir für $k \geq 1$ mit $n_0 = 1$ und $L(1!) = 1$, dass

$$
\begin{aligned}
L(n_k!) &= L(2 \cdot L(n_{k-1}!)) \\
&= L\left(2 \cdot L\left(2 \cdot L\left(n_{k-2}!\right)\right)\right) = L\left(L\left(2^{1+1} \cdot L\left(n_{k-2}!\right)\right)\right) \\
&= L\left(2^2 \cdot L\left(n_{k-2}!\right)\right) = \cdots = L\left(2^k \cdot L\left(n_0!\right)\right) = L(2^k).
\end{aligned}
$$

Das beweist die erste Gleichung in (2.4) und damit die Behauptung. □

Bemerkungen

Die Rekursion (2.6) zur Berechnung der Folgenglieder $L(n!)$, $n \geq 1$, lässt sich verallgemeinern zu

$$
L(n!) = L\left(2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot L\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor !\right) \cdot L((n \pmod 5))!)\right),
$$

wobei $0 \leq n \pmod 5 \leq 4$; das ist äquivalent zur Beobachtung, dass $L((5m)!)$ gerade ist und daher

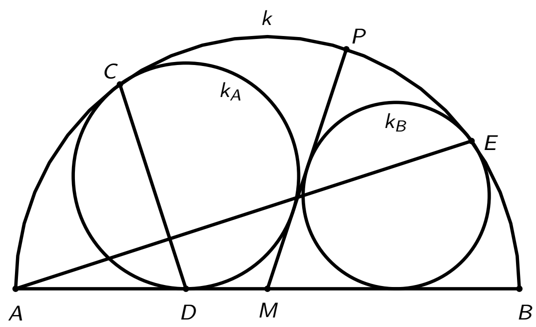
$$
\begin{aligned}
L((5m+1) \cdot (5m)!) &= L((5m)!) \\
L((5m+2) \cdot (5m+1) \cdot (5m)!) &= L(2 \cdot L((5m)!)) \\
L((5m+3) \cdot (5m+2) \cdot (5m+1) \cdot (5m)!) &= L(6 \cdot L((5m)!)) \\
L((5m+4) \cdot (5m+3) \cdot (5m+2) \cdot (5m+1) \cdot (5m)!) &= L(4 \cdot L((5m)!)).
\end{aligned}
$$

Die ersten Folgenglieder finden sich unter `https://oeis.org/A008904`.

Dass jede der Ziffern 2, 4, 6, 8 unendlich oft in der Folge $L(n!)$, $n \geq 2$, vorkommt, lässt sich auch über andere Teilfolgen als in (2.4) nachweisen. Beispielsweise tritt für jedes $k \geq 1$ unter den vier Zahlen $L((10k-4)!)$, $L((10k-3)!)$, $L((10k-1)!)$ und $L((10k+2)!)$ jede der Ziffern 2, 4, 6, 8 auf; ebenso lässt sich nachweisen, dass für jedes $k \geq 1$ unter den vier Zahlen $L((100k+17)!)$, $L((100k+18)!)$, $L((100k+19)!)$ und $L((100k+20)!)$ jede der Ziffern 2, 4, 6, 8 auftritt.

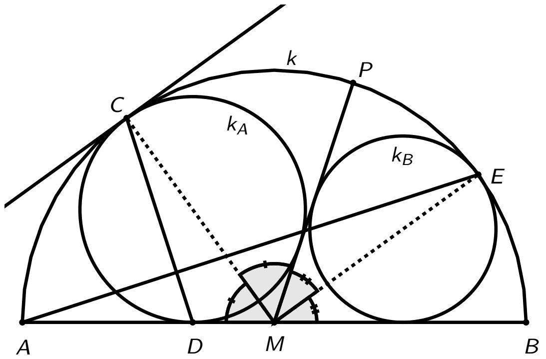
Aufgabe 3

Gegeben ist der Halbkreis k über der Strecke AB mit Mittelpunkt M und ein von A und B verschiedener Punkt P auf k. Der Kreis k_A berührt k im Punkt C, die Strecke MA im Punkt D und außerdem die Strecke MP. Der Kreis k_B berührt k im Punkt E und außerdem die Strecken MB und MP.



Beweise: Die Geraden (AE) und (CD) stehen senkrecht aufeinander.

Vorbemerkung

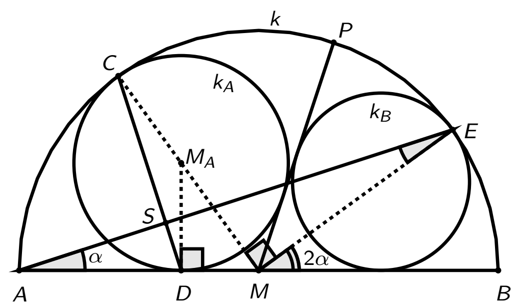


Wenn der Kreis k_A den Halbkreis k von innen im Punkt C berührt, liegt der Mittelpunkt M_A des kleineren Kreises k_A im Inneren der Strecke MC, denn sowohl M_AC als auch MC stehen senkrecht auf der Tangente an k, die durch den Punkt C verläuft. Weil nach Aufgabenstellung der Kreis k_A auch die Strecken MA und MP berührt, liegt M_A auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle PMA$, die durch M verläuft. Der Punkt C ist also der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit k, und D liegt zwischen A und M. Analog lässt sich begründen, dass der Punkt E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BMP$ mit k ist. Wir schließen daraus

$$\sphericalangle EMC = \sphericalangle EMP + \sphericalangle PMC = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle BMP + \sphericalangle PMA) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \quad (3.1)$$

Erster Beweis (Winkelsumme in Dreiecken)

Wir betrachten das gleichschenklige Dreieck $\triangle EAM$ mit Basis AE, dessen Seiten MA, ME Radien des Halbkreises k sind, und benennen die Basiswinkel $\sphericalangle AEM = \sphericalangle MAE =: \alpha$. Es ist dann $\sphericalangle BME = 180^\circ - \sphericalangle EMA = 2 \cdot \sphericalangle MAE$, also $\sphericalangle BME = 2\alpha$. Im Kreis k_A sind M_AC und M_AD Radien, das Dreieck $\triangle CDM_A$ ist also gleichschenklig mit Basis CD, und in der Vorbemerkung



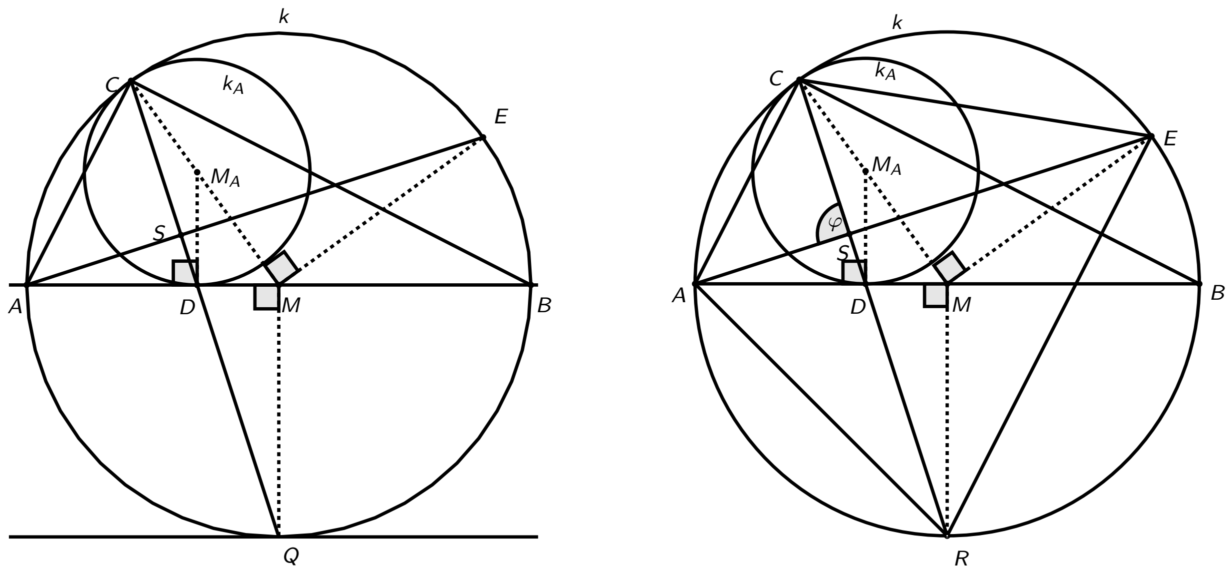
hatten wir begründet, dass M_A auf MC liegt. Es ist zudem $\sphericalangle MDM_A = 90^\circ$, weil nach Voraussetzung MA den Kreis k_A im Punkt D berührt, also Tangente an k_A ist. Mit diesen Überlegungen schließen wir im und am gleichschenkligen Dreieck $\triangle CDM_A$ (erste Zeile der folgenden Gleichungskette), im Dreieck $\triangle MDM_A$ (zweite Zeile) sowie mit $\sphericalangle M_AMD = \sphericalangle CMA$ und (3.1) (dritte und vierte Zeile), dass

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sphericalangle M_A DC = 180^\circ - \sphericalangle CM_A D &= \sphericalangle DM_A M \\ &= 180^\circ - \sphericalangle M_A MD - \sphericalangle MDM_A \\ &= \sphericalangle BME + \sphericalangle EMC - \sphericalangle MDM_A \\ &= \sphericalangle BME + 90^\circ - 90^\circ = 2\alpha, \end{aligned}$$

also $\sphericalangle M_A DC = \alpha$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden (AE) und (CD). Aus der Winkelsumme im Dreieck $\triangle ADS$ folgt mit $\sphericalangle SDA = \sphericalangle CDA$ und $\sphericalangle DAS = \sphericalangle MAE = \alpha$, dass

$$\sphericalangle ASD = 180^\circ - \sphericalangle SDA - \sphericalangle DAS = \sphericalangle MDM_A + \sphericalangle M_A DC - \alpha = \sphericalangle MDM_A = 90^\circ,$$

und das beweist die Behauptung der Aufgabe. □



Skizze 3.1: Bezeichnungen im zweiten und dritten Beweis

Zweiter Beweis (Zentrische Streckung)

Mit k bezeichnen wir in diesem Beweis den Kreis mit Durchmesser AB. Weil nach Aufgabenstellung der Kreis k_A den Kreis k von innen im Punkt C berührt, liegt der Mittelpunkt M_A des kleineren Kreises k_A im Inneren der Strecke MC. Die zentrische Streckung Z habe Zentrum C und den Streckfaktor $\lambda := \overline{MC} \cdot \overline{M_A C}^{-1} > 1$. Diese zentrische Streckung bildet M_A auf M ab und lässt den Punkt C fest; der Punkt D werde unter Z auf den Punkt Q abgebildet. Für eine beliebige zentrische Streckung ist bekannt, dass sie eine Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade, eine Strecke der Länge s auf eine Strecke der Länge $\lambda \cdot s$ und damit auch einen Kreis auf einen Kreis und einen Winkel auf einen kongruenten Winkel abbildet. Unter Z wird demnach der Kreis k_A auf den Kreis k und die Gerade (AB) auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet, die im Punkt Q Tangente an k ist, weil sie orthogonal zur Strecke MQ verläuft. Weil die Tangente und die Gerade (AB) parallel sind, muss auch $\sphericalangle AMQ = 90^\circ$ gelten, der Punkt Q ist also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB mit k; siehe linke Skizze 3.1. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden (AE) und (CD). Dann schließen wir nach dem Satz vom Umkreis- und Mittelpunktswinkel $\sphericalangle SAC = \sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle EMC = 45°$ und $\sphericalangle ACS = \sphericalangle ACQ = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AMQ = 45°$. Aus der Winkelsumme im Dreieck $\triangle CAS$ folgt somit

$$\sphericalangle CSA = 180° - \sphericalangle SAC - \sphericalangle ACS = 180° - 2 \cdot 45° = 90°,$$

und das beweist die Behauptung der Aufgabe. □

Dritter Beweis (Kosinussatz)

Mit k bezeichnen wir in diesem Beweis den Kreis mit Durchmesser AB. Wie in der Vorbemerkung sei M_A der Mittelpunkt des Kreises k_A, der Punkt M_A liegt auf der Strecke MC. Es sei der Punkt R der Schnittpunkt der Geraden (CD) mit der Mittelsenkrechten von AB, die durch M verläuft. Dann sind die Dreiecke $\triangle CDM_A$ und $\triangle CRM$ ähnlich zueinander, weil die Winkel $\sphericalangle DCM_A = \sphericalangle RCM$ und $\sphericalangle CM_AD = \sphericalangle CMR$ übereinstimmen. Auf Grund der Ähnlichkeit folgt aus $\overline{M_AC} = \overline{M_AD}$ (Radien in k_A) auch $\overline{MC} = \overline{MR}$, und der Punkt R liegt auf dem Kreis k; siehe rechte Skizze 3.1.
Wir betrachten das Sehnenviereck $\square AREC$. In ihm gilt

$$\overline{CA}^2 + \overline{RE}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MR}^2 + \overline{ME}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{EC}^2; \tag{3.2}$$

hierbei folgt die erste Gleichung, weil $\overline{RE} = \overline{BC}$ (Drehung mit Zentrum M um $90°$ im Uhrzeigersinn und (3.1)). Die zweite Gleichung folgt aus dem Satz von Pythagoras für das Dreieck $\triangle ABC$, das nach dem Satz von Thales rechtwinklig ist. Die dritte Gleichung nutzt $\overline{MA} = \overline{MR} = \overline{ME} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ und die vierte Gleichung den Satz von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ARM$ und $\triangle ECM$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden (AE) und (CD); wir setzen $\varphi := \sphericalangle CSA = \sphericalangle RSE$, also $\sphericalangle ASR = \sphericalangle ESC = 180° - \varphi$, mit $0° < \varphi < 180°$. Aus dem Kosinussatz in den Dreiecken $\triangle CAS$, $\triangle RES$, $\triangle ARS$, $\triangle ECS$ folgern wir mit (3.2)

$$\begin{aligned} &\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 - 2 \cdot \overline{SA} \cdot \overline{SC} \cdot \cos\varphi + \overline{SR}^2 + \overline{SE}^2 - 2 \cdot \overline{SR} \cdot \overline{SE} \cdot \cos\varphi \\ &= \overline{CA}^2 + \overline{RE}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{EC}^2 \\ &= \overline{SA}^2 + \overline{SR}^2 + 2 \cdot \overline{SA} \cdot \overline{SR} \cdot \cos\varphi + \overline{SE}^2 + \overline{SC}^2 + 2 \cdot \overline{SE} \cdot \overline{SC} \cdot \cos\varphi, \end{aligned}$$

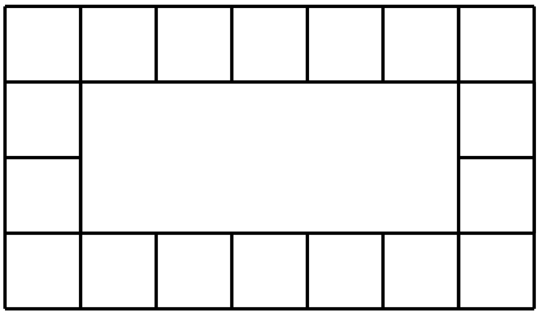
was äquivalent ist zu

$$0 = 2 \cdot (\overline{SA} + \overline{SE}) \cdot (\overline{SC} + \overline{SR}) \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{CR} \cdot \cos\varphi.$$

Wegen $\overline{AE}, \overline{CR} > 0$ bedeutet dies, dass $\varphi = 90°$.
Das beweist die Behauptung der Aufgabe. □

Aufgabe 4

Für ganze Zahlen $m,n \geq 3$ besteht ein $m \times n$-Rechteckrahmen aus den $2m + 2n - 4$ Randquadraten eines in $m \times n$ Quadrate unterteilten rechteckigen Feldes. Die Abbildung zeigt beispielhaft einen 4×7-Rechteckrahmen. Auf einem solchen $m \times n$-Rechteckrahmen spielen Renate und Erhard nach folgenden Regeln, wobei Renate beginnt:



Wer am Zug ist, färbt eine rechteckige Fläche, die aus einem einzelnen weißen Quadrat oder mehreren weißen Quadraten besteht; gibt es danach noch weiße Quadrate, so müssen diese weiterhin eine zusammenhängende Fläche bilden.
Wer den letzten Zug macht, hat gewonnen. Bestimme alle Paare (m, n), für die Renate eine Gewinnstrategie hat.

Anmerkungen: Zwei Quadrate, die sich nur an einer gemeinsamen Ecke berühren, sind nicht zusammenhängend. Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

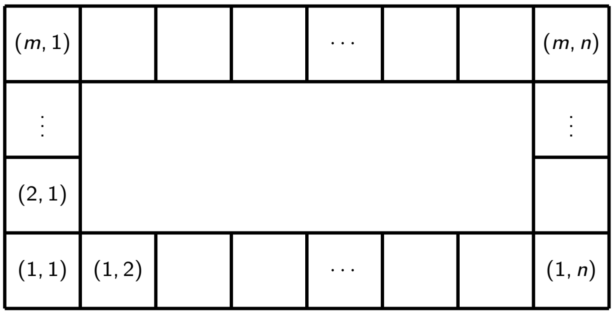
Behauptung

Renate hat für alle Paare (m, n), $m, n \geq 3$, eine Gewinnstrategie.

Beweis (Angabe einer konkreten Gewinnstrategie)

Gegeben sei ein Paar (m, n) ganzer Zahlen mit $m, n \geq 3$. Indem wir den Rechteckrahmen eventuell um 90° drehen, können wir $m \leq n$ voraussetzen. Wir gruppieren die einzelnen Quadrate in diejenigen der linken bzw. rechten Senkrechten (am Beginn jeweils m Quadrate) und in diejenigen der unteren bzw. oberen Waagrechten (am Beginn jeweils n Quadrate). Dass wir damit die einzelnen Quadrate in den vier Ecken doppelt zählen, wird sich im Lauf des Spiels nicht als hinderlich erweisen.
Wir skizzieren die Grundgedanken von Renates Gewinnstrategie: Renate führt einen ersten Zug durch; nun ist Erhard am Zug. Renate kann mit jedem ihrer Züge erzwingen, dass danach Erhard nur auf einer von genau zwei Seiten des Rechteckrahmens Züge ausführen kann, die nach den Regeln des Spiels zulässig sind. (Wir sagen auch, diese beiden Seiten seien zulässig. Die beiden zulässigen Seiten werden im Lauf des Spiels wechseln.) Nach jedem von Erhards Zügen folgt Renate (bis auf einen Zug von Renate im Fall $m < n$) einem Symmetrieprinzip, sie führt also Erhards Zug symmetrisch auf der jeweils anderen zulässigen Seite aus. Durch die Züge von Erhard und Renate werden die weißen Quadrate auf beiden zulässigen Seiten reduziert. Wenn es auf beiden zulässigen Seiten nur noch ein oder kein weißes Quadrat mehr gibt, dann wechseln die beiden zulässigen Seiten (Ausnahme ist der eine bereits erwähnte Zug von Renate im Fall $m < n$).

Der Beweis gliedert sich wie folgt: Wir betrachten zunächst eine Spielposition (wir nennen sie „G_k-Position“), die Renate strukturell im Lauf jedes Spiels nach einem ihrer Zügen erreichen kann, und zeigen, wie Renate aus dieser Spielposition heraus das Spiel gewinnt, unabhängig von Erhards weiteren Zügen. Dann betrachten wir die Konstellationen $m = n$ bzw. $m < n$ und zeigen jeweils, wie Renate unabhängig von Erhards Zügen im Spiel nach einem ihrer Züge eine G_k-Position erreicht.



Die $2m + 2n - 4$ einzelnen Quadrate des $m \times n$-Rechteckrahmens bezeichnen wir wie in der nebenstehenden Skizze (ohne Furcht vor Verwechslung mit der Bezeichnung für das Parameterpaar (m, n)): das linke untere Quadrat heiße $(1, 1)$, die weiteren Quadrate waagrecht daneben fortschreitend $(1, 2)$, ..., $(1, n)$, die ausgehend von $(1, 1)$ senkrecht darüber liegenden weiteren Quadrate fortschreitend $(2, 1)$, ..., $(m, 1)$ und entsprechend die weiteren Quadrate des oberen Teil des Rechteckrahmens von links nach rechts $(m, 2)$,...,(m, n) bzw. die weiteren Quadrate des rechten Teil des Rechteckrahmens von unten nach oben $(2, n)$,...,(m, n).

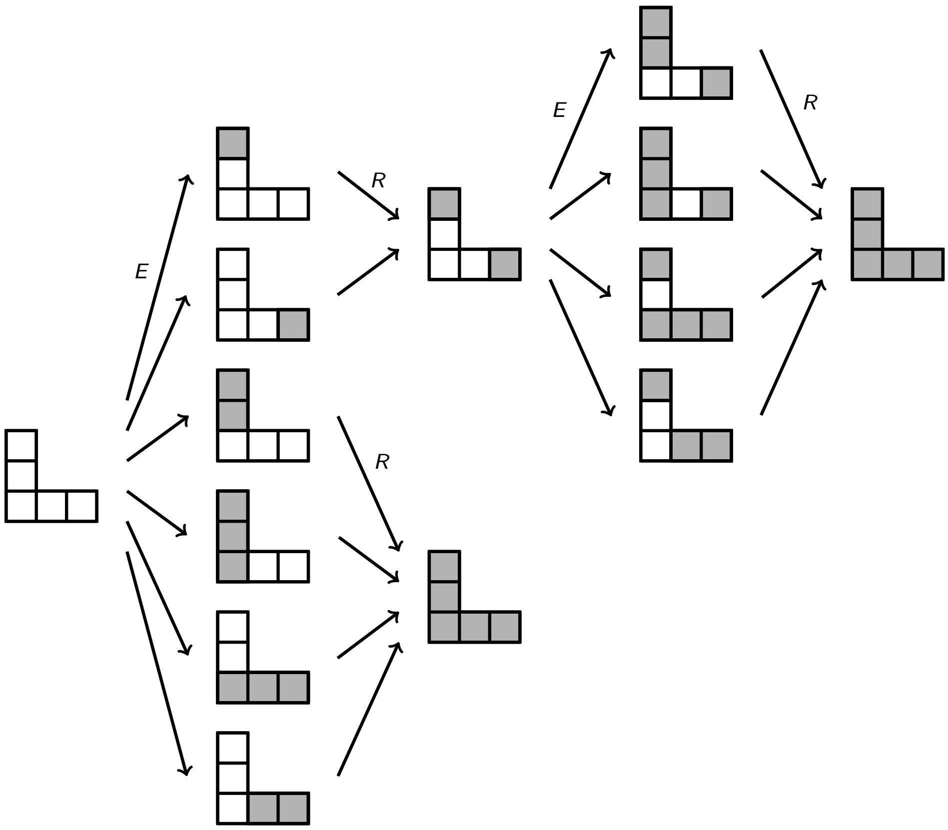
Wir betrachten nun zunächst die folgende Spielposition („G_k-Position“, „G“ wie Gleichschenklige Ecke oder Gewinn) um $(1, 1)$, wobei $2 \leq k \leq m$:

Nach einem Zug von Renate mögen genau die symmetrisch angeordneten $2k-1$ weißen Quadrate $(k, 1)$,$(k-1, 1)$,...,$(2, 1)$,$(1, 1)$,$(1, 2)$,...,$(1, k-1)$,$(1, k)$ verbleiben; die anderen Quadrate des Rechteckrahmens müssen in früheren Zügen gefärbt worden sein. Zulässige Seiten des Rechteckrahmens sind hier klarerweise die linke Senkrechte und die untere Waagrechte. Wir zeigen, dass Renate ausgehend von dieser Position gewinnt, unabhängig davon, wie Erhard in seinen weiteren Zügen zieht.

- Erhard kann nicht alle verbleibenden weißen Quadrate färben, weil sie keine rechteckige Fläche bilden. Er färbt daher in seinem nächsten Zug auf genau einer der beiden zulässigen Seiten eine rechteckige Fläche, die aus $k-j$ weißen Quadraten, $0 \leq j \leq k-1$, besteht und an ihrem einen Ende entweder das Quadrat $(k, 1)$ oder das Quadrat $(1, k)$ umfasst. Für Renates darauffolgenden Zug unterscheiden wir zwei Fälle.
- Erster Fall ($j \geq 2$): Färbt Erhard wie beschrieben $k-j$ weiße Quadrate auf einer der beiden zulässigen Seiten des Rechteckrahmens, so färbt Renate die entsprechenden $k-j$ weißen Quadrate auf der anderen zulässigen Seite (Symmetrieprinzip). Die Anzahl der weißen Quadrate hat sich durch diesen Zug von Erhard und Renates darauffolgendem Zug um $2(k-j) \geq 2$ Quadrate verringert. Der Parameter k nehme jetzt neu den Wert j an. Renates Zug führt zu einer G_k-Position. Für den nächsten Zug von Erhard und Renate

können wir also mit Betrachtungen wie im ersten Bullet weitermachen. Nach endlich vielen Zügen muss der zweite Fall eintreten.

- Zweiter Fall ($0 \leq j \leq 1$): Färbt Erhard wie beschrieben $k-j$ weiße Quadrate auf der linken Senkrechten bzw. unteren Waagrechten, so verbleiben nach seinem Zug genau die $k-1+j$ weißen Quadrate $(1, 2-j)$,$(1, 3-j)$,...,$(1, k)$ bzw. $(2-j, 1)$,$(3-j, 1)$,...,$(k, 1)$. Sie bilden eine waagrechte bzw. senkrechte rechteckige Fläche, die Renate in ihrem nächsten Zug komplett färbt. Renate hat also den letzten Zug des Spiels gemacht und damit gewonnen.



Skizze 4.1: G_3-Position mit den möglichen Zügen von Erhard (E) und Renate (R)

Skizze 4.1 zeigt die Gewinnstrategie von Renate für das Beispiel einer G_3-Position; in dem jeweiligen Zug werden die graue Quadrate gefärbt. Der Fall einer G_k-Position um eine der anderen drei Ecken des Rechtecks lässt sich mit entsprechender Änderung der zulässigen Seiten ganz analog behandeln.

Wir können darauf aufbauend Renates Gewinnstrategie für den Fall $m = n$ beschreiben: In ihrem ersten Zug färbt Renate das Quadrat (m, m). Zulässige Seiten des Rechteckrahmens sind nun klarerweise die rechte Senkrechte und die obere Waagrechte. Wir setzen den Parameter k auf $m-1$.

- Solange $k \geq 2$: Erhard kann nicht alle verbleibenden weißen Quadrate färben, weil sie keine rechteckige Fläche bilden. Er färbt daher in seinem nächsten Zug auf genau einer der beiden zulässigen Seiten eine rechteckige Fläche, die aus $k-j$ weißen Quadraten, $0 \leq j \leq k-1$, besteht und an ihrem einen

Ende entweder das Quadrat (k, m) oder das Quadrat (m, k) umfasst. Renate färbt die entsprechenden $k - j$ weißen Quadrate auf der anderen zulässigen Seite (Symmetrieprinzip). Die Anzahl der weißen Quadrate hat sich durch diesen Zug von Erhard und Renates darauffolgendem Zug um $2(k - j) \geq 2$ Quadrate verringert. Der Parameter k nehme jetzt neu den Wert j an.

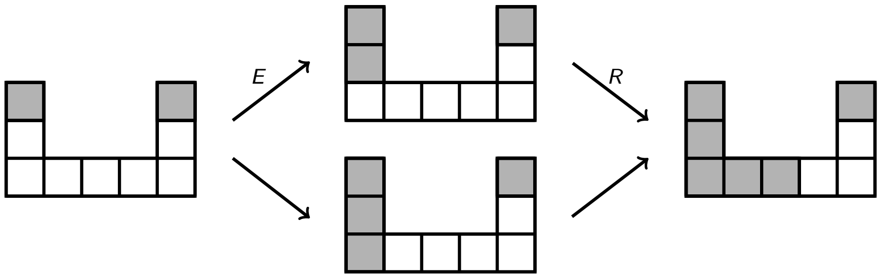
- Es ist $0 \leq k \leq 1$, nach Renates letztem Zug ist eine G_{m-1+k}-Position entstanden mit der linken Senkrechten und der unteren Waagrechten als zulässigen Seiten, und Erhard ist am Zug. Wir haben oben beschrieben, wie Renate ausgehend von dieser Position das Spiel gewinnt.

Wir beschreiben abschließend Renates Gewinnstrategie für den Fall $m < n$: In ihrem ersten Zug färbt Renate die rechteckige Fläche der oberen Waagrechten, das heißt, die Quadrate $(m, 1)$,$(m, 2)$,...,(m, n). Zulässige Seiten des Rechteckrahmens sind nun die linke und die rechte Senkrechte. Wir setzen den Parameter k auf $m - 1$; nach Voraussetzung der Aufgabenstellung ist $k \geq 2$.

- Erhard kann nicht alle verbleibenden weißen Quadrate färben, weil sie keine rechteckige Fläche bilden. Er färbt daher in seinem nächsten Zug auf genau einer der beiden zulässigen Seiten eine rechteckige Fläche, die aus $k-j$ weißen Quadraten, $0 \leq j \leq k - 1$, besteht und an ihrem einen Ende entweder das Quadrat $(k, 1)$ oder das Quadrat (k, n) umfasst. Für Renates darauffolgenden Zug unterscheiden wir zwei Fälle.
- Erster Fall ($j \geq 2$): Färbt Erhard wie beschrieben $k - j$ weiße Quadrate auf einer der beiden zulässigen Seiten des Rechteckrahmens, so färbt Renate die entsprechenden $k - j$ weißen Quadrate auf der anderen zulässigen Seite (Symmetrieprinzip). Die Anzahl der weißen Quadrate hat sich durch diesen Zug von Erhard und Renates darauffolgendem Zug um $2(k - j) \geq 2$ Quadrate verringert. Der Parameter k nehme jetzt neu den Wert j an. Für den nächsten Zug von Erhard und Renate können wir also mit Betrachtungen wie im ersten Bullet weitermachen. Nach endlich vielen Zügen muss der zweite Fall eintreten.
- Zweiter Fall ($0 \leq j \leq 1$): Färbt Erhard wie beschrieben $k-j$ weiße Quadrate auf der linken Senkrechten bzw. rechten Senkrechten, so färbt Renate abweichend vom Symmetrieprinzip Quadrate auf der unteren Waagrechten. Solch ein Spielzug ist zulässig, wenn die von Renate gefärbte rechteckige Fläche an ihrem einen Ende das Quadrat $(1, 2 - j)$ bzw. das Quadrat $(1, n - 1 + j)$ und ggf. jeweils benachbarte Quadrate umfasst. Tatsächlich färbt Renate die $n - 1 - (k - j) > 0$ weißen Quadrate $(1, 2 - j)$,$(1, 3 - j)$,...,$(1, n - k)$ bzw. die $n-1-(k-j) > 0$ weißen Quadrate $(1, k+1)$,$(1, k+2)$,...,$(1, n-1+j)$. Nach diesem Zug von Renate entsteht eine G_k-Position um $(1, n)$ bzw. $(1, 1)$ mit der unteren Waagrechten und der rechten bzw. linken Senkrechten als zulässigen Seiten, und Erhard ist am Zug. Wir haben oben beschrieben, wie

Renate ausgehend von dieser Position das Spiel gewinnt.

Skizze 4.2 zeigt für eine mögliche Zugfolge auf einem 4×5-Rechteckrahmen Renates Gewinnstrategie; in dem jeweiligen Zug werden die graue Quadrate gefärbt. Die im ersten Zug von Renate gefärbten Quadrate in der oberen Waagrechten werden nicht gezeigt.



Skizze 4.2: Mögliche Züge von Erhard (E) und Renate (R) auf einem 4×5-Rechteckrahmen; Renates Gewinnstrategie führt hier zu einer G_2-Position

Das beweist die Behauptung. □

Wir danken Herrn StD a.D. Karl Fegert und Herrn OStR Dr. Robert Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 159

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 7: Quirin Fritsch 3, Christina Karst 20, Felix Pick 7,
Sina Marie Uherek Reyes 12;
Kl. 8: Robert Schmitt 3;
Kl. 9: Lisa Schäfer 11;

Bingen, Stefan-George Gymnasium
Kl. 6: Jonas Döring 8;
Kl. 7: Tim Jockers 20;

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 7: Philip Mühlbeyer 8;

Grünstadt, Leininger-Gymnasium
Kl. 7: Stefan Wolfert 2,5;
Kl. 9: Tim Radünz 15;
Kl. 9: Niklas Gelhausen 14;

Idar-Oberstein, Göttenbach-Gymnasium
Kl. 11: Joschua Jung 18;

Ingelheim, Sebastian-Münster Gymnasium:
Kl. 12: Elanor Kondla 18;

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:
Kl. 12: Kadir Koçyiğit 17;

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 7: Jonas Dürkes 19;
Kl. 8: Mara Schollmeyer 2;

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 10: Lea Amend 19, Victor Mayer 4;

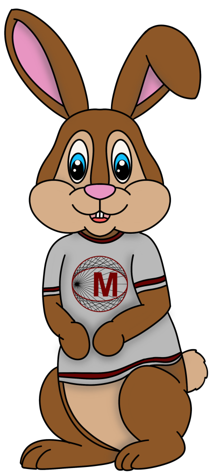
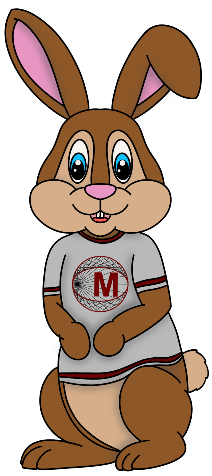
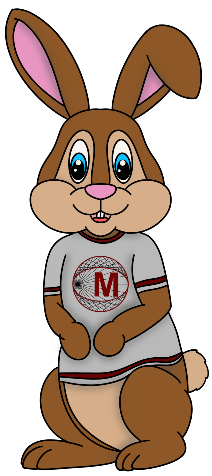
Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 8: Ioan Salaru 20

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 7: Nina Pucklitsch 14,5, Martin Schroff 17
Kl. 9: Daniel Laibach Muñiz 18,5;
Kl. 10: Johannes Kiehn 12;

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 10: Jasmin Borrmann 4;
Kl. 11: Emilie Borrmann 3;

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 12: Nils Angel 16;

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 10: Mai Linh Dang 16;

Die MONOID-Redaktion wünscht
allen L(o)eserinnen und L(o)esern
schöne Osterferien!

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2025/26 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Soziale Netzwerke:** Monoid ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
  `www.facebook.com/monoid.matheblatt`
  `www.facebook.com/monoid.redaktion`
  `www.instagram.com/monoid.matheblatt`
  Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu Monoid finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
  Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Claudia Jockers, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf mit freundlicher Unterstützung von Sirin Somrani
Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.
Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Jahrgang 45 Heft 161 Mär. 2025

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid