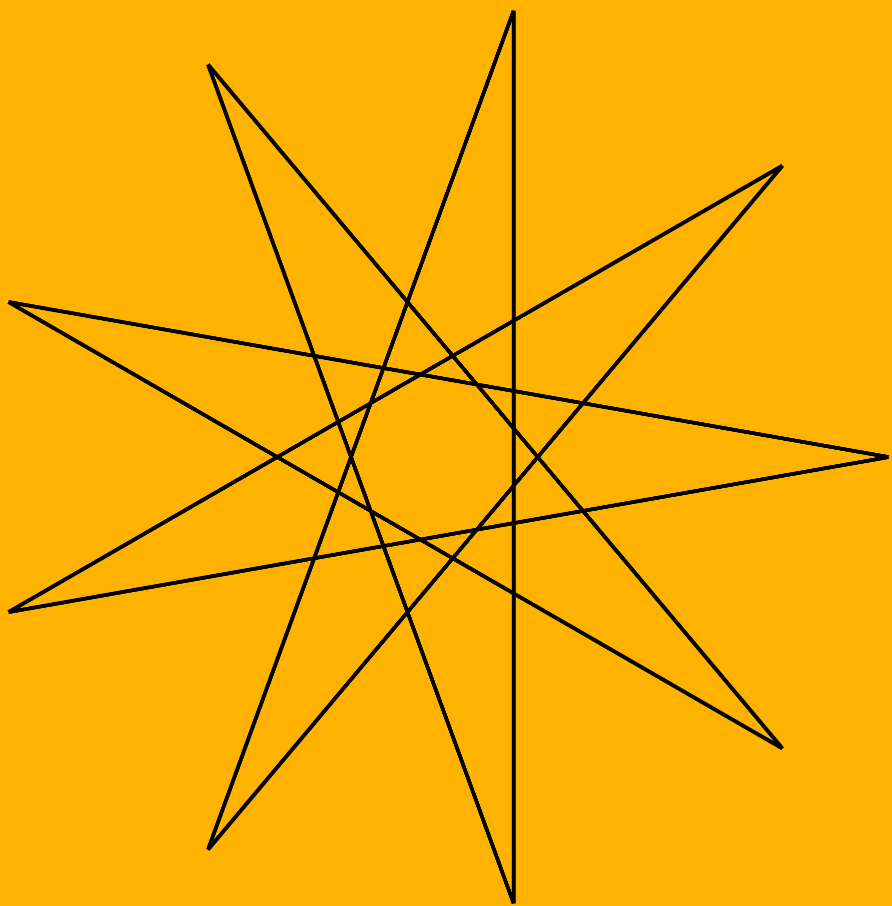
Jahrgang 45 Heft 163 Sep. 2025

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. November 2025.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

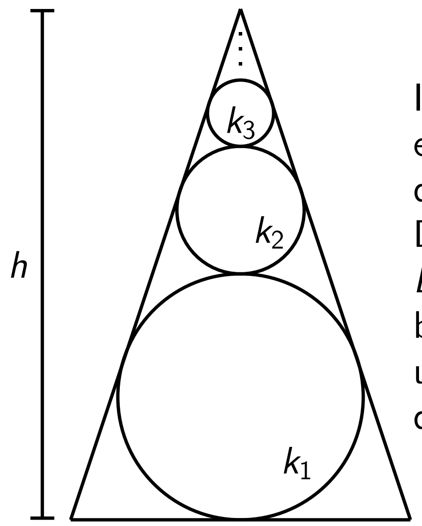
Einladung zur Monoid-Jahresfeier

Alle Freunde und Förderer von Monoid sind herzlich eingeladen, an der Monoid-Feier 2025 teilzunehmen. Dabei werden unter anderem Preise an erfolgreiche Löserinnen und Löser des Schuljahres 2024/25 vergeben. Die Feier findet am

Samstag, den 15. November 2025,
ab 10 Uhr,
in der Alten Mensa der Universität Mainz

statt. Den Festvortrag „Somwhere under the Rainbow“ wird Prof. Dr. Manfred Lehn halten.
Alle Preisträgerinnen und Preisträger werden auch gesondert per Post eingeladen.
Die Veranstaltung wird musikalisch von Herr Schmauch vom Frauenlob Gymnasium Mainz begleitet.
Im Anschluss an die Feier, gegen 12:30 Uhr, sind alle Gäste zu einem kleinen Imbiss und Austausch herzlich eingeladen.

Eine mathematische Miniatur
Summe unendlich vieler Kreisumfänge



In einem gleichschenkligen Dreieck D der Höhe h sei eine unendliche Folge von Kreisen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ mit den Radien $r_1, r_2, r_3, \ldots$ gegeben, für die gilt:
Der Kreis k_1 berührt die drei Seiten des Dreiecks D und den Kreis k_2; jeder Kreis k_i, $i = 2, 3, 4, \ldots$ berührt zwei Seiten von D sowie die Kreise K_{i-1} und K_{i+1}. Wie groß ist die Summe aller Umfänge U_i der Kreise K_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$?

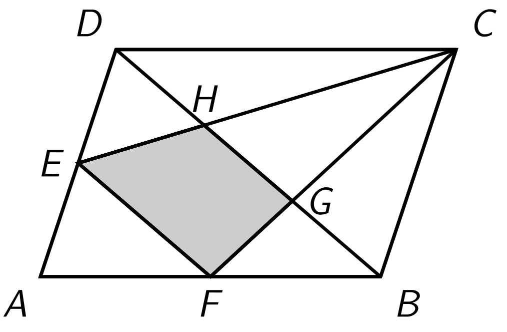
Lösung

Das Dreieck D ist gleichschenklig und daher liegen die Punkte, in denen sich die Kreise k_i berühren, auf der Höhe h – der Symmetrieachse von D. Daraus folgt für die Summe der Kreisumfänge

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 + \ldots = \pi(2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \ldots) = \pi \cdot h.$$

H. F.

Die besondere Aufgabe
Verhältnis von Parallelogrammflächen



In einem Parallelogramm $ABCD$ seien E und F die Mittelpunkte der Seiten AD und AB; G und H seien die Schnittpunkte der Diagonalen BD mit den Strecken CE und CF.

Dann gilt für jedes Parallelogramm $ABCD$:

(1) $\frac{|EFGH|}{|ABCD|} = \frac{5}{24}$.

Dabei sind mit $|AB|, |ABC|, |ABCD|$ die Länge einer Strecke, die Fläche eines Dreiecks, die Fläche eines Vierecks bezeichnet.

Beweis

(2) Es ist (vgl. Figur): $|EFGH| = \frac{1}{2}|ABCD| - |AFE| - |DEH| - |BGF|$.

(3) Aus der Voraussetzung hinsichtlich E folgt: Die Strecke EF und die Diagonale DB sind parallel und daher sind die Dreiecke AFE und ABD ähnlich mit dem Ähnlichkeitsfaktor 1 : 2. Dann gilt für ihre Flächen:
$|AFE| = \frac{1}{4} \cdot |ABD| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot |ABCD|$.

(4) Im Dreieck ACD ist CE Mittellinie aus C und BD Mittellinie aus D. Für den Schnittpunkt H dieser Mittellinien gilt: H zerlegt die Strecke CE im Verhältnis 1 : 2 von E aus, so dass $|EH| = \frac{1}{3}|EC|$ ist. Somit gilt:
$|DEH| = \frac{1}{3}|DEC| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|DAC| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|ABCD|$.

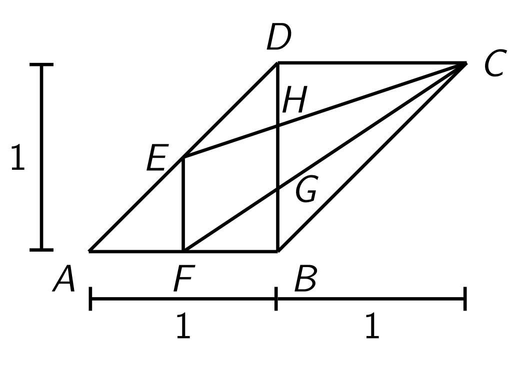
(5) Ganz entsprechend zeigt man: $|BGF| = \frac{1}{12}|ABCD|$.

Setzt man nun die Ergebnisse von (3) - (5) in (2) ein, so erhält man

(1) $|EFGH| = \frac{5}{24}|ABCD|$. H. F.

Sehr elegant hat unser Redaktionsmitglied Achim Klenke dieses Verhältnis mit Symmetrieoperationen wie folgt begründet:

Das Verhältnis der Flächen ändert sich nicht durch Strecken, Scheren oder Drehen. Wir strecken, scheren und drehen also, bis das Parallelogramm die Grundseite 1, die Höhe 1 und einen rechten Winkel bei $\sphericalangle ABD$ hat und somit die Fläche 1. Das Trapetz $EFGH$ besitzt dann die Fläche $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$.



Buchstabenrätsel
Überlegen ist besser als Knobeln

(1) $A + B = C$
(2) $C : D = D$
(3) $B \cdot D = E$
(4) $G - H = J$
(5) $A - B = G$
(6) $H > J$

Wie lauten die fünf Gleichungen, wenn verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten und nur einziffrige Zahlen größer null vorkommen?

H. F.

Lösung

Aus (2) folgt $C = 4$ und $D = 2$ oder $C = 9$ und $D = 3$. Wir wollen annehmen, es sei $C = 4$. Aus (1) ergeben sich folgende Möglichkeiten:
$A = 1, B = 3$ entfällt, da sonst mit (5) G negativ wäre;
$A = 2, B = 2$ entfällt, da verschiedene Buchstaben nicht die gleiche Zahl bedeuten dürfen;
$A = 3, B = 1$ entfällt wegen (3), da sonst $D = E$ wäre.
Der Fall $C = 4$ kann nicht eintreten. Somit gilt: $C = 9$ und $D = 3$.
Betrachten wir nun (3). Es ist $E \leq 9$. Aber $E = 9$ kann wegen $C = 9$ nicht eintreten. Somit ist $E < 9$. Aus (3) ergeben sich dann wegen $B \cdot 3 = E$ zwei Möglichkeiten:
$B = 1$ entfällt, da sonst $D = E$ wäre; es bleibt
$B = 2$ dieser Fall muss eintreten.
Somit gilt $B = 2$ und daher $E = 6$.
Aus (1) folgt nun sofort $A = 7$ und aus (5) folgt $G = 5$.
Da nun nur noch die Zahlen $1, 4$ und 8 nicht aufgetreten sind, heißt (4):

$5 - H = 1 \Rightarrow H = 4, J = 1$ oder
$5 - H = 4 \Rightarrow H = 1$ – im Widerspruch zu (6)
$5 - H = 8 \Rightarrow H = -3$ – im Widerspruch zu $H > 0$.

Also ist $H = 4, J = 1$.

H. F.

Was uns über den Weg gelaufen ist

Berechne mit einem Taschenrechner die Zahl z

$$z = \pi - \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

und du wirst eine Überraschung erleben!

Lösung

Es ist $z = 0{,}000000001$ (Taschenrechner-Wert) – es war der berühmte indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920), der diese erstaunliche Näherung für π „konstruiert" hat. H. F.

Durch ein Labyrinth aus Widersprüchen zum Ziel

von Hartwig Fuchs

Der Mathematiker Prof. Quaoar pflegt seine Vorlesungen oft mit einem Zahlenrätsel zu beschließen. Kürzlich war es dieses:

Prof. Q.: Eine vierziffrige natürliche Zahl n mit lauter verschiedenen Ziffern, von denen keine die Null ist, erfüllt die Bedingungen:

(1) Die letzte Ziffer von n ist die dritte Potenz einer Primzahl.

(2) Die Summe der letzten drei Ziffern von n ist prim.

(3) Die Summe der mittleren zwei Ziffern von n ist prim und

(4) sie ist um 2 größer als die Summe der beiden ersten Ziffern von n.

(5) Die Differenz der größten und der zweit größten Ziffer von n ist prim.

(6) Die Spiegelzahl der Zahl n ist eine Primzahl (so ist z. B. 1234 die Spiegelzahl von 4321).

Wie heißt n?

Zu Beginn von Q.s nächster Vorlesung behauptet der Student Talentino, er kenne die Lösung des Zahlenrätsels.

Prof. Q.: Worauf warten Sie? Lösen Sie!

Talentinos Herleitung der Lösung

Es sei $n = efgh$, wobei e, f, g und h die Ziffern von n in Dezimaldarstellung sind. Tritt in meiner Argumentation ein Widerspruch auf, so schreibe ich: Wi.

Aus (1) folgt: Wegen $h < 10$ hat die Gleichung $h = p^3$ nur die Lösungen $p = 1$ und $p = 2$.

Für $p = 1$ ist p nicht prim – Wi zu (1). Also ist $p = 2$ und daher $h = 8$.

Eine der Ziffern e, f und g sei 9 oder 7.

Wegen $h = 8$ gilt in beiden Fällen: größte Ziffer $-$ zweitgrößte Ziffer $= 1$ – Wi zu (5).

(7) Folglich gilt: $e, f, g \leq 6$ und daher auch $f + g \leq 5 + 6 = 11$ wegen (3).

Es sei nun $e = 2, 4, 5$ oder 6.

Dann ist die Spiegelzahl $hgfe$ von n nicht prim – Wi zu (6). Somit ist $e = 1$ oder $e = 3$. Aus (4) folgt: $f + g = e + f + 2$ und daher $g = e + 2$.

(8) Also gilt: $e = 1$ und $g = 3$ oder $e = 3$ und $g = 5$.

Es sei $e = 1$ und $g = 3$.
Nach (3) ist dann $f + g = f + 3$ prim und daher $f + 3 = 5, 7$ oder 11 wegen (7). Aus $f + 3 = 5$ folgt $f = 2$. Dann ist die Zahl $hgfe = 8321 = 53 \cdot 157$ nicht prim – Wi zu (6).
Es sei $f + 3 = 7$. Dann ist $f + 3 + h = 7 + 8 = 15$ nicht prim – Wi zu (2). Für $f + 3 = 11$ ist $f = 8$ – Wi zu (7).
Nun sei $e = 3$ und $g = 5$.
Nach (3) ist $f + g = f + 5$ prim. Mit (7) folgt: $f = 2$ oder $f = 6$. Für $f = 2$ ist $hgfe = 8523$ ein Vielfaches von 3 – Wi zu (6).
Für $f = 6$ ist $hgfe = 8563$ eine Primzahl.
Damit ist $n = efgh = 3658$ die gesuchte Zahl – es ist ein Kinderspiel zu zeigen, dass sie neben (6) auch jede der Bedingungen (1) - (5) erfüllt.
Talentino abschließend mit einem Lächeln: So, das war's!

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

Adam Hart-Davis: Fibonaccis Kaninchen

Auf 176 Seiten möchte Adam Hart-Davis anhand von 50 mathematischen Entdeckungen einen Weg durch die historische Entwicklung der Mathematik aufzeigen. Der Autor, ein britischer Chemiker, hat sich als Wissenschaftsjournalist das Ziel gesetzt, naturwissenschaftliche Erkenntnisse einem breiten Publikum zugänglich zu machen. Im vorliegenden Buch über die Mathematik geht er chronologisch vor und beginnt mit dem aus der Steinzeit stammenden und 1950 im Kongo entdeckten Ishango-Knochen mit angeordneten Einkerbungen und endet 2018 mit der von Forschern entdeckten neuen Form eines Körpers, den sie Scutoid nannten.
Bei der zur Verfügung stehenden geringen Seitenzahl muss natürlich eine Auswahl getroffen werden. Das Problem, welche Entdeckungen ins Buch aufgenommen wurden, wurde vom Autor so gelöst, dass quer durch die Mathematikgeschichte immer wieder spannende Probleme aus den verschiedensten mathematischen Teilgebieten ausgewählt wurden.
Alle 50 Entdeckungen werden sehr knapp auf jeweils drei Seiten kurz vorgestellt und zusätzlich zur Auflockerung illustriert. Dies genügt, um einen ersten Einblick zu erhalten, worum es dabei geht. Für jemanden, der zu einzelnen Themen gerne noch mehr erfahren würde, wären dann jedoch Literaturtipps für populärwissenschaftlich verständliche Bücher wünschenswert gewesen. Ein Verweis auf weiterführende Literatur fehlt jedoch leider gänzlich.

Trotzdem schätzt der Rezensent das Buch als lesenswert ein, da der Autor nicht nur die üblicherweise in entsprechenden Übersichtsbüchern angesprochenen Themenfelder aufgreift und im Rahmen der Vorstellung der 50 Entdeckungen auch grundlegende mathematische Fragen, wie z. B. das Konzept des Beweisens anspricht.
Das Ziel auch mathematisch unbeleckten Menschen spannende Entdeckungen der Mathematik nahezubringen, hat jedoch manchmal kleinere mathematische Ungenauigkeiten zur Folge. So ist z. B. die Definition des Begriffs „Primzahl“ im Glossar zu bemängeln, bei der als Grundmenge die Menge der natürlichen Zahlen gewählt und unbedingt die Zahl 1 als mögliche Primzahl ausgeschlossen werden sollte, damit z. B. die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist.
Einzelne kleine Unsauberkeiten tun der Freude, mit der man das Buch lesen wird, jedoch keinen Abbruch, sorgen aber bei der Bewertung dafür, dass nicht die Bestnote vergeben werden kann.

Fazit

Es ist festzuhalten, dass dem Autor ein unterhaltsamer erster Einstieg in spannende mathematische Fragestellungen gelungen ist, der an vielen Stellen anregen kann, sich mit den genannten Entdeckungen intensiver zu befassen. Der Rezensent wird es jedenfalls für die Schulbibliothek seiner Schule anschaffen lassen.
Gesamtbeurteilung: gut ☺ ☺

Angaben zum Buch

Adam Hart-Davis: Fibonaccis Kaninchen und 49 andere Entdeckungen, die die Mathematik revolutionierten, Knesebeck 2020, ISBN 978-3-95728-443-3, PB 176 Seiten
Art des Buches: Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau: sehr gut verständlich
Altersempfehlung: ab 12 Jahren (je nach Kapitel)

Ein minimalistischer Beweis

Es gibt irrationale Zahlen a und b, für die a^b eine rationale Zahl ist.

Nachweis

Es seien $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$, wobei $\sqrt{2}$ die irrationale Zahle 1,414213562 ... ist. Dann ist $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ und es gilt: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.
Also gilt die Behauptung. H. F.

Theon von Smyrnas
Näherungen für $\sqrt{2}$
von Hartwig Fuchs

Schon in der Frühzeit der Mathematik vor über 3000 Jahren hat man rationale Näherungen $a = c/d$ mit ganzen Zahlen c und d für $\sqrt{2}$ berechnet.* Von den Babyloniern sind uns zwei im damals verbindlichen Hexagesimalsystem (mit der Basis 60) überliefert: Die im Vergleich mit $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ schon recht gute Näherung $a = 1 + 25/60 \approx 1{,}4167$ und der erstaunliche Wert
$a = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \approx 1{,}414213$.
Da konnte Pythagoras (um 580 v. Chr.) mit seiner Näherung $a = 7/5 = 1{,}4$ nicht mithalten.
Theon von Smyra (um 100 n. Chr.) war da schon viel weiter. Er hatte bereits eine einfache Methode, mit der er beliebig gute Näherungen für $\sqrt{2}$ berechnen konnte.

Theon behauptete:

(1) Die Brüche $a_n = c_n/d_n$ mit $a_0 = 1/1$ sind Näherungen für $\sqrt{2}$, wenn für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt: $a_{n+1} = (c_n + 2d_n)/(c_n + d_n)$ – wobei a_{n+1} eine bessere Näherung als a_n ist.

Beispiel 1

Ein Anfang der mit $a_0 = c_0/d_0$ beginnenden Theonfolge $a_n = c_n/d_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, von Näherungen samt ihren Abständen A_n von $\sqrt{2}$ zur Bestätigung, dass die Näherungen a_n mit wachsendem n immer besser werden:

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	1/1	3/2	7/5	17/12	41/29	99/70	239/169
A_n	$\approx 0{,}4$	$\approx 0{,}09$	$\approx 0{,}01$	$\approx 0{,}002$	$\approx 0{,}0004$	$\approx 0{,}00007$	$\approx 0{,}00001$

Ein Beweis von Theons Regel (1)

Da Theons Beweis vermutlich verloren ist – falls er denn überhaupt einen gehabt hat – soll (1) nun hier mit heutigen Methoden hergeleitet werden.
Das geschieht ausgehend von dem folgenden Satz.

(2) Satz: Für die Zähler und Nenner der Brüche c_n/d_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{und}$$

$$d_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right).$$

* An Stelle der Darstellung $\frac{c}{d}$ eines Bruches verwenden wir meist die Schreibweise c/d.

Dann bilden sie die Folge der durch Theons Regel (1) bestimmten Näherungen für $\sqrt{2}$.

Zum Beweis von Satz (2) zeigen wir

(a) Die Zahlen c_n und d_n in (2) sind ganzzahlig.

Vorweg: Es ist $\sqrt{2}^k = 2^{k/2}$ für gerade k und $\sqrt{2}^k = 2^{(k-1)/2}\sqrt{2}$ für ungerade k. Damit ergibt sich aus der binomischen Formel wegen der Ganzzaligheit der Binomialkoeffizienten:
$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} = 1 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{2}^2 + \ldots + \sqrt{2}^{n+1} = a + b\sqrt{2}$ für bestimmte ganze Zahlen a und b;
$\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} = 1 - c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{2}^2 - \ldots \pm \sqrt{2}^{n+1} = a - b\sqrt{2}$ für die gleichen Zahlen a, b. Daraus folgt: $\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} = 2a$ und
$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} = 2b\sqrt{2}$. Also sind $c_n = a$ und $d_n = b$ beide ganzzahlig.

(b) Die mit den Zahlen c_n und d_n aus (2) gebildeten Brüche c_n/d_n sind die Theon-Brüche a_n aus (1).

Es seien $P = 1+\sqrt{2}$ und $M = 1-\sqrt{2}$. Für $n = 0$ folgt dann aus (2): $c_0 = \frac{1}{2}\left(P^1 + M^1\right) = 1$ und $d_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(P^1 - M^1\right) = 1$. E sei daher nun $n \geq 1$. Nach (2) ist dann:

$$2c_n = \left(1+\sqrt{2}\right)P^n + \left(1-\sqrt{2}\right)M^n = \left(P^n + M^n\right) + \sqrt{2}\left(P^n - M^n\right).$$

Wegen $\sqrt{2}/2 = 2/2\sqrt{2}$ ist daher $c_n = c_{n-1} + 2d_{n-1}$.

Weiter ist nach (2):

$$2\sqrt{2}d_n = \left(1+\sqrt{2}\right)P^n - \left(1-\sqrt{2}\right)M^n = \sqrt{2}\left(P^n + M^n\right) + \left(P^n - M^n\right)$$

und daher $d_n = c_{n-1} + d_{n-1}$.

(c) Jeder Theon-Bruch c_n/d_n ist eine Näherung für $\sqrt{2}$.

Vorweg: Für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, folgt aus (2) und aus (b):

$$c_n = \frac{1}{2}\left(P^{n+1} - M^{n+1} + 2M^{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}d_n\right) + M^{n+1} = \sqrt{2}d_n + M^{n+1}.$$

Damit gilt für die Abstände A_n und A_{n+1} der Brüche c_n/d_n und c_{n+1}/d_{n+1} von $\sqrt{2}$: $A_n = |\sqrt{2} - c_n/d_n| = |\left(\sqrt{2}d_n - c_n\right)/d_n| = |M^{n+1}/d_n|$ und entsprechend $A_{n+1} = |M^{n+2}/d_{n+1}|$.**

Wegen $0 < |M| < 1$ und $d_{n+1} > d_n$ (dies folgt aus (a)) ist dann
$0 < A_{n+1} < A_n$ – also gilt: Je größer n ist, desto näher liegt A_{n+1} bei 0 als A_n.***

Daraus folgt Zweierlei: Jeder Theon-Bruch ist eine Näherung für $\sqrt{2}$ und

** Der positiv gemessene Abstand r der reellen Zahlen $r > 0 und -r < 0$ von 0 ist gleich groß. Das beschreibt man symbolisch so: $|r| = |-r| = r$.

*** Ein Beispiel hierzu: Es sei $a = 1/2 \Rightarrow a^{10} < 1/10^3 \Rightarrow a^{100} < 1/10^{30} \Rightarrow a^{1000} < 1/10^{300} \Rightarrow \ldots$ ohne Ende.

c_{n+1}/d_{n+1} ist eine bessere Näherung für $\sqrt{2}$ als c_n/d_n.

Mit (a), (b) und (c) ist Satz (2) und damit Theons mutige Behauptung (1) bewiesen.

Bemerkung

Jeder Theon-Bruch c_n/d_n, $n \geq 1$, hat eine schöne Eigenschaft: er ist optimal, was bedeutet, dass er eine bessere Näherung für $\sqrt{2}$ ist als jeder andere Bruch c/d_n, c ganzzahlig und $c \neq c_n$.

Beispiel 2

Die pythagoreische Näherung 7/5 für $\sqrt{2}$ ist optimal, denn $|\sqrt{2} - 7/5| \approx 0{,}01$, während $|\sqrt{2} - c/5| > 0{,}18$ ist für $c = 1, 2, \dots, 6, 8, 9, \dots$.

Bemerkung

Unter Benutzung von Differentialrechnung hat unser Redaktionsmitglied Achim Klenke die Näherungsbrüche für $\sqrt{2}$ von Theon von Smyrna wie folgt hergeleitet: Nach Konstruktion ist $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{a_n+1} = f(a_n)$ mit $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Die Ableitung von f hat den Betrag $|f'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$, da $x \geq 1$ ist. Also ist

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| &\leq \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}| \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{4}n|a_1 - a_0| = \frac{1}{2}4^{-n}. \end{aligned}$$

Also konvergiert (a_n) und der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ erfüllt $f(a) = a$, also $a + 2 = a(a+1) = a^2 + a$ mithin $a^2 = 2$. Noch schneller geht die Konvergenz übrigens für die Rekursion $b_0 = 1$, $b_{n+1} = \frac{577b_n+816}{408b_n+577}$. Hier ist $|b_n - \sqrt{2}| < 10^{-6n}$. Kannst du dies zeigen?

Auch Mathematiker tricksen manchmal

von Hartwig Fuchs

Es sei W die Folge der Zahlen

$$w_n = \frac{2}{u_n^2 + u_n v_n + v_n^2}, n = 1, 3, 5, \dots \quad \text{und} \quad u_n = \sqrt[3]{n+1}, v_n = \sqrt[3]{n-1}$$

Beweise oder widerlege:

Es gibt mindestens eine Summe $S(n) = w_1 + w_3 + w_5 + \dots + w_n$, die einen ganzzahligen Wert besitzt.

Die Aufgabe scheint falsch gestellt zu sein, denn die dezimalen Werte von u_n und v_n können nur näherungsweise angegeben werden – außer wenn $n + 1 = m^3$

oder $n-1=m^3$ mit $m^3=0,1,27,125,343,...$ ist. Daher liegt die Vermutung nahe, dass kein w_n und folglich auch keine Summe $S(n)$ ganzzahlig ist.
Um diese Vermutung zu untersuchen, wird man zunächst versuchen, den doch recht komplexen Nenner in der Definition von w_n zu vereinfachen. Und das gelingt mit einem eleganten Trick.
Der Trick: Für reelle Zahlen a und b gilt:

(1) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (Nachweis durch Ausrechnen des Produktes)

Setzt man in (1) $a=u_n$ und $b=v_n$ ein, dann folgt aus (1):

$$w_n=\frac{2}{\frac{u_n^3-v_n^3}{u_n-v_n}}=\frac{2(u_n-v_n)}{u_n^3-v_n^3}=u_n-v_n \quad \text{wegen} \quad u_n^3-v_n^3=2$$

Daraus folgt für $S(n)$:

(2) $S(n)=\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}\right)+\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)+\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}\right)+...$
$...+\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)=\sqrt[3]{n+1}.$

Wählt man nun n so, das $n+1=m^3$ ist für ein ganzzahliges $m>1$, dann ist $S(m^3-1)=\sqrt[3]{m^3}=m$ ganzzahlig.
Da $m>1$ beliebig wählbar ist, sind unendlich viele der Summen $S(n)$ ganzzahlig.

Beispiel

a) Erstmals gilt $n+1=m^3$ für $n=7, m=2$. Folglich ist $S(7)$ die kleinste ganzzahlige Summe $S(n)$.
b) Gibt es eine Summe $S(n)$ mit $S(n)=2026$?
Setzt man $n+1=2026^3=8316073576$, so ist $S(2026^3-1)=2026$. Hätte man diese Summe ohne den Trick auch so finden können, etwa indem ein Computer die mehr als vier Milliarden Zahlen u_n, v_n und w_n, die fast alle irrational sind, näherungsweise berechnet?
Dieser Frage ist Frank Rehm nachgegangen und er hat mithilfe eines Computers und Excel festgestellt, dass bereits ab $n=512$ Rundungsfehler auftreten. Ohne die elegante Formel (2) errechnet Excel $w_{511}=8$, aber
$s(511)=7{,}99\dots 9$ (14 Ziffern 9).

Zu Besuch bei
Leonardo von Pisa
von Martin Mattheis

Wer waren alle die berühmten Mathematikerinnen und Mathematiker, über die man in der Schule hört, oder in Monoid liest. Die Redaktion von Monoid scheut keine Kosten und Mühen und berichtet unregelmäßig in der Rubrik „Zu Besuch bei ...“ von diesen genialen Menschen. Dieses Mal sind wir zu Besuch bei Leonardo von Pisa.

Bild: Leonardo von Pisa in der pisanischen Handelsniederlassung Bugia in Nordafrika

Sehr geehrter Leonardo von Pisa, wo lebten und wirkten Sie?
Wie in Ihrer Frage bereits angedeutet, wurde ich um 1175 in Pisa geboren und bin auch dort nach 1240 verstorben. Mein Vater, Guglielmo Bonacci, war in Pisa ein angesehener Kaufmann, der u. a. in der pisanischen Handelsniederlassung in Bugia in Nordafrika arbeitete. In seinem Auftrag bereiste ich den Mittelmeerraum und kam dort in Kontakt mit den Werken antiker griechischer Mathematiker, aber auch dem aktuellen Forschungsstand der arabischen Gelehrten, die mit den indischen Ziffern arbeiteten.
Weil er meinte, dass das für mich nützlich sein könnte, sorgte mein Vater glücklicherweise dafür, dass ich mich mit Mathematik und auch der Rechenweise der arabischen Mathematiker beschäftigte. Ich fand sehr schnell Gefallen daran und blieb der Mathematik mein Leben lang verbunden. Ab 1200 lebte ich wieder in Pisa und widmete mich ganz der Mathematik. Aufgrund meiner mathematischen Arbeiten wurde ich sogar dem Kaiser Friedrich II. von Hohenstaufen vorgestellt, als dieser in Pisa Hof hielt.

In der Überlieferung findet man für Sie viele Namen, so z. B. Leonardo von Pisa oder Leonardo von Pisa, Sohn des Bonacci. Wie möchten Sie angeredet werden?
Da sich zu meiner Zeit langsam die – in Eurer Zeit gebräuchlichen – Nachnamen entwickelten, wäre Leonardo Bonacci, wahrscheinlich die für Euch zeitgemäße Anrede, oft liest man aber auch verkürzt Fibonacci, Sohn des Bonacci.

Welches gedruckte Werk von Ihnen hatte den größten Einfluss auf die Mathematik?

Auf jeden Fall das 1202 erstmals erschienene „Liber abbaci", frei übersetzt „Das Buch vom Rechnen", das ich 1228 nochmals gründlich überarbeitet habe. In diesem findet sich auch die wohl auf ewig mit meinem Namen verbundene Einkleidung eines spannenden mathematischen Problems in eine Kaninchenaufgabe: „Ein Mann hatte ein Paar Kaninchen zusammen in einem bestimmten von Wänden umgebenen Bereich, und man möchte wissen, wie viele Kaninchen in einem Jahr aus diesem Paar entstehen, wenn es in ihrer Natur liegt, in einem Monat ein weiteres Paar hervorzubringen und im zweiten Monat nach der Geburt zum ersten Mal zu gebären."
Löst man diese Aufgabe für jeden Monat, so erhält man die Zahlenfolge, die in Eurer Zeit meinen Namen trägt: Fibonacci-Folge.
Der folgenreichste Anstoß in meinem „Liber abbaci" ist die Beschreibung der neun indischen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9, sowie dem Zeichen für die Null. Vor allem die Letztere hat vielen Menschen in Europa Probleme bereitet: Warum sollte man ein Zeichen dafür haben, um zu beschreiben, dass nichts da ist? In Banken in Florenz waren die dadurch entstehenden einfachen Rechenmethoden noch im 14. Jahrhundert verboten. Auch in Deutschland hat es lange gedauert, bis sich die indischen Ziffern durchsetzten. Erst zu Beginn des 16. Jahrhunderts, mit Rechenmeistern wie Adam Ries und Michael Stifel, wurden sie dort Normalität.

Was war ihre bedeutendste mathematische Entdeckung?
Es macht mich ein wenig traurig, dass in Eurer Zeit alle Menschen, die meinen Namen hören, nur an die Einkleidung der obigen Aufgabe und damit an Kaninchen denken. Leider beschäftigen sich nur wenige damit, was in der bei Euch sogenannten Fibonacci-Folge alles drinsteckt:
Sie taucht an den verschiedensten Stellen in der Natur auf, so z. B. bei der Anordnung der Kerne einer Sonnenblume und in vielen Anderen. Zum ersten Mal im mittelalterlichen Europa findet man hier die Beschreibung einer rekursiven Zahlenfolge. Außerdem nähern sich die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen dem Goldenen Schnitt Φ, also – wie Ihr in Eurer Zeit algebraisch sagen würdet, der Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ – beliebig an.
Mir war es insgesamt auch wichtig, nicht nur konkrete Beispielaufgaben zu berechnen, sondern die Inhalte vollständig zu durchdringen und Lösungen nicht nur zu nennen, sondern diese im mathematischen Sinne zu beweisen. Auch was das Lösen von Gleichungen angeht, so habe ich den Erkenntnissen der arabischen Mathematiker einiges hinzugefügt. Über all das weiß man in Eurer Zeit kaum noch Bescheid.
Immerhin wurde im Jahr 1982 ein Asteroid nach mir benannt, dessen Identifikationsnummer die 20. Zahl der Fibonacci-Folge ist (ausrechnen, nicht googeln!).

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch über sich berichten?
Bei meinen beruflichen Reisen im Mittelmeerraum habe ich es bei vielen gebildeten Menschen als selbstverständlich erlebt, sich über mathematische Fragestellungen auszutauschen: Gespräche über Inhalte der „Elemente" von Euklid über Geometrie oder des „Almagest" von Ptolemäus über Astronomie galten in meiner Zeit für viele als erbauend und anregend. Seltsam finde ich, dass im – durch allen technischen Fortschritt sehr von Mathematik geprägten 21. Jahrhundert – manche Menschen nicht mehr auf Argumente und erwiesene rationale Fakten, sondern stattdessen auf Gefühle und Meinungen vertrauen. Aber zum Glück gibt es ja im Jahr 2025 Zeitschriften wie MONOID in denen man sich zur persönlichen Freude mit Mathematik beschäftigen kann und dabei eindeutigen logischen Schlussfolgerungen vertraut.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?
Da über mich als Person in Eurer Zeit nur noch wenig bekannt ist, gibt es außer kurzen Lexikoneinträgen, in denen ich oft als der bedeutendste europäische Mathematiker des Mittelalters bezeichnet werde, kaum Bücher über mich als Person. Erfreulicherweise gibt es dafür umso mehr, in denen – ausgehend von meiner Kaninchenaufgabe – an meine mathematischen Erkenntnissen angeknüpft wird.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern mit auf den Weg geben?
„Sollte ich zufällig etwas mehr oder weniger Angemessenes oder Notwendiges ausgelassen haben, bitte ich um Verzeihung, da es niemanden gibt, der in allen Angelegenheiten fehlerfrei und umsichtig ist."

Lieber Leonardo Bonacci, wir danken Ihnen für dieses aufschlussreiche Gespräch!

Der erste Widerspruchsbeweis in der Mathematik

von Hartwig Fuchs

Thales von Milet (um 625 - 542 v. Chr), dessen Namen schon jeder Schüler und jede Schülerin einmal gehört hat, gilt als einer der Begründer der Mathematik, so wie wir sie heute kennen. Von ihm berichtet Proklos (412 - 485), ein spätrömischer Philosoph, dessen Schriften auch eine wichtige Quelle für die Geistesgeschichte der Mathematik bilden:
Thales hat als Erster einen mathematischen Widerspruchsbeweis geführt, indem er zeigt:

(1) Ein Kreis wird von einem Durchmesser halbiert.

Die von Proklos überlieferte Herleitung des Thales von (1) in heutiger Formulierung: Voraussetzung, die Thales als wahr (bewiesen?) bekannt ist:

(2) Alle Linien vom Kreismittelpunkt zur Kreislinie (= Radien) sind gleich lang.

Man zeiche nun einen Durchmesser des Kreises, wodurch man zwei Kreisteile erhält, die man dann aufeinander gelegt denkt.

(3) Annahme: Die beiden Teile sind nicht gleich lang.

Dann liegt ein Teil teilweise im Inneren oder Äußeren des anderen Teils. Daraus folgt: Es gibt Linien vom Kreismittelpunkt zur Kreislinie, die verschieden lang sind. Das ist wegen (2) nicht möglich. Also ist (3) falsch.

Mathematische Entdeckungen

Gegeben sei das Wort *ABBAABBAABBA* ... (ungeradzahlig viele Teilworte *ABBA* hintereinander gehängt)
Zeige oder widerlege: es ist möglich die Buchstaben *A* und *B* mit den Farben grün und rot so einzufärben, dass ein grünes Wort herauskommt, welches gleich dem roten Komplementärwort ist. (Martin Lustig)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2025 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Zur Aufgabe aus Heft 161

In Heft 161 stellten wir euch folgende Aufgabe:
Bei dem Spiel BLOTTO erhalten die Spieler jeweils ein Brett mit 5×5 Feldern und $n = 100$ Ein-Cent-Stücke. Bei einer Spielrunde verteilen die Spieler nun ihre Ein-Cent-Stücke auf ihrem Brett und zeigen sich danach ihre Verteilung. Jeder spielt gegen jeden.
Der Spieler, der die meisten Ein-Cent-Stücke auf einem Feld platziert hat, gewinnt dieses Feld. Pro gewonnenem Feld erhält ein Spieler einen Punkt. Der Spieler mit den meisten Punkten gewinnt die Spielrunde.
Betrachte den Fall, dass zwei Spieler das Spiel mit 3 Feldern (ohne Brett) spielen und die Zahlen in nicht-absteigender Reihenfolge wählen.

1. Spiele BLOTTO zunächst für den Fall von sechs Münzen pro Spieler. Welche Verteilungen sind möglich und mit welcher gewinnst Du? (bitte begründen).
2. Spiele BLOTTO für den Fall von zwölf Münzen pro Spieler; insbesondere die Verteilung $(2, 4, 6)$. Was beobachtest Du?

3. Spiele BLOTTO für den Fall von 13 Münzen pro Spieler; und zwar eine der Verteilungen $(3, 5, 5), (3, 3, 7)$ oder $(1, 5, 7)$. Was beobachtest Du?

Lösung

Zu dieser Aufgabe haben wir keine Einsendungen erhalten. Wir skizzieren daher nur die drei Fälle der Aufgabenstellung (sechs, zwölf bzw. 13 Münzen pro Spieler, zwei Spieler, drei Felder).

1. Bei sechs Münzen sind nur drei Konfigurationen möglich: $(2, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$ und $(1, 1, 4)$. Es spielt $(1, 1, 4)$ gegen $(1, 2, 3)$ unentschieden und es spielt $(1, 2, 3)$ gegen $(2, 2, 2)$ unentschieden. Es gewinnt $(2, 2, 2)$ gegen $(1, 1, 4)$. Also ist $(2, 2, 2)$ die beste Strategie.
2. Bei zwölf Münzen pro Spieler erweist sich $(2, 4, 5)$ als die beste Strategie.
3. Bei 13 Münzen kann man zeigen, dass die beste Strategie darin besteht $(3, 5, 5)$, $(3, 3, 7)$ und $(1, 5, 7)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zu wählen.

Gespräch über Geld
Ein logisches Rätsel

Drei Kinder K_1, K_2 und K_3 mit den Familiennamen K_1 : Einer, K_2 : Zweier und K_3 : Dreier hat eines 1 Euro, eines 2 Euro und eines 3 Euro in der Tasche.
Das Kind K_3 das niemals lügt – stellt fest:

(1) Niemand von uns besitzt den Geldbetrag, der seinem Namen entspricht.

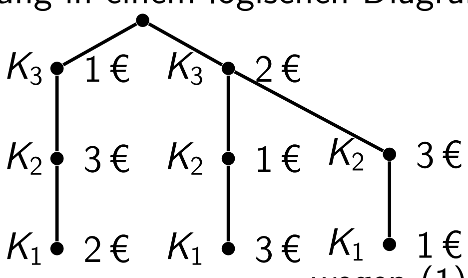
Darauf sagt ein anderes Kind – es sei K_x genannt – zu K_3:

(2) Das kann ich dir bestätigen.

Warum ist die Aussage von K_x gerechtfertigt?
Aus (1) folgt:

(3) K_3 besitzt entweder 1 oder 2 Euro.

Die Worte „ich" und „dir" in der Behauptung (2), mit der sich K_x an K_3 wendet zeigen: K_x ist nicht K_3.
K_x überlegt nun so:
Fallunterscheidung und zugleich die Lösung in einem logischen Diagramm:



wegen (1)
tritt dieser Fall nicht ein.

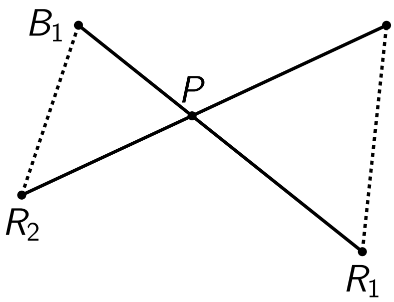
Ganz gleich ob K_x das Kind K_1 oder K_2 ist, die drei Fälle zeigen, dass die Aussage (1) gerechtfertigt ist. Und dass die Behauptung von K_x gerechtfertigt ist. H. F.

Lösung von Beispiel 6
aus S. 31

Es sei K ein Komplex aus n Verbindungsstrecken und $L(k)$ sei die Summe der Längen aller Strecken in K.
Es gibt nur endlich viele verschiedene Komplexe K, sodass es auch nur endlich viele Zahlen $L(K)$ gibt – und L_{min} sei die kleinste von ihnen. Dann gilt also:

(1) $L_{\text{min}} \leq L(K)$ für jeden Komplex K.

Ist L_{min} eine geeignete Hilfsgröße für einen Beweis der Behauptung $(*)$?
Annahme: In einem Komplex K mit der Längensumme L_{min} gibt es zwei Strecken R_1B_1 und R_2B_2, die sich in einem Punkt P schneiden.



Ersetzen wir dann R_1B_1 durch die Strecke R_1B_2 und R_2B_2 durch die Strecke R_2B_1, so erhält man einen Komplex $K' \neq K$, in dem nach der Dreiecksungleichung gilt (vgl. die Figur):

$$\begin{aligned} R_1B_2 + R_2B_1 &< (R_1P + PB_2) + (R_2P + PB_1) \\ &= (R_1P + PB_1) + (R_2P + PB_2) = R_1B_1 + R_2B_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

(1) $R_1B_2 + R_2B_1 < R_1B_1 + R_2B_2.$*

Nun ist $L(K') < L(K)$ und da $L(K) = L_{\text{min}}$ ist, hat man den Widerspruch $L(K') < L_{\text{min}}$ zur Definition von L_{min}. Somit ist die Annahme falsch und daher gilt die Behauptung $(*)$.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 162

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Multiplikationsregel

Die zweistellige natürliche Zahl n sei in Ziffernschreibweise: $n = ab$. Wenn $a + b \leq 9$ ist und $a + b = c$ gesetzt wird, dann gilt für das Produkt $n \cdot 11$ in Ziffernschreibweise: $n \cdot 11 = acb$. Zeige dies. (H. F.)

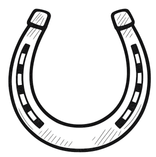
* mit R_1B_1 usw. bezeichnen wir sowohl die Strecke R_1B_1 als auch deren Länge.

Lösung:

Es sei $n = a \cdot 10 + b$ und $11 = 10 + 1$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} n \cdot 11 &= (a \cdot 10 + b) \cdot (10 + 1) \\ &= a \cdot 100 + b \cdot 10 + a \cdot 10 + b \\ &= a \cdot 100 + (a + b) \cdot 10 + b \\ &= acb \quad \text{wegen } a + b = c. \end{aligned}$$

II. Hufeisen

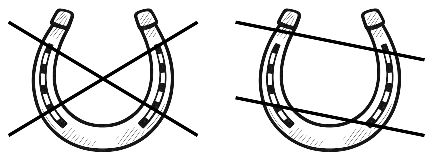


Teile das Hufeisen mit zwei geraden Schnitten in fünf Teile.

(Susi Ulitzsch)

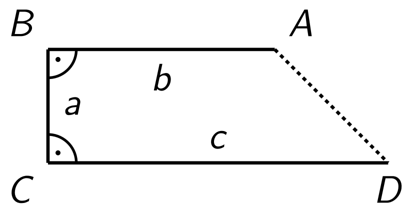
Lösung:

Zwei mögliche Lösungen:

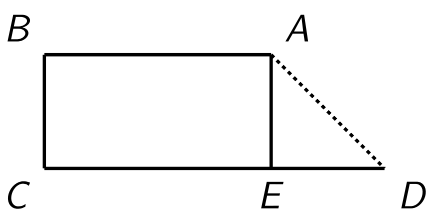


III. Maximale Fläche

Aus drei Strecken der Längen a, b, c mit $a < b < c$ soll ein Rahmen mit den Seiten AB, BC, CD und rechten Winkeln bei B und C konstruiert werden – die Figur zeigt ein Beispiel. Der Rahmen ist durch eine vierte Strecke AD zu schließen. Wie sollten die Strecken angeordnet werden, damit die Fläche der geschlossenen Figur möglichst groß ist? (H. F.)



Lösung:



Es gilt: $F := |ABCD| = |ABCE| + |AED|$.

1. Fall: Sei $|AB| = a$.
   Für $|BC| = b, |CD| = c \Rightarrow F_1 = ab + \frac{1}{2}b(c - a) = \frac{1}{2}(ab + bc)$.
   Für $|BC| = c, |CD| = b \Rightarrow F_2 = ac + \frac{1}{2}c(b - a) = \frac{1}{2}(ac + bc)$.

2. Fall: Sei $|AB| = b$.
   Für $|BC| = a, |CD| = c \Rightarrow F_3 = ab + \frac{1}{2}a(c-b) = \frac{1}{2}(ab + ac)$.
   Für $|BC| = c, |CD| = a \Rightarrow F_4 = bc + \frac{1}{2}(c(a-b) = \frac{1}{2}(ac + bc)$.
3. Fall: Sei $|AB| = c$.
   Für $|BC| = a, |CD| = b \Rightarrow F_5 = ac + \frac{1}{2}a(b-c) = \frac{1}{2}(ab + ac)$.
   Für $|BC| = b, |CD = a \Rightarrow F_6 = bc + \frac{1}{2}b(a-c) = \frac{1}{2}(ab + bc)$.

Wegen $F_1 = F_6$, $F_2 = F_4$ und $F_3 = F_5$ gibt es nur drei verschiedene Flächenwerte, z. B. F_1, F_2, F_3. Nun ist $F_2 - F_1 = \frac{1}{2}(ac + bc - ab - bc) = \frac{1}{2}a(c-b) > 0$ wegen $c > b$ und es ist daher $F_2 > F_1$.
Aus $F_1 - F_3 = \frac{1}{2}(ab + bc - ab - ac) = \frac{1}{2}c(b-a) > 0$ wegen $b > a$ und es ist daher $F_1 > F_3$.
Insgesamt gilt $F_2 > F_1 > F_3$, so dass F_2 die größtmögliche Fläche ist. Aus dem 2. Fall ergibt sich dann die zugehörige Anordnung der 3 Strecken.

IV. Mengen-Aufgabe

Alle 32 Schülerinnen und Schüler einer Klasse nehmen am Fremdsprachenunterricht teil (es werden Englisch und Französisch angeboten). Neun Schülerinnen und Schüler lernen beide Sprachen. Beweise, dass die Anzahl der Englisch lernenden Schülerinnen und Schüler nicht gleich der Französisch lernenden sein kann. (Martin Mettler)

Lösung:
Es sei e die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die nur Englisch lernen, und f die Anzahl derer, die nur Französisch lernen.
Dann ist offenbar $e + f + 9 = 32 \Rightarrow e + f = 23$. Wäre nun $e = f$, so wäre $2e = 23 \Leftrightarrow e = 11{,}5$. Es müssten also 11,5 Schülerinnen und Schüler nur Englisch lernen. Widerspruch! Also ist die Annahme $e = f$ falsch. Demnach ist $e \neq f$ wahr.

V. Zwölftausendzwölfhundertzwölf

Schreibe „zwölftausendzwölfhundertzwölf“ als eine Zahl. (Bernhard Cuntz)

Lösung:
$12000 + 1200 + 12 = 13212$.

VI. Ohrringe

In einer Schmuckschatulle liegen 17 gleichartige silberne und 17 gleichartige goldene Ohrringe. Wie viele muss die Besitzerin höchstens herausnehmen, ohne hinzuschauen, bis sie mindestens ein passendes Paar und bis sie neun zusammenpassende Paare in den Händen hält? (Martin Mettler)

Lösung:
Zu einem passenden Paar drei Ohrringe, zu neun Paaren 19 Ohrringe, nämlich stets einen mehr als die doppelte Anzahl der benötigten Paare.

VII. Staubsaugervertreter

Balduin und Adel, zwei Staubsaugervertreter, gehen mit verschiedenen Mengen an Staubsaugern in verschiedene Ortschaften. Balduin geht in einer Ortschaft mit 1600 Einwohnern herum. Er stellt am Schluss fest, dass jeder fünfte Einwohner einen Staubsauger gekauft hat und er nur noch zwei Geräte hat. Adel geht in einem Ort herum, der 300 Einwohner weniger hat und stellt zum Schluss fest, dass jeder vierte Einwohner ein Gerät gekauft hat und er alle Geräte verkauft hat. Wer hatte mehr Geräte dabei? Wie viel hat jeder der beiden eingenommen, wenn ein Gerät 318€ kostet? (Silke Lang)

Lösung:
$\frac{1600}{5} = 320$, $320 + 2 = 322$, $1600 - 300 = 1300$, $\frac{1300}{4} = 325$,
$325 - 322 = 3$, $320 \cdot 318 = 101760$, $325 \cdot 318 = 103350$.
Adel hat 3 Geräte mehr dabei und hat 103350 Euro eingenommen, Balduin nur 101760 Euro.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. November 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Trockenobst

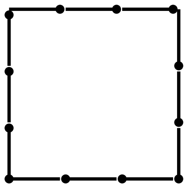
Herr Winter möchte von seiner großen Apfelernte einen Teil als Wintervorrat trocknen. Er bereitet 10 kg Apfelscheiben vor und überlegt, wie viel Trockenobst er davon bekommen wird.
Wenn frische Äpfel 80 % Wasser enthalten und getrocknete Äpfel nur noch 20 %, wie viel Trockenobst erhält Herr Winter dann? (C. E.)

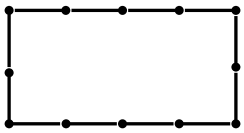
II. Flächenvergleich

Im Quadrat *ABCD* der Seitenlänge 5 sei *E* ein beliebiger Punkt der Seite *CD*. Wie groß sind dann die Flächen der Dreiecke *AED* und *BCE* zusammen im Vergleich zur Fläche des Dreiecks *ABE*? (H. F.)

III. Mit zwölf Streichhölzern

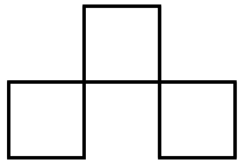
Mit zwölf Streichhölzern lässt sich z. B. ein Quadrat mit neun Flächeneinheiten oder ein Rechteck mit acht Flächeneinheiten legen:





Aufgabe: Lege mit zwölf Streichhölzern eine Fläche mit drei Flächeneinheiten. (Christoph Sievert)

Hinweis: Die rechts nebenstehende Zeichnung ist keine Lösung, da dies keine zusammenhängende Fläche ist.



IV. Zahl gesucht

Ermittle die kleinste natürliche Zahl n, die beim Teilen durch 3 den Rest 1,
beim Teilen durch 5 den Rest 3,
beim Teilen durch 7 den Rest 5,
beim Teilen durch 9 den Rest 7
und beim Teilen durch 11 den Rest 9 lässt. (Klaus Ronellenfitsch)

V. Eine sichere Sache

In einem Behälter befinden sich Kugeln, die nur durch ihre Farbe unterscheidbar sind und zwar: zwei rote, drei schwarze, fünf blaue, sechs grüne und elf gelbe Kugeln.

Mathis soll nun mit verbundenen Augen so viele Kugeln aus dem Behälter nehmen, dass sich darunter mit Sicherheit fünf Kugeln von gleicher Farbe befinden. Wie viele Kugeln muss Mathis dazu mindestens aus dem Behälter herausholen?

(H. F.)

VI. Zahlenrätsel

	4		
			2
2			
		4	

In jedes der leeren Felder ist jeweils eine der Zahlen $1, 2, 3, 4$ so einzusetzen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte alle vier Zahlen verschieden, aber in jeder Diagonalen die Zahlen gleich sind. (H. F.)

VII. Tripel dreier Zahlen

Für welche Tripel von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist ihr Produkt ein ganzzahliges Vielfaches ihrer Summe?

a) Gib ein solches Tripel an.

b) Begründe, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

(Wolfgang J. Bühler)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. November 2025.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1379: Summe gesucht

Für drei Zahlen a, b und c gilt: $\frac{256}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{4} = \frac{20}{c}$. Bestimme den Wert von $a + b + c$. *Tipp: Multiplizieren hilft weiter.* (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1380: Ganzzahlige Lösungen

Die folgende Aufgabe fand ich in einem alten Monoid-Heft:*

„Für welche $p, q \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $(*)\, 2x^2 + 2(p - q)x - p = 0$ Lösungen in der Menge der ganzen Zahlen?“ Als Lösung wurde damals gefunden: „die Gleichung hat Lösungen in $\mathbb{Z}$, wenn $p = 0$ und $q \in \mathbb{Z}$.“

Ich habe weitere Lösungen gefunden.

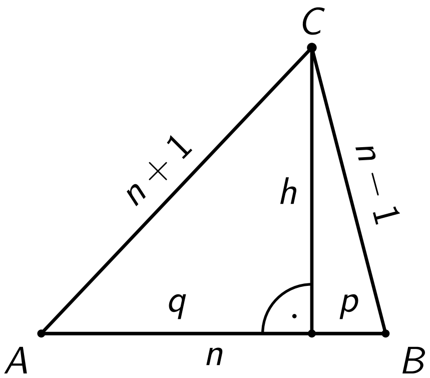
Zeige, dass $p = 0$ mit $q \in \mathbb{Z}$ tatsächlich zu ganzzahligen Lösungen der Gleichung $(*)$ führt. (Wolfgang J. Bühler)

Aufgabe 1381: In einem Dreieck

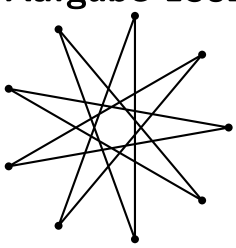
In einem Dreieck seien die Längen der drei Seiten aufeinander folgende natürliche Zahlen $(n-1)$, n und $(n+1)$ mit $n \geq 4$. Zeichnet man die Höhe auf der Seite der mittleren Länge (also n) ein, wird n in die Abschnitte q und p geteilt (s. Abbildung).

Zeige: Dann gilt: $q - p = 4$.

(Christoph Sievert)



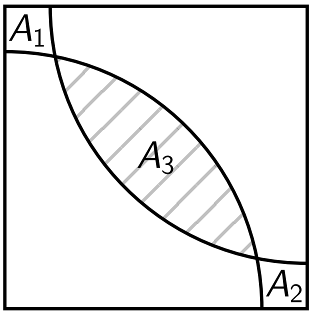
Aufgabe 1382: Summe im Stern



An die Ecken eines neun-zackigen Sterns sollen ganze Zahlen geschrieben werden. Kann man diese Zahlen so wählen, dass die Summe von je zwei Zahlen, die den Endpunkten einer Strecke des Sterns zugeordnet sind, ungerade ist? (H. F.)

* Martin Mettler: Monoid-Kollektaneen; 10 (1992)

Aufgabe 1383: Viertelkreise



Einem Quadrat sind zwei gleichgroße Viertelkreise einbeschrieben, deren Mittelpunkte auf gegenüberliegenden Eckpunkten des Quadrates liegen. Das Quadrat habe eine Längeneinheit (LE) als Seitenlänge. Gilt für den Radius der beiden Viertelkreise $r > \frac{1}{\sqrt{2}} LE$, so entsteht das Bild der Abbildung.

a) Für welchen Radius gilt: $A_1 + A_2 = A_3$?

b) Wie groß ist dann die Fläche A_3?

(Christoph Sievert)

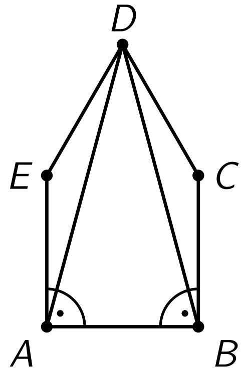
Aufgabe 1384: Eine ganze Zahl als Summe zweier Quadratzahlen

Für eine ungerade ganze Zahl $n > 1$ gilt:
n kann nur dann als eine Summe aus zwei Quadratzahlen a^2, b^2 beschrieben werden, wenn $n = 4k + 1$ ist für eine ganze Zahl k. Begründe dies. (H. F.)

Aufgabe 1385: Teilflächenverhältnis

Ein symmetrisches Fünfeck $ABCDE$ habe gleich lange Seiten mit rechten Winkeln bei A und B (s. Abbildung). Sein Flächeninhalt sei X.
Verbindet man die Ecken A und B geradlinig mit D, so entsteht ein Dreieck ABD. Sein Flächeninhalt sei Y. Bestimme das Flächenverhältnis $X : Y$ und vereinfache so weit wie möglich.

(Klaus Ronellenfitsch)



Gelöste Aufgaben aus Monoid 162

Klassen 9–13

Aufgabe 1372: Gleiche Lösung

Zeige, dass folgende Gleichungen die gleiche Lösungsmenge haben:

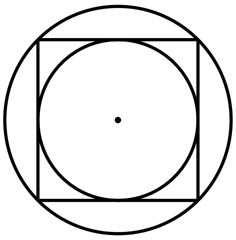
$$x^2 + x - 30 = 0$$
$$x^3 - 4x^2 - 35x + 150 = 0$$

(Jens Leilich)

Lösung:

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -5$ und $x_2 = 6$. Ferner gilt: $\frac{x^3+4x^2-35x-150}{x^2-x-30} = x + 5$. Also hat die kubische Gleichung die Lösungen: $x_1 = x_3 = -5$ und $x_2 = 6$.

Aufgabe 1373: Kugel - Würfel - Kugel



In einem Würfel befindet sich eine Kugel, die sämtliche sechs Würfelseiten von innen berührt. Der Würfel selbst liegt im Inneren einer Kugel, wobei jede Würfelecke in der Kugeloberfläche liegt. Bestimme das Verhältnis, in dem die Volumina der beiden Kugeln und auch ihrer Oberflächen zueinander stehen.

(H. F.)

Lösung:

Es seien r, d und v der Radius, der Durchmesser und das Volumen der kleinen Kugel. Entsprechend seien R, D und V der großen Kugel definiert.

Es ist $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}D^3$.

Nun ist D die Raumdiagonale des Würfels, dessen Seitenlängen s seien. Mithin ist $D^2 = 3s^2$, also $s = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

Weil s der Durchmesser der kleinen Kugel ist, gilt:

$v = \frac{\pi}{6}s^3 = \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^3$.

Damit folgt:

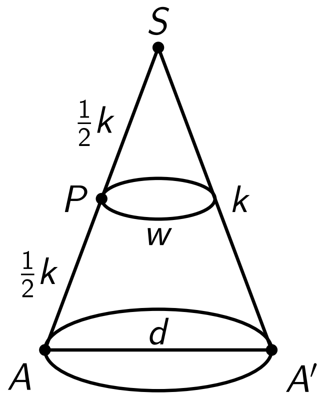
$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{6}D^3}{\frac{\pi}{6} \cdot \frac{D^3}{\sqrt{3}^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{1}$$

Es seien nun F und f die Oberflächen der großen und der kleinen Kugel. Dann ist

$$\frac{F}{f} = \frac{\pi D^2}{\pi \frac{D^2}{\sqrt{3}^2}} = \frac{3}{1}.$$

Aufgabe 1374: Eine Spinne unterwegs

Auf der Oberfläche eines senkrechten Kegels mit einer kreisförmigen Grundfläche vom Durchmesser $d = 50$ und einer Länge von $k = 100$ seiner Kanten von der Kegelspitze S zum Grundkreis, sitzt in halber Höhe des Kegels eine Spinne im Punkt P. Sie krabbelt einmal von P aus um den Kegel herum zurück zum Punkt P.

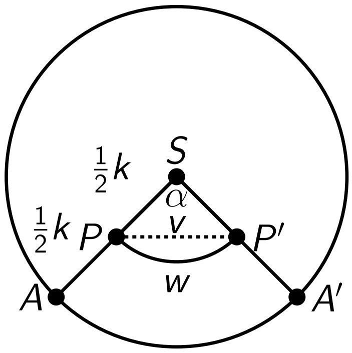


a) Begründe geometrisch, dass der Weg w der Spinne, der in gleicher Höhe über der Grundfläche des Kegels verläuft, nicht der kürzest mögliche Weg v ist.

b) Zeige rechnerisch, dass $|v| < |w|$ ist (v ist kürzer als w). (H. F.)

Hinweis: Schneide den Kreismantel längs der Kante SA auf und breite ihn flach in der Ebene auf. Was beobachtest du?

Lösung:



Denkt man sich den Kreismantel längs der Kante SA aufgeschnitten und danach in der Ebene flach ausgebreitet, so erhält man den Kreissektor SAA' und der Weg w der Spinne entspricht dann dem Bogen PP' im Kreissektor.

a) Der Weg w ist ein Kreis auf dem Kegelmantel, dem der Bogen PP' des Kreissektors SPP' entspricht. Da in jedem Kreis eine Sehne stets kürzer ist als die beiden zugehörigen Kreisbögen gilt im Kreissektor SPP': Die Strecke $v = PP'$ ist kürzer als der Bogen $w = PP'$.

b) Ergänze den Kreissektor SAA' zum Kreis mit Mittelpunkt S und Radius $|SA| = k = 100$. Der Umfang dieses Kreises beträgt dann

(1) $2\pi k = 200\pi$

Der Bogen AA' des Kreissektors SAA' ist so lang wie der Umfang des Grundkreises des Kegels, also

(2) $2\pi \cdot \frac{d}{2} = 50\pi.$

Aus (1) und (2) folgt: Die Länge des Bogens AA' ist $\frac{1}{4}$ der Länge des zugehörigen Kreises. Daher gilt für den Winkel α des Kreissektors SAA': $\alpha = 90°$. Aus Gründen der Ähnlichkeit ist $\frac{1}{2}d = 25$ der Durchmesser des kreisförmigen Weges w, so dass $|w| = 2\pi\frac{25}{2} = 25\pi \approx 78{,}5$ ist, während nach dem Satz von Pythagoras $|v| = \sqrt{50^2 + 50^2} \approx 70{,}7$ gilt.

Aufgabe 1375: Mehrfach gesicherter Tresor

a) Der Tresorraum einer Bank sei durch drei Schlösser gesichert. Wie viele Schlüssel braucht man und wie verteilt man sie an die drei leitenden Angestellten, damit keiner alleine, aber jeweils zwei den Tresorraum öffnen können?

b) Wie viele Schlösser und wie viele Schlüssel zu jedem Schloss benötigt man, wenn von vier Personen jeweils zwei nicht öffnen können sollen, aber jeweils drei dazu in der Lage sein sollen?

c) Wie viele Schlösser und Schlüssel braucht man, wenn von n leitenden Angestellten jeweils $k+1$ benötigt werden, um den Tresor zu öffnen?

d) Wenn es im Fall $n = 5$, $k = 2$ Herrn A. und Frau B. gelingt, dem Kollegen C einen seiner Schlüssel zu entwenden, mit welcher Wahrscheinlichkeit können sie dann den Tresorraum öffnen? (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

a) Man braucht zu jedem Schloss zwei Schlüssel und verteilt diese so, dass jedem der Angestellten genau ein Schlüssel fehlt.

b) Ist ein Spezialfall von c) für $n = 4$, $k = 2$.
Ein Angestellter erhält also $\binom{4}{2} - \binom{3}{1} = 3$ Schlüssel.

c) Jeder Gruppe von k Angestellten ordnet man ein Schloss zu, für das keiner aus dieser Gruppe den passenden Schlüssel erhält. Jeder Angestellte bekommt alle Schlüssel die durch diese Regel für ihn nicht verboten sind. Da es $\binom{n}{k}$ solche Gruppen gibt, braucht man $\binom{n}{k}$ Schlösser. Jeder der n Angestellten ist Mitglied in $\binom{n-1}{k-1}$ Gruppen. Ein Angestellter erhält also $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$ Schlüssel.

d) Der Fall $n = 5$, $k = 2$ bedeutet $\binom{n}{5} = 10$, $\binom{n-1}{k-1} = 4$. Jede Person (also auch der Kollege C) hat also sechs Schlüssel (von denen einer der Gruppe (A, B) fehlt). Die Wahrscheinlichkeit, dass sie diesen erwischt haben, ist also $\frac{1}{6}$.

Aufgabe 1376: Keine Quadratzahl

Zeige: Ist n eine natürliche Zahl, so ist keine der Zahlen $6n+5$ eine Quadratzahl.

(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

Jede Quadratzahl m^2, für m eine natürlich Zahl, ist die Summe der ersten m ungeraden Zahlen. Also:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 1 + 3 \\
3^2 &= 1 + 3 + 5 \\
4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7
\end{aligned}
$$

usw.

Ist man nun an Sechserresten interessiert, so lässt sich ableiten:

$$
\begin{array}{ll}
1^2 = 1 & = 1 \\
2^2 = 1 + 3 & = 4 \\
3^2 = 1 + 3 + 5 & = 3 \\
4^2 = 1 + 3 + 5 + 1 & = 4 \\
5^2 = 1 + 3 + 5 + 1 + 3 & = 1 \\
6^2 = 1 + 3 + 5 + 1 + 3 + 5 & = 0 \\
7^2 = 1 + 3 + 5 + 1 + 3 + 5 + 1 & = 1 \\
8^2 = 1 + 3 + 5 + 1 + 3 + 5 + 1 + 3 & = 4 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Da sich rechts die Ziffernfolge $(1, 4, 3, 4, 1, 0)$ wiederholt, die die 5 nicht enthält gibt es keine Quadratzahl m^2 mit Sechserrest 5.

Aufgabe 1377: Ungleichungen für Ziffernsummen

Es sei $Q(n)$ die Ziffernsumme (= Quersumme) einer positiven ganzen Zahl n. Begründe, dass für jedes $n \geq 10$ gilt:

$$Q(n) < n.$$

(H. F.)

Lösung:

Jede natürliche Zahl $n \geq 10$ ist von der Form:
$n = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 100 + x_3 \cdot 1000 + \ldots$ mit Ziffern x_i. Dann ist $Q(n) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ Da nun $x_i <$ (x_i mal einem Vielfachen von 10) gilt, folgt dass jeder Summand von $Q(n)$ echt kleiner als der entsprechende Summand von n ist, insb. $Q(n) < n$.

Aufgabe 1378: Teilbarkeit durch 7

a) $x^3 + y^3 + z^3$ sei durch 7 teilbar. Zeige, dass dann auch $x^3 + y^3$ oder $x^3 + z^3$ oder $y^3 + z^3$ durch 7 teilbar ist.

b) Zeige, dass die Aussage für die Teilbarkeit durch 11 nicht gilt.

(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

a) r_a sei der Rest bei Division von $a \in \{x, y, z\}$ durch 7, s_a der Rest von a^3 bei Division durch 7. Dann ist

r_a	1	2	3	4	5	6	0
s_a	1	1	6	1	4	6	0

Der Rest von $x^3 + y^3 + z^3$ ist 0, also muss $s_x + s_y + s_z = 0$, 7 oder 14 sein. Dies ist nur möglich, wenn die drei Reste $0, 1$ oder 6 sind, d.h. wenn $s_x = 0$ also x^3 teilbar durch 7 ist und $s_y + s_z = 7$ also $y^3 + z^3$ teilbar 7 ist oder entsprechend mit Vertauschung von x, y und z.

b) Mit dieser Methode oder durch direktes Ausprobieren findet man z.B. $1^3 + 1^3 + 6^3 = 66 = 6 \cdot 11$ oder $3^3 + 5^3 + 7^3 = 495 = 45 \cdot 11$, d.h. die Aussage gilt nicht für die Primzahl 11.

Probleme lösen mit Hilfsgrößen

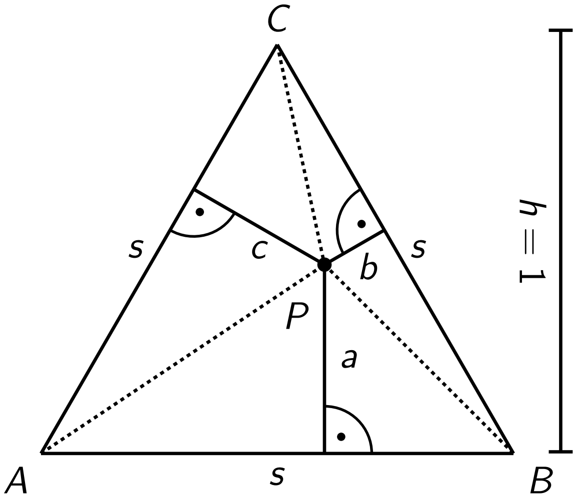
von Hartwig Fuchs

Der Trick des Magiers

In einer Zauberschau behauptet ein Magier, er könne Gedanken lesen. Er will das mit einer geometrischen Figur auf einer Tafel – einem gleichseitigen Dreieck mit einer Höhe von einem Meter beweisen.

Dazu ruft er einen beliebigen Zuschauer auf die Bühne und bittet ihn, er möge – ohne dass der Magier das sieht – irgend einen Punkt im Innengebiet des Dreiecks wählen und seine Abstände von den Dreiecksseiten bestimmen (in cm) und ihm danach zwei der gemessenen Abstände mitteilen. Er werde dann durch Telepathie aus den Gedanken des Zuschauers den dritten Abstand herauslesen.
Und siehe da – das Experiment gelingt sogar mehrmals. Wie macht der Magier das – da er doch die Position des gewählten Punktes nicht kennt und er daher doch unmöglich seinen dritten Abstand bestimmen kann?

Eine mathematische Erklärung des Magier Tricks: Der Satz von Viviani*



Es sei P ein Punkt im Innengebiet eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge s und der Höhe h. P habe die Abstände a, b und c von den Dreiecksseiten. Dann gilt – wie auch immer P gewählt ist – $(*)$ $a + b + c = h$.

Nachweis

Für die Fläche F des Dreiecks ABC gilt einerseits (1) $F = \frac{s}{2} \cdot h$ und für die Summe der Flächen der Dreiecke ABP, BCP und CAP gilt andererseits

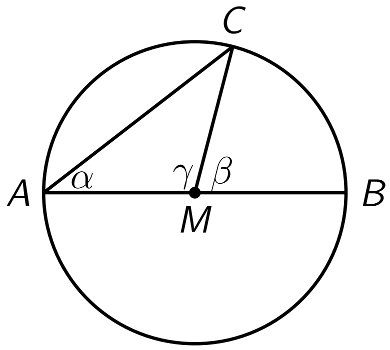
(2) $F = \frac{s}{2}a + \frac{s}{2}b + \frac{s}{2}c = \frac{s}{2}(a + b + c)$.

Ein Vergleich von (1) und (2) zeigt, dass $(*)$ zutrifft für jeden Punkt P im Innengebiet des Dreiecks ABC.
Das Geheimnis des Magiers ist mit dem Satz von Viviani gelüftet: Da er h kennt und ihm z. B. a und b mitgeteilt werden, kann er mühelos c berechnen.
Die Herleitung des Satzes von Viviani ist dadurch gelungen, dass man die Hilfsgröße F – welche den Vergleich der Höhe h mit der Abstandssumme $a + b + c$ ermöglicht – in die Schlusskette einfügt.
René Descartes (1596 - 1650) hat wohl als Erster in seinem Werk „Discours de la métheode“ (Leiden 1637) als Regel XIX beschrieben, dass die Einfügung einer Hilfsgröße in den Lösungsprozess eines Problems ein Baustein von entscheidender Bedeutung für dessen Durchführung sein kann.
Die Frage, was eine Hilfsgröße ist, erläutern wir nun an einigen Beispielen. Aber wie man sie findet, dafür gibt es kein Rezept – nur mathematische Erfahrung und Fantasie können da weiterhelfen.

---

* Vincenzo Viviani (1622 - 1703), Mathematiker und Mitarbeiter G. Galileis. Er soll den Satz $(*)$ im Jahr 1636 – also als Vierzehnjähriger – bewiesen haben.

Beispiel 2: Ein Winkel als Hilfsgröße



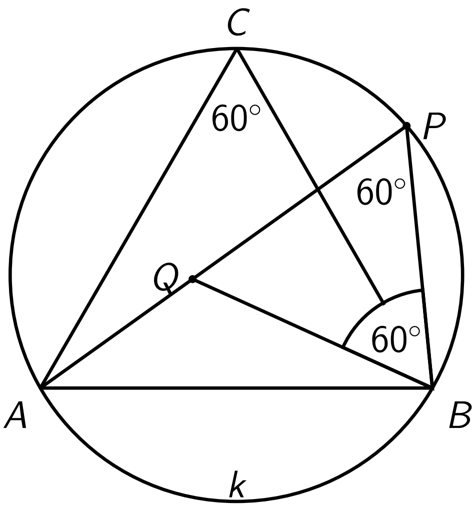
In einem Kreis mit Mittelpunkt M sei AB ein Durchmesser; C sei ein beliebiger Punkt des Kreises – jedoch $C \neq A$ und $C \neq B$. Die Größe des Winkels α sei bekannt.

(∗) Wie groß ist der Winkel $\beta = \sphericalangle CMB$?

Lösung

Wir berechnen β mit der naheliegenden Hilfsgröße $\gamma = \sphericalangle AMC$. Für γ gelten die Gleichungen (1) $\gamma = 180° - \beta$ sowie (2) $\gamma = 180° - 2\alpha$. Letzteres, weil das Dreieck AMC gleichschenklig ist. Aus (1) und (2) folgt:
$180° - \beta = \gamma = 180° - 2\alpha$, sodass $\beta = 2\alpha$ ist.

Beispiel 3: Eine Strecke und eine Drehung als Hilfsgrößen



Es sei k der Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC und P sei ein Punkt auf dem kleineren Bogen BC von k. Dann gilt:

(∗) $|PA| = |PB| + |PC|$.

Nachweis

Nach dem Peripheriewinkel-Satz sind die Winkel $\sphericalangle BPA$ und $\sphericalangle BCA$ über der Sehne AB gleich groß, woraus folgt, dass $\sphericalangle BPA = 60°$ ist.

Es sei nun die Teilstrecke QP von PA eine Hilfsgröße, für die gilt:
(1) $|QP| = |PB|$ sowie (2) $\sphericalangle(QP, QB) = 60°$ – dieses trifft zu, da im gleichschenkligen Dreieck QBP der Winkel bei P 60° groß ist.
Aus (1) und (2) folgt: Das Dreieck QBP ist gleichseitig.
Als eine zweite Hilfsgröße beim Beweis von (∗) verwenden wir eine Drehung. Es sei D die Drehung mit Drehzentrum B und Drehwinkel 60° (gegen den Uhrzeigersinn). Für D gilt: (1′) $P \to Q$ ($\to$: wird gedreht in), denn $\sphericalangle(BP, BQ) = 60°$ und $|BP| = |BQ|$; (2’) $C \to A$ wegen $\sphericalangle(BC, BA) = 60°$ und $|BC| = |BA|$.
Aus (1’) und (2’) folgt dann: $PC \to QA$, sodass $|PC| = |QA|$ ist. Damit und mit (1) ergibt sich, $|PA| = |PQ| + |QA| = |PB| + |PC|$.

Beispiel 4: Ein Teiler als Hilfsgröße

Es seien a und b positive ganze Zahlen mit $a > b$, welche die Gleichung erfüllen

(1) $a^2 + a = 2b^2 + b$.

(∗) Dann gilt: Die Differenz $a - b$ ist eine Quadratzahl.

Aus (1) folgt, $a^2 - b^2 + a - b = (a-b)(a+b) + a - b = b^2$ und somit:

(2) $(a-b)(a+b+1) = b^2$.

Es sei nun t der *ggT* (größter gemeinsamer Teiler) von $a-b$ und $a+b+1$. Für t gilt dann: (3) $t|a-b$ und (4) $t|a+b+1$ sowie $t|b^2$, sodass auch (5) $t|b$ gilt – wobei $t|a-b$ bedeutet: t ist ein Teiler von $a-b$.
Mit t als Hilfsgröße lässt sich die Behauptung $(*)$ so beweisen –
Annahme: $t \geq 2$.
Aus (3) und (5) folgt $t|(a-b)-b$, also $t|a$. Wegen $t|b$ und $t|a$ gilt also $t|a+b$, was aber wegen (4) nur möglich ist, wenn $t=1$ ist im Widerspruch zur Annahme. Ist t wegen dieses Widerspruchs als Hilfsgröße ungeeignet?
Keineswegs, denn mit t gelangt man an die Information, dass $a-b$ und $a+b+1$ teilerfremd und dann wegen (2) Quadratzahlen sind. Es gilt somit die Behauptung $(*)$, denn das Produkt zweier teilerfremder Zahlen ist nur dann quadratisch, wenn beide quadratisch sind.

Beispiel 5: Eine Summe und eine Quadratzahl

Es sei P_n die Summe der nach wachsender Größe geordneten Primzahlen p_1, p_2, ..., p_n, $n \geq 1$. Dann gilt:

$(*)$ In jedem Intervall (P_n, P_{n+1}), $n = 1, 2, 3, \ldots$ gibt es stets eine Quadratzahl.

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ist z. B.
$P_1 = 2 < 2^2 < P_2 = 5 < 3^2 < P_3 = 10 < 4^2 < P_4 = 17 < 5^2 < P_5 = 28.$

Zum Nachweis von $(*)$ beschaffen wir uns mit der Hilfsgröße $U_n = 1+3+5+\ldots+p_n$ eine erste Information über das Intervall (P_n, P_{n+1}). Wegen $U_n = \frac{1}{4}(p_n+1)^2$ und $P_n < U_n$ gilt:**

(1) $P_n < \frac{1}{4}(p_n+1)^2, n \geq 1$.

Zu jedem P_{n+1}, $n \geq 1$, gibt es stets eine kleinste Quadratzahl $(Q+1)^2$, Q ganzzahlig, für die $P_{n+1} \leq (Q+1)^2$ ist.
Annahme: Es gilt $Q^2 \leq P_n$ – im Intervall (P_n, P_{n+1}) gibt es dann keine Quadratzahl. Mit Q als Hilfsgröße kann man nun die Aussage herleiten:

$$p_n+2 \leq p_{n+1} = P_{n+1} - P_n \leq (Q+1)^2 - Q^2 = 2Q+1 \text{ und daher } \frac{1}{4}(p_n+1)^2 \leq Q^2.$$

Wegen (1) ist somit $P_n < Q^2$ – ein Widerspruch zur Annahme. Die Annahme ist also falsch und Q^2 liegt im Intervall (P_n, P_{n+1}).

Beispiel 6: Hilfsgröße gesucht.

In der Ebene seien n rote und n blaue Punkte $n \geq 1$, so gegeben, dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Dann gilt:

** $U_n = (1+2+\ldots+p_n) - 2\cdot(1+2+\ldots+\frac{p_n-1}{2}) = \frac{1}{2}p_n(p_n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}\frac{p_n-1}{2}\cdot(\frac{p_n-1}{2}+1) = \frac{1}{4}(1+p_n)^2$

(∗) Man kann jeden roten Punkt mit genau einem blauen Punkt durch eine Strecke so verbinden, dass sich keine zwei der n Verbindungsstrecken in einem Punkt schneiden. Finde eine geeignete Hilfsgröße.

Ein Lösungsvorschlag findet sich in diesem Monoid auf Seite 18

Aus den Archiven der Mathematik
Maurolicus - ein zu Unrecht vergessener Mathematiker
von Hartwig Fuchs

Die Erforschung des mathematischen Unendlichen ist eine Suche nach seinen Strukturen – sie zu finden, ist eines der großen Anliegen der Mathematik. Wie man dabei in vielen Fällen zum Erfolg kommen kann, soll nun am Beispiel des Universums $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ der nach wachsender Größe angeordneten, natürlichen Zahlen gezeigt werden. Dabei stellt sich zunächst die Frage: Wie beschreibt man eine Struktur von $\mathbb{N}$? Eine Möglichkeit zu deren Darstellung – auf die wir uns hier beschränken werden – sind Gleichungen.

Beispiel 1

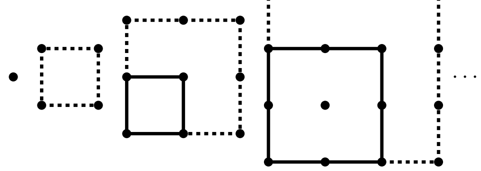
(a) Die ungeraden Zahlen sind nach einem leicht erkennbaren Muster in $\mathbb{N}$ verteilt: Ausgehend von 1 folgen sie nacheinander jeweils im Abstand 2. Dieses Verteilungsmuster kann man durch Gleichungen beschreiben. Es sei u_n die n-te ungerade Zahl, $n \geq 1$.

n	1	2	3	4	...
u_n	1	3	5	7	...
Abstand u_{n-1}, u_n		2	2	2	

Aus der dritten Zeile der Tabelle ergibt sich unmittelbar und unzweifelhaft: $u_n = 1 + (n-1) \cdot 2$ und damit

(1) Für die n-te ungerade Zahl gilt die Gleichung $u_n = 1 + (n-1) \cdot 2$.*

(b) Durch die Gleichungen $S_n = 1+3+5+...+(2n-1)$, $n = 1, 2, 3, ...$ ist das Verteilungsmuster der Folge der Zahlen u_n in $\mathbb{N}$ festgelegt. Welche Zahlen bilden diese Folge? Wir zeichen Quadrate nach dem Figurenmuster:



Es sei a_n die Anzahl der Punkte des n-ten Quadrats und s_n sei deren Summe.

n	1	2	3	4	...
u_n	1	3	5	7	...
s_n	1	4	9	16	...
a_n	1^2	2^2	3^2	4^2	...

Wenn man die Figurenfolge beliebig weit fortgesetzt denkt, gelangt man

* Ein durch eine arithmetische Gleichung festgelegte Struktur von $\mathbb{N}$ nennt man eine Folge.

zu der Aussage: Das n-te Quadrat weist n^2 Punkte auf, $n \geq 1$. Aus der dritten und vierten Zeile der Tabelle ergibt sich $a_n = s_n$ für $n \geq 1$ und damit:

(2) Die n-te Quadratzahl n^2 ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen, also $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1), n \geq 1$.

Obgleich niemand die Aussagen (1) und (2) bestreiten wird, gibt sich die Mathematik mit dem Offensichtlichen nicht zufrieden. Sie verlangt Beweise – denn auch eine Bestätigung von nach so vielen Aussagen $A(1), A(2), \ldots, A(m)$ kann nur zu der Hypothese hinführen, dass jede Aussage $A(n), n = 1, 2, 3, \ldots$ gültig ist, sie kann aber nicht ausschließen, dass es Zahlen $n > m$ gibt, für welche die Aussagen $A(n)$ falsch sind und damit die Hypothese hinfällig ist.**

Beispiel 2

Wenn man die Gleichungen $G(n) : 991n^2 + 1 = m^2$ mit einem Computer für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10^{28}$ überprüft, dann ergibt sich: Keine der zugehörigen Gleichungen $G(n)$ trifft zu. Dieses Ergebnis darf einen aber nicht zu der Behauptung verführen:

(3) Für kein $n, n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt: $99n^2 + 1$ ist eine Quadratzahl.

Denn $n = 12055735790331359447442538767$ widerlegt (3) – für dieses n ist $991n^2 + 1$ eine Quadratzahl.
Das Beispiel 2 macht deutlich, dass man vor einem Problem steht.
Eine Hypothese $A(n), n = 1, 2, 3, \ldots$ könnte man bestätigen, indem man all ihre unendlich vielen Aussagen $A(1), A(2), A(3), \ldots$ überprüft – was aber nicht möglich ist. Man braucht daher eine andere Methode, mit der man die durch Induktion nur teilweise gelöste Frage nach der Gültigkeit der Hypothese $A(n)$ vollständig – also für jedes $n \geq 1$ – beantworten kann.

Hier kommt nun Franciscus Maurolicus ins Spiel. Wer war dieser Mann?
Franciscus Maurolicus (1494 - 1575) war ein in Messina (Sizilien) lebender Kleriker, ein Mann der Kirche also, – aber mehr noch war er ein Mann der Wissenschaften: Er betrieb Studien in Astronomie (er entdeckte als Erster eine Supernova), in der Biologie, in Geschichte (er schrieb über die Geschichte Siziliens) und er war ein einfallsreicher Mathematiker; zu all dem trug er auch noch die Verantwortung für das Münzwesen und die Befestigungsanlagen Messinas sowie für die Erziehung der Kinder des Vizekönigs von Sizilien. Dieser vielbeschäftigte Mann veröffentlichte kurz vor seinem Tod ein Buch über Zahlentheorie: Arithmeticorum Libri duo, Venedig 1575.
In diesem Buch ist erstmalig in der mathematischen Literatur der Beweis einer

** Wenn man endlich viele Aussagen $A(1), A(2), \ldots, A(m)$ nacheinander herleitet und man die Hypothese $A(n), n = 1, 2, 3, \ldots$ aufstellt, dann nennt man das eine Induktion. Einen Beweis von $A(n)$ für jedes $n \geq 1$ bezeichnet man dann als eine vollständige Induktion.

Hypothese beschrieben – die proporsition XV, das ist die Hypothese (2) oben – der mit einer vom Autor selbst entwickelten Methode geführt ist.
Wie hat Maurolicus seine prop. XV bewiesen? *** Ihm war klar, dass man seine Hypothese – wir nennen sie A, $A = \{A(1), A(2), \dots, A(n)\}$ wobei $A(n)$ behauptet: $n^2 = 1 + 3 + \dots + (2n - 1), n \geq 1\}$ – nicht beweisen kann, indem man der Reihe nach $A(1), A(2), A(3), \dots$ beweist. Jedoch hat er erkannt: Immer dann, wenn eine Aussage $A(k)$ bewiesen ist, kann man aus ihr die Aussage $A(k+1)$ herleiten – schön zu sehen an der Figurenfolge zu (2) und auch an der Überlegung:
Wenn $1+3+\dots+(2k-1) = k^2$ zutrifft, dann gilt $(1+3+\dots+(2k-1))+2k+1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ und damit gilt $A(k+1)$.
Hier nun betritt Maurolicus mathematisches Neuland, indem er seine Hypothese A als bewiesen betrachtet, da sie die strukturelle Eigenschaft besitzt:

(4) Satz 1: Es gilt $A(1)$ wegen $1^2 = 1$
Satz 2: Für ein beliebiges $k \geq 1$ ist $A(k+1)$ aus der als bewiesen vorausgesetzten Aussage $A(k)$ herleitbar.

In Satz 2 sind die unendlichen vielen logischen Übergänge von $A(1)$ zu $A(2)$, von $A(2)$ zu $A(3)$ und immer so weiter ohne Ende komprimiert zu einer einzigen Beweisbedingung. Maurolicus Idee, die unendlich vielen Beweisschritte zur Bestätigung seiner prop. XV durch die in (4) beschriebene endliche Regel zu ersetzen, haben die Mathematiker später aufgegriffen und als das Beweisprinzip der vollständigen Induktion in die Mathematik integriert – sei es als Axiom (wie etwa in der von G. Peano (1858 - 1932) axiomatisierten Arithmetik) oder als den unter einer bestimmten Bedingung beweisbaren Satz 3 (ein Beweis dieses Satzes findet man im Anhang)

Die vollständige Induktion

Satz 3: Die unendlich vielen Aussagen $A(1), A(2), A(3), \dots$ einer Hypothese treffen zu, wenn Satz 1 für $A(1)$ und Satz 2 für $A(k)$, k eine beliebige Zahl ≥ 1 gelten.
Ergänzung: In Satz 1 darf statt $A(1)$ auch eine Aussage $A(i), i > 1$ eine vorgegebene Zahl, gesetzt werden.

Beispiel 3

(a) **Beweis einer arithmetischen Hypothese**
Für jede Aussage $A(n) =$ Summe der aufeinanderfolgenden Kubikzahlen n^3, $(n+1)^3$, $(n+2)^3$ gilt: $A(n)$ ist ein Vielfaches von 9.
Nachweis
Für $k = 1$ ist $A(1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 4 \cdot 9$ – also gilt Satz 1, im Beweis mit vollständiger Induktion.

*** Da nicht bekannt ist, auf welchem Weg Maurolicus zu seiner Beweismethode gelangt ist, bilden die nachfolgenden Ausführungen nur eine mögliche Annäherung an seine vermutlichen Überlegungen.

Es gelte nun $A(k) = v \cdot 9$ für ein $k \geq 1$, v eine ganze Zahl > 1. Dann gilt wegen $(k+3)^3 - k^3 = (k^2+3k+3) \cdot 9 = w \cdot 9$ für eine ganze Zahl $w > 1$:

$$\begin{aligned} A(k+1) &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 - k^3 \\ &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + w \cdot 9 \\ &= A(k) + w \cdot 9 \end{aligned}$$

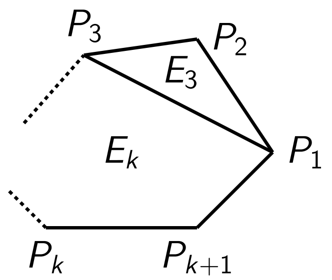
– also gilt Satz 2. Nach dem Induktionsprinzip – also nach Satz 3 – ist die Hypothese bewiesen.

(b) **Beweis einer geometrischen Hypothese**

Ein n-Eck E_n, $n \geq 3$ heißt konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel $< 180°$ ist.

Hypothese: In jedem konvexen n-Eck E_n, $n = 3, 4, 5, ...$ gilt für die Summe $A(n)$ seiner Innenwinkel, dass $A(n) = (n-2) \cdot 180°$ ist.

Nachweis



Für $k = 3$ ist E_3 ein Dreieck mit $A(3) = (3-2) \cdot 180°$ – es gilt also der Satz 1.

Es gelte nun $A(k) = (k-2) \cdot 180°$ für jedes konvexe k-Eck E_k und k einer beliebigen natürlichen Zahl mit $k \geq 3$.

Für $k+1$ sei $E_{k+1} = P_1 P_2 ... P_k P_{k+1}$ ein beliebiges konvexes $(k+1)$-Eck.

Eine Diagonale in E_{k+1} – etwa die Diagonale $P_1 P_3$ – zerlegt dieses $(k+1)$-Eck in ein konvexes k-Eck mit $A(k) = (k-2) \cdot 180°$ und in ein Dreieck. Folglich ist $A(k+1) = (k-2) \cdot 180° + 180° = A(k) + 180°$. Also ist $A(k+1) = ((k+1)-2) \cdot 180°$. Nach Satz 3 ist somit die Hypothese bewiesen.

In der mathematischen Literatur finden sich Vorformen des Induktionsprinzips bereits vor Maurolicus – etwa bei den arabischen Mathematikern Abu Bakr al-Karadschi (um 1020) und Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (965 - nach 1040) und auch bei dem französischen Mathematiker Levi ben Gerson (1288 - 1344). Aber ihre Ideen fanden keinen Widerhall in der Mathematik und somit auch keine Weiterentwicklung hin zu einem gültigen Beweisverfahren.

Anhang: Ein Beweis des Induktionsprinzips (Satz 3)

Für die Aussagen $A(1), A(2), A(3), ...$ einer Hypothese seien die Sätze 1 und 2 zutreffend.

Annahme: Die Hypothese ist nicht wahr – es gibt Zahlen i, für welche die Aussagen $A(i)$ nicht zutreffen.

Dann ist die Menge $M = \{i | A(i) \text{ ist falsch}\}$ nicht leer. Nach dem Axiom, dass jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element besitzt, gibt es auch in M eine kleinste Zahl – sie sei m.

Es gilt $m > 1$, denn für $m = 1$ ist $A(1)$ wahr wegen Satz 1.
Nach Definition von m gilt dann: $A(m-1)$ ist wahr, während $A(m)$ falsch ist – ein Widerspruch zur Annahme, denn aus einer wahren Aussage kann man keine Falschaussage herleiten. Diese ist somit falsch und es gilt: Alle Aussagen $A(1), A(2), A(3), \dots$ sind wahr und damit ist die Hypothese bewiesen und zugleich das Induktionsprinzip logisch gerechtfertigt.

Bundeswettbewerb Mathematik
Zweite Runde 2025

von Stefan Kermer, Volker Priebe und Bastian Schneider

Aufgabe 1

Die aktuelle Jahreszahl 2025 hat folgende besondere Eigenschaft: Ihre Dezimaldarstellung entsteht, indem man die beiden Zahlen 20 und 25 hintereinanderschreibt, und 2025 ist gleichzeitig das Quadrat der Summe dieser beiden Zahlen, das heißt $2025 = (20 + 25)^2$.
Eine positive ganze Zahl q nennen wir k-kurios ($k \geq 1$), wenn sie eine $2k$-stellige Dezimaldarstellung mit folgender Eigenschaft besitzt: die ersten k Ziffern und die letzten k Ziffern bilden jeweils eine Dezimaldarstellung einer Zahl x bzw. y und es gilt $q = (x + y)^2$.

a) Zeige: Wenn es für ein k mindestens eine durch 5 teilbare k-kuriose Zahl gibt, dann gibt es auch mindestens eine durch 2025 teilbare k-kuriose Zahl.
b) Gibt es unendlich viele k, für die es mindestens eine durch 2025 teilbare k-kuriose Zahl gibt?

Anmerkung: Dezimaldarstellungen von Zahlen können hier führende Nullen enthalten.

Behauptung

Es existieren unendlich viele k, für die es mindestens eine durch 2025 teilbare k-kuriose Zahl gibt.

Beweis

Für eine k-kuriose Zahl, $k \geq 1$, gilt mit q, x, y wie in der Aufgabenstellung nach Definition, dass $10^k x + y = q = (x + y)^2$. Dies lässt sich auf zwei Arten äquivalent umformen,

$$\begin{aligned} 10^k x + y = q = (x+y)^2 &\Leftrightarrow 10^k(x+y) - 10^k y + y = (x+y)^2 \\ &\Leftrightarrow (10^k - (x+y)) \cdot (x+y) = (10^k - 1) \cdot y \end{aligned} \tag{1.1}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} 10^k x + y = q = x^2 + 2xy + y^2 &\Leftrightarrow 10^k x - x^2 - 2xy = y^2 - y \\ &\Leftrightarrow (10^k - x - 2y) \cdot x = (y-1) \cdot y. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Weil $q = (x+y)^2$ eine positive ganze Zahl ist, gilt $x+y > 0$. Es gilt stets $y > 0$, denn die Annahme $y = 0$ impliziert $x > 0$ und über die linke Seite von (1.1), dass $x = 10^k$, was eine $(k+1)$-stellige ganze Zahl mit führender Ziffer 1 ist; ein Widerspruch dazu, dass x aus k Ziffern besteht. Also ist $(10^k - 1) \cdot y > 0$, und aus (1.1) folgt, dass stets $10^k - (x+y) > 0$.

Wir beweisen Teil a) der Aufgabenstellung. Für ein beliebiges, aber festes k, $k \geq 1$, existiere eine k-kuriose Zahl $q = (x+y)^2$, die durch 5 teilbar ist. Weil 5 eine Primzahl ist, sind $x + y$ selbst und auch $10^k - (x+y)$ durch 5 teilbar; beide Zahlen sind positiv und ihre Dezimaldarstellungen enden entweder beide auf 5 oder beide auf 0. Weil die Dezimaldarstellung von $10^k - 1$ auf 9 endet, folgt aus (1.1), dass die Dezimaldarstellung von y auf dieselbe Ziffer wie die Dezimaldarstellung von $x+y$ endet. Insbesondere gilt in diesem Fall $y > 1$, also $(y-1) \cdot y > 0$, und aus (1.2) schließen wir $x > 0$ und $10^k - x - 2y > 0$.

Der Term $10^k - 1$ ist durch 9 teilbar. Es können nicht beide Zahlen $x + y$ und $10^k - (x+y)$ durch 3 teilbar sein, weil $10^k - (x+y) \equiv 1 - (x+y) (\bmod 3)$, also ist wegen (1.1) eine von ihnen durch 9 teilbar. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall: Ist $x + y$ durch 9 teilbar, so ist $x + y$ wie oben begründet durch $5 \cdot 9 = 45$ und $q = (x+y)^2$ durch $45^2 = 2025$ teilbar.

Zweiter Fall: Ist $10^k - (x+y)$ durch 9 teilbar, so ist $10^k - (x+y)$ wie oben begründet durch $5 \cdot 9 = 45$ teilbar. Es ist $10^k - (x+y) = (10^k - x - 2y) + y$ mit $10^k - x - 2y > 0$, $y > 0$, wie wir oben begründet hatten, und mit $(x+y)^2 = 10^k x + y$ folgt

$$\begin{aligned} (10^k - (x+y))^2 &= 10^{2k} - 2 \cdot 10^k \cdot (x+y) + (x+y)^2 = 10^k \cdot (10^k - 2 \cdot (x+y)) + (x+y)^2 \\ &= 10^k \cdot (10^k - x - 2y) - 10^k x + (10^k x + y) = 10^k \cdot (10^k - x - 2y) + y; \end{aligned}$$

es ist also $q' = (10^k - (x+y))^2$ eine k-kuriose Zahl, die durch $45^2 = 2025$ teilbar ist.

Die 2-kuriose Zahl $45^2 = 2025$ lässt sich für einen Beweis der Behauptung zu Teil b) verallgemeinern. Wir betrachten im Einzelnen für $k_j = 2 + 9j$, $j \geq 0$,

$$z_j := 5 + \frac{400}{81} \cdot (10^{9j} - 1) \quad \text{sowie} \quad x_j := 4z_j, y_j := 5z_j. \tag{1.3}$$

Mit $z_0 = 5$, $x_0 = 20$, $y_0 = 25$ ergibt sich für $k_0 = 2$ die 2-kuriose Zahl $(x_0 + y_0)^2 = 45^2$ aus der Aufgabenstellung.

Für $j \geq 1$ ist wegen $10^9 - 1 = 9 \cdot 111111111 = 81 \cdot 12345679$ und der Teleskopsumme $10^{9j} - 1 = (10^9 - 1) \cdot \sum_{i=0}^{j-1} 10^{9i}$ der Ausdruck $z_j = 5 + 49382716 \cdot \sum_{i=0}^{j-1} 10^{2+9i}$ eine positive ganze Zahl mit $(2+9j)$-stelliger Dezimaldarstellung (führende Ziffer 0) und entsprechend

$$x_j = 20 + 197530864 \cdot \sum_{i=0}^{j-1} 10^{2+9i} \text{ bzw. } y_j = 25 + 246913580 \cdot \sum_{i=0}^{j-1} 10^{2+9i}$$

positive ganze Zahlen mit $(2+9j)$-stelliger, also k_j-stelliger Dezimaldarstellung mit führender Ziffer 1 bzw. 2.

Aus der Definition (1.3) sehen wir, dass $81z_j = 405 + 400 \cdot (10^{9j} - 1) = 4 \cdot 10^{2+9j} + 5$, womit

$$(x_j + y_j)^2 = (4z_j + 5z_j)^2 = 81z_j \cdot z_j = (4 \cdot 10^{2+9j} + 5) \cdot z_j = 10^{2+9j} x_j + y_j,$$

und der Term $10^{2+9j} x_j + y_j$ hat eine $2(2+9j)$-stellige Dezimaldarstellung mit führender Ziffer 1.

Für alle $j \geq 1$ ist damit $(x_j + y_j)^2 = 81z_j^2 = 2025 \cdot [1 + \frac{80}{81} \cdot (10^{9j} - 1)]^2$ eine k_j-kuriose Zahl, die durch 2025 teilbar ist. □

Bemerkung: Eine Zahl, deren Quadrat eine k-kuriose Zahl ist, wird Kaprekar-Zahl genannt, vergleiche https://oeis.org/A006886.

Aufgabe 2

Bestimme alle reellen Zahlen t, $0 < t < 1$, für die folgende Aussage wahr ist: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck den Seiten mit den Längen a, b und c wie üblich die Winkel mit den Größen α, β bzw. γ gegenüberliegen und $\frac{a}{b+c} = t$ gilt, dann ist $\alpha \leq \beta$ und $\alpha \leq \gamma$.

Behauptung

Die Aussage der Aufgabenstellung ist genau dann wahr, wenn $0 < t \leq \sqrt{2} - 1$.

Beweis

Mit den Bezeichnungen der Aufgabenstellung nehmen wir an, dass $b \leq c$; anderenfalls vertauschen wir die Rollen von b und c in den nachfolgenden Überlegungen. Für ein spitzwinkliges Dreieck gilt $0° < \alpha, \beta, \gamma < 90°$ und zusammen mit $a^{-1} \cdot \sin\alpha = b^{-1} \cdot \sin\beta$ (Sinussatz) in diesem Intervall

$$\alpha \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha \leq \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b \tag{2.1}$$

(dem größeren Winkel liegt stets die größere Seite gegenüber). Außerdem gilt $\cos\gamma > 0$ in einem spitzwinkligen Dreieck. Aus $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ (Kosinussatz) folgt, dass

$$c^2 < a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad (c-b) \cdot (c+b) < a^2. \tag{2.2}$$

Wir unterscheiden drei Fälle: Wir zeigen im ersten Fall, dass für alle reellen Zahl t mit $0 < t \leq \sqrt{2} - 1$ und $a = t \cdot (c+b)$ die Aussage der Aufgabenstellung wahr ist. Aus der rechten Seite von (2.2) folgt dann nämlich nach Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit $(c+b)^{-1}$

$$c - b < a^2 \cdot (c+b)^{-1} = t^2 \cdot (c+b) \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot b. \tag{2.3}$$

Die Funktion $]0;1[\ni t \mapsto \frac{1+t^2}{1-t^2}$ ist auf ihrem Definitionsbereich streng monoton steigend, also folgt aus der rechten Ungleichung in (2.3) im angegebenen Intervall für t wegen $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$, dass $c < \frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2} \cdot b = \sqrt{2} \cdot b$. Hieraus schließen wir, dass

$$a = t \cdot (c+b) < (\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1) \cdot b = b.$$

Zusammen mit unserer Annahme $b \leq c$ impliziert dies $a < b \leq c$ und nach (2.1) bedeutet dies, dass $\alpha < \beta \leq \gamma$.
Für reelle Zahlen t mit $\sqrt{2}-1 < t \leq \frac{1}{2}$ (zweiter Fall) gibt es stets ein spitzwinkliges Dreieck mit Seitenlängen a, b und c, für das $a = t \cdot (b+c)$ und $a > b$, also nach (2.1) auch $\alpha > \beta$. Denn im betrachteten Intervall für t ist $t^2 + 2t - 1 = (t+1-\sqrt{2}) \cdot (t+1+\sqrt{2}) > 0$ und damit

$$0 < \frac{1}{2} \cdot (t^2 + 2t - 1) = \frac{1}{2} \cdot (t-1)^2 + 2t - 1 = t^2 - \frac{1}{2} \cdot (t-1)^2,$$

womit wir wegen $t \leq \frac{1}{2}$ auf die Ungleichungskette

$$0 \leq 1 - 2t < \frac{1}{2} \cdot (t-1)^2 =: \varepsilon_t < t^2 \tag{2.4}$$

schließen. Mit ε_t aus (2.4) und gegebenem $a > 0$ setzen wir $b := \frac{1}{2t} \cdot (1-\varepsilon_t) \cdot a$ und $c := \frac{1}{2t} \cdot (1+\varepsilon_t) \cdot a$, also $t \cdot (b+c) = a$. Aus der mittleren Ungleichung in (2.4), die äquivalent zu $1 - \varepsilon_t < 2t$ ist, schließen wir $b < a < c$, denn $0 < \frac{1}{2t} \cdot (1-\varepsilon_t) \cdot a < a < (1+\varepsilon_t) \cdot a \leq \frac{1}{2t} \cdot (1+\varepsilon_t) \cdot a$. Wir zeigen, dass ein spitzwinkliges Dreieck mit diesen Seitenlängen a, b und c existiert: Wegen $b < a < c$ ist für die Dreiecksungleichungen nur $c < a + b$ nachzuweisen, und dies schließen wir aus

$$(a+b-c) \cdot (a+b+c) = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 > a^2 + b^2 - c^2 > 0, \tag{2.5}$$

wobei die letzte Ungleichung aus $\varepsilon_t < t^2$ in (2.4) folgt, da dies
$(1+\varepsilon_t)^2 < 4t^2 + (1-\varepsilon_t)^2$ und damit $c^2 < a^2 + b^2$ impliziert. Wie in der Herleitung von (2.2) besagt die rechte Ungleichung in (2.5), dass im Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c auch $2ab \cdot \cos\gamma > 0$, das Dreieck also tatsächlich spitzwinklig ist. Die Aussage der Aufgabenstellung ist also in diesem Fall falsch.
Für reelle Zahlen t mit $\frac{1}{2} < t < 1$ (dritter Fall) impliziert $a = t \cdot (b+c)$ zusammen mit unserer Annahme $b \leq c$, dass

$$a = t \cdot (b+c) \geq 2t \cdot b > b;$$

nach (2.1) ist dies in jedem spitzwinkligen Dreieck äquivalent zu $\alpha > \beta$. Die Aussage der Aufgabenstellung ist also auch in diesem Fall falsch. $\square$

Wir danken Herrn StD a.D. Fegert und Herrn OStR Dr. Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

„Ich weiß immer noch nicht, wie dieser Zaubertrick funktioniert,“ erzählt Anna ihrer Freundin Magdalena. „Was meinst Du,“ fragt diese zurück. „Gestern war ich mit meinen Eltern in einer Show,“ antwortete Anna, „und einmal standen 13 gleich aussehende Schachteln nebeneinander auf einem Tisch auf der Bühne. Der Assistent bat das Publikum, ihm zwei Schachteln zu nennen, in die er jeweils eine Münze legte. Daraufhin öffnete er den Deckel einer der Schachteln, die keine Münze enthielten, und verschwand hinter der Bühne.“

„Was geschah dann,“ fragte Magdalena. Anna fuhr fort: „Durch den Mittelgang erschien von hinten die Zauberkünstlerin, ging auf die Bühne und öffnete vier Schachteln gleichzeitig. In zweien von diesen befanden sich die beiden Münzen.“

„Na und, das war Zufall,“ meinte Magdalena. „Nein,“ entgegnete Anna, „die beiden wiederholten den Trick nach der Pause noch einmal mit dem gleichen Ergebnis. Und es war klar, dass sie zwischen dem Verschwinden des Assistenten und dem Erscheinen der Zauberkünstlerin keinen Kontakt hatten. Aber wieso kann die Frau sicher sein, dass sich unter den vier Schachteln, die sie öffnet, immer die beiden mit den Münzen befinden?“

Gibt es eine Strategie für diesen Zaubertrick, mit der das gewünschte Ergebnis auf jeden Fall garantiert ist? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2025 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

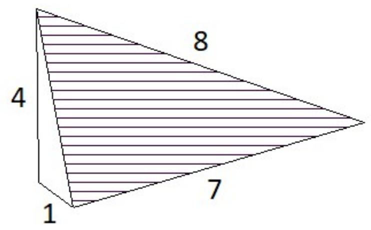
Lösung der Aufgabe aus Heft 161

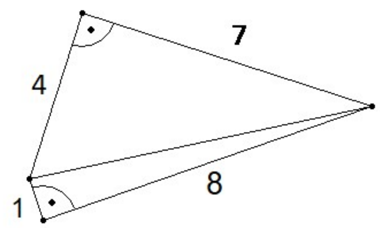
In Heft 161 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Herr Pommer möchte seinen Garten für das Frühjahr vorbereiten. Im Schuppen findet er vier geradlinige Zaunstücke mit den Längen $1, 4, 7$ und 8 Meter. Mit ihnen will er ein Stück des Gartens umzäunen, auf dem er Karottensamen ausbringen will. Was ist die größte Vierecksfläche, die er mit den Zaunstücken umschließen kann? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Wir können annehmen, dass die Zaunstücke mit den Längen 1 und 8 (alle Angaben in Meter) benachbarte Seiten des Vierecks sind. Falls nicht, können wir die in der linken Figur schraffierte Teilfläche umdrehen, ohne dass sich an der Gesamtfläche etwas ändert.





Nun lässt sich die Vierecksfläche wie in der rechten Figur in zwei Teildreiecke zerlegen. In jedem dieser Dreiecke haben zwei Seiten (Zaunstücke) eine feste Länge. Bekanntlich ist die Fläche eines Dreiecks mit zwei vorgegebenen Seitenlängen genau dann am größten, wenn diese beiden Seiten senkrecht aufeinander stehen. In diesem Fall gilt nach dem Satz des Pythagoras $16 + 49 = 1 + 64$; die Seitenpaare können also gleichzeitig senkrecht aufeinander stehen und liefern die gleiche Länge für die gemeinsame Diagonale. Nach der Flächeninhaltsformel für Dreiecke haben die Teilflächen dann den Inhalt 4 bzw. 14, sodass die größtmögliche Vierecksfläche $18\,\text{m}^2$ beträgt.

Eine Lösung wurde von Youssuf Mehana eingesandt.

Frau Pommer mag keine Karotten und fragt ihren Mann daher listig, ob er mit den Zaunstücken eine möglichst kleine Fläche umzäunen kann. Wie groß wäre ihr Inhalt? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 161

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Emil Nies 5;
Kl. 7: Quirin Fritsch 12, Christina Karst 42, Felix Pick 2,
Sina Marie Uherek Reyes 12;
Kl. 8: Robert Schmitt 14;
Kl. 9: Lisa Schäfer 46.

Bingen, Stefan-George Gymnasium
Kl. 6: Jonas Döring 12;
Kl. 7: Mais Alkhateeb 28, Tim Jockers 51.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 5: Sophia Clausen 8;
Kl. 7: Philip Mühlbeyer 32;
Kl. 8: Nico Mathy 22.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 8: Stephanos Dimitriou 62.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium
Kl. 7: Henry Urschel 4,5, Stefan Wolfert 5;
Kl. 9: Till Radünz 42,5;
Kl. 9: Niklas Gelhausen 72,5, Lars Noll 30.

Idar-Oberstein, Göttenbach-Gymnasium
Kl. 11: Joschua Jung 64.

Ingelheim, Sebastian-Münster Gymnasium:
Kl. 12: Eleanor Kondla 41.

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:
Kl. 7: Baris Eski 2;
Kl. 10: Lean Idrizaj 3;
Kl. 12: Matej Berger 38, Kadir Koçyiğit 17.

Lübbeck, Wittekind-Gymnasium
Kl. 9: Youssuf Mehana 17.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 7: Jonas Dürkes 65;
Kl. 8: Mara Schollmeyer 2.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 10: Lea Amend 43, Victor Mayer 18.

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 8: Ioan Salaru 61.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 7: Philipp Mühl 11, Sophia Kiehn 20,5, Nina Pucklitsch 14,5, Martin Schroff 57,5;
Kl. 9: Daniel Laibach Muñiz 60,5;
Kl. 10: Johannes Kiehn 46.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 10: Jasmin Borrmann 29;
Kl. 11: Emilie Borrmann 35.

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 12: Nils Angel 64.

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 10: Mai Linh Dang 60.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2025/26 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
  `www.facebook.com/monoid.matheblatt`
  `www.facebook.com/monoid.redaktion`
  `www.instagram.com/monoid.matheblatt`
  Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
  Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Claudia Jockers, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf, mit freundlicher Unterstützung von Lina Baumann
Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.
Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Jahrgang 45 | Heft 163 | Sep. 2025

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid