

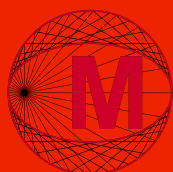
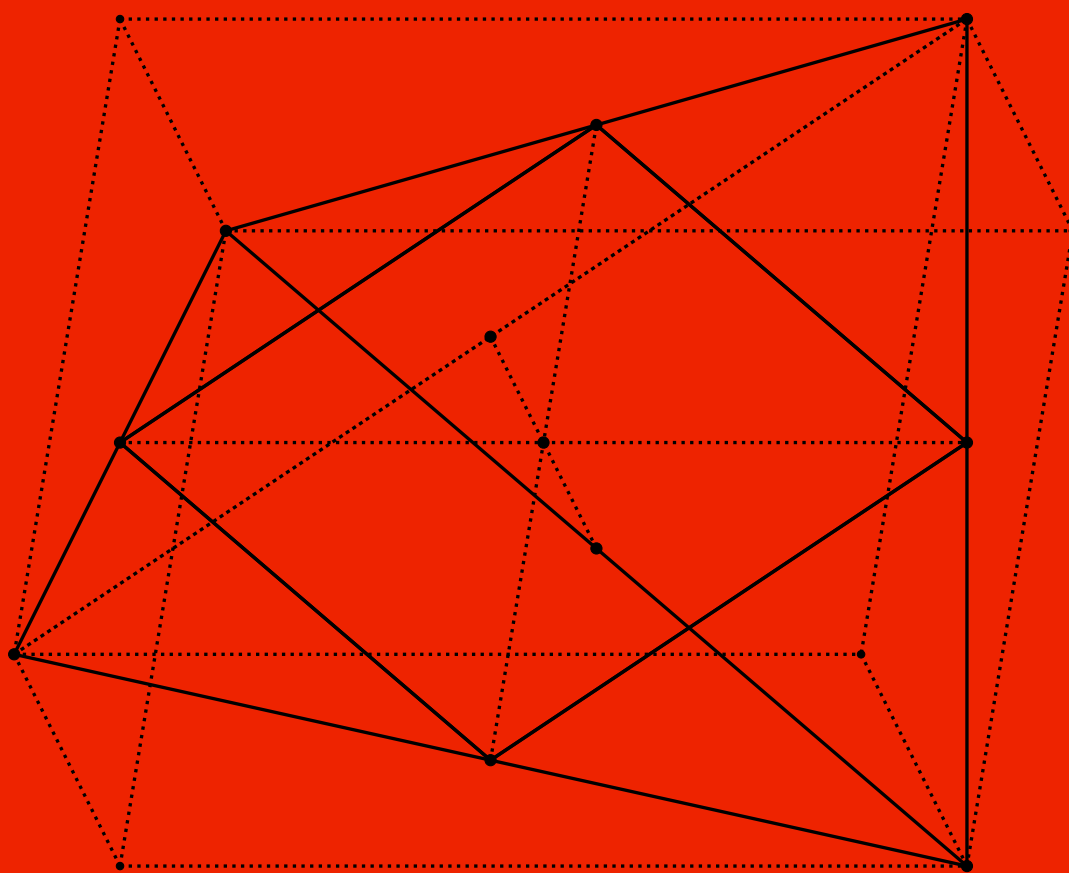
Jahrgang 46

Heft 165

März 2026

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15. Mai 2026.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

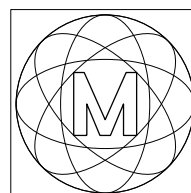
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



Mainzer Mathe-Akademie

2. bis 6. September 2026

Bei der Mainzer Mathe-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern, unter der Anleitung von Professorinnen und Professoren der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathe-Akademie anzumelden, die vom 2. September bis 6. September 2026 an der Universität Mainz stattfindet.

Ein genauer Programmplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben oder kann auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Unterbringung

Jugendhaus Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

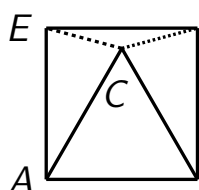
Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:
<https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/>.

Beweis ohne Worte

Halbe Fläche eines Quadrats



Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck im Innengebiet eines Quadrates $ABDE$. Dann gilt: Die Fläche der Dreiecke ACE und CBD zusammen sind halb so groß wie die Fläche des Quadrates. (H. F.)

Mathematische Knobelei

Das mongolische Testament

von Hartwig Fuchs

Oktai, Oberhaupt einer mongolischen Nomadenfamilie, Pferdezüchter und seit seiner Jugend begeistert für Rätsel und Knobeleyen, schrieb im hohen Alter sein Testament. Darin legte er fest, wie seine Herde von 80 Pferden nach seinem Tod auf seine fünf verschieden alten Kinder aufzuteilen sei:

- (1) Jedes Kind – außer dem jüngsten – erhält mehr Tiere als jedes seiner jüngeren Geschwister;
- (2) die positive Differenz der Anzahl von Tieren, die jeweils ein Kind und sein nächst jüngeres Geschwister erben, werden mit deren zunehmenden Alter immer größer;
- (3) das jüngste Kind bekommt ein Pferd mehr als die Hälfte dessen, was das älteste Kind erbt.

Wie ist die Pferdeherde aufzuteilen?

Die Lösung findest du auf Seite 36.

Was uns über den Weg gelaufen ist

Unerwartete Darstellung der Zahl 1

Es gibt unendlich viele Darstellungen der Zahl 1 als Summe von Bruchzahlen mit dem Zähler 1 und lauter verschiedenen Nennern – also

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \dots + \frac{1}{n_k}, \quad n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_k.$$

Eine ganz simple Begründung, die sich aus der beliebig oft wiederholten Anwendung der Identität $\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$, für $m = 1, 2, 3, \dots$ ergibt.

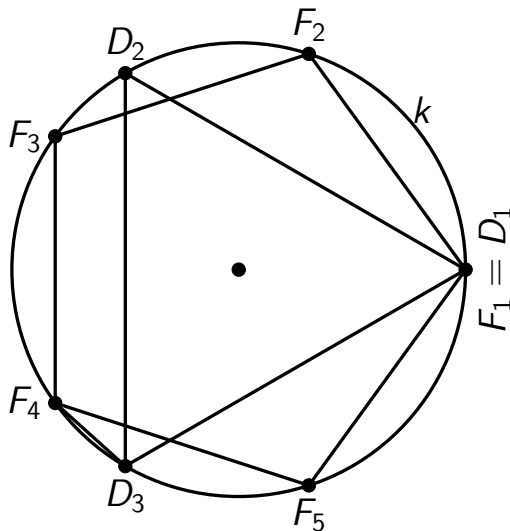
Beispiel

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\
 &\quad \downarrow \\
 \frac{1}{6} &= \frac{1}{7} + \frac{1}{42} \\
 &\quad \downarrow \\
 \frac{1}{42} &= \frac{1}{43} + \frac{1}{1806} \quad \text{und so weiter.} \quad (\text{H. F.})
 \end{aligned}$$

Eine mathematische Miniatur

Konstruktion einer Seite eines regelmäßigen 15-Ecks

Vorweg: Jedes regelmäßige 5-Eck und sein Umkreis – auf dem die fünf Ecken des 5-Ecks liegen – ist konstruierbar.* Es sei nun ein regelmäßiges 5-Eck $F = F_1F_2F_3F_4F_5$ und sein Umkreis k konstruiert.



Dann konstruiere man das gleichseitige Dreieck $D = D_1D_2D_3$ mit dem Umkreis k , wobei die Ecke D_1 von D die Ecke F_1 von F ist.

Um dies zu tun, konstruiert man zunächst auf die bekannte Weise ein regelmäßiges Sechseck mit der Ecke F_1 . Daraus erhält man unmittelbar das Dreieck D .

Es sei nun U der Umfang von k und $\text{arc}(F_1F_2)$ sei die Länge des Kreisbogens zwischen F_1 und F_2 (gemessen gegen den Uhrzeigersinn). Dann gilt:

$\text{arc}(D_1D_3) = \frac{2}{3}U$, $\text{arc}(F_1F_4) = \frac{3}{5}U$, sodass $\text{arc}(F_4D_3) = (\frac{2}{3} - \frac{3}{5})U = \frac{1}{15}U$ ist.

Daraus folgt: Die zum Kreisbogen F_4D_3 gehörige Sehne F_4D_3 ist eine Seite des 15-Ecks. (H. F.)

Mathematische Entdeckungen

In der Entdeckung aus Heft 163 war leider die Definition von "Komplementärwort" nicht klar. Daher hier nochmal ohne Verwendung des Begriffs.

Gegeben sei ein Wort ABBAABBAABBA... mit ungerade vielen ABBA hintereinander. Färbe jeden Buchstaben entweder rot oder grün. Ist es möglich, die Färbung so zu machen, dass, wenn man nur das rote Wort liest, dasselbe Wort herauskommt wie wenn man nur das grüne Wort liest? Wenn ja, gib eine solche Färbung an. Wenn nein, warum geht das nicht? (Martin Lustig)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2026 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

* Konstruieren bedeutet hier: konstruieren mit Zirkel und unmarkiertem Lineal.

Mathematische Lese-Ecke

Lesetipps zur Mathematik

von Martin Mattheis

Edmund Weitz: Fünf unlösbare Rätsel der Mathematik

Der Professor für Mathematik und Informatik an der HAW Hamburg und Betreiber eines YouTube-Kanals möchte den Lesern einen Einblick geben, dass es sich bei der Mathematik um kein abgeschlossenes Sammelsurium, sondern vielmehr um eine lebendige Wissenschaft handelt. Diese Tatsache beinhaltet, so verdeutlicht er seine Intention im Vorwort, dass es in der Mathematik selbstverständlich – wie in jeder Wissenschaft – offene Fragen gibt, an denen zum Teil seit Jahrhunderten geforscht wird. Als eine Besonderheit der Mathematik gegenüber anderen Fachgebieten stellt er heraus, dass zu manchen der offenen Fragen mathematisch exakt bewiesen werden konnte, dass man sie nicht beantworten kann.

Fünf Beispielen solcher gesichert unlösbarer Probleme der Mathematik werden im vorliegenden Buch untersucht. Dazu wird über die Entstehungsgeschichte der Problemstellung berichtet, und über die Gründe der Unlösbarkeit berichtet.

Als erstes Rätsel dürfen die drei klassischen Probleme der griechischen Antike nicht fehlen: Die Verdopplung des Würfels, die Dreiteilung eines beliebigen Winkels und die Quadratur des Kreises alleine mit Zirkel und Lineal zu lösen. Das erste Kapitel beleuchtet ausführlich die Würfelverdopplung und erwähnt kurz die beiden anderen klassischen Probleme. Kapitel 2 bis 4 führen über die Einführung der analytischen Geometrie durch René Descartes, das Rechnen mit Variablen von François Viète zu Pierre Wantzel, der mithilfe ebendieser analytischen Sichtweise auf Geometrie 1837 die Unlösbarkeit der Winkeldreiteilung und der Würfelverdopplung beweisen konnte. Es folgt ein Kapitel mit der Idee des Beweises der Unmöglichkeit einen Kreis mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln, der 1882 durch Ferdinand von Lindemann erbracht wurde. Ergänzt wurden die Kapitel über die drei klassischen griechischen Probleme durch das vierte der Frage der Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks, die Carl Friedrich Gauß im Jahr 1796, nur 18 Jahre alt, eindeutig als konstruierbar gelöst hatte.

Um die Rezension nicht zu lange werden zu lassen folgt für die übrigen Fragestellungen nur eine Kurzzusammenfassung. Kapitel 7 bis 9 beschäftigen sich dann mit der Frage der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen. Ausgehend vom bekanntesten geometrischen Lehrsatz, dem nach Pythagoras benannten „Satz des Pythagoras“, die Bedeutung und Vorgehensweise beim Beweisen, der unwiderlegbaren Begründung mathematischer Aussagen, die sich alleine auf vorher

festgelegte Axiome und Definitionen beruft. Dabei wird auch die Entwicklung nicht-euklidischer Geometrien, bei der es zu einer Gerade durch einen Punkt auch keine unendlich viele parallel Geraden geben kann gestreift.

Diese Überlegungen führen automatisch zum Versuch den logischen Aufbau der kompletten Mathematik mit den Argumenten der Mathematik aus wenigen grundlegenden Axiomen heraus zu beweisen.

Ab dem 13. Kapitel geht es dann um den Versuch die Unendlichkeit, der durch die Betrachtung von Grenzprozessen für das Gebiet der Analysis – welches im heutigen Lehrplan drei Halbjahre der Oberstufenmathematik umfasst – von entscheidender Bedeutung ist.

Wer einen Einblick gewinnen will, welche Fragestellungen und welche Herangehensweise an Problemstellungen die Wissenschaft Mathematik ausmachen, der wird bei den „Fünf unlösbare Rätseln der Mathematik“ voll auf seine Kosten kommen. Vertiefungen der im Text vorkommenden mathematischen Hintergründe findet man in Kästen, die auch übersprungen werden könnten – womit allerdings auch ein Teil des tieferen Verstehens übersprungen würde. Insgesamt reicht zum Verständnis der meisten Inhalte ein wacher Verstand und Kenntnisse der Mittelstufenmathematik.

Fazit

Wie im Vorwort thematisiert, wollte der Autor mit seinem Buch klarmachen, dass es in der Mathematik nicht um Rechnen mit Zahlen und Formeln geht, sondern um Ideen. Nach Ansicht des Rezensenten ist ihm dies voll und ganz gelungen. Auch der Spagat zwischen der historischen Einbettung und der Darstellung der zugrunde liegenden mathematischen Inhalte wird als durchweg ausgewogen analysiert.

Gesamtbeurteilung: sehr gut 😊 😊 😊

Angaben zum Buch

Weitz, Edmund: Fünf unlösbare Rätsel der Mathematik. Wie sich eine Wissenschaft selbst die Grenzen aufzeigt. Rowohlt 2025, ISBN 978-3-499-01426-0

Art des Buches: Mathematisches Sachbuch

Mathematisches Niveau: verständlich

Altersempfehlung: ab 14 Jahren

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Stella hat auf dem Dachboden gekramt und eine alte Balkenwaage gefunden. Leider hat diese einen Fehler: Ihre Schalen sind nur dann (scheinbar) im Gleichgewicht, wenn das Verhältnis der Gewichte in der linken und rechten Schale 3 : 4 beträgt.

Außerdem fand Stella bei der Waage ein Gewichtsstück von 6 kg. Um einen Teig zu backen, benötigt sie genau 1 kg Mehl. Der Mehlvorrat ist hinreichend groß, und es gibt Plastikbeutel beliebiger Größe, deren Gewicht vernachlässigbar ist. So fragt Stella ihre Freundin Leonie, mit der sie gemeinsam backen will, ob sie eine Idee hat, wie beide mit der alten Waage die gewünschte Mehlportion abwiegen können. Leonie überlegt ein wenig und macht Stella dann einen Vorschlag.



Wie können die beiden die Mehlportion von 1 kg abwiegen? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2026 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 163

In Heft 163 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

„Ich weiß immer noch nicht, wie dieser Zaubertrick funktioniert“, erzählt Anna ihrer Freundin Magdalena. „Was meinst Du?“, fragt diese zurück. „Gestern war ich mit meinen Eltern in einer Show“, antwortete Anna, „und einmal standen 13 gleich aussehende Schachteln nebeneinander auf einem Tisch auf der Bühne. Der Assistent bat das Publikum, ihm zwei Schachteln zu nennen, in die er jeweils eine Münze legte. Daraufhin öffnete er den Deckel einer der Schachteln, die keine Münze enthielten, und verschwand hinter der Bühne.“

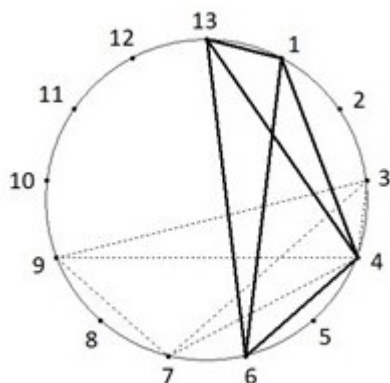
„Was geschah dann?“, fragte Magdalena. Anna fuhr fort: „Durch den Mittelgang erschien von hinten die Zauberkünstlerin, ging auf die Bühne und öffnete vier Schachteln gleichzeitig. In zweien von diesen befanden sich die beiden Münzen.“ „Na und, das war Zufall“, meinte Magdalena. „Nein“, entgegnete Anna, „die beiden wiederholten den Trick nach der Pause noch einmal mit dem gleichen Ergebnis. Und es war klar, dass sie zwischen dem Verschwinden des Assistenten und dem Erscheinen der Zauberkünstlerin keinen Kontakt hatten. Aber wieso kann die Frau sicher sein, dass sich unter den vier Schachteln, die sie öffnet, immer die beiden mit den Münzen befinden?“

Gibt es eine Strategie für diesen Zaubertrick, mit der das gewünschte Ergebnis auf jeden Fall garantiert ist? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Ja, es gibt eine Strategie, die immer funktioniert. Wie in der Figur dargestellt, fügt der Assistent im Kopf die Schachteln, die wir uns von links nach rechts nummeriert denken können, an ihren Enden zu einem regelmäßigen 13-Eck zusammen. Die vier Seitenkanten und die zwei Diagonalen des eingezeichneten Vierecks haben die „Längen“ 1, 2, 3, 4, 5 und 6, wenn wir als „Länge“ einer Seh-

ne die Anzahl der Einheits-Bogenstücke nehmen, die auf dem kürzeren Bogen zwischen den Endpunkten der Sehne liegen. Damit sind alle möglichen „Längen“ genau einmal vorhanden.



Wenn das Publikum zwei Schachteln ausgewählt hat, bestimmt der Assistent die „Länge“ der Sehne, welche die Eckpunkte verbindet, auf denen die beiden Schachteln liegen. Dann dreht er im Kopf das eingezeichnete Viereck so um den Kreismittelpunkt, dass die Sehne zwischen den beiden Schachteln mit einer der Seiten oder Diagonalen des Vierecks übereinstimmt, was stets eindeutig möglich ist.

Anschließend öffnet er auf dem Tisch die Schachtel mit der Nummer, die unmittelbar vor den direkt benachbarten Ecken des Vierecks steht.

Wenn zum Beispiel das Publikum die Schachteln mit den Nummern 7 und 9 ausgewählt hat, muss der Assistent im Kopf das Viereck in die gepunktet gezeichnete Lage drehen und daher die Schachtel mit der Nummer 2 öffnen. Die Zauberkünstlerin schaut sich die Nummer n der geöffneten Schachtel an und öffnet anschließend die Schachteln mit den Nummern $n + 1$, $n + 2$, $n + 5$ und $n + 7$ modulo 13. Damit hat sie auf jeden Fall die Endpunkte der Sehne zwischen den beiden ausgewählten Schachteln erfasst. In dem Beispiel mit den Nummern 7 und 9 wird sie die Schachteln mit den Nummern 3, 4, 7 und 9 öffnen.

Lösungen wurden eingesandt von Emilie Borrmann, Jasmin Borrmann, David Hagemann und Jonas Löcher.

Wie müsste man den Zaubertrick abwandeln, damit die Zauberkünstlerin nur drei Schachteln öffnen muss, unter denen sich die beiden mit den Münzen befinden? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Die Dominanz der Ziffer 1 bei Potenzen von 2

von Hartwig Fuchs

An einem Sommertag saß Prof. Quaoar in seinem Garten unter einem Apfelbaum und vertrieb sich die Zeit mit Spielereien auf dem Taschenrechner. Als er dabei auch eine Kette aufeinander folgender Potenzen 2^i berechnete, fiel ihm sogleich eine ihm bis dahin unbekannte mögliche Gesetzmäßigkeit auf. Die folgende Liste in der $E(2^i)$ die erste Ziffer (von links) der Dezimaldarstellung der Potenz 2^i bedeutet,

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E(2^i)$	1	2	4	8	1	3	6	1	2	5

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...	50	51	...
$E(2^i)$	1	2	4	8	1	3	6	1	2	5	...	1	2	...

führt zu der Vermutung:

Die Ziffernfolge $E(2^0), E(2^1), E(2^2), \dots$ ist periodisch, mit der Periode 10, sodass gilt: $E(2^{i+10}) = E(2^i)$ für $i = 0, 1, 2, \dots$

Leider musste Dr. Quaoar schnell feststellen, dass seine Vermutung falsch war – wie das Beispiel $E(2^{53} = 9)$ beweist. Nach diesem Rückschlag wandte er sich der nun folgenden naheliegenden Frage zu:

Wie häufig kommt eine bestimmte Ziffer in der Folge $E(2^0), E(2^1), E(2^2), \dots$ vor? – anders formuliert:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Potenz 2^i die erste Ziffer $E(2^i) = z$ besitzt, für ein z mit $1 \leq z \leq 9$?

Prof. Quaoar beschränkte sich zunächst auf den Fall $z = 1$.

Als Erstes bewies er drei Eigenschaften der Potenzen 2^i mit $E(2^i) = 1$.

Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es stets eine Potenz 2^i , für die gilt:

- (1) 2^i hat in Dezimaldarstellung n Ziffern;
- (2) für die kleinste n -ziffrige Potenz 2^i ist $E(2^i) = 1$;
- (3) es gibt genau eine n -ziffrige Potenz 2^i mit $E(2^i) = 1$.

Beweis von Eigenschaft (1) durch vollständige Induktion

Es gilt Eigenschaft (1) für $n = 1$, denn $2^0 = 1$ ist eine einziffrige Zahl.

Eigenschaft (1) sei nun bewiesen für n – es gibt also eine n -ziffrige Potenz 2^k .

Für $5 \leq E(2^k) \leq 9$ gilt:

$$5 \cdot 10^{n-1} < 2^k < 10 \cdot 10^{n-1} \text{ und daher } 10 \cdot 10^{n-1} < 2^{k+1} < 20 \cdot 10^{n-1};$$

für $3 \leq E(2^k) \leq 4$ gilt:

$$3 \cdot 10^{n-1} < 2^k < 5 \cdot 10^{n-1} \text{ und daher } 12 \cdot 10^{n-1} < 2^{k+2} < 20 \cdot 10^{n-1};$$

für $E(2^k) = 2$ gilt:

$$2 \cdot 10^{n-1} < 2^k < 3 \cdot 10^{n-1} \text{ und daher } 16 \cdot 10^{n-1} < 2^{k+3} < 24 \cdot 10^{n-1};$$

für $E(2^k) = 1$ gilt:

$$10^{n-1} < 2^k < 2 \cdot 10^{n-1} \text{ und daher } 16 \cdot 10^{n-1} < 2^{k+4} < 32 \cdot 10^{n-1}.$$

In den vier Fällen sind die Zahlen 2^{k+1} , 2^{k+2} , 2^{k+3} , und 2^{k+4} jeweils $(n+1)$ -ziffrig – Eigenschaft (1) gilt also auch für $n+1$ – womit Eigenschaft (1) für jedes $n \geq 1$ gilt.

Nachweis von Eigenschaft (2)

Die kleinste n -ziffrige Potenz von 2 sei 2^i . Wäre nun $E(2^i) \geq 2$, dann wäre $\frac{1}{2} \cdot 2^i = 2^{i-1}$ eine n -ziffrige Potenz, die kleiner als 2^i ist – ein Widerspruch. Es gilt also (2).

Nachweis von Eigenschaft (3)

Annahme: Es gibt zwei n -ziffrige Potenzen 2^i und 2^k mit $E(2^i) = E(2^k) = 1$ und $2^i < 2^k$.

Dann ist $2 \cdot 2^i \leq 2^k$ und aus $10^{n-1} < 2^i$ folgt $2 \cdot 10^{n-1} < 2 \cdot 2^i \leq 2^k$.

Daher ist $E(2^k) \neq 1$ – ein Widerspruch; es gilt Eigenschaft (3).

Als Nächstes bestimmte Prof. Quaoar für jede endliche Menge $M_i = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ und danach für die unendliche Menge $M = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ die Wahrscheinlichkeiten P_i bzw. die Wahrscheinlichkeit P , bei einer Zufallswahl eines Elements aus M_i bzw. aus M eine Potenz 2^k mit $E(2^k) = 1$ zu erhalten. Das größte Element 2^i aus M_i sei eine n -ziffrige Zahl. Wegen Eigenschaft (3) gibt es dann genau n -ziffrige Potenzen in M_i mit der ersten Ziffer 1. Die Wahrscheinlichkeit P_i , eine dieser Potenzen zufällig aus M_i zu wählen, ist daher der Quotient

$$(4) \quad P_i = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{n}{i}, \text{ für } i = 1, 2, 3, \dots \text{ und } P_0 = 1.$$

Beispiel

Für $i = 50$ ist 2^{50} eine 16-ziffrige Zahl, also $n = 16$. Dann gilt

$$P_{50} = \frac{16}{50} = 0,32.$$

Nun sei M die Menge, aus der man zufällig eine Potenz auswählen will. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P , dass sich dabei eine Potenz 2^k mit $E(2^k) = 1$ ergibt, geht Dr. Quaoar so vor.

Jede n -ziffrige Zahl 2^i , $i \geq 0$, kann in der Form geschrieben werden:

$$(5) \quad 2^i = a \cdot 10^{n-1} \quad \text{mit } 1 \leq a < 10.$$

Dann ist mit dem Logarithmus $\log$ zur Basis 10:

$$\log(2^i) = i \log 2 \quad \text{und} \quad \log(a \cdot 10^{n-1}) = \log a + (n-1),$$

sodass wegen (5)

$$i \log 2 = \log a + (n-1) \quad \text{und daher} \quad n = i \log 2 + (1 - \log a) \quad \text{mit } 0 \leq \log a < 1.$$

Damit lautet dann (4):

$$(4') \quad P_i = \log 2 + \frac{1 - \log a}{i} \quad \text{mit} \quad 0 < \frac{1 - \log a}{i} \leq \frac{1}{i} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots \text{ und } P_0 = 1.$$

Wenn nun i die nicht abbrechende Folge $0, 1, 2, \dots$ durchläuft, dann erhält man damit auch die nicht abbrechenden Folgen $M_0, M_1, M_2, \dots$ und $P_0, P_1, P_2, \dots$, über die man der Menge M bzw. der Wahrscheinlichkeit P beliebig nahe kommt – kurz:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = M \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P_i = P.$$

Nun ist

$$P = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\log 2 + \frac{1 - \log a}{i} \right) = \log 2 + \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1 - \log a}{i}.$$

Wegen

$$0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1 - \log a}{i} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} = 0$$

gilt also:

- (5) Mit der Wahrscheinlichkeit $P = \log 2 = 0,3010 \dots$ hat eine zufällig aus der Menge $M = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ gewählte Potenz die erste Ziffer 1.

Quaoar war wohl etwas überrascht von seinem Ergebnis $P = \log 2$; hatte er doch anfangs spontan auf den Wert $P = \frac{1}{3}$ getippt. Aber wie es der Zufall wollte: Am Abend in seinem Arbeitszimmer fiel ihm das Monoid-Heft 103 (2010) mit dem Artikel „Das Benfordsche Gesetz“ von H.-J. Schuh in die Hände. Und dort war seine Frage nach der Wahrscheinlichkeit $P(E(2^k) = z)$ – das steht kurz für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Potenz 2^k die erste Ziffer z hat – für $z = 1, 2, 3, \dots, 9$ im allgemeineren Zusammenhang des Benfordschen Gesetzes bereits gelöst. Danach gilt:

- (6) Für $z = 1, 2, 3, \dots, 9$ ist $P(E(2^k) = z) = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right)$.

Ausführlicher:

z	1	2	3	4	5
$P(E(2^k) = z)$	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079

z	6	7	8	9
$P(E(2^k) = z)$	0,067	0,058	0,051	0,046

Die Tabelle zeigt eine deutliche Dominanz der Ziffer 1 unter den neun möglichen Ziffern der ersten Ziffer der Potenzen 2^i ($i = 0, 1, 2, \dots$); mehr noch: Sie weicht insgesamt beträchtlich von den anschaulichen Erwartungen hinsichtlich der Werte von $P(E(2^k) = z)$ ab.

Bemerkenswerte Zerlegung der Zahlenmenge $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ von Hartwig Fuchs

Der Mathematiker Quaoar und sein Kollege Pnin unterhalten sich über ihr Fachgebiet.

Quaoar zu P: „Einer meiner Bekannten hat mich kürzlich auf einen überraschenden Zusammenhang zwischen den Zahlen der Menge $M_5 = \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ aufmerksam gemacht, den Sie Möglicherweise nicht kennen.“

Pnin zu Quaoar: „Das interessiert mich – berichten Sie.“

Quaoar zu Pnin: „Mein Bekannter behauptete: Man kann die Menge M_5 so in zwei gleich große Teilmengen A_1 und B_1 zerlegen, dass die Summen $S(A_4)$ und $S(B_4)$ der 4-ten Potenzen der Zahlen aus A_1 und B_1 gleich sind.“

Ich habe – für das „Wie?“ siehe unten – zwei Teilmengen A_1 und B_1 bestimmen können:

$$A_1 = \{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24, 25, 28, 30, 31\} \quad \text{und} \\ B_1 = \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 23, 26, 27, 29, 32\}.$$

Für A_4 und B_4 gilt dann:

$$(1) \quad S(A_4) = 1^4 + 4^4 + 6^4 + \dots + 31^4 = 3.623.048 = 2^4 + 3^4 + 5^4 + \dots + 32^4 = S(B_4).$$

Die Gleichung (1) veranlasste mich, der Frage nachzugehen:

Besteht auch ein Zusammenhang wie in Gleichung (1) zwischen den Summen $S(A_i)$ und $S(B_i)$, $i = 1, 2, 3$, der i -ten Potenzen der Zahlen aus A_1 und B_1 ?

Mein Ergebnis:

$$(2) \quad S(A_1) = 1^1 + 4^1 + \dots + 31^1 = 264 = 2^1 + 3^1 + \dots + 32^1 = S(B_1); \\ (3) \quad S(A_2) = 1^2 + 4^2 + \dots + 31^2 = 5720 = 2^2 + 3^2 + \dots + 32^2 = S(B_2); \\ (4) \quad S(A_3) = 1^3 + 4^3 + \dots + 31^3 = 139.390 = 2^3 + 3^3 + \dots + 32^3 = S(B_3).$$

Pnin zu Quaoar: „Ihre Gleichungen (1) bis (4) sind sehr beeindruckend – doch beschreiben sie wohl nur einen singulären Sachverhalt.“

Quaoar zu Pnin: „Keineswegs – ein ganz entsprechender Sachverhalt besteht auch für jede Zahlenmenge $M_n = \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ mit $n = 2, 3, 4$.“

Nachweis

Es sei $n = 2$.

Zerlegt man $M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ in die Teilmengen $A_1 = \{1, 4\}$ und $B_1 = \{2, 3\}$ so gilt: $S(A_1) = 5 = S(B_1)$.

Es sei $n = 3$.

Für die Teilmengen $A_1 = \{1, 4, 6, 7\}$ und $B_1 = \{2, 3, 5, 8\}$ von $M_3 = \{1, 2, \dots, 2^3\}$ gilt: $S(A_1) = 18 = S(B_1)$ sowie $S(A_2) = 102 = S(B_2)$.

Es sei $n = 4$.

$A_1 = \{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16\}$ und $B_1 = \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}$ seien $M_4 = \{1, 2, 3, \dots, 2^4\}$ zerlegende Teilmengen. Für sie gilt:

$$S(A_1) = 68 = S(B_1); S(A_2) = 748 = S(B_2) \quad \text{und} \quad S(A_3) = 9248 = S(B_3)$$

Ich habe ein wenig recherchiert und dabei herausgefunden, dass seit langem bekannt ist:

$$(5) \quad \text{Jede Menge } M_n = \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}, n = 2, 3, 4, \dots, \text{ kann in zwei Teilmengen } A_1 \text{ und } B_1 \text{ gleicher Elementanzahl so zerlegt werden, dass die Summen } S(A_i) \text{ und } S(B_i), 1 \leq i \leq n-1 \text{ der } i\text{-ten Potenzen von } A_1 \text{ und } B_1$$

übereinstimmen.

Pnin zu Quaoar: „Mich interessiert nun noch, wie Sie die Teilmengen A_i und B_i der Mengen M_n , $2 \leq n \leq 5$ gefunden haben.

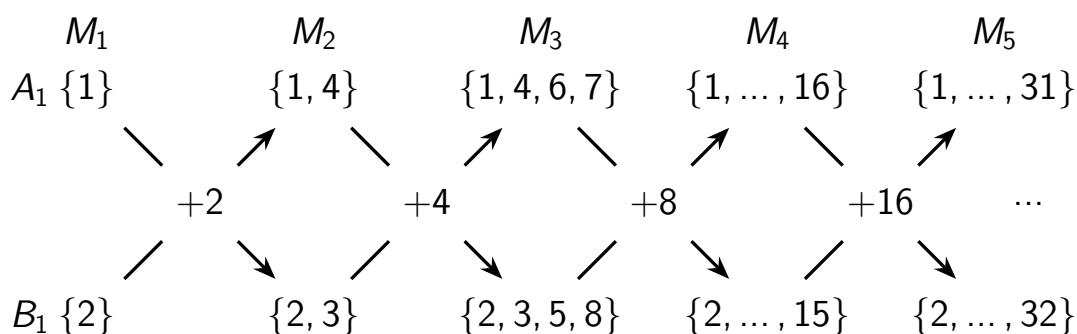
Denn um zum Beispiel die Teilmenge A_4 von M_5 bestimmen zu können, mussten Sie vorweg ja die Summe $S(A_4)$ der Ihnen unbekannten 4. Potenz der Elemente von A_4 ermitteln.“

Quaoar zu P: „Selbst wenn es gelingt, die Summen S_i zu berechnen, hat man damit noch keinen Weg, außer Probieren, die Elemente von A_i zu bestimmen. Daher habe ich nach einer Methode gesucht, mit der man sie direkt berechnen kann.

Tatsächlich konnte ich einen Algorithmus entwickeln, der genau das tut.

Er sieht schematisch so aus:“

Für die Menge $M_1 = \{1, 2\}$ sei $A_1 = \{1\}$ und $B_1 = \{2\}$ gesetzt. Dann erhält man A_i und B_i wie folgt:



Mein Algorithmus führt für die Mengen M_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ zum Erfolg und ich vermute, dass das auch für die Mengen M_n , $n \geq 6$ gilt. Sie können ihn ja mal für M_6 überprüfen. Und damit trennten sich Quaoar und Pnin.

Ketten im Zahlenuniversum $\mathbb{N}$

von Hartwig Fuchs

Definition einer Kette

In der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ soll zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Zahlenkette K_n konstruiert werden, deren erstes Glied n ist und die mindestens ein weiteres Glied $\neq n$ besitzt.

Eine Kette K_n konstruiert man, indem man zu einem als bereits berechnet angenommenen Kettenglied m induktiv den Nachfolger $F(m)$ in K_n definiert:

- (1) $F(m) = m + A(m)$ mit $m \geq n$, wobei für $A(m)$ gilt:
Für $m \geq 10$ ist $A(m)$ das Produkt der Ziffern von m .
Für $1 \leq m \leq 9$ ist $A(m) = m$.

Nach Definition (1) ist es möglich, dass eine Zahl m keinen Nachfolger besitzt, denn $A(m) = 0$ ist nicht ausgeschlossen.

Daher die Frage: für welche m gilt $A(m) = 0$?

- (2) Es sei m eine null-haltige Zahl, das ist eine Zahl, in deren Zifferndarstellung mindestens eine Ziffer 0 vorkommt. Dann gilt: $A(m) = 0$.

Folgerung

Es sei n eine nullhaltige Zahl. Dann ist $A(n) = 0$ und daher ist $F(n) = n + 0 = n$. Also hat n keinen Nachfolger.

Wäre nun n erstes Glied einer Kette K_n , dann hätte K_n nur das eine Glied n , im Widerspruch zur Voraussetzung, dass eine Kette mindestens zwei Glieder besitzt.

Daher gilt:

- (3) Es gibt keine Kette K_n , wenn n null-haltig ist.

Für jede null-freie Zahl n ist $A(n) \neq 0$ und daher hat $F(n) = n + A(n) \neq 0$ stets einen von n verschiedenen Nachfolger. Somit gilt:

- (4) Es gibt stets eine Kette K_n , wenn n null-frei ist, und jede dieser Ketten besitzt mindestens zwei Glieder, nämlich n und $F(n)$.

Beispiele: Die beiden ersten Glieder einer Kette

- a) Für $n = 5$ ist $A(5) = 5$ und $F(5) = 10$; für $n = 123$ ist $A(123) = 6$ und $F(123) = 129$.
b) Für jedes $n \in \{1, 11, 111, \dots\}$ ist $A(n) = 1$ und daher $F(n) = n + 1$.
c) Für jedes $n \in \{2, 22, 222, \dots\}$ ist $A(n) = 2^k$ und $F(n) = n + 2^k$.

Konstruktion von Ketten K_n

Es sei n eine null-freie Zahl. Nach (4) existiert dann die Kette K_n . Auf ihre beiden ersten Glieder n und $F(n)$ folgt die Zahl $F(F(n))$ – kurz: $F^2(n)$; auf diese folgt $F(F^2(n))$ – kurz: $F^3(n)$ – usw., die immer unter der Voraussetzung, dass $F^2(n) \neq F^3(n)$, usw. existieren.

Setzt man nun noch $F^1(n) = F(n)$, so hat K_n die Darstellung:

- (5) $K_n = (n, F^1(n), F^2(n), \dots)$.

Beispiel einer Kette

Es sei $n = 38$. Dann ist

$F^1(38) = 38 + 24 = 62$, $F^2(38) = 62 + 12 = 74$, $F^3(38) = 74 + 28 = 102$.
 $F^3(38)$ hat keinen Nachfolger wegen $A(102) = 0$ und K_{38} endet daher mit 102. Also ist $K_{38} = (38, 62, 74, 102)$.

Zwei grundlegende Eigenschaften von Ketten K_n

Das letzte Beispiel lässt erkennen:

- (6) Sobald in einer Kette K_n ein null-haltiges Glied $F^i(n)$ vorkommt, dann endet K_n mit $F^i(n)$, denn wegen $A(F^i(n)) = 0$ hat $F^i(n)$ keinen Nachfolger.

Die Eigenschaft (6) provoziert die naheliegende Frage: Gibt es nicht endende Ketten K_n – deren Glieder $F^i(n)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ also sämtlich null-frei sind?

Annahme

Es gibt eine nicht abbrechende Kette $K_n = (n, F^1(n), F^2(n), \dots)$.

Nach der Konstruktionsregel (1) gilt für sie:

$$(7) \quad n < F^1(n) < F^2(n) < \dots$$

Es sei $F(n)$ ein k -ziffriges Glied der Kette K_n , $n \geq 22$ – gibt es mehrere solcher Glieder so sei $m = F^j(n)$ das Größte unter ihnen.

Dann gilt wegen $m < 10^k$ und $9^k < 10^{k-1}$ für $n \geq 22$ sowie $F^{j+1}(n)$ ist $(k+1)$ -ziffrig:

Aus (7) folgt für $n \geq 22$: Man kann stets eine Zahl $k \geq n$ so finden, dass in K_n eine k -ziffrige Zahl m vorkommt, – gibt es mehrere k -ziffrige Glieder in K_n , so sei m das Größte von ihnen.

$$10^k < F^{j+1}(n) = m + A(m) \leq m + 9^k < 10^k + (10^{k-1} - 1) = 1099 \dots 9.$$

Also ist $F(m)$ eine null-haltige Zahl, im Widerspruch zur Annahme. Diese ist also falsch. Damit haben wir gefunden:

(8) Jede Kette K_n , $n \geq 22$ beginnt mit einer null-freien Zahl n und endet mit einer null-haltigen Zahl.

Einige weitere Eigenschaften von Ketten (begründe selbst!)

1. Wahr oder falsch?

Alle Ketten K_n , $n = 1, 2, 3, \dots, 18$ und n kein Vielfaches von 5 haben das gleiche Endglied.

2. Welche Kette K_n , $n \leq 50$, hat die meisten Glieder?

3. Zeige: Es gibt unendlich viele Ketten mit nur 2 Gliedern.

4. Untersuche (mit Computer) die Behauptung: Ketten K_n , mit $n < 1000$, mit mehr als 10 Gliedern sind selten.

Die Lösungen zu den hier gestellten Fragen findest du auf Seite 36.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 164

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Bei welcher Temperatur gefriert Wasser?

In Mitteleuropa werden Temperaturen in Grad Celsius gemessen:

Wasser gefriert bei 0°C und kocht bei 100°C . In den USA werden dagegen Temperaturen in Grad Fahrenheit angegeben: Wasser gefriert bei 32°F und kocht bei 212°F . Für welche Temperaturen stimmen die beiden Maßzahlen überein?

Lösung:

Wie im Aufgabentext beschrieben, gelten: $0^{\circ}\text{C} = 32^{\circ}\text{F}$ und $100^{\circ}\text{C} = 212^{\circ}\text{F}$. Damit entspricht der Temperatursteigerung um 100°C eine Steigerung von 180°F , einer Temperatursteigerung von 1°C also $1,8^{\circ}\text{F}$.

Als Umrechnungsformel erhält man damit:

$F = 1,8 \cdot C + 32$ bzw. $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$. Um herauszufinden, für welche Maßzahl x beide Werte übereinstimmen setzt man x in eine der Gleichungen ein und löst diese wie nebenstehend nach x auf.

$$\begin{aligned}x &= 1,8 \cdot x + 32 \\1,8 \cdot x - x &= -32 \\0,8x &= -32 \\x &= -40\end{aligned}$$

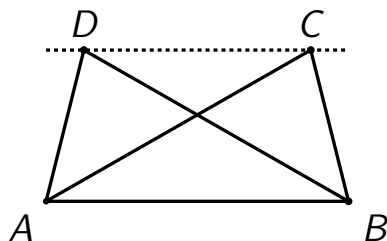
II. Jahreszahlen-Aufgabe

Wenn man die Zahl $n = (2 + 0 + 2 + 4)^{2+0+2+5} + (2 + 0 + 2 + 5)^{2+0+2+6}$ durch $2 + 0 + 2 + 5$ teilt, dann bleibt ein Rest $2 + 0 + 2 + 5$. Trifft dies zu? (H. F.)

Lösung:

$\frac{n}{2+0+2+5} = \frac{8^9+9^{10}}{9} = 402333569 + 0,\bar{8}$. Somit ist die Behauptung falsch.

III. Parallele Strecken



Zwei Dreiecke ABC und ABD haben die gleiche Fläche. Zeige: Die Verbindungsstrecke von C und D ist dann parallel zu AB . (H. F.)

Lösung:

Die Höhe in $\triangle ABC$ sei h und die Höhe von $\triangle ABD$ sei h' . Aus $|ABC| = |ABD|$ und $|ABC| = \frac{1}{2}|AB| \cdot h$, $|ABD| = \frac{1}{2}|AB| \cdot h'$ folgt $h = h'$. Somit ist CD parallel AB .

IV. Uhr rückwärts

- Uhrmacher Willi Wirrkopf hat eine Uhr gebaut, bei der beide Zeiger falsch herum laufen. Er stellt die Uhr um 12 Uhr richtig. Wie oft (wenn überhaupt) zeigt die Uhr während zwölf Stunden die richtige Zeit?
- Nachdem Herr Wirrkopf auf seinen Fehler aufmerksam gemacht wird, stellt er den Stundenzeiger so ein, dass dieser richtig läuft, vergisst aber, auch den Minutenzeiger richtig einzustellen. Beantworte die gleiche Frage wie in a). (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

- Der Stundenzeiger hat nur dann die richtige Stellung, wenn er auf 6 oder 12 steht, also zwei mal innerhalb von 12 Stunden.
- In jeder halben und ganzen Stunde wird die richtige Zeit angezeigt. Ist seit

der letzten vollen Stunde weniger als eine halbe Stunde vergangen, so hat der Stundenzeiger die Mitte zwischen zwei Stunden noch nicht erreicht, der Minutenzeiger zeigt aber mehr als 30. In der zweiten halben Stunde ist es umgekehrt. Außer den 24 Zeigerstellungen alle halbe Stunde ist also keine richtig.

V. Finde die Zahl

Bestimme alle dreiziffrigen positiven ganzen Zahlen n mit den Dezimaldarstellungen $n = abc$, bei denen die ihren Ziffern entsprechenden Zahlen a, b und c alle folgenden drei Bedingungen erfüllt sind: (H. F.)

$$(1) a > b > c \quad (2) a + b + c = 16 \quad (3) a \cdot b \cdot c = 96$$

Lösung:

Zunächst ist $1 \leq a \leq 9$. Es sei $a \leq 6$. Dann ist wegen (1) $b \leq 5$ und $c \leq 4$, so dass $a + b + c \leq 6 + 5 + 4 = 15$ ist – was der Bedingung (2) widerspricht.

Es ist $a \neq 7$ und $a \neq 9$. Denn aus $a = 7$ bzw. $a = 9$ folgt wegen (3), dass 7 bzw. 9 ein Teiler von 96 wäre – was nicht der Fall ist.

Somit gilt: $a = 8$.

Es sei $b \leq 4$. Dann ist $c \leq 3$ wegen (1) und $8 + b + c \leq 15$, was (2) widerspricht. $b = 5$ und $b = 7$ kann man ausschließen, da 5 und 7 keine Teiler von 96 sind.

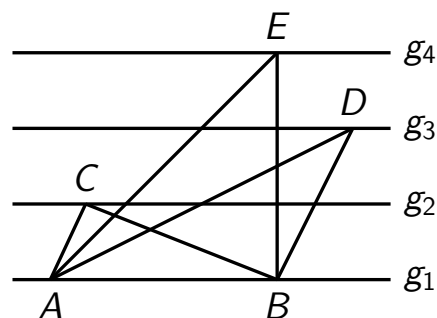
Folglich ist $b = 6$ und daher $c = 2$, wegen $a + b + c = 8 + 6 + c = 16$.

Es gibt also nur eine Zahl n , die die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, nämlich $n = 862$.

VI. Flächenvergleich

In der Ebene seien vier parallele Geraden $g_1, \dots, g_4$ gegeben. Der Abstand zweier benachbarter Geraden betrage a . Es seien nun jeweils beliebig gewählt: die Punkte A und B auf g_1 , C auf g_2 , D auf g_3 und E auf g_4 .

Vergleiche die Flächen der Dreiecke ABC , ABD mit der Fläche des Dreiecks ABE . (H. F.)



Lösung:

Es gilt:

$$|ABC| = \frac{1}{2}|AB| \cdot a = \frac{a}{2}|AB| \quad |ABD| = \frac{1}{2}|AB| \cdot 2a = a|AB|$$

$$|ABE| = \frac{1}{2}|AB| \cdot 3a = \frac{3a}{2}|AB|$$

$$\Rightarrow |ABE| = 3|ABC| \quad \text{und} \quad |ABE| = \frac{3}{2}|ABD|.$$

VII. Erzeugung von Primzahlen

Es sei p eine der Primzahlen 3, 5, 11 und 29.

Für welche positiven ganzen Zahlen $x \leq p - 1$ ist dann die Summe $2 \cdot x^2 + p$ eine Primzahl? (H. F.)

Lösung:

Für $p = 3, 5, 11$ und 29 ergibt die Summe $2x^2 + p$ jeweils für $x = 0, 1, 2, \dots, p-1$ Primzahlen. So erhalten wir für:

$p = 3 :$	3	5	11											
$p = 5 :$	5	7	13	23	37									
$p = 11 :$	11	13	19	29	43	61	83	109	139	173				
$p = 29 :$	29	31	37	47	61	79	101	127	157	191	229			
	271	317	367	421	479	541	607	677	751	829	911			
	997	1087	1181	1279	1381	1487	1597							

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. PNIN =?

Man ersetze im Wort *PNIN* verschiedene (gleiche) Buchstaben durch verschiedene (gleiche) Ziffern so, dass man eine vierstellige gerade Quadratzahl erhält, bei der die erste Ziffer doppelt so groß wie die Einerziffer ist.

(Keine Computer-Lösung bitte.) (H. F.)

II. Ein Würfelstapel

Vier undurchsichtige Würfel, mit den Kantenlängen 24 cm, 12 cm, 6 cm und 3 cm sollen mit absteigender Größe auf eine undurchsichtige Tischplatte, gestellt werden. Dabei muss jeder Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden Würfels bzw. der Tischplatte ruhen. Zusätzlich darf keiner der Würfel über den Tisch hinausragen.

Wie groß ist der Gesamtflächeninhalt der Oberflächenteile, die sichtbar sind? (AKö)

III. Finde die Quadratzahl

Es seien $n = 6ab$, $m = ab6$ natürliche Zahlen in Zifferndarstellung und es gelte $n - 600 = 600 - m$. Dann ist die Summe der Zahlen a und b eine Quadratzahl. Zeige dies. (H. F.)

IV. Halbierung einer Dreiecksfläche

Konstruiere im Dreieck ABC einen Punkt D auf der Seite AC , sodass für das Dreieck ABD gilt: Die Fläche von ABD ist halb so groß wie die Fläche von ABC . (H. F.)

V. Primzahl-Zwillinge

Bestimme alle Primzahl-Zwillinge der Form $2^n - 1, 2^n + 1$. (H. F.)

VI. n -fache der eigenen Quersumme

Finde für $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ alle Zahlen z kleiner als 100, die gleich dem n -fachen ihrer Quersumme sind, also dem doppelten, dreifachen und so weiter. (Wolfgang J. Bühler)

VII. Dreieck im Dreieck

Im Innengebiet eines gleichseitigen Dreiecks vom Flächeninhalt 1 liegen 17 Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Zeige: Drei dieser Punkte bilden ein Dreieck mit einem Flächeninhalt, der höchstens $\frac{1}{8}$ ist. (H. F.)



„Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist, exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.“

Lazare Nicolas Margoürite Carnot
*1753, +1823



„Man löst nicht die Probleme von morgen mit den Antworten von gestern.“

Albert Einstein
*1879, +1955

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1393: MONOID – eine Rechenaufgabe

Löse die Gleichung $\sqrt{MONOiD} = DDD$, wobei verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern vertreten. (AKö)

Aufgabe 1394: Verletzte Transitivität

Wir haben drei Würfel zur Verfügung, einen roten, auf dessen Seiten die Zahlen 2, 4, 9 je zweimal vorkommen, einen blauen, auf dem die Zahlen 1, 6, 8 je zweimal vorkommen und einen gelben, auf dem die Zahlen 3, 5, 7 je zweimal vorkommen.

- a) Du vereinbarst mit deiner Freundin Angelika folgendes Spiel: Jeder wählt sich einen Würfel und wirft damit. Wer die höhere Zahl wirft, gewinnt einen Euro. Solltest Du zuerst deinen Würfel wählen, oder als zweiter einen der beiden Würfel nehmen, die Angelika dir übrig lässt?
- b) Wenn der Spieler mit der höheren Zahl die Differenz der beiden Zahlen gewinnt, wie würdest du dann vorgehen?

(Wolfgang J. Bühler nach B. Efron)

Aufgabe 1395: Sechseck und Dreieck

Ein regelmäßiges Sechseck und ein gleichseitiges Dreieck haben den gleichen Umfang. Bestimme (ohne den Satz des Pythagoras) das Verhältnis der Flächen von Sechseck und Dreieck. (H. F.)

Aufgabe 1396: Quersumme der Quersumme

Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. Bildet man von der Quersumme wieder die Quersumme, so erhält man die zweite Quersumme. Wie heißt die kleinste neunstellige Zahl, deren zweite Quersumme 16 ist? (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1397: Wert eines Terms

- a) Zeige: Der Term $\frac{n}{40} + \frac{10}{n}$ nimmt für alle natürlichen Zahlen n einen Wert von mindestens 1 an.
- b) Gebe zwei natürliche Zahlen a und b an, für die der Term $\frac{n}{a} + \frac{b}{n}$ für alle natürlichen Zahlen n einen Wert von mindestens 2 annimmt.

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1398: Eine Frage der Teilbarkeit

Für welche Zahlen $2^n + 1$, n eine natürliche Zahl, gilt:

- a) $2^n + 1$ ist durch 3 teilbar?
- b) $2^n + 1$ ist durch 5 teilbar?
- c) $2^n + 1$ ist durch 15 teilbar?

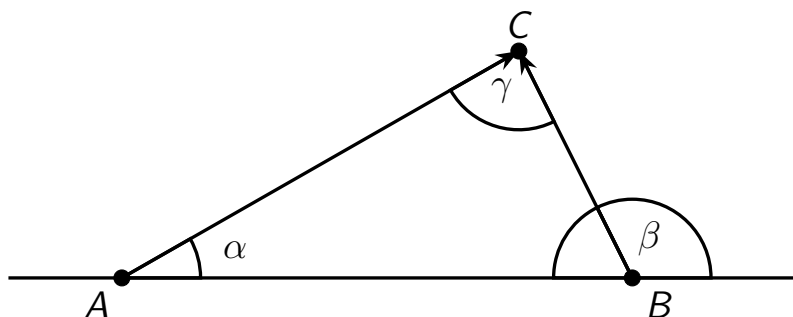
(H. F.)

Aufgabe 1399: Zwei Leuchttürme

Zwei Leuchttürme in den Punkten A und B drehen ihre jeweiligen Lichtstrahlen mit gleicher Geschwindigkeit. Dabei „geht“ der von B ausgehende Lichtstrahl um den Winkel γ „vor“.

- a) In welchem Anteil der Zeit treffen sich die beiden Lichtstrahlen?
- b) Welche Kurve beschreibt dabei der Punkt C , in dem sie sich treffen?

(Wolfgang J. Bühler)



Gelöste Aufgaben aus MONOID 164

Klassen 9–13

Aufgabe 1386: Fünf Quadratzahlen

Zu jeden drei ungeraden Zahlen r , s und t gibt es stets eine ganze Zahl u , sodass $r^2 + s^2 + t^2 + u^2$ eine Quadratzahl ist.

Beispiel: Für 1, 3, 5 sei $u = 17$. Dann ist $1^2 + 3^2 + 5^2 + 17^2 = 18^2$.

Trifft die Behauptung zu?

(H. F.)

Lösung:

Die Summe $r^2 + s^2 + t^2$ ist ungerade und daher vom Typ $2u + 1$. Nun ist $2u + 1 = (u + 1)^2 - u^2$. Daraus folgt:

$r^2 + s^2 + t^2 = (u + 1)^2 - u^2$ und somit $r^2 + s^2 + t^2 + u^2 = (u + 1)^2$. Die Behauptung stimmt also.

Aufgabe 1387: Eine Ungleichung

Für jede reelle Zahl $x > 0$ gilt: $x + \frac{4}{x^2} \geq 3$. Zeige dies.

(H. F.)

Lösung:

Es ist

$$x^3 + 4 - 3x^2 = (x^3 - 4x^2 + 4x) + (x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2 + (x-2)^2 = (x-2)^2(x+1).$$

Wegen $(x-2)^2 \geq 0$ und $x+1 > 1$ ist

$$x^3 + 4 - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 4 \geq 3x^2 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x^2} \geq 3 \quad \text{wegen } x^2 > 0.$$

Aufgabe 1388: Der Lexikonartikel

In einem vielbändigen Lexikon sind die Seiten fortlaufend durch alle Bände hindurch von eins bis 15607 nummeriert. Marilyn liest einen dreiseitigen Artikel. Sie bemerkt: „Wenn ich zum Produkt der drei Seitenzahlen sieben addiere, dann ergibt sich die Gesamtseitenzahl des Lexikons.“ Auf welchen Seiten steht der Artikel?

(H. F.)

Lösung:

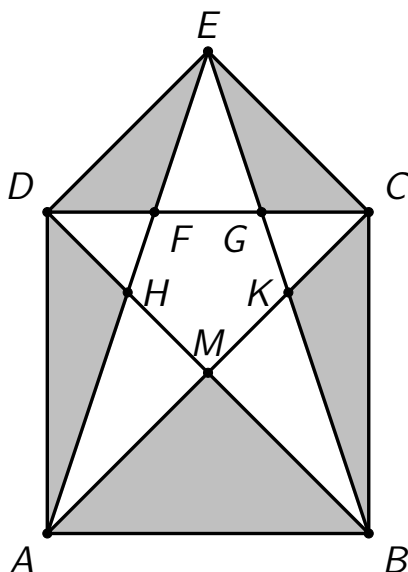
$x, x+1, x+2$ seien die Seitenzahlen derjenigen Seite, auf denen der Artikel zu finden ist. Dann gilt $x(x+1)(x+2) + 7 = 15607$ oder $x(x+1)(x+2) = 15600$. Eine grobe Schätzung ergibt: $20 < x < 30$, denn $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ und $30 \cdot 30 \cdot 30 = 27000$. Eine der Zahlen $x, x+1, x+2$ muss gleich 25 sein, weil $x(x+1)(x+2)$ ein Vielfaches von 100 ist. Nun probiert man:

$$x = 23 \rightarrow 23 \cdot 24 \cdot 25 \neq 15600 \quad x = 24 \rightarrow 24 \cdot 25 \cdot 26 = 15600$$

$$x = 25 \rightarrow 25 \cdot 26 \cdot 27 \neq 15600$$

Also ist $x = 24$, und der Artikel findet sich auf den Seiten 24, 25 und 26.

Aufgabe 1389: Flächenverhältnis



In der Abbildung ist $ABCD$ ein Quadrat, die Strecken DE und AC sowie BD und CE sind jeweils parallel.

In welchem Verhältnis steht die Summe der Flächeninhalte der fünf gefärbten Dreiecke zu dem Flächeninhalt des Fünfecks in der Mitte?

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Es sei $|AB| = 1$. Nach Konstruktion ist das Viereck $MCED$ ein Quadrat mit $|DE| = |MC| = \frac{1}{2}|AC|$. Nach dem zweiten Strahlensatz ist $|DF| : |FC| = |DE| : |AC| = 1 : 2$. Ebenso ist $|GC| : |GD| = 1 : 2$, d.h. die Punkte F und G dritteln die Strecke DC .

Die Höhe h des Dreiecks DCE ist gleich der Hälfte der Strecke DC , also $\frac{1}{2}$. Daher haben die Dreiecke DFE , FGE und GCE den gleichen Flächeninhalt

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}.$$

Die Dreiecke DAH und BCK haben den gleichen Flächeninhalt

$$A_2 = F_{DAF} - F_{DHF}.$$

Dabei ist $F_{DAF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Die Dreiecke DHF und BHA sind ähnlich mit $|DF| = \frac{1}{3}|AB|$, daher verhalten sich auch ihre zu AD parallelen Höhen wie $1 : 3$.

Also ist die Höhe des Dreiecks DHF $\frac{1}{4}$ und sein Flächeninhalt $F_{DHF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

Daher ist $A_2 = F_{DAF} - F_{DHF} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Schließlich ist

$$A_3 = F_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Also ist der Flächeninhalt der gefärbten Dreiecke

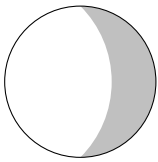
$$S = 2A_1 + 2A_2 + A_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

Ist T der Flächeninhalt des Fünfecks $FHMKG$, so gilt

$$T = F_{MCD} - 2 \cdot F_{DHF} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Daher ist das gesuchte Flächenverhältnis $S : T = \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4 : 1$.

Aufgabe 1390: Mondsichel



Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt K und Radius r sowie ein zweiter Kreis m , dessen Mittelpunkt M auf k liegt und der k in zwei Punkten schneidet, die auf einem Durchmesser von k liegen.

Welcher Anteil des Kreises k ist nicht grau?

(H. F.)

Lösung:

Es sei R der Radius des Kreises m ; P und Q seien die Schnittpunkte von k und m . Ferner seien a, b mit a dem Flächeninhalt des Dreiecks, b der Fläche des Kreisabschnitts und c die Summe der Flächeninhalte des $\triangle PMQ$, sowie der weißen Fläche zwischen PQ und der grauen Sichel.

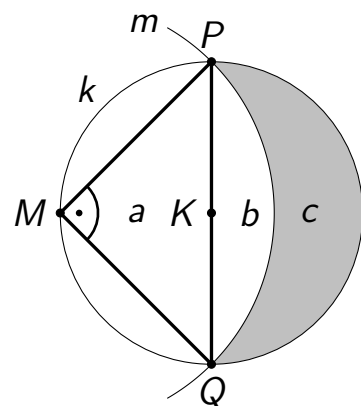
Aus $|PK| = |KQ| = r$ und $|MP| = |MQ| = R$ sowie $|\sphericalangle PMQ| = 90^\circ$ folgt:

$$(2r)^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow 4r^2 = 2R^2, \text{ woraus}$$

$$(1) \quad R = r\sqrt{2}$$

gefolgert werden kann.

Wegen $|\sphericalangle PMQ| = 90^\circ$ ist $a + b = \frac{1}{4}$ Fläche des Kreises m .



Daraus folgt:

$$a + b = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi (r\sqrt{2})^2.$$

$$(2) \quad a + b = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Weiter ist $b + c = \frac{1}{2}$ · Fläche des Kreises k

$$(3) \quad b + c = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Aus (2) und (3) folgt $a = c$, so dass

$$(4) \quad c = r^2$$

wegen $a = |\triangle PMQ| = \frac{1}{2} \cdot (2r)r$

Der nicht graue Teil des Kreises k hat dann wegen (4) den Flächeninhalt $\pi r^2 - r^2$.

Der gesuchte Anteil der weißen Teilfläche an der Gesamtfläche von k beträgt somit: $\frac{\pi r^2 - r^2}{\pi r^2} = \frac{\pi - 1}{\pi} \approx 68\%$.

Da dieses Ergebnis unabhängig vom Radius r des Kreises k ist, trifft es für jede zwei Kreise k und m zu – wie groß oder wie klein auch r gewählt wird.

Aufgabe 1391: Teilbarkeit durch 24

Zeige: Die Termwerte von $T(n) = n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24$ sind für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$ durch 24 teilbar.

Tipp: Der Ausdruck $P(n) = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ ist sicher für alle n durch 24 teilbar, denn $P(n)$ ist ein Produkt von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, von denen sicher eine durch 2, eine durch 3 und eine andere durch 4 teilbar ist.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Also ist die Idee, $T(n) = P(n) + R(n)$ als Summe von $P(n)$ und eines Restterms $R(n)$ zu schreiben. Wenn man jetzt zeigen kann, dass auch $R(n)$ durch 24 teilbar ist, dann ist es auch $T(n)$.

Es ist $P(n) = (n^2 + n) \cdot (n^2 + 5n + 6) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ und

$$T(n) = P(n) - 12n^3 + 12n^2 - 24n + 24 = P(n) - 12 \cdot (n^3 - n^2 + 2n - 2).$$

Damit ist $R(n) = -12 \cdot (n^3 - n^2 + 2n - 2) = -12 \cdot (n^2 \cdot (n - 1) + 2 \cdot (n - 1))$, also $R(n) = -12 \cdot (n^2 + 2) \cdot (n - 1)$.

Ist n gerade, so ist $n^2 + 2$ gerade und $R(n)$ ist durch $12 \cdot 2 = 24$ teilbar.

Ist n ungerade, so ist $n - 1$ gerade und $R(n)$ ist durch $12 \cdot 2 = 24$ teilbar.

Also ist $T(n) = P(n) + R(n)$ immer durch 24 teilbar.

Bemerkung:

Der Ausdruck $\frac{T(n)}{24} = \frac{n^4 - 6n^3 - 18n + 24}{24}$ gibt die Anzahl der Gebiete an, in die ein Kreis maximal zerlegt wird, wenn man n Punkte auf dem Kreis paarweise durch Strecken verbindet ($n = 2, 3, 4, \dots$). Diese Anzahlen sind 2, 4, 8, 16, ... Aber: Die nächsten Anzahlen sind erstaunlicherweise nicht 32 und 64, sondern 31 und 57.

Aufgabe 1392: Exponential-Gleichung

Sei x eine positive reelle Zahl. Bestimme die reellen Lösungen der Gleichung $x^{x+9} = 8 \cdot \sqrt[3]{2^x}$.

Tipp: Logarithmus zur Basis 2 hilft.

(H. F.)

Lösung:

Durch Logarithmierung zur Basis 2 erhält man aus der gegebenen Gleichung:

$$\log_2(x^{x+9}) = (x+9)\log_2(x) = \log_2(8) + \log_2\left(2^{\frac{1}{3}x}\right)$$

Daraus folgt wegen $\log_2(8) = 3$ und

$$3\log_2(2) + \frac{1}{3}x\log_2(2) = 3 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(9+x).$$

und weil $\log_2(2) = 1$: $(x+9)\log_2(x) = \frac{1}{3}(x+9)$.

Nun ist $x \neq -9$, da $\log_2(-9)$ nicht reell ist. Daher folgt aus der letzten Gleichung: $\log_2(x) = \frac{1}{3}$. Damit ist $x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Alternative Lösung

$$x^{x+9} = 8 \cdot \sqrt[3]{2^x} = 2^3 \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 2^{3+\frac{x}{3}} = 2^{\frac{1}{3}(x+9)}$$
 Die Exponenten sind gleich...

a) ...also müssen auch die Basen gleich sein. Somit gilt $x_1 = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

b) ...und werden für $x = -9$ beide Null.

Für $x = -9$ besitzen beide Seiten den Wert 1, also $x_2 = -9$. Es geht auch ohne Logarithmus. (Christoph Sievert)

Bundeswettbewerb Mathematik

Lösungen der 1. Runde 2026

von Stefan Kermer, Volker Priebe und Bastian Schneider

Aufgabe 1

Romeo und Julia begegnen sich an einem romantischen Ort. Sie schreibt ihm ihre 10-stellige Telefonnummer auf einen Zettel.

Später findet Romeo den Zettel wieder, kann aber eine der Ziffern nicht mehr lesen, er weiß nur, dass es keine Null war. Also fragt er Julia nach der fehlenden Ziffer.

Julia spielt gern mit Zahlen und sagt zu Romeo: Wenn ich zähle, wie viele Ziffern meiner Telefonnummer kleiner als 1 sind, danach wie viele Ziffern kleiner als 2 sind, usw. und zum Schluss, wie viele Ziffern kleiner als 10 sind, und dann diese zehn Anzahlen addiere, so ist das Ergebnis durch 9 teilbar.

Wie kann Romeo mithilfe dieser Information die fehlende Ziffer bestimmen?

Anmerkungen: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Behauptung

Die fehlende Ziffer lässt sich folgendermaßen eindeutig bestimmen. Romeo berechnet den ganzzahligen Rest q , $0 \leq q \leq 8$, den das Negative der Summe der lesbaren Ziffern bei Division durch 9 lässt. Die fehlende Ziffer ist dann $1 + q$.

Beweis

Es seien $t_1, t_2, \dots, t_{10}$ mit $0 \leq t_k \leq 9$ für $1 \leq k \leq 10$ die Ziffern von Julias Telefonnummer. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass t_{10} nicht lesbar ist.

Bezeichnen wir mit $u(i)$, $1 \leq i \leq 10$, wie viele Ziffern in Julias vollständiger Telefonnummer kleiner als i sind, so wird eine Ziffer t_k genau in den $(10 - t_k)$ Termen $u(i)$ mit $t_k + 1 \leq i \leq 10$ gezählt; es gilt demnach

$$\begin{aligned} u(1) + u(2) + \dots + u(10) &= (10 - t_1) + (10 - t_2) + \dots + (10 - t_{10}) \\ &= 100 - (t_1 + t_2 + \dots + t_{10}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Es sei $q \equiv -(t_1 + t_2 + \dots + t_9) \pmod{9}$ mit $0 \leq q \leq 8$. Julias Beschreibung ihrer Telefonnummer besagt zusammen mit (1.1), dass

$$0 \equiv u(1) + u(2) + \dots + u(10) \equiv 100 - (t_1 + \dots + t_{10}) \equiv 1 + q - t_{10} \pmod{9};$$

es gilt also notwendig $t_{10} = 1 + q$, weil $t_{10} = 0$ ausgeschlossen ist. Umgekehrt erfüllt die um $t_{10} = 1 + q$ ergänzte 10-stellige Telefonnummer Julias Beschreibung, weil mit (1.1)

$$u(1) + \dots + u(10) \equiv 1 - t_{10} - (t_1 + \dots + t_9) \equiv -q + q \equiv 0 \pmod{9}.$$

Das beweist die Behauptung. $\square$

Alternative Behauptung

Die fehlende Ziffer lässt sich folgendermaßen eindeutig bestimmen. Romeo berechnet für $1 \leq i \leq 10$ die Anzahl der lesbaren Ziffern, die kleiner als i sind, und bestimmt zudem den ganzzahligen Rest r , $0 \leq r \leq 8$, den die Summe dieser zehn Anzahlen bei Division durch 9 lässt. Die fehlende Ziffer ist dann $1 + r$.

Beweis

Wir beweisen zunächst, dass Romeo höchstens eine Ziffer ergänzen kann, so dass Julias Beschreibung erfüllt ist. Wir bezeichnen mit $u(i)$, $1 \leq i \leq 10$, wie viele Ziffern in Julias vollständiger Telefonnummer kleiner als i sind. Julias Beschreibung ihrer Telefonnummer besagt also, dass

$$u(1) + u(2) + \dots + u(9) + u(10) \equiv 0 \pmod{9}. \quad (1.2)$$

Für die nur teilweise lesbare Telefonnummer bezeichnen wir analog mit $v(i)$, $1 \leq i \leq 10$, wie viele lesbare Ziffern kleiner als i sind. Es sei im Folgenden die Ziffer j mit $1 \leq j \leq 9$ nicht lesbar. Dann sind

$$v(i) = u(i) \text{ für } 1 \leq i \leq j \quad \text{und} \quad v(i) = u(i) - 1 \text{ für } j + 1 \leq i \leq 10; \quad (1.3)$$

insbesondere ist $v(1) = u(1)$, weil nach Aufgabenstellung die fehlende Ziffer keine Null ist. Ist r , $0 \leq r \leq 8$, der ganzzahlige Rest, den $v(1) + v(2) + \dots + v(9) + v(10)$ bei Division durch 9 lässt, so gilt

$$v(1) + v(2) + \dots + v(9) + v(10) - r \equiv 0 \pmod{9}. \quad (1.4)$$

Wir subtrahieren die Gleichung in (1.4) von der Gleichung in (1.2) und addieren auf beiden Seiten der Differenz j ; mit (1.3) erhalten wir auf diese Weise, dass

$$\begin{aligned} j &\equiv j + u(1) - v(1) + u(2) - v(2) + \dots + u(9) - v(9) + u(10) - v(10) + r \\ &\equiv j + (10 - j) \cdot 1 + r \equiv 1 + r \pmod{9}; \end{aligned}$$

das impliziert $j = 1 + r$, weil $j = 0$ ausgeschlossen ist.

Wir zeigen nun, dass $j = 1 + r$ tatsächlich die gesuchte fehlende Ziffer ist. Für die um $1 + r$ ergänzte 10-stellige Telefonnummer sind $u(i) = v(i)$ für $1 \leq i \leq 1 + r$ und $u(i) = v(i) + 1$ für $2 + r \leq i \leq 10$; damit also wegen (1.4)

$$u(1) + \dots + u(10) \equiv v(1) + \dots + v(10) + 10 - (1 + r) \equiv 9 \equiv 0 \pmod{9};$$

die ergänzte Telefonnummer erfüllt also Julias Beschreibung.

Das beweist die Behauptung. □

Aufgabe 2

Bestimme alle Tripel positiver ganzer Zahlen (a, b, c) , die folgende Eigenschaften haben:

- (1) Die Summe $a + b + c$ ist eine Primzahl.
- (2) Die Zahl $ab + bc + ca$ ist Teiler der Zahl $a^2 + b^2 + c^2$.

Anmerkungen: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Behauptung

Genau das Tripel $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ hat die Eigenschaften (1) und (2) der Aufgabenstellung.

Beweis

Nach Voraussetzung in der Aufgabenstellung sind $a, b, c \geq 1$, also $p := a + b + c \geq 3$ nach Eigenschaft (1) eine ungerade Primzahl. Es ist

$$\begin{aligned} p^2 &= (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\ &> ab + bc + ca \geq 3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

und mit Eigenschaft (2) folgt, dass $ab + bc + ca$ ein Teiler von p^2 ist, weil es Teiler jeweils der Terme in Klammern auf der rechten Seite in der ersten Zeile der Gleichung ist.

Die Zahl p^2 hat als Quadrat einer Primzahl nur drei Teiler, nämlich 1, p oder p^2 . Wegen $p^2 > ab + bc + ca \geq 3 > 1$, wobei die erste Ungleichung aus (2.1) ersichtlich ist, muss notwendig $ab + bc + ca = p$ gelten, woraus mit Eigenschaft

(1) folgt, dass

$$0 = p - p = ab + bc + ca - a - b - c = a(b-1) + b(c-1) + c(a-1), \quad (2.2)$$

wobei jeder der drei Terme $a(b-1)$, $b(c-1)$, $c(a-1)$ eine nichtnegative Zahl ist. Verschwindet ihre Summe gemäß (2.2), so muss notwendig $a = b = c = 1$ gelten.

Eine Probe bestätigt für $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, dass $a + b + c = 3$ prim und dass $ab + bc + ca = 3$ ein Teiler von $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ sind, die Eigenschaften (1) und (2) der Aufgabenstellung also erfüllt sind.

Das beweist die Behauptung. $\square$

Aufgabe 3

Wir betrachten ein Tetraeder $ABCD$, das nicht notwendig regulär ist.

Eine Gerade im Raum heiße *zweizählige Symmetrieachse* dieses Tetraeders, wenn eine Drehung um diese Gerade um 180° das Tetraeder in sich selbst überführt.

Beweise, dass die folgenden beiden Eigenschaften quivalent sind:

- (1) Alle drei Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten des Tetraeders sind zweizählige Symmetrieachsen.
- (2) Alle Seitenflächen des Tetraeders haben den gleichen Umfang.

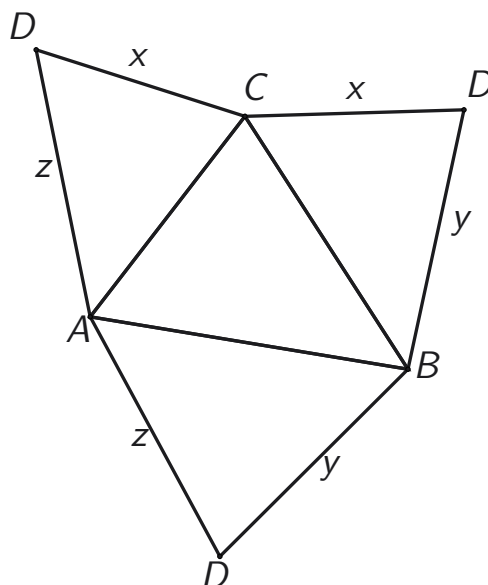
Wir stellen einen Hilfssatz voran, der aufzeigt, wie weitgehend das Tetraeder bereits durch Eigenschaft (2) bestimmt ist:

Hilfssatz

Für ein Tetraeder $ABCD$ sind die Eigenschaft (2) der Aufgabenstellung und die folgende Eigenschaft quivalent,

- (3) Gegenüberliegende Kanten des Tetraeders haben die gleiche Länge, das heißt, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{CA} = \overline{BD}$ und $\overline{DA} = \overline{BC}$.

Zum Beweis des Hilfssatzes stellen wir das (hohle) Tetraeder auf die Ebene des Dreiecks ABC und schneiden es entlang der Kanten AD , BD und CD auf.



Die Seitenflächen ABD , BCD bzw. CAD klappen wir (längentreu) entlang der Achsen AB , BC bzw. CA nach außen in die betrachtete Ebene; es entsteht ein Netz von vier Dreiecken wie in der Skizze. Die Längen der aufgeschnittenen Kanten sind nach Konstruktion gleich und in der Abbildung mit $x := \overline{CD}$, $y := \overline{BD}$ und $z := \overline{DA}$ bezeichnet.

Wenn Eigenschaft (3) gilt, so besagt dies $\overline{AB} = x$, $\overline{CA} = y$ und $\overline{BC} = z$, und alle vier Seitenflächen des Tetraeders haben den Umfang $x + y + z$; das ist Eigenschaft (2).

Wenn umgekehrt Eigenschaft (2) gilt, also

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AB} + y + z = \overline{CA} + x + z = \overline{BC} + x + y,$$

und wir von der ersten Summe jeweils die zweite, dritte, vierte Summe abziehen, erhalten wir

$$\overline{BC} - z + \overline{CA} - y = 0, \quad \overline{AB} - x + \overline{BC} - z = 0 \quad \text{und} \quad \overline{AB} - x + \overline{CA} - y = 0,$$

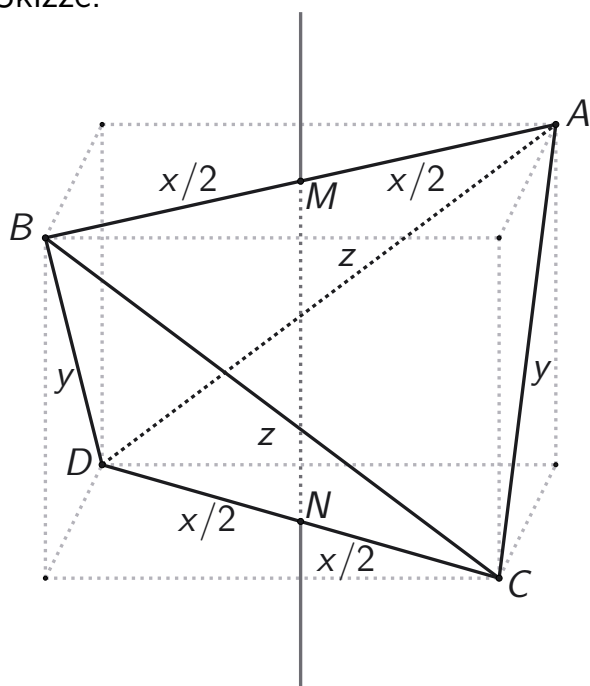
was aufsummiert zu $\overline{AB} - x + \overline{BC} - z + \overline{CA} - y = 0$ führt. Ziehen wir hiervon jeweils eine Gleichung der vorigen Formelzeile ab, so folgen

$0 = \overline{AB} - \overline{CD} = \overline{CA} - \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DA}$, also Eigenschaft (3). Das beweist den Hilfssatz.

Die Behauptung der Aufgabenstellung ist mithin bewiesen, wenn wir zeigen, dass die Eigenschaften (1) und (3) äquivalent sind.

Erster Beweis

Im Tetraeder $ABCD$ seien M bzw. N die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten AB bzw. CD . Es gelte Eigenschaft (3) für das Tetraeder $ABCD$; siehe Skizze.



Wir zeigen, dass die Verbindungsgerade (MN) eine zweizählige Symmetrieachse des Tetraeders ist. Wegen Eigenschaft (3) sind die Dreiecke ADC und BDC kongruent (Kongruenzsatz SSS) mit $\overline{CA} = \overline{BD}$ und $\overline{DA} = \overline{BC}$, also sind die jeweiligen Seitenhalbierenden AN und BN gleich lang. Im somit gleichschenkligen Dreieck ABN mit Basis AB steht die Seitenhalbierende NM senkrecht auf AB . Entsprechend begründen wir, dass MN senkrecht auf CD steht.

Die Verbindungsgerade (MN) verläuft also senkrecht zu AB und CD . Wegen dieser Orthogonalität vertauscht die Drehung um die Verbindungsgerade (MN) um 180° die Punkte A und B bzw. C und D sowie die Kanten des Tetraeders entsprechend, überführt also insgesamt das Tetraeder in sich selbst. Die Verbindungsgerade (MN) ist demnach eine zweizählige Symmetrieachse des Tetraeders. Für die beiden anderen Verbindungsgeraden kann analog nachgewiesen

werden, dass sie zweizählige Symmetrieachsen sind. Für das Tetraeder $ABCD$ gilt also Eigenschaft (1).

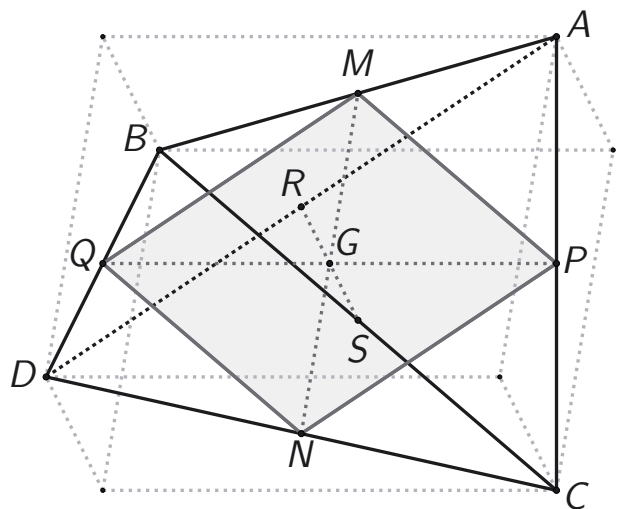
Es gelte umgekehrt Eigenschaft (1) für das Tetraeder $ABCD$. Die Drehung um die Verbindungsgerade (MN) um 180° überführt dann nach Voraussetzung das Tetraeder in sich selbst. Weil diese Drehung die Punkte M, N fix lässt, vertauscht sie die Punkte A und B bzw. C und D und bildet somit die Kanten BD auf AC bzw. DA auf BC ab, weshalb $\overline{CA} = \overline{AC} = \overline{BD}$ bzw. $\overline{DA} = \overline{BC}$ gelten müssen. Weil auch die beiden anderen Verbindungsgeraden zweizählige Symmetrieachsen sind, kann analog nachgewiesen werden, dass zudem $\overline{AB} = \overline{CD}$. Für das Tetraeder $ABCD$ gilt also Eigenschaft (3).

Das beweist die Behauptung der Aufgabenstellung. $\square$

Zweiter Beweis

Wir weisen zunächst nach, dass sich im nicht notwendig regulären Tetraeder $ABCD$ die drei Geraden, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten verbinden, in einem Punkt schneiden:

Es seien M, N, P, Q, R bzw. S die Mittelpunkte der Kanten AB, CD, CA, BD, DA bzw. BC des Tetraeders; siehe nebenstehende Skizze. Aus den Strahlensätzen schließen wir, dass MQ bzw. NP als eine Mittellinie der Seitenflächen DAB bzw. ADC des Tetraeders parallel zur Kante DA mit $\overline{MQ} = \overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{DA}$ verlaufen; entsprechend schließen wir, dass QN und PM beide parallel zur Kante BC verlaufen mit $\overline{QN} = \overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.



Das Viereck $MQNP$ liegt also in einer Ebene und ist ein Parallelogramm mit Diagonalen MN und PQ . Aus den Eigenschaften des Parallelogramms wissen wir, dass sich die Diagonalen MN, PQ in ihrem jeweiligen Mittelpunkt schneiden. Entsprechend argumentieren wir, dass die Mittelpunkte der Diagonalen PQ, RS im Parallelogramm $PRQS$ übereinstimmen. Also verlaufen die drei Verbindungsgeraden (MN), (PQ) und (RS) durch einen gemeinsamen Punkt G , der MN, PQ, RS jeweils halbiert.

Wir zeigen nun, dass aus Eigenschaft (1) die folgende Eigenschaft des Tetraeders folgt,

- (4) Die drei Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten des Tetraeders stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Wir zeigen anschließend, dass aus Eigenschaft (4) die Eigenschaft (3) und dass

aus Eigenschaft (3) die Eigenschaft (1) folgt.

Gilt Eigenschaft (1), so überführt eine Drehung um die Verbindungsgerade (MN) um 180° nach Voraussetzung das Tetraeder in sich selbst. Die Drehung lässt unter anderem die Punkte M und N fix und vertauscht die Punkte A und B bzw. C und D . Sie bildet somit die Kanten BD auf AC bzw. DA auf BC und damit, als Mittelpunkte der entsprechenden Kanten, auch Q auf P bzw. R auf S ab. Hieraus folgt, dass die Verbindungsgeraden (PQ) bzw. (RS) senkrecht zu (MN) verlaufen. Weil auch die beiden anderen Verbindungsgeraden zweizählige Symmetrieachsen sind, kann analog nachgewiesen werden, dass (PQ) senkrecht zu (RS) verläuft. Für das Tetraeder $ABCD$ gilt also Eigenschaft (4).

Gilt Eigenschaft (4), so stehen in den Parallelogrammen $MQNP$, $PRQS$ und $RNSM$ jeweils die Diagonalen senkrecht aufeinander, damit sind (nach dem Kongruenzsatz SWS) jeweils die vier Seiten der Parallelogramme gleich lang, die Parallelogramme sind also Rauten. Das heißt insbesondere

$$\overline{DA} = 2\overline{MQ} = 2\overline{QN} = \overline{BC}, \quad \overline{CD} = 2\overline{PR} = 2\overline{RQ} = \overline{AB}, \\ \overline{CA} = 2\overline{RN} = 2\overline{NS} = \overline{BD};$$

es gilt also Eigenschaft (3).

Dass aus der Eigenschaft (3) die Eigenschaft (1) folgt, das lässt sich wie im ersten Beweis nachweisen.

Das beweist die Behauptung der Aufgabenstellung. $\square$

Bemerkungen

Tetraeder wie in der Aufgabenstellung werden als gleichschenklige Tetraeder bezeichnet. Sie lassen sich auf weitere Arten charakterisieren. Ein nicht notwendig reguläres Tetraeder $ABCD$ ist beispielsweise genau dann gleichschenkelig, wenn der Punkt G aus dem zweiten Beweis auch Mittelpunkt der Umkugel ist, auf der alle vier Ecken des Tetraeders liegen, oder wenn der Punkt G auch Mittelpunkt der Kugel im Inneren von $ABCD$ ist, die alle vier Seitenflächen des Tetraeders berührt.

Jedes Tetraeder $ABCD$ lässt sich auf die folgende Weise einem Parallelepiped (einem Spat) einbeschreiben: Für ein beliebiges Paar gegenüberliegender Kanten, zum Beispiel AB , CD , wissen wir, dass sie nicht parallel verlaufen. Es gibt damit genau ein Paar paralleler Ebenen, so dass AB in der einen und CD in der anderen Ebene verläuft. Entsprechend erhalten wir je ein Paar paralleler Ebenen für die gegenüberliegenden Kanten CA , BD und DA , BC . Der Schnitt dieser drei Paare paralleler Ebenen ist ein Parallelepiped, in dem jede Kante des Tetraeders Diagonale auf einer der sechs Seitenflächen des Parallelepipeds ist; siehe die Skizzen im ersten und zweiten Beweis. Die vier Ecken des Tetraeders sind vier der acht Ecken des Parallelepipeds. Das nicht notwendig reguläre Tetraeder $ABCD$ ist genau dann gleichschenkelig, wenn dieses Parallelepiped ein Quader ist.

In der Kristallographie bezeichnet man ein Tetraeder, das Eigenschaften wie in der Aufgabenstellung hat, als *Disphenoid*.

Aufgabe 4

Luna und Marie spielen folgendes Spiel:

An der Tafel steht eine Zahl. Wer am Zug ist, addiert zu der Zahl an der Tafel einen ihrer Teiler, aber nicht die Zahl selbst, und ersetzt die Zahl an der Tafel durch die so erhaltene Summe. Wer zuerst eine Zahl schreiben muss, die größer als 2026 ist, verliert das Spiel.

Am Anfang steht die Zahl 2 an der Tafel, Luna beginnt. Wer kann den Gewinn erzwingen?

Anmerkungen: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Behauptung

Luna kann den Gewinn erzwingen.

Erster Beweis (Angabe einer konkreten Strategie)

Luna stellt mit folgender Strategie sicher, dass sie stets gewinnt:

Wenn eine Zahl an der Tafel steht, die kleiner ist als 2024, addiere 1, wenn 2024 an der Tafel steht, addiere 2.

Diese Strategie ist durchführbar, denn 1 ist Teiler jeder Zahl, kann also immer addiert werden, und 2 ist ein Teiler von 2024, kann also zu 2024 addiert werden. Wir zeigen, dass diese Strategie zum Gewinn führt, und überlegen uns hierzu, dass jeder von Lunas Zügen mit einer geraden Zahl an der Tafel beginnt und Maries Züge stets mit einer ungeraden Zahl beginnen, die nicht größer als 2023 ist.

- Luna beginnt, wenn die gerade Zahl 2 an der Tafel steht.
- Beträgt die Zahl an der Tafel zu Beginn von Lunas Zug 2024, so addiert Luna den Teiler 2, und Marie verliert im darauffolgenden Zug.
- Wenn die gerade Zahl z an der Tafel zu Beginn von Lunas Zug höchstens 2022 ist, ist 1 stets ein Teiler von z . Luna ersetzt in ihrem Zug die Zahl an der Tafel durch die ungerade Zahl $z + 1$, die stets höchstens $2022 + 1 = 2023$ ist.
- Maries darauffolgender Zug beginnt also mit einer ungeraden Zahl, die höchstens 2023 beträgt. Jede ungerade Zahl hat nur ungerade Teiler. Marie muss demnach in ihrem Zug die Zahl an der Tafel durch eine gerade Zahl ersetzen.
- Marie kann hierbei die Zahl 2026 nicht erreichen, was wir durch einen Widerspruch beweisen. Beginnt Marie ihren Zug, wenn die Zahl $md \leq 2023$, m und d ungerade, an der Tafel steht, und wählt den Teiler d , so ersetzt sie die Zahl an der Tafel durch $md + d = (m + 1)d$. Aus der Annahme $(m + 1)d = 2026 = 2 \cdot 1013$, folgen $m = 1$ und $d = 1013$, also $z = d = 1013$; das ist ein Widerspruch zu den Spielregeln.

- Marie verliert also in ihrem Zug, indem sie eine gerade Zahl größer als 2026 an die Tafel schreibt. Oder sie ersetzt in ihrem Zug die Zahl an der Tafel durch eine gerade Zahl, die höchstens 2024 ist, dann zieht Luna im darauffolgenden Zug gemäß ihrer Strategie.

Mit dieser Strategie kann Luna also ihren Gewinn erzwingen.

Das beweist die Behauptung. □

Zweiter Beweis (Existenzbeweis)

Wir verallgemeinern das in der Aufgabenstellung beschriebene Spiel, indem wir bei sonst gleichen Spielregeln festlegen, dass diejenige Spielerin das Spiel verliert, die zuerst eine Zahl schreiben muss, die größer als n ist, wobei $n \geq 6$ eine beliebige natürliche Zahl ist.

Da sich die Zahl an der Tafel mit jedem Zug um mindestens 1 erhöht, ist das Spiel nach endlich vielen Zügen beendet, und es steht immer eine Gewinnerin fest. Für jede Zahl an der Tafel, die kleiner als n ist, können beide Spielerinnen – wenn sie am Zug sind – den gleichen Teiler wählen und addieren. Aussagen über mögliche Strategien angesichts einer bestimmten Zahl an der Tafel gelten also für die Spielerin am Zug, unabhängig davon, ob dies Luna oder Marie ist. Für jede Zahl, die im Verlauf des Spiels möglicherweise an der Tafel steht, bestimmen wir nun vorab, ob die Spielerin am Zug, beginnend mit dieser Zahl, den Gewinn erzwingen kann (die Menge dieser “Gewinn-Zahlen” bezeichnen wir mit G) oder bei intelligentem Spiel der anderen Spielerin verliert (die Menge dieser “Verlust-Zahlen” bezeichnen wir mit V).

Eine Spielerin verliert genau dann mit ihrem nächsten Zug, wenn die Zahl n an der Tafel steht. Denn für jede Zahl z an der Tafel, die kleiner als n ist, kann die Spielerin im Zug den Teiler 1 addieren, und der Zug der anderen Spielerin beginnt mit $z + 1 \leq n$. Damit gelten $n \in V$ und $n - 1 \in G$, denn der Zug $(n - 1) + 1 = n$ erzwingt den Gewinn.

Wir betrachten nun, absteigend um jeweils 1, die Zahlen $n - 2$ bis 2; sei z die betrachtete Zahl. Alle zulässigen Züge, die mit z an der Tafel beginnen, führen zu Zahlen, die größer als z sind. Wenn ein zulässiger Zug, der mit z beginnt, zu einer Zahl in V führt, so gilt $z \in G$; führen alle zulässigen Züge, die mit z beginnen, zu Zahlen in G , so gilt $z \in V$. Die Spielerin, die beginnend mit einer Zahl aus G am Zug ist, hat also eine Gewinnstrategie, die Spielerin, die beginnend mit einer Zahl aus V am Zug ist, verliert bei intelligentem Spiel der anderen Person.

Nach den Spielregeln kann Luna im ersten Zug nicht anders ziehen, als 1 zu addieren, ersetzt also in ihrem Zug die Zahl 2 an der Tafel durch $2 + 1 = 3$, Marie kann auch nach den Spielregeln in ihrem ersten Zug nicht anders ziehen, als 1 zu addieren, ersetzt also die Zahl 3 an der Tafel durch $3 + 1 = 4$. Anschließend unterscheiden wir zwei Fälle:

- Falls $6 \in G$, so ersetzt Luna in ihrem zweiten Zug die Zahl 4 durch $5 = 4 + 1$, Marie muss die Zahl 5 durch $6 = 5 + 1$ ersetzen.
- Falls $6 \in V$, so ersetzt Luna in ihrem zweiten Zug die Zahl 4 durch $6 = 4 + 2$, Marie verliert damit im zweiten Zug oder alle zulässigen zweiten Züge von Marie führen zu einer Zahl in G . In jedem Fall kann Luna den Gewinn erzwingen.

Das beweist die Behauptung. □

Wir danken Herrn StD a.D. Karl Fegert und Herrn OStR Dr. Robert Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Computer-Ecke

Aus dem Umfeld der $3n + 1$ -Folgen

Der amerikanische Mathematiker Clark Kimberling hat eine Folge (k_n) natürlicher Zahlen so definiert:

$$k_1 = 1, \quad k_n = \begin{cases} \lfloor \frac{1}{2} k_{n-1} \rfloor, & \text{falls } k_n \notin \{0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}\} \\ 3 \cdot k_{n-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei gibt $\lfloor \frac{1}{2} k_{n-1} \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{1}{2} k_{n-1}$ an.

Ein Anfang der Folge (k_n) lautet: 1, 3, 9, 4, 2, 6, ..., denn

$$k_1 = 1;$$

$$k_2 = 3k_1 = 3 - \text{wäre } k_2 = \lfloor \frac{1}{2} \cdot 1 \rfloor = 0, \text{ so wäre } k_2 \in \{0, k_1\}$$

$$k_3 = 3k_2 = 9 - \text{wäre } k_3 = \lfloor \frac{1}{2} \cdot 3 \rfloor = 1, \text{ so wäre } k_3 \in \{0, k_1, k_2\}; \text{ u.s.w.}$$

Untersuche nun mit deinem Computer für einen Anfang der Folge (k_n) – etwa für $n = 1000$ oder für $n = 10000$ – die folgenden Fragen, die meines Wissens noch unbeantwortet sind:

a) Enthält die Folge (k_n) eine Zahl mehrfach?

b) Ist jede der Zahlen 1, 2, 3, ... ein Element der Folge (k_n) ?

Fragment einer Lösung

Für $n = 15000$ ist die Antwort für a): nein

für b): jede Zahl 1, 2, 3, ..., 1435 kommt in (k_n) vor

Bemerkung

Die $3n + 1$ -Folgen hat der deutsche Mathematiker Lothar Collatz so definiert:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{n-1}, & \text{falls } a_{n-1} \text{ gerade} \\ 3 \cdot a_{n-1}, & \text{falls } a_{n-1} \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die $3n + 1$ -Folgen haben eine Flut von Veröffentlichungen bewirkt, weil es bei ihnen viele ungelöste Fragen gibt; berühmt ist die Vermutung, dass jede $3n + 1$ -Folge das Endstück 1, 4, 2, 1, 4, 2, ... hat. (H. F.)

Lösung der Knochelei von Seite 4

Die Kinder seien in der Reihenfolge ihres zunehmenden Alters mit K_i , ihr jeweiliges Erbe mit e_i und die Differenz $e_{i+1} - e_i$ in (2) mit d_i bezeichnet, wobei $i = 1, 2, 3, 4$.

Nach Voraussetzung gilt: $e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5$. Daraus folgt mit Bedingung (2):

$$(*) \quad d_1 \geq 1, d_2 \geq 2, d_3 \geq 3 \text{ und } d_4 \geq 4.$$

Mit der Voraussetzung (1) ist $80 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ und wegen $e_2 = e_1 + d_1$, $e_3 = (e_1 + d_1) + d_2$, $e_4 = (e_1 + d_1 + d_2) + d_3$, $e_5 = (e_1 + d_1 + d_2 + d_3) + d_4$ gilt:

$$80 = 5e_1 + 4d_1 + 3d_2 + 2d_3 + d_4 \geq 5e_1 + 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 = 5e_1 + 20.$$

Also ist $5e_1 \leq 60$, sodass $e_1 \leq 12$ und damit wegen (3) $e_5 \leq 22$ ist.

Wäre nun $e_1 \leq 11$ und daher $e_5 \leq 20$, so wäre $d = 9$ der größte mögliche Abstand zwischen e_1 und e_5 . Jedoch folgt aus Bedingung (*), dass $d = d_1 + d_2 + d_3 \geq 10$ ist – ein Widerspruch.

Daraus folgt: $e_1 = 12$, $e_5 = 22$ sowie $d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 10$ – und diese Gleichung hat nur die Lösung $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 4$. Damit ist der Aufteilungsschlüssel für das Erbe:

$$(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5) \rightarrow (12, 13, 15, 18, 22).$$

Lösungen zu den Eigenschaften von Ketten von Seite 14

1. Die Aussage ist wahr. Alle in Frage kommenden Ketten haben das Endglied 102.
2. Die Kette K_{21} hat die meisten Glieder, nämlich 11.
3. Es gibt unendlich viele null-freie Zahlen n mit der Einerziffer 5, deren übrige Ziffern sämtlich ungerade sind. Dann ist $A(n)$ eine gerade, Ziffer 5 enthaltende Zahl. Folglich ist $F(n) = n + A(n)$ ein Vielfaches von 10, also eine null-haltige Zahl. Damit hat $F(n)$ keinen Nachfolger. Also gibt es unendlich viele Ketten $(n, n + A(n))$ mit nur zwei Gliedern.
4. Ein Ergebnis ist mir nicht bekannt.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 163

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 6: Emil Nies 12;

Kl. 10: Lisa Schäfer 10.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:

Kl. 6: Lilly Schäfer 15;

Kl. 13: Moritz Groh 23.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Gymnasium Calvanienberg

Kl. 7: Simon Hagemann 8;

Kl. 11: David Hagemann 18, Jonas Löcher 20.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Otto-Schule:

Kl. 5: Nik Paolo Wagner 5;

Kl. 6: Marleen Groitl 7.

Bingen, Stefan-George Gymnasium

Kl. 6: Anna Jockers 9;

Kl. 7: Oskar Bellenbaum 1;

Kl. 8: Mais Alkhateeb 11, Tim Jockers 24;

Birkenfeld, Gymnasium Birkenfeld

Kl. 12: Joschua Jung 22.

Eckartsberg, Christian-Weise-Gymnasium:

Kl. 6: Maxi Lingott 15.

Essenheim, Grundschule

Kl. 1: Nora Menzel 8.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag):

Kl. 9: Philip Mühlbeyer 6,5.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium

Kl. 7: Ben Oberreuther 10,5;

Kl. 10: Erik Eberlein 23, Niklas Gelhausen 16,5, Lars Noll 16,5, Till Radünz 16,5.

Hör-Grenzhausen, Gymnasium im Kannenbäckerland:

Kl. 9: Zeynep Muslugüme 27,5.

Linz, Martinus-Gymnasium

Kl. 10: Vladyslav Pochynok 16.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:

Kl. 8: Jonas Dürkes 21.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 10: Lukas Dürkes 21.

Mainz, Willigis-Gymnasium:

Kl. 9: Ioan Salaru 24,5.

Marzling, Josef-Hofmiller-Gymnasium:

Kl. 9: Stephanos Dimitriou 21,5.

Mühlheim an der Ruhr, Otto-Pankok-Schule:

Kl. 10: Nazar Cherpak 21.

München, Theodolinden-Gymnasium Bayern:

Kl. 7: Richard Li 17.

Nieder-Olm, Gymnasium:

Kl. 7: Nolwenn Büttenbender 13, Dmytro Rybnik 16.

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 11: Jasmin Borrmann 21;

Kl. 13: Emilie Borrmann 20.

Saarburg, Gymnasium:

Kl. 13: Nils Angel 21.

Schwäbisch Gmünd, Landesgymnasium für Hochbegabte:

Kl. 7: Li Yunqi 17.

Tangermünde, Diesterweg-Gymnasium:

Kl. 11: Mai Linh Dang 22,5.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:

Kl. 7: Lisa Anton 8.

Wörth, Europa-Gymnasium:

Kl. 11: Leonid Vasiler 22.

ohne Schule:

Kl. 11: Jonas Neitzel 17.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2025/26 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).

Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

- **π in Stein:** In Nörten-Hardenberg (nördlich von Göttingen) hat Bilian Profen das wachsende Kunstwerk „ π in Stein“ initiiert: quadratische Fußwegplatten aus rotfarbigem Granit, darin eingemeißelt sind die Nachkommastellen von π . Unser Redaktionsmitglied Marcel Gruner hat die 20. Platte mit der Ziffer 6 gespendet, die nun in Nörten-Hardenberg liegt, sowie eine weitere Platte mit den Stellen 605 und 606, die in Neuwied liegt (ab der 314. Stelle entwickelt sich die Zahlenreihe ihrer Transzendenz entsprechend weltweit). Das Kunstwerk



„ π in Stein“ ist einen Besuch wert. Weitere Informationen unter

<https://www.pi-in-stein.com>.

- **Der Professor und das liebe π :** Am π -Tag, also Samstag, den 14. März 2026, um 19:30 Uhr gastiert Prof. Timm Sigg mit seinem Programm „Der Professor und das liebe π “ bei der Kleinkunsthöhne Neuwied (JuSch, Theaterplatz 1, 56564 Neuwied).

Timm Sigg ist nicht nur Mathematikprofessor, sondern auch Musikkabarettist. Selbstironisch, einführend und wortwitzig geht er den wesentlichen Fragen des Lebens nach wie: „Hat Pippi Langstrumpf die Mathematik revolutioniert?“ oder „Warum gibt es bald keine Ingenieure mehr?“ Es ist voraussichtlich die letzte Möglichkeit, dieses Programm zu sehen.

Weitere Informationen und Eintrittskarten gibt es unter

www.kleinkunstbuehne-neuwied.de

oder beim Schlosstheater Neuwied (Telefon 02631/22288). Die Karten kosten im Vorverkauf jeweils 20 € (inklusive VVK-Gebühr) und 23 € an der Abendkasse.

- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:

www.facebook.com/monoid.matheblatt

www.facebook.com/monoid.redaktion

www.instagram.com/monoid.matheblatt

Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.

Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite

<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/>.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe

Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf, mit freundlicher Unterstützung von Gregor Salaru

Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Inhalt

Einladung zur Mainzer Mathe-Akademie 2025	3
H. Fuchs: Mathematische Knobelei	4
Was uns über den Weg gelaufen ist	4
Eine mathematische Miniatur	5
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke	6
H. Sewerin: Das Denkerchen	7
H. Fuchs: Die Dominanz der Ziffer 1 bei Potenzen von 2	9
H. Fuchs: Bemerkenswerte Zerlegung	12
H. Fuchs: Ketten im Zahlenuniversum	14
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 164	16
Neue Mathespielereien	19
Neue Aufgaben	21
Gelöste Aufgaben aus MONOID 164	22
S. Kermer, V. Priebe, B. Schneider: Bundeswettbewerb Mathematik	26
Computer-Ecke	35
Rubrik der Löserinnen und Löser	37
Mitteilungen	39
Redaktion	40

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>

