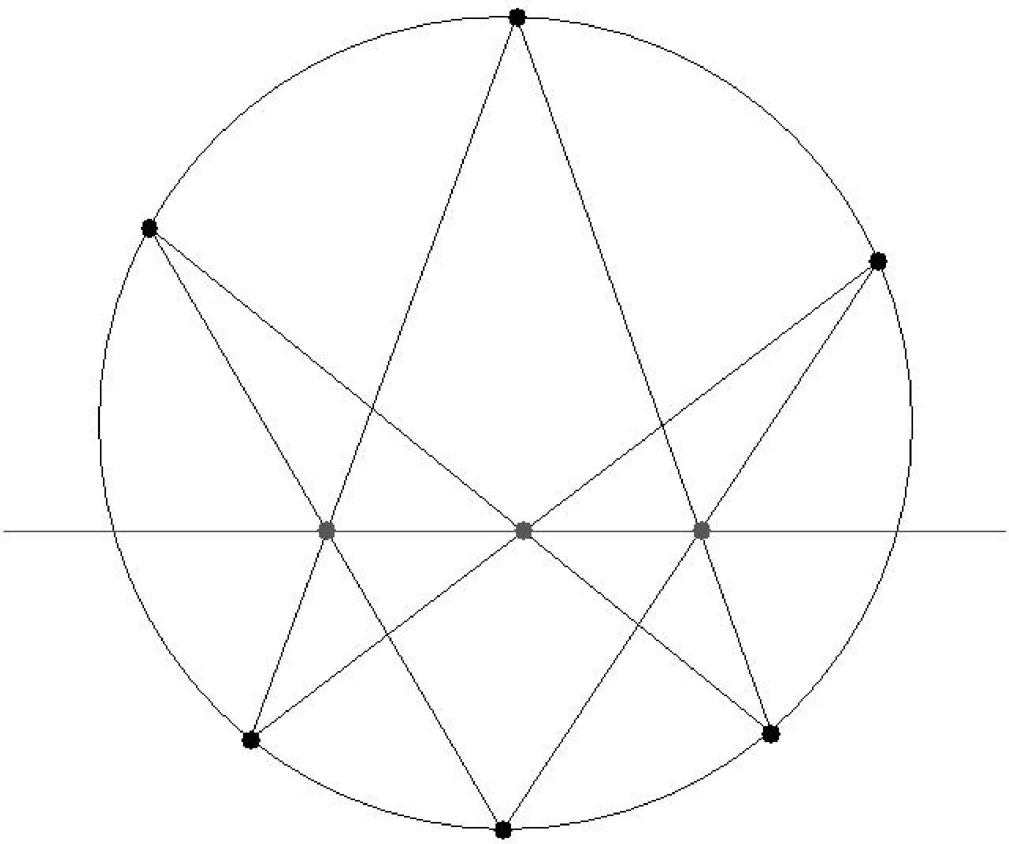
Jahrgang 21 Heft 66 Juni 2001

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Die einzigartige Mathe-Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
in der Bundesrepublik Deutschland,
1980 begründet von Martin Mettler
und seit 2001 herausgegeben vom Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern). Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

25. 08. 2001.

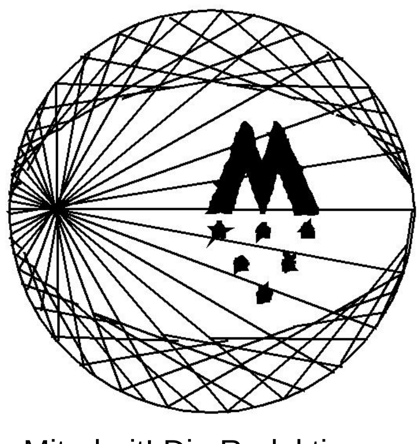
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg
Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: MMettler@t-online.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

Das Goldene M



Außer der Plakette mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten (z. B. Teilnahme an Wettbewerben).
Zur Ermittlung der Preisgewinner werden folgende Tätigkeiten bewertet: Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Ecke für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Zur Magie der Zahl 365

von Martin Mettler

Diese Zahl gibt die Anzahl der Tage in einem Nichtschaltjahr. Sicher ist sie bereits dadurch interessant. Es ist

$$365 = 7 \cdot 52 + 1\,,$$

d.h.: *Durch Division der Zahl* 365 *mit* 7 *erhalten wir den Rest* 1. Das Jahr hat also $365 : 7 = 52$ Wochen und 1 Tag.

Das ungemütliche an unserem Kalender ist die Tatsache, dass nicht alle Monate die gleiche Anzahl von Tagen haben. Wegen $52 : 4 = 13$ wäre der Kalender „sympatischer", wenn das Jahr in 13 Monate à 4 Wochen mit je 7 Tagen eingeteilt wäre. Es bliebe dann zwar 1 Tag übrig, doch den könnte man ja als Neujahrsfeiertag deklarieren, ohne ihn irgendeiner Woche zuzuordnen. Im Schaltjahr müssten wir dann eben 2 Tage Neujahr feiern. Doch Quatsch bei Seite. Kommen wir zu weiteren interessanten Entdeckungen an dieser Zahl.

Es ist $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$, d. h.: 365 *kann als Summe von Quadraten dreier aufeinander folgender Zahlen geschrieben werden.*

Ferner gilt $13^2 + 14^2 = 169 + 256 = 365$, d. h.: 365 *kann als Summe von Quadraten zweier aufeinander folgender Zahlen geschrieben werden.*

Man kann auch folgende Gleichung aufschreiben

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2\,.$$

Diese Gleichung gibt uns die Lösung der folgenden **Aufgabe:**

Suche 5 aufeinanderfolgende Zahlen so, dass die Summe der Quadrate der ersten drei gleich mit der Summe der Quadrate der letzten zwei Zahlen sei.

Die gesuchten Zahlen sind $10, 11, 12, 13, 14$. Wir wollen $(10, 11, 12, 13, 14)$ ein **5-Tupel** nennen.

Nun könnte man sich eine **weitere Frage** stellen: Gibt es auch noch weitere 5-Tupel aufeinander folgender Zahlen mit dieser Eigenschaft ?

Zur Lösung dieser Frage bezeichnen wir die erste der fünf Zahlen mit n.

Dann sind die weiteren 4 Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$ und $n+4$. Also lautet die Gleichung:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2\,.$$

Unter Anwendung der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erhalten wir:

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 \;\Leftrightarrow\; n^2 - 8n - 20 = 0\,.$$

Mit der Lösungsformel der quadratischen Gleichung erhalten wir

$$n_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - (-20)} = 4 \pm \sqrt{16+20} = 4 \pm \sqrt{36} = 4 \pm 6 \;\Rightarrow\; n_1 = 10 \text{ und } n_2 = -2\,.$$

In der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gibt es demnach nur die eine Lösung.

In der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gibt es außer dieser noch eine weitere Lösung, und zwar das 5 -Tupel (-2; -1; 0; 1; 2).

Anmerkung. Bezeichnet man die Mittlere der fünf aufeinander folgenden Zahlen mit x, so erhalten die fünf Zahlen eine „symmetrische" Darstellung

$$x-2; x-1; x; x+1; x+2$$

und die Gleichung ist:

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 12x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-12) = 0\,.$$

Die quadratische Gleichung hat nun die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 12$, was zu den gleichen 5-Tupeln als Lösungen der Aufgabe führt.

Die Gerade von Gauß

von Martin Mettler

Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, das kein Parallelogramm ist.
Die vier Geraden (AB), (BC), (CD), (DA) schneiden sich paarweise in $\binom{4}{2} = 6$ Punkten A, B, C, D, $E = AD \cap BC$ und $F = AB \cap DC$ (s. Abb. 1). Dann nennt man $ABCD$ ein **vollständiges Viereck**. Die Diagonalen des vollständigen Vierecks sind AC, BD und EF.

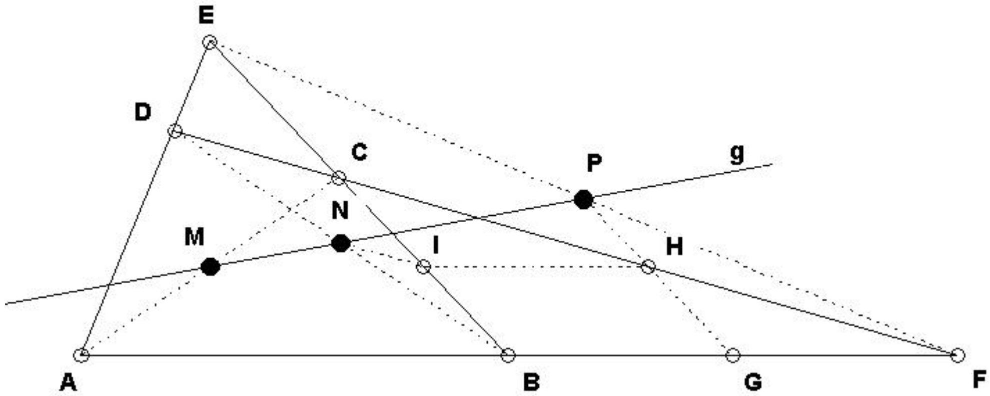


Abbildung 1

Es seien nun M, N, P die Mitten der Diagonalen und G, H, I die Mitten der Strecken BF, FC, BC.

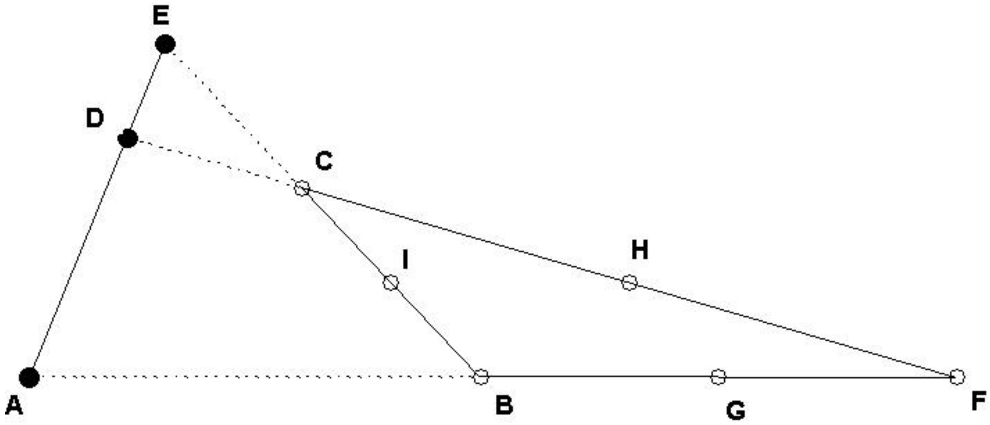


Abbildung 2: Selbst der große Gauß ruft Menelaos zu Hilfe, um seinen Satz zu beweisen.

Nach dem **Satz von Menelaos** (s. S.45-46 in dem Buch **„Vom Charme der ‚verblassten' Geometrie"** von M. Mettler) für das Dreieck BCF und die Gerade ADE (Abb. 2) ist:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EB}} = 1\,. \tag{1}$$

Nun ist ja MI Mittellinie im ΔABC und somit ist $MI \parallel AB$. IH ist Mittellinie im ΔBCF und somit ist $IH \parallel BF$.

Weil A, B und F auf einer Geraden liegen, folgt, dass die Punkte M, I und H auf einer Geraden liegen (Abb. 3).

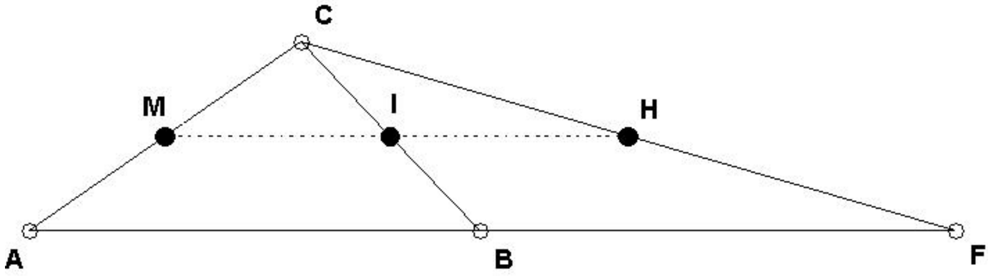


Abbildung 3: Auch die Mittellinieneigenschaft im Dreieck ist oft sehr fruchtbar.

Analog beweist man, dass sowohl N, I und G als auch P, H und G jeweils auf einer Geraden liegen.

Demnach liegen die Punkte M, N und P auf den Verlängerungen der Seiten des ΔGHI (Abb. 4). Wäre nun

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{MH}} \cdot \frac{\overline{PH}}{\overline{PG}} \cdot \frac{\overline{NG}}{\overline{NI}} = 1, \qquad (2)$$

so könnten wir nach Menelaos folgern, dass M, N und P auf einer Geraden liegen.

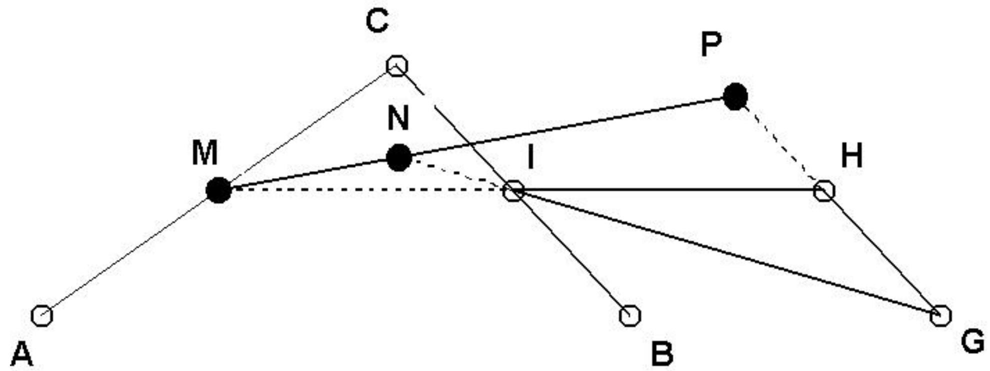


Abbildung 4

An Hand der Eigenschaft für die Mittellinie in den Dreiecken ΔAFC, ΔECF, ΔEBF, ΔDFB, ΔDCB und ΔABC erhalten wir (s. die Abb. 1-4):

$\overline{AF} = 2 \cdot \overline{MH}$, $\overline{EC} = 2 \cdot \overline{PH}$, $\overline{EB} = 2 \cdot \overline{PG}$, $\overline{DF} = 2 \cdot \overline{NG}$, $\overline{DC} = 2 \cdot \overline{NI}$ und $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{MI}$.

Setzen wir in (1) ein und kürzen jeweils durch 2, so erhalten wir die Gleichung (2).

Satz: *In jedem vollständigen Viereck liegen die Mitten der Diagonalen auf einer Geraden.*

Diese Gerade wird gaußsche Gerade genannt, **nach Carl Friedrich Gauß** (1777-1855), einem der berühmtesten Mathematiker aller Zeiten.

Anmerkung: Das Buch **„Vom Charme der ‚verblassten' Geometrie"** kann bei der MONOID-Redaktion oder bei Herrn Martin Mettler direkt (für die Anschriften s. S.40 in diesem Heft), zu einem Unkostenbeitrag von DM 15 (incl. Versand) bestellt werden. Der Ertrag vom Verkauf der Bücher geht zu Gunsten von MONOID.

Die Sierpinski-Prozesse (II)

von Hartwig Fuchs

3. Die Sierpinski-Funtion S_3 und Sierpinski-Prozesse P_3

Definition: Für eine natürliche Zahl z sei $S_3(z) = (z+3)^*$, kurz: $z \to (z+3)^*$.
Wendet man S_3 insgesamt L-mal ($L \geq 1$) auf z an, so spricht man von einem Sierpinski-Prozess P_3 der Länge L mit Startzahl z; kurz:

$$z \xrightarrow{(L)} \dots$$

Beispiel: $2 \to 5 \to 8 \to 11 \to 41 \to 44 \to 74 \to 77 \to 8$,
kurz: $2 \xrightarrow{(2)} 8 \xrightarrow{(6)} 8$. Der Prozess $8 \xrightarrow{(6)} 8$ heißt Schleife.

Aufgabe 748.
a) Bestimme die Schleife des P_3-Prozesses mit der Startzahl 2000.
b) Bestimme x sowie die Schleife $z \xrightarrow{(y)} z$ des P_3-Prozesses $2001 \xrightarrow{(x)} z \xrightarrow{(y)} z$.
c) Überprüfe, ob gilt: $2004 \xrightarrow{(x-1)} z \xrightarrow{(y)} z$.

Man hat bewiesen, dass jeder P_3-Prozess bei hinreichender Länge in eine Schleife führt. An Beispielen soll gezeigt werden, wie ein solcher Beweis aussehen kann.

Beispiele:
$99998 \xrightarrow{(7)} 1001 \xrightarrow{(5)} 107 \to 11$
$999999 \xrightarrow{(12)} 10017 \to 2001 \xrightarrow{(5)} 108 \xrightarrow{(6)} 27$

Die Zwischenergebnisse dieser beiden Prozesse weisen jeweils eine immer geringer werdende Stellenzahl auf - bis sie schließlich nur noch zweistellig sind.
Dies ist kein Zufall, wie man an dem folgenden allgemeineren **Beispiel** erkennt.

Jeder P_3-Prozess mit einer der n-ziffrigen Startzahlen

$$z = z_n\, z_{n-1} \dots z_2\, z_1 \text{ mit } z_n = 4,\ z_1 = 2$$

führt bei hinreichender Länge auf eine höchstens zweiziffrige Zahl.

Zunächst gilt: $4\, z_{n-1} \dots z_2\, 2 \to 5\, z_2 \dots z_{n-1}\, 4 \to 7\, z_{n-1} \dots z_2\, 5 \to 8 z_2 \dots z_{n-1}\, 7$,
kurz: $4\, z_{n-1} \dots z_2\, 2 \xrightarrow{(3)} 8\, z_2 \dots z_{n-1}\, 7$.

1. **Fall:** $z_2 \dots z_{n-1} < 99 \dots 9$ ($n-2$ Ziffern 9).
   Dann ist $8\, z_2 \dots z_{n-1}\, 7 \to z^*_{n-1} \dots z^*_2\, 8$ wegen
   $8\, z_2 \dots z_{n-1} 7 + 3 = 8 z^*_2 \dots z^*_{n-1}\, 0$ mit $z^*_2 \dots z^*_{n-1} = z_2 \dots z_{n-1} + 1$.
   Offenbar hat $z^*_{n-1} \dots z^*_2\, 8$ höchstens $(n-1)$ Stellen.
2. **Fall:** $z_2 \dots z_{n-1} = 99 \dots 9$ ($n-2$ Ziffern 9).
   Dann ist $8\, z_2 \dots z_{n-1}\, 7 \to 9$.

Wir sind also mit diesen P_3-Prozessen von höchstens der Länge 4 jeweils zu einer Zahl z' gelangt, die mindestens eine Stelle weniger als die Startzahl z besitzt. Von der Startzahl z' gelangt man nun ganz entsprechend zu einer Zahl z'' mit höchstens $n-2$

Ziffern; usw. bis man schließlich auf eine 2-stellige Zahl stößt, was gezeigt werden sollte.

Aufgabe 749.
Zeige: Jeder P_3-Prozess mit 1- oder 2-stelliger Startzahl führt in eine Schleife.

Durch die Lösung von Aufgabe 749 ist für die P_3-Prozesse mit den Startzahlen

$$z = z_n z_{n-1} \ldots z_2 z_1, \quad z_n = 4, z_1 = 2$$

gezeigt:

$$\text{sie führen alle bei hinreichender Länge in eine Schleife.} \tag{$*$}$$

Zugleich ist damit ein Muster gegeben, nach dem man den Beweis von $(*)$ für eine beliebige Startzahl $z = z_n z_{n-1} \ldots z_2 z_1$, z_n beliebig aus $\{1, 2, \ldots, 9\}$ und z_1 beliebig aus $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, führen kann.

4. Die S_4, S_5- Sierpinski-Funktionen und die P_4, P_5- Sierpinski-Prozesse

Die Definitionen von S_4, S_5, P_4 und P_5 sind nach den bisherigen Betrachtungen klar. Über P_4-Prozesse sei nur so viel gesagt: Jeder P_4-Prozess führt in eine Schleife.

Als Anregung für eigene Untersuchungen:

(a) Wie viele verschiedene Schleifen gibt es?

(b) Wie heißen die Schleifen - falls es nur endlich viele verschiedene gibt?

Aufgabe 750.
Zeige: jeder P_4-Prozess mit 1-ziffriger Startzahl führt in die Schleife $1 \xrightarrow{(L)} 1$.
Wie groß ist L ?

Die ersten von Sierpinski untersuchten Objekte aus dem Bereich der später nach ihm benannten Funktionen S_n und Prozessen P_n, $n \geq 1$, waren S_5 und P_5 - und sie hat er wohl mit Bedacht als Einstieg gewählt, weil sie eine Zwischenstellung zwischen den „zahmen" und den „wilden" S_n und P_n einnehmen.

Er bewies nämlich:

(a) Jeder P_5-Prozess führt in eine Schleife - und damit sind S_5, P_5 vom „zahmen" Typ - jedoch

(b) es gibt unendlich viele verschiedene Schleifen (was bei P_1, P_2 und P_3 nicht der Fall ist); und damit gehören S_5, P_5 auch zu den „wilden" Sierpinski-Funktionen/Prozessen.

Wir listen nun einige auffällige Eigenschaften von P_5-Prozessen auf.

Schon der P_5-Prozess mit der Startzahl 1 spielt eine besondere Rolle. Für ihn gilt:
Er verläuft vollständig in der folgenden Schleife:

$$1 \to 6 \to 11 \xrightarrow{(205)} 1 \tag{A}$$

Weiter: der P_5-Prozess mit der Anfangszahl 2 führt in die Schleife (A). Zunächst ergibt sich ein **Vorlauf** der Länge 189 von 2 nach 11, d. h. $2 \xrightarrow{(189)} 11$.

Weil nun 11 ein Element der Schleife (A) ist, befindet sich der P_5-Prozess ab 11 stets in (A):

$$2 \stackrel{(189)}{\longrightarrow} 11 \stackrel{(207)}{\longrightarrow} 11.$$

Überhaupt gilt:
Jeder P_5-Prozess mit einer Starzahl z, $1 \leq z \leq 113$, führt in die Schleife (A) !

Aufgabe C1. (für den Computer-Fan)
Untersuche, ob der P_5-Prozess mit der Startzahl 114 in die Schleife (A) gelangt. Wenn ja, welche Länge hat der Vorlauf ?

Nach dem bisher Gesagten könnte man vermuten, dass für jede Startzahl $z \geq 1$ der zugehörige P_5-Prozess in die Schleife (A) gelangt. Dem ist aber nicht so.
Für die Startzahl 1011 ergibt sich ein P_5-Prozess, der vollständig (ohne Vorlauf) in der folgenden Schleife verläuft

$$1011 \stackrel{(36)}{\longrightarrow} 1011. \qquad (B)$$

Zudem: analog (B) muss es P_5-Prozesse geben, deren Schleifenlängen jede vorgegebene Zahl übertreffen, - vgl.

Aufgabe C2. (für den Computer-Fan)
Berechne die Schleifenlängen L für P_5-Prozesse mit den Anfangszahlen
100101, 10001001, 1000010001.
Gibt es einen Zusammenhang zwischen diesen Startzahlen z und der zugehörigen Schleifenlänge L ?

5. Die $\mathbf{S_6}$, $\mathbf{S_7}$, ... $\mathbf{S_{11}}$- Funktionen und die $\mathbf{P_6}$, $\mathbf{P_7}$, ... $\mathbf{P_{11}}$- Prozesse

Von den Sierpinski-Prozessen des Typs P_7, P_8, P_9, P_{11} weiß man, dass sie alle jeweils in Schleifen führen und dass es davon nur endlich viele verschiedene gibt - diese Prozesse betrachten wir daher als **„zahm“**.
Wie es diesbezüglich mit P_6-Prozessen steht, ist H. F. nicht bekannt - hier haben unsere Leser ein weites Betätigungsfeld, um etwas darüber herauszufinden.

Nun zu den **$\mathbf{P_{10}}$-Prozessen**. Mit ihnen treffen wir erstmals auf **„wilde“** Prozesse.
Sehen wir uns einmal den P_{10}-Prozess mit der Startzahl 1 an:

$$1 \stackrel{(10)}{\longrightarrow} 56 \stackrel{(100)}{\longrightarrow} 9111 \stackrel{(1000)}{\longrightarrow} \cdots \to \ldots \qquad (C)$$

Wie lange man auch den Prozess (C) fortsetzt, es findet sich keine Schleife (der Leser möge versuchen, dies zu beweisen); d.h. die in (C) als Zwischenergebnisse auftretenden Zahlen werden irgendwann über jede noch so große Schranke hinauswachsen.

Man kann nun mit (C) leicht unendlich viele Startzahlen z angeben, für die der zugehörige P_{10}-Prozess keine Schleife bildet:
wähle z. B. $z = 10^n - 10$, $n = 2, 3, \ldots$ oder $z = 10^{n+2} - 35 \cdot 10^n - 10$; dann ist
$10^n - 10 \to \big((10^n - 10) + 10\big)^* = 100\ldots0^* = 1$ sowie
$10^{n+2} - 35 \cdot 10^n - 10 \to 56$, und beide Mal ist man in den Prozess (C) gelangt.

Wenn man nun für Startzahlen z, $z = 2, 3, 4, \ldots, 1000$ die zugehörigen P_{10}-Prozesse (mit Hilfe eines Computers) untersucht, dann wird man in keinem Falle eine Schleife finden !
Man wird also vermuten, dass jeder P_{10}-Prozess ohne Schleife ist. Falsch !

Hätte man nämlich nur noch ein wenig weiter probiert, dann wäre bei der Startzahl 1011 etwas völlig Unerwartetes passiert. Man stößt auf den folgenden Prozess:

$$1011 \to 1201 \to 1121 \xrightarrow{(16)} 1011 \qquad (B*)$$

d.h. der Prozess $(B*)$ ist eine Schleife der Länge $L = 18$.
Mit Hilfe von $(B*)$ kann man nun aus der Bedingung

$$z \to (z+10)^* = 1011 \text{ oder } z \to (z+10)^* = 1201 \text{ oder } \dots$$

leicht unendlich viele Startzahlen bestimmen, für die der zugehörige P_{10}-Prozess in eine Schleife führt. Dies gilt z.B. für $z = 1101 \cdot 10^n - 10$, $n = 1, 2, 3, \dots$ oder für $z = 1021 \cdot 10^n - 10$, $n = 1, 2, 3, \dots$, wegen

$$1101 \cdot 10^n - 10 \to 1011 \text{ bzw. } 1021 \cdot 10^n - 10 \to 1201.$$

Da 1011 und 1201 in der Schleife $(B*)$ sind, hat man für $n = 1, 2, 3, \dots$ jeweils einen Prozess mit der Schleife $(B*)$.
Warum haben wir obigen Prozess $(B*)$ genannt ? Wenn wir $(B*)$ kurz so schreiben:

$$P_{10}: \ 1011 \xrightarrow{(18)} 1011, \qquad (B*)$$

dann wird die „Verwandtschaft" von $(B*)$ mit dem früher untersuchten P_5-Prozess (B) sofort auffallen: es war

$$P_5: \ 1011 \xrightarrow{(36)} 1011. \qquad (B)$$

Diese Beobachtung ist Veranlassung für

Aufgabe 751. Es seien $z = 100101$, $z' = 10001001$, $z'' = 1000010001$.

a) Vergleiche die Prozesse P_5, P_{10}, P_{50}, P_{100} für die Startzahl z.

b) Vergleiche die Prozesse P_5, P_{10}, P_{100}, P_{1000} für die Startzahl z'.

c) Es ist für P_5: $z'' \xrightarrow{(36000)} z''$ (mit Computer nachprüfen !).

   Wie lang sind die Schleifen bei den Prozessen P_{100}, P_{1000}, P_{10000} für die Startzahl z'' ?

d) Vergleiche die Prozesse P_{10}, P_{100}, P_{1000} für die Startzahl z' (z'').

Errata

Leider sind in MONOID 65 durch das Ausdrucken der Druckvorlage mit einem anderen Rechner einige Fehler aufgetreten:

- Auf Seite 11 sollte in der Lösung zu Aufgabe 2 in der dritten Zeile $k \in \mathbb{N}$ stehen.
- Auf den Seiten 19, 23 und 24 standen an einigen Stellen E anstatt den beabsichtigten Multiplikationspunkten.
- Auf Seite 7 unter Errata muß es heißen:

  II. S. 31. In 5.5 müssen die Tilden umgedreht werden, das korrekte Symbol lautet $\simeq$.

Außerdem haben wir auf Seite 35 in der Adresse
`http://www.informatik.uni-mainz.de/~astra/schueler/dilemma.html`
die Tilde vergessen.

Wir bitten, diese Fehler zu entschuldigen.

$$a^2 + b^2 = c^2,\ a^3 + b^3 = c^3,\ \ldots$$

die spannende Geschichte des Fermat'schen Satzes (III)

basierend auf dem gleichnamigen Vortrag vom 19. Mai 2000 im Rahmen der Aktion „Unterm Strich - Die Lange Nacht der Mathematik" an der Fachhochschule Karlsruhe - Hochschule für Technik

von Prof. Dr. Klaus Dürrschnabel

Anschrift des Autors: Prof. Dr. Klaus Dürrschnabel, Fachhochschule Karlsruhe - Hochschule für Technik, Moltkestraße 30, 76133 Karlsruhe

Teil 3: Der Beweis

Nach dem Niederschlag der fehlerhaften Beweisversuche von Lamé und Cauchy herrschte 60 Jahre Ruhe um die Fermat'sche Vermutung, bis im Jahr 1908 ein spektakulärer Preis ausgesetzt wurde. In Darmstadt lebte ein Industrieller namens Paul Wolfskehl (1856-1906). Dieser studierte Medizin und Mathematik um anschließend in das Familienimperium einzusteigen. Er verliebte sich in eine unbekannte Frau, doch seine Angebetete gab ihm einen Korb. Daraufhin beschloss Wolfskehl, sich das Leben zu nehmen. Er plante seinen Suizid an einem gewissen Termin um Mitternacht. Da Paul Wolfskehl ein sehr gewissenhafter Mensch war, regelte er zuvor alle geschäftlichen Angelegenheiten, formulierte sein Testament und schrieb Abschiedsbriefe an seine Freunde. Einige Stunden vor dem geplanten Mitternachtstermin war Wolfskehl mit allen Aktivitäten fertig. Um sich die Zeit zu vertreiben ging er in die Bibliothek. Dort kam ihm der Aufsatz von Ernst Kummer in die Hände, in welchem dieser den Bewiesansatz von Lamé und Cauchy zunichte machte. Bei der Durcharbeit entdeckte Wolfskehl eine Lücke in Kummers Argumentation. Gebannt der Tatsache, ob damit der Aufsatz Kummers überhaupt noch haltbar ist, versuchte Wolfskehl die Lücke zu schließen bzw. die Unzulässigkeit des Schlusses nachzuweisen. Schließlich gelang es Wolfskehl, die Lücke zu überbrücken und damit Kummers Argumentation zu manifestieren. Zu diesem Zeitpunkt graute bereits der Morgen, d.h. Mitternacht und damit der festgesetzte Selbstmordtermin war längst verstrichen. Wolfskehl war aber so stolz auf seine erbrachte Leistung - er hatte immerhin den unvollständigen Gedankengang eines der bedeutendsten Mathematiker ergänzt -, dass er seinen Lebenswillen wiedererlangte. Er zeriss seine Abschiedsbriefe und schrieb sein Testament um.

Nach dem Tode Wolfskehls wurde unter Bestürzung seiner Familie eröffnet, dass Paul Wolfskehl aus seinem Vermögen 100.000 Goldmark - nach heutiger Kaufkraft ca. 2,5

Millionen DM - für denjenigen als Preis aussetzte, der als erster die Fermat'sche Vermutung beweisen könne. Als Grund für dieses sonderbare Testament führte Wolfskehl an, dass dieser Sachverhalt ihm das Leben gerettet habe. Als Treuhänder hatte Wolfskehl die Göttinger Königliche Gesellschaft der Wissenschaften auserkoren. Diese schrieb 1908 in allen mathematischen Zeitschriften den Wolfskehlpreis aus. Letzter möglicher Abgabetermin sollte der 13. September 2007 sein.

Die ernsthaften Mathematiker zeigten trotz der Ausschreibung dieses Preises der Fermat'schen Vermutung weiterhin die kalte Schulter. Dafür stürzten sich umso mehr Hobbymathematiker, sogenannte Fermatisten, auf das Problem, zumal anfangs des 20. Jahrhunderts Mathematikrätsel sehr beliebt waren. So erreichten bereits im Jahr der Ausschreibung die Königliche Akademie 621 Lösungsvorschläge - natürlich alle falsch.

Womit beschäftigten sich zu dieser Zeit die Profimathematiker? Diese wollten die Mathematik auf einige wenige, offensichtlich wahre und widerspruchsfreie Grundtatsachen, auf sogenannte Axiome stellen. Daraus sollten alle bekannten Ergebnisse der Mathematik hergeleitet werden. In Mathematikerkreisen bekannt wurde dieses Thema durch den Namen „Hilbert'sches Programm", benannt nach dem deutschen Mathematiker David Hilbert (1862-1943), der sich besonders um die Bildung einer Mathematik bemühte, die absolut widerspruchsfrei und über alle Zweifel erhaben ist.

Im Jahr 1902 erschütterte der Engländer Bertrand Russel (1876-1970) diese Bemühungen. Es stellte einen Widerspruch auf, der sich nicht lösen ließ. Am einfachsten verdeutlicht man sich diesen Widerspruch an folgendem Beispiel:

In einem kleinen Dorf gibt es einen Barbier, der in seinem Geschäft folgenden Spruch aufgehängt hatte:

Ich rasiere genau diejenigen,
die sich nicht selbst rasieren.

Eines Tages fragt der kleine Sohn: „Papa, rasierst du dich eigentlich selbst?" Das Problem ist, dass - egal was der Barbier antwortet - sich immer ein Widerspruch ergibt.

Nehmen wir einmal an, der Vater antwortet: „Ja, ich rasiere mich selbst." Gemäß dem Schild rasiert aber der Vater genau diejenigen, die sich nicht selbst rasieren. Da der Vater sich aber selbst rasiert und gemäß dem Schild er nur diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren, kann demzufolge er sich nicht selbst rasieren. Wir haben einen Widerspruch.

Nehmen wir jetzt an, der Vater antwortet: „Nein, ich rasiere mich nicht selbst." Auf dem Schild steht immer noch, dass der Vater genau die rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Da der Vater sich nicht selbst rasiert, muss er also gemäß dem Schild sich doch selbst rasieren, und wir haben wieder einen Widerspruch.

Dieser unlösbare Widerspruch ist bekannt unter dem Namen „Russell'sches Paradoxon". Hintergrund ist, dass es keine Menge geben kann, die alle Mengen enthält.

In der Folgezeit arbeiteten die Mathematiker - allen voran Bertrand Russel - an der Suche, durch neue, zusätzliche Axiome derartige Paradoxa unmöglich zu machen. Es wurden diverse Fortschritte in dieser Richtung gemacht, bis 1931 Kurt Gödel (1906-1978) endgültig allen Bemühungen, eine vollständige und widerspruchsfreie Mathematik zu schaffen, den Todesstoß versetzte. Er fand die berühmten Unvollständigkeitssätze:

1. Unvollständigkeitssatz: Wenn die axiomatische Mengentheorie widerspruchsfrei ist, gibt es Sätze, die weder bewiesen noch widerlegt werden können.

2. Unvollständigkeitssatz: Es gibt kein konstruktives Verfahren, mit dem zu beweisen wäre, dass die axiomatische Theorie widerspruchsfrei ist.

Aus dem zweiten Unvollständigkeitssatz folgt sofort, dass das Hilbert'sche Programm, die ganze Mathematik auf wenige, klare und widerspruchsfreie Axiome aufzubauen, zum Scheitern verurteilt ist. Aus dem ersten Unvollständigkeitssatz folgt weiter, dass es durchaus denkbar ist, dass die Fermat'sche Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden kann.

Wie war also der Stand nach dieser Erkenntnis? Kummer hatte die Fermat'sche Vermutung bis zum Exponenten $n = 100$ erledigt. Aufgrund der Kummerschen Methode und des Siegeszugs des Computers, der dem Menschen die Routinerechenarbeit abnahm, konnte diese Grenze nach und nach über 500, 1.000, 10.000 bis letztendlich zu 4 Millionen zu Beginn der 90er Jahre hochgeschraubt werden. Leider blieb trotzdem der Zweifel, ob die Fermat'sche Vermutung korrekt ist. Dass diese Zweifel berechtigt waren, zeigt folgendes Beispiel, welches als Euler'sche Vermutung bekannt wurde: Es wurde bis in die 80er Jahre vermutet, dass die Gleichung

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

ganzzahlig nicht lösbar ist. Diese der Fermat'schen Vermutung nicht unähnliche Aussage wurde lange als wahr angesehen, bis sie 1988 durch Naom Elkies (geb. 1966) mit dem Gegenbeispiel

$$2.682.440^4 + 15.365.639^4 + 18.796.760^4 = 20.615.673^4$$

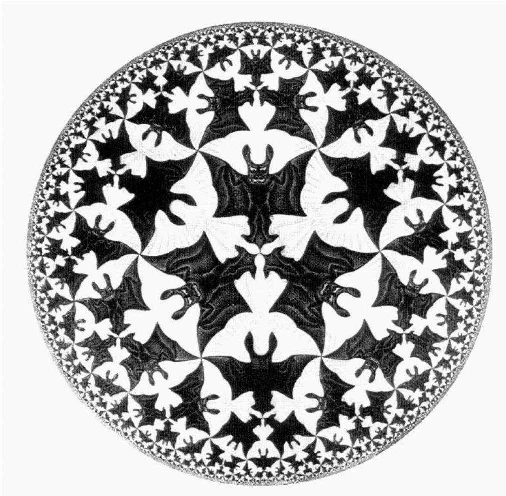
widerlegt wurde.

1963 war also der Stand, dass allgemein vermutet wurde, dass die Fermat'sche Vermutung stimmt. Sie war ja auch bereits für etliche Exponenten bewiesen, aber eben noch nicht für alle. Dies war der Zeitpunkt, als der damals 10-jährige Andrew Wiles (geb. 1953) in Cambridge in der Stadtbibiothek erstmals mit dem Problem der Fermat'schen Vermutung in Berührung kam. Er war bereits in diesem Alter von dem Problem so sehr gebannt, dass er hoffte, diesen Sachverhalt irgendwann einmal beweisen zu können. Wiles studierte in Cambridge Mathematik und promovierte in den Jahren 1975-1978 mit einem Dissertationsthema aus dem Bereich der elliptischen Kurven. Hierbei handelt es sich um Gleichungen der Form

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

wobei a, b, c ganze Zahlen sind. Gefragt wird nach der Anzahl ganzzahliger Lösungen dieser Gleichung. Da diese Frage im Bereich aller Zahlen schwer zu beantworten ist, beschäftigt man sich mit dieser Frage im Bereich der Restklassen $\mathbb{Z}_k$. Wenn man diese Frage für eine spezielle elliptische Gleichung für alle Restklassen $\mathbb{Z}_k$ beginnend mit $k = 1$ beantwortet, kommt man zu der zu dieser Gleichung gehörenden sogenannten L-Reihe.

Schon etwas früher, nämlich in den Nachkriegsjahren, beschäftigten sich am anderen Ende der Welt in Japan die zwei Mathematiker Yutaka Taniyama (1927-1958) und Goro Shimura (geb. 1930) mit Modulformen. Modulformen sind höchst symmetrische Objekte in der hyperbolischen Ebene, die von dem Künstler Maurits Escher z.B. in seinem berühmten Bild mit den Fledermäusen und Engeln dargestellt wurden. Die Figur ist zusammengesetzt aus lauter Fledermäusen und Engeln, die aber aufgrund der sonderbaren Metrik vollkommen deckungsgleich sind. Alle Modulformen sind aus den gleichen Grundobjekten M_1, M_2, M_3, $\ldots$ aufgebaut. Wenn man zu jedem dieser Grundelemente den Anteil an der Gesamtmodulform nimmt, gelangt man zu der zur entsprechenden Modulform gehörenden M-Reihe. Durch Nachrechnen verschiedenster Beispiele kamen diese beiden Mathematiker Taniyama und Shimura zu der Vermutung, dass zu jeder M-Reihe einer Modulform die identische L-Reihe einer elliptischen Kurve gehört. Sie formulierten daher im Jahr 1955 ihre Vermutung, die in der Literatur auch mit dem Namen Weil verbunden ist, da dieser diese Vermutung im abendländischen Raum bekannt gemacht hat:



Taniyama-Shimura(-Weil)-Vermutung: Jede M-Reihe einer Modulform stimmt mit der L-Reihe einer elliptischen Kurve überein.

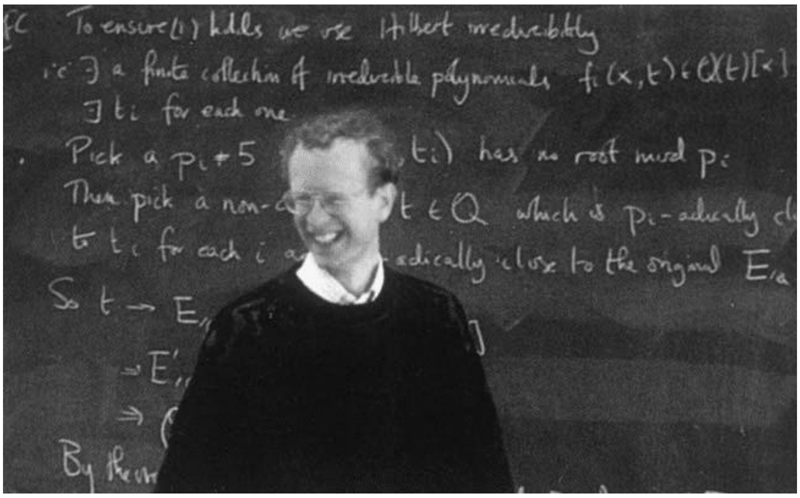
Falls dieser Sachverhalt stimmt, hat dies weitreichende Konsequenzen. Die modulare Welt und die Welt der elliptischen Kurven würden korrespondieren. Hätte man ein Problem in der einen Welt gelöst, könnte man das Ergebnis eins zu eins in die andere Welt übertragen.

Taniyama, einer dieser beiden begnadeten Mathematiker, verübte übrigens im Jahr 1958 aus ungeklärten Gründen Selbstmord, worauf der zweite es sich nun erst recht zur Aufgabe machte, dieser Vermutung nachzugehen.

Im Herbst 1984 wurde dann in Oberwolfach ein sensationeller Vortrag gehalten. Der deutsche Mathematiker Gerhard Frey konnte nachweisen, dass bei Korrektheit der Taniyama-Shimura-Vermutung automatisch auch der Fermat'sche Satz bewiesen wäre. Eine kleine Lücke in der Argumentation von Frey konnte 1986 von Ken Ribet geschlossen werden.

Dies war die Chance für Andrew Wiles, der inzwischen Professor an der Princeton University in den USA war, seinen Jugendtraum zu verwirklichen. Er musste die Taniyama-Shimura-Vermutung beweisen und hatte damit automatisch auch die Fermat'sche Vermutung erledigt. Wiles arbeitete sich ein Jahr in die für ihn neue Welt der Modulformen ein und wählte dann einen speziellen Ansatz der vollständigen Induktion. Er zeigte im Induktionsanfang, dass das erste Glied M_1 jeder Modulform stets mit dem ersten Gliedern L_1 einer elliptischen Kurve übereinstimmt. Dieser Vorgang dauerte zwei Jahre. Der Induktionsschritt war bedeutend schwieriger. Er musste zeigen, dass aus der Gleichheit der entsprechenden Reihenglieder $M_k = L_k$ automatisch auch die Gleichheit noch für die Nachfolgeglieder, also $M_{k+1} = L_{k+1}$ gilt. Für diesen Schritt benötigte Wiles vier weitere Jahre. Nach insgesamt sieben Jahren Arbeit in völliger Zurückgezogenheit - nur seine Frau wusste, woran er arbeitete - war Wiles am Ziel. In der Endphase zog Wiles einen Kollegen ins Vertrauen. Zusammen mit Nick Katz ging er die kritischen Teile seines Beweises durch.

Am 23. Juni 1993 trug Andrew Wiles am Isaac-Newton-Institut in Cambridge den Beweis vor. Einige unklare Gerüchte waren bereits vorher im Umlauf, so dass während des Vortrags auch Fotos gemacht wurden. Der Beweis sorgte nicht nur in Mathematikerkreisen für Aufsehen. Am Folgetag erschien auf der Titelseite der New York Times, dass das 350 Jahre alte Problem der Fermat'schen Vermutung endlich gelöst sei, also dass aus der Fermat'schen Vermutung endlich der Fermat'sche Satz wurde.



Nach dem Vortrag wurde der Beweis von Wiles bei der mathematischen Zeitschrift „Inventiones Mathematicae" eingereicht. Dazu muss man wissen, dass Beweise erst dann allgemein anerkannt werden können, wenn sie in einer mathematischen Zeitschrift veröffentlicht sind. Bevor aber ein Artikel veröffentlicht wird, wird dieser durch Fachkollegen begutachtet. Diese Fachkollegen beurteilen,

- ob die Ergebnisse neu sind;
- ob die Ergebnisse richtig sind;
- ob die Beweise richtig sind;
- ob die Arbeit gut aufgeschrieben ist;
- ob die Ergebnisse so interessant sind, dass sie eine Veröffentlichung in dieser Zeitschrift rechtfertigen.

Im Fall Wiles wurden sechs Gutachter benannt. Einer davon war Nick Katz, derjenige, mit dem Wiles die kritischen Teile im Vorfeld durchgegangen war. Ausgerechnet dieser Nick Katz fand Ende August eine Lücke in Wiles' Argumentationsgang, pikanterweise genau in dem Bereich, den er schon einmal geprüft hatte. Damit begann für Andrew Wiles ein Albtraum. Er versuchte in der Folgezeit in Alleinarbeit diese Lücke zu füllen. Die mathematische Öffentlichkeit wurde aber ungeduldig, so dass sich Wiles genötigt sah, am 4. Dezember eine E-Mail zu verschicken, in der er um Geduld bat.

Am 1. April 1994 sorgte dann eine weitere E-Mail für Furore. Angeblich sollte Naom Elkies, der Finder des Gegenbeispiels der Eulerschen Vermutung, auch ein Gegenbeispiel zu Fermat gefunden haben - ein Aprilscherz, wie sich im Nachhinein herausstellte.

Erst ein weiteres halbes Jahr später - Wiles wollte bereits aufgeben und den fehlerhaften Beweis offen legen - am 19. September 1994 gelang es Wiles, die Lücke zu schließen. Am 25. Oktober wurde der jetzt endgültig korrekte Beweis, ein Artikel von etwa 200 Seiten anspruchsvollster Mathematik, veröffentlicht.

Dieses Mal hielt die Argumentation allen Prüfungen stand, so dass Wiles drei Jahre später, am 27. Juni 1997 in Göttingen den Wolfskehlpreis entgegennehmen konnte. Der Preis war durch zwei Geldentwertungen nur noch mit 70.000 DM dotiert. Bei der Preisverleihung sagte Heinz Wagner, der Vorsitzende des Wolfskehlkomitees, dass der Wolfskehlpreis wichtiger als alle Nobelpreise sei. Der Nobelpreis werde jedes Jahr verliehen, der Wolfskehlpreis hingegen habe 90 Jahre auf seine Verleihung geharrt.

Ortskurven im Dreieck (I)

Eine Anwendung zur dynamischen Geometrie am Personalcomputer

von Ingmar Rubin

Zusammenfassung

Im Zeitalter von PC und Internet entstehen völlig neue Methoden, um mathematische Aufgabenstellungen zu bearbeiten. Während für die klassische Geometrie noch Zirkel und Lineal als Handwerkszeug benutzt wurden, können heute mit Hilfe der *dynamischen Geometrieprogramme* Figuren am PC konstruiert werden und anschließend beliebig verändert werden. Insbesondere ist es möglich bestimmte Schnittpunkte innerhalb oder außerhalb der Figur zu verfolgen, d.h. ihre Ortskurve aufzuzeichnen. Im Internet findet man zahlreiche Softwarequellen. Unter `www.matheraetsel.de` habe ich einige Programme aufgezählt z.B.

- **Cinderella**, Klett-Schulbuchverlag, Preis: 99.-DM
  http://www.klett-verlag.de/heureka/lernsoftware/index.html
- **Constri**, W.Hupfeld, Shareware, 45.-DM,
  http://www.hupfeld-software.de/download.htm
- **EUKLID**, R.Mechling, Shareware, 56.- DM,
  http://www.mechling.de/
- **GEONET**, UNI-Bayreuth, kostenfrei
  http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/
- **Zirkel und Lineal**, R.Grohtmann, kostenfrei
  http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/zul.html

Wir werden die folgenden Aufgabenstellungen mit dem Programm EUKLID lösen. Der angegebene Konstruktionstext dürfte in ähnlicher Form auch für die anderen Programme gültig sein. Der konstruktiven Lösung wird eine analytische Betrachtung nachgestellt, welche Kenntnisse in der analytischen Geometrie vorausetzen.

Aufgabenstellung

Um die Möglichkeiten der dynamischen Geometrie zu verdeutlichen, wollen wir die folgende Aufgabenstellung bearbeiten.

Hamburger Schülerzirkel, Problem des Monats Juni 1997

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Auf welchen Linien bewegen sich:

1. der Schwerpunkt S
2. der Höhenschnittpunkt H
3. der Inkreismittelpunkt I

wenn bei fest gehaltenen Punkten A und B der Punkt C auf dem Umkreis läuft?
Als Lösungsansatz sei der Beitrag *Der feuerbachsche Kreis* von Herrn Mettler aus MONOID Heft 57/58 empfohlen. Dort werden wichtige Begriffe aus der Dreiecksgeometrie anschaulich dargestellt. Speziell wird die Konstruktion der oben genannten Schnittpunkte gezeigt.

Ortslinie vom Schwerpunkt

Konstruktion der Ortslinie mit EUKLID

Die drei Seitenhalbierenden in einem $\triangle ABC$ schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt - dem Schwerpunkt des Dreiecks. Mit Hilfe von EUKLID soll das Dreieck, sein Umkreis k und der Schwerpunkt S konstruiert werden. Die Konstruktionsschritte lauten dazu:

```
M   ist ein freier Basispunkt
KP  ist ein freier Basispunkt
k   ist ein Kreis um M durch KP
A   ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
C   ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
B   ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
s1  ist die Strecke   [ A ; C ]
s2  ist die Strecke   [ C ; B ]
s3  ist die Strecke   [ B ; A ]
P1  ist der Mittelpunkt der Strecke [ A ; C ]
P2  ist der Mittelpunkt der Strecke [ C ; B ]
P3  ist der Mittelpunkt der Strecke [ A ; B ]
s4  ist die Strecke   [ A ; P2 ]
s5  ist die Strecke   [ P1 ; B ]
s6  ist die Strecke   [ C ; P3 ]
S   ist der Schnittpunkt der Linien s5 und s6
OL1 ist eine Ortslinie des Punktes S, wenn C gezogen wird
```

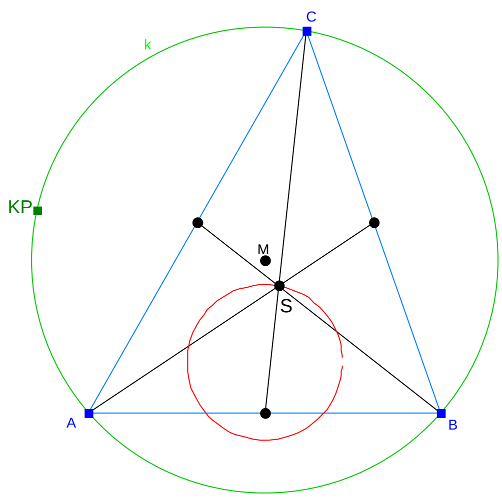


Abbildung 1: Ortskurve vom Schwerpunkt mit dem Programm EUKLID konstruiert

Parameterdarstellung der Ortskurve von S

Wir legen den Mittelpunkt vom Umkreis k in den Koordinatenursprung $O(0,0)$. Die Koordinaten der Punkte A, B, C bezeichnen wir mit:

$$A(x_a, y_a), \quad B(x_b, y_b), \quad C(x_c, y_c) \tag{1}$$

Punkt $P_1(x_1, y_1)$ halbiere die Seite $a = \overline{BC}$. Seine Koordinaten lauten:

$$x_1 = \frac{x_b + x_c}{2}, \qquad y_1 = \frac{y_b + y_c}{2} \tag{2}$$

Punkt $P_2(x_2, y_2)$ halbiere die Seite $b = \overline{AC}$. Seine Koordinaten lauten:

$$x_2 = \frac{x_a + x_c}{2}, \qquad y_2 = \frac{y_a + y_c}{2} \tag{3}$$

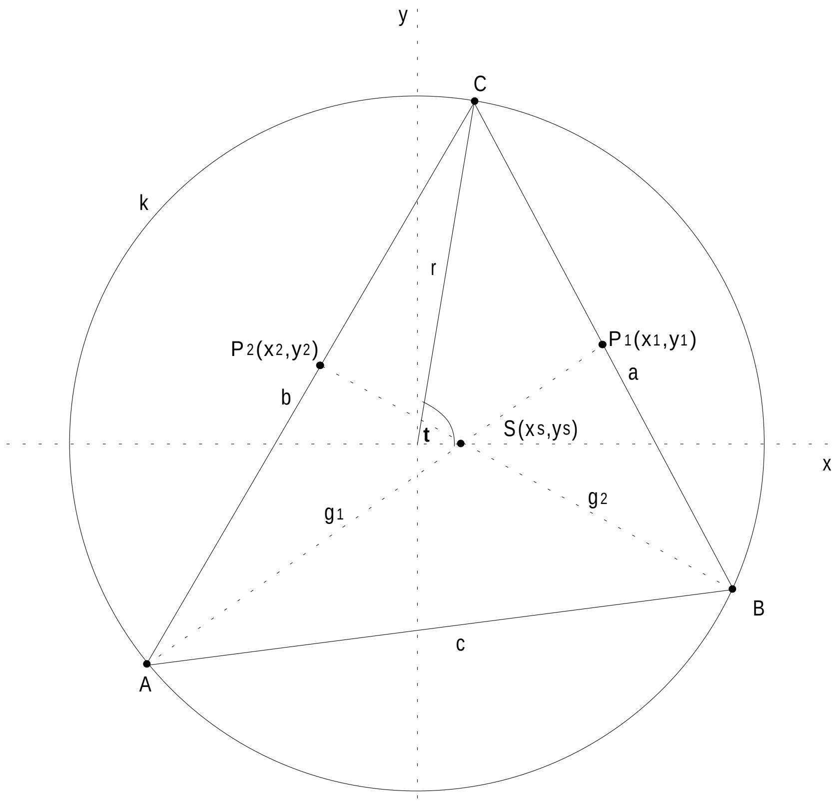


Abbildung 2: Berechnung der Schwerpunktkoordinaten

Aus der Verbindungslinie $\overline{AP_1}$ folgt die Geradengleichung der Seitenhalbierenden für Seite a (Zweipunkteform):

$$g_1: \quad \frac{y - y_a}{y_1 - y_a} = \frac{x - x_a}{x_1 - x_a} \quad \rightarrow \quad \frac{y - y_a}{\frac{y_b + y_c}{2} - y_a} = \frac{x - x_a}{\frac{x_b + x_c}{2} - x_a} \tag{4}$$

Aus der Verbindungslinie $\overline{BP_2}$ folgt die Geradengleichung der Seitenhalbierenden für Seite b (Zweipunkteform):

$$g_2: \quad \frac{y - y_b}{y_2 - y_b} = \frac{x - x_b}{x_2 - x_b} \quad \rightarrow \quad \frac{y - y_b}{\frac{y_a + y_c}{2} - y_b} = \frac{x - x_b}{\frac{x_a + x_c}{2} - x_b} \tag{5}$$

Aus dem Schnittpunkt von g_1 und g_2 erhalten wir die Koordinaten vom Schwerpunkt:

$$g_1 = g_2: \qquad x_s = \frac{1}{3} \cdot (x_a + x_b + x_c), \qquad y_s = \frac{1}{3} \cdot (y_a + y_b + y_c) \tag{6}$$

Wir ersetzen nun die Koordinaten der Punkte A, B, C durch ihre Polarkoordinatendarstellung:

$$x_a = r\cos(\alpha), \qquad y_a = r\sin(\alpha) \tag{7}$$
$$x_b = r\cos(\beta), \qquad y_b = r\sin(\beta) \tag{8}$$
$$x_c = r\cos(t), \qquad y_c = r\sin(t) \tag{9}$$

Damit erhalten wir die gewünschte Parameterdarstellung der Koordinaten vom Schwerpunkt:

$$x_s(t) = \frac{r}{3} \cdot (\cos[t] + \cos[\alpha] + \cos[\beta]) \tag{10}$$
$$y_s(t) = \frac{r}{3} \cdot (\sin[t] + \sin[\alpha] + \sin[\beta]) \tag{11}$$

Die Ortskurve des Schwerpunktes beschreibt einen Kreis mit dem Radius $r_s = \frac{r}{3}$. Der Mittelpunkt des Kreises liegt bei:

$$x_m = \frac{r}{3} \cdot (\cos[\alpha] + \cos[\beta]), \qquad y_m = \frac{r}{3} \cdot (\sin[\alpha] + \sin[\beta]) \tag{12}$$

Bild der Ortskurve von S

Abbildung 3 zeigt den Umkreis vom Dreieck ABC und die Ortskurve vom Schwerpunkt für die Parameter $\alpha = \frac{4\pi}{3}$, $\beta = \frac{5\pi}{3}$, $r = 10\,cm$. Der Mittelpunkt des Kreise befindet sich bei:

$$x_m = \frac{r}{3} \cdot \left(\cos\left[\frac{4\pi}{3}\right] + \cos\left[\frac{5\pi}{3}\right]\right) = -\frac{\sqrt{3} \cdot r}{3} \tag{13}$$
$$y_m = \frac{r}{3} \cdot \left(\sin\left[\frac{4\pi}{3}\right] + \sin\left[\frac{5\pi}{3}\right]\right) = 0 \tag{14}$$

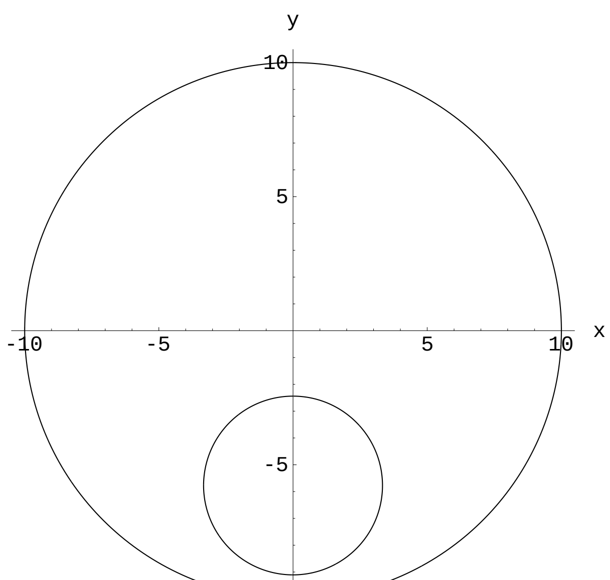


Abbildung 3: Ortskurve der Schwerpunkte

Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Wer hat das rheinhessische Hängebauchschwein?

Über fünf Schüler aus dem südlichen Rheinhessen, die alle aus verschiedenen Klassen stammen, in verschiedenen nebeneinanderliegenden Orten wohnen, verschiedene Tiere besitzen, unterschiedliche Sportarten und Gesellschaftsspiele ausüben, ist bekannt:

1. Der 5.Klässler wohnt in Eppelsheim.
2. Der 4.Klässler hat einen Hund.
3. In Heimersheim wird Mau-Mau gespielt.
4. Der 8.Klässler dagegen spielt Schach.
5. Gleich links neben Weinheim ist Heimersheim.
6. Der Bienenzüchter spielt Fußball.
7. Der Handballspieler wohnt in Flomborn.
8. In dem Dorf in der Mitte wird missmutig Monopoly gespielt.
9. Der 6.Klässler wohnt im ersten Dorf.
10. Der Unsportliche wohnt im Nachbardorf von dem Jungen mit dem Schaf.
11. Im Nachbardorf des Schülers mit dem Pferd wird Handball gespielt.
12. Der Dorfbewohner, der Hockey spielt, spielt abends Dame.
13. Der 7.Klässler spielt Volleyball.
14. Das Dorf des 6.Klässlers liegt neben Gau-Odernheim.
15. Der Schachspieler wohnt im Nachbardorf des Monopolyspielers.

Ermittle aus diesen Informationen

a) wer Skat spielt,
b) wer ein Hängebauchschwein hat.

(Johannes Merz, Kl. 5, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

Die Rechnungen müssen alle stimmen

In der folgenden Aufgabe stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern:

$$\begin{array}{cccccccccc}
c & a & b & - & a & d & b & = & c & b \\
 & + & & & & - & & & + & \\
 & & d & + & & e & b & = & e & d \\
\hline
c & a & d & - & a & f & b & = & f & d
\end{array}$$

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass senkrecht und waagrecht alle Rechnungen korrekt sind.

(Johann Kirsch, Kl. 5, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

„Eins“ gewinnt

Alex und Benjamin spielen ein Würfelspiel, bei dem eine „Eins“ gewinnt. Alex würfelt mehrmals und erhält als Mittelwert für die Zahl der geworfenen Einsen $0,15$. Benjamin würfelt doppelt so oft wie Alex und erhält den Mittelwert $0,1875$ für seine geworfenen Einsen. Wie viele Einsen hat Alex mindestens geworfen?

(Klaus Ronellenfitsch, Leibniz-Gymnasium Östringen)

Weitere Mathespielereien findest Du auf der nächsten Seite.

Mathespielereien

Noch eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Passende Ziffern

Welche verschiedene Ziffern passen für die Buchstaben A, B, C und D, wenn

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ + & A & B & C \\ + & & A & B \\ + & & & A \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

gilt? (Hans Engelhaupt)

Wahr oder falsch?

Der Abstand zwischen 2000^5 und 2001^5 ist größer als 50 Billionen. (H. F.)

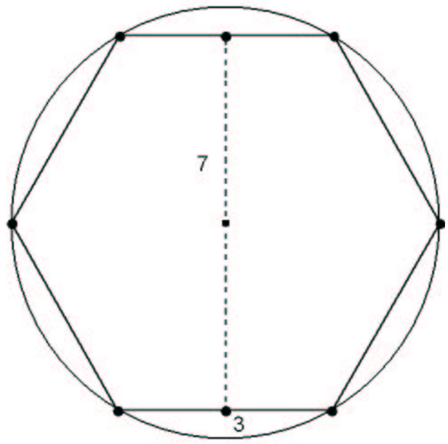
Große Unordnung

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & = & 26 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & = & 27 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & = & 28 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & = & 29 \end{array}$$

Zwischen den 4 Zahlen links vom Gleichheitszeichen fehlen die Rechenzeichen ($+$, $-$ und $\cdot$ sind möglich), es können auch Klammern fehlen und die Zahlen selbst sind nicht immer in der richtigen Reihenfolge angegeben.
Ebenso stehen die 4 Zahlen rechts von den Gleichheitszeichen nicht in der richtigen Zeile. Wem gelingt es, die 4 richtigen Gleichungen herzustellen? (H. F.)

Regelmäßiges Sechseck

Jochen spielt mit dem Zirkel. Er hat einen Kreis gezeichnet. Mit der gleichen Zirkelöffnung zeichnet er nun Punkte auf der Kreislinie und siehe da: die Kreislinie lässt sich in genau 6 gleiche Stücke aufteilen. Verbindet er die Punkte, so erhält er ei sogenanntes reguläres Sechseck. Nun will er den Flächeninhalt des regulären Sechsecks wissen. Er misst die Seitenlänge 4cm und den Abstand zwischen zwei gegenüber liegenden Seiten 7 cm.
Wie groß ist der Flächeninhalt? (MM)



Noch eine Aufgabe des Schulleiters vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey *(Diesmal gibt es sogar 11 Lösungen)*:

Stelle die Zahl 6 als Komposition von genau drei mal einer der Zahlen $1,2,\ldots,10$ dar. Die Zahlen dürfen durch $+$, $-$, $\cdot$, : , !, und $\sqrt{\ }$ verknüpft werden. Z.B. $6 = 2+2+2$; $6 = 2\cdot 2+2$ usw.
(Hilfe: $4!$ bedeutet $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, also $4! = 24$; oder: $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$; $\sqrt{9} = 3$;$\sqrt{4} = 2$)
(G. Hoffmann)

Auf S. 19 findest Du noch drei weitere Aufgaben !

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Die **Aufgaben 748 bis 751** findet Ihr im Artikel **Die Sierpinski-Prozesse** auf den Seiten 6-9.

Aufgabe 752. Eine monoton wachsende Zahlenfolge enthält alle Zahlen, die eine Dreierpotenz darstellen oder die als Summe von verschiedenen Dreierpotenzen geschrieben werden können. Das sind $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $4 = 3^1 + 3^0$, $9 = 3^2$, $10 = 3^2 + 3^0$, $12 = 3^2 + 3^1$, $13 = 3^2 + 3^1 + 3^0$, $27 = 3^3$, $\ldots$. Wie heißt die 100. Zahl dieser Folge?

(Hans Engelhaupt)

Aufgabe 753. Gegeben seien zwei Kreise k' und k'' mit den Mittelpunkten M' und M''. Ein Halbkreis k mit $M'M''$als Drchmesser schneidet k' bzw. k'' in P' bzw. P''. Die Gerade $g = (P'P'')$ schneidet dann aus den Kreisen k' und k'' gleichlange Sehnen aus.

(Kurt Rosenbaum)

Aufgabe 754. Zu bestimmen sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x = y^3 + y - 343 \quad (1)$$

$$y = x^3 + x - 343 \quad (2)$$

(MM)

Aufgabe 755. Wo liegt der Fehler?

Behauptung: Es gilt

$$T = \sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{b^2 + y^2} \leq (a + x) - (b + y)$$

für nichtnegative Zahlen a, b, x, y mit $a^2 + x^2 \geq b^2 + y^2$.

Beispiel: $\sqrt{12^2 + 5^2} - \sqrt{4^2 + 3^2} < (12 + 5) - (4 + 3) \quad \Leftrightarrow \quad 13 - 5 < 17 - 7\,.$

„Beweis“:
$$T = \sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{b^2 + y^2} = \frac{(a^2 + x^2) - (b^2 + y^2)}{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2}} =$$
$$= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2}} + \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2}}$$

Durch Weglassen von x^2 und y^2 im 1. Nenner und von a^2 und b^2 im 2. Nenner wird der jeweilige Radikand kleiner, also wird auch der Nenner des entsprechenden Bruches kleiner. Wird der Nenner eines Bruches kleiner, so wird der Wert des Bruches größer. Damit folgt:

$$T \leq \frac{(a - b)(a + b)}{\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}} + \frac{(x - y)(x + y)}{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}} = (a - b) + (x - y) = (a + x) - (b + y), \quad \text{„q.e.d.“}$$

Gegenbeispiel: $\sqrt{10^2 + 1^2} - \sqrt{8^2 + 3^2} > 0$, aber $(10 + 1) - (8 + 3) = 0$,

also ist die Behauptung falsch. (H.F.)

Aufgabe 756. Einem Halbkreis (Radius r) wird ein gleichschenkliges Dreieck größten Flächeninhalts einbeschrieben, dessen Höhe zur Grundseite parallel zum Durchmesser ist. Wie groß ist seine Grundseite? (Helmut Rössler)

Vom Mittelalter zur Neuzeit
- 600 Jahre Nicolaus Cusanus -

von Hartwig Fuchs

Nikolaus von Kues, genannt Cusanus (eigentlich: N. Chryppfs oder N. Krebs), wurde 1401 in Kues an der Mosel geboren, und er ist aufgewachsen in einem schönen großen Haus, das heute noch steht und zur Besichtigung dessen einlädt, was sich aus Nikolaus' Leben bis in unsere Zeit erhalten hat.

Als Sohn eines wohlhabenden Vaters hatte er eine sehr gute und wohl auch abwechslungsreiche Ausbildung: er war ein früher „europäischer" Student der Rechte und der Theologie in Deventer, Heidelberg, Padua und Köln. Er schlug eine ebenfalls „europäische" Laufbahn ein im Dienst der Kirche, die er mit hohem Erfolg durchlief: Jurist in Trier und Köln, Priester in Koblenz, Diplomat in Basel und Konstantinopel, Bischof in Brixen, Kardinal und hoher Würdenträger in Rom.

Daneben fand er immer Zeit zu ausgedehnten und intensiven Studien in Philosophie, Mathematik und in experimentellen Wissenschaften wie Physik, Astronomie, Meteorologie - wobei man sich für eine Würdigung von Nikolaus' zukunftsweisender Wirkung immer vor Augen halten muss, dass die Philosophie seiner Zeit noch tief im „finsteren" Mittelalter gefangen war und die Naturwissenschaften in sehr kleinen, engen Kinderschuhen steckten.

Seine Studien und die Folgerungen, die er daraus zog, stellen eine Brücke von mittelalterlichen Vorstellungen zu neuzeitlichem Denken dar.

Insbesondere der Mathematik erkannte er wohl als erster mittelalterlicher Denker eine grundlegende Rolle zu bei der Erkenntnis der Welt und „was sie im Innersten zusammenhält" - und dies ist einer der frühen Impulse, die zur Entwicklung der heutigen Naturwissenschaft führten.

Als Früchte seiner Beschäftigung mit Mathematik sind zwei weiterwirkende Denkansätze besonders wichtig:

Auf seine Überlegungen zum Begriff des Unendlich-Großen griff noch 400 Jahre später der Entdecker der Mengenlehre, Georg Cantor (1845-1918), zurück;

und seine Gedanken zum Unendlich-Kleinen waren eine Vorahnung, wenn nicht sogar eine Vorstufe zu späteren infinitesimalen Betrachtungen etwa von G.W. Leibniz (1646-1716) und I. Newton (1643-1727).

Auch ein schönes mathematisches Einzelergebnis verdanken wir Cusanus. Bei der Berechnung des Umfangs U eines Kreises vom Radius r ging man nach einer Idee von Archimedes (287 v.Chr. - 212 v.Chr.) fast 2000 Jahre lang so vor:

Man berechnete den Umfang u_n (bzw. U_n) eines dem Kreis einbeschriebenen (bzw. umschriebenen) regelmäßigen n-Ecks und betrachtete u_n (bzw. U_n) als Näherungswert für den Kreisumfang U.

Cusanus konnte nun für den beim Archimedes-Verfahren entscheidenden Umfang u_n des einbeschriebenen n-Ecks erstmals die Formel $u_n = 2n \cdot r \cdot sin\left(\frac{180°}{n}\right)$, $n \geq 3$, herleiten, so dass $U \approx 2n \cdot r \cdot sin\left(\frac{180°}{n}\right)$ gilt.

Von der Bedeutung, die Nikolaus von Kues durch sein Werk in der Philosophie erlangt hat, kann hier nicht einmal eine Andeutung gegeben werden.

Nicolaus Cusanus starb 1464 in Todi (Italien).

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 65

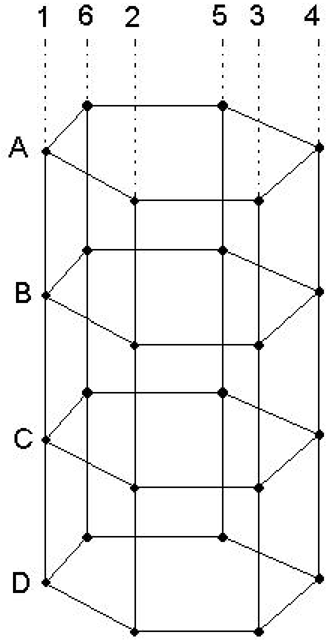
Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Raten und Rechnen mit Primzahlen

Setze in jeden Punkt der horizontalen Sechsecke A, B, C, D sowie der 6 vertikalen Strecken S1, S2, . . . , S6 jeweils eine Ziffer der zu bestimmenden Zahlen ein.

Die horizontalen Lösungszahlen sind gegen den Uhrzeigersinn einzutragen, die Position der 1. Ziffer ist z.B. für A6 im Sechseck A auf der Strecke S6.

Die vertikalen Lösungen sind von oben nach unten auf der jeweils angegebenen Strecke einzutragen; die erste Ziffer liegt dabei stets im Sechseck A.



Horizontal

A6: x^3, wobei x die größte zweiziffrige Primzahl ist

B5: 2^y, wobei y eine Primzahl ist

C6: das Produkt aus 7 verschiedenen Primzahlen z, deren größte y ist

D3: (erste 3 Ziffern der Lösungszahl C6)^2 + z

Vertikal

S1: das Produkt aus der kleinsten zweiziffrigen Primzahl z und der kleinsten dreiziffrigen Primzahl d

S2: kommt in diesem Jahr besonders häufig vor

S3: $10\cdot$ (letzte 3 Ziffern von x^3) + $2z$

S4: $(cy)^2 - 2c + 1$, wobei c eine Primzahl ist

S5: $c^c - c^2$

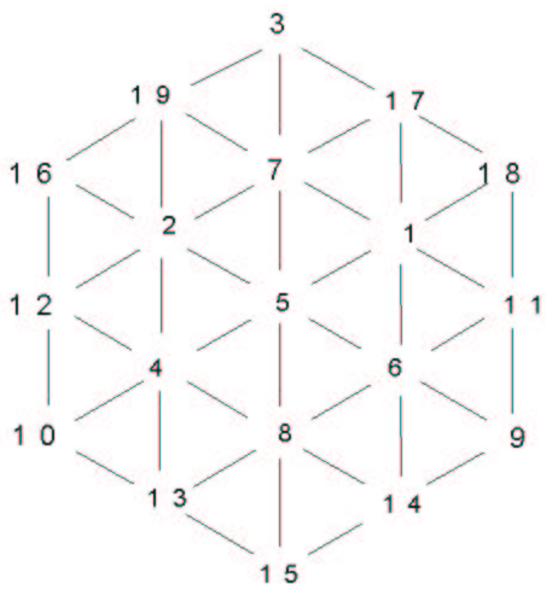
S6: (Lösungszahl S5 + y)$\cdot 3$. (H. F.)

Lösung:

$A6 : 97^3$; $C6 : 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$;
$B5 : 2^{17}$; $D3 : 510^2 + 11$; $S1 : 11 \cdot 101$;
$S2 : 2001$; $S3 : 10 \cdot 673 + 22$;
$S4 : (5 \cdot 17)^2 - 2 \cdot 5 + 1$; $S5 : 5^5 - 5^2$;
$S6 : (3100 + 17) \cdot 3$

Noch ein magisches Sechseck zum Jahreswechsel

Die Zahlen längs jeder der 15 Strecken aus dem Titelbild von Heft 65 haben alle die gleiche Summe. Multipliziert man jede Zahl im Sechseck mit $0,0015$ und rundet auf ganze Zahlen, so erhält man wieder ein magisches Sechseck in dem alle 19 Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 19$ vorkommen. Bestimme das neue magische Sechseck und dessen Summe. (H. F.)



Der Glückspieler

Adam Zaster geht ins Spielcasino, kauft für 1000 Mark Spielchips, er spielt und gewinnt: gegen Mitternacht hat er Chips im Wert von 2000 Mark, die er in Bargeld einwechselt. Sein Freund, der dies beobachtet, sagt: „Adam, du hast heute Nacht Glück; wie kannst du da mit dem Spielen aufhören. Du solltest mit höherem Einsatz weitermachen!“ Adam kauft für 3000 Mark Chips, spielt eine halbe Stunde und hört dann mit Chips im Wert von 4000 Mark auf.

Wieviel Mark hat Adam insgesamt gewonnen ? (H. F.)

Lösung:

Kaufpreis der Chips $1000 + 3000 = 4000$

Wert der gewonnenen Chips $2000 + 4000 = 6000$. Gewinn: $6000 - 4000 = 2000$.

Eine Aufgabe des Schulleiters

Kannst du alle Zahlen von 1 bis 11 jeweils durch drei Zweien verknüpft mittels $+$, $-$, $\cdot$, :, ! und $\sqrt{\ }$ darstellen? Z.B. : $6 = 2 \cdot 2 + 2$. (E. Hoffmann)

Lösung:

$1 = 2 - 2 : 2$; $2 = 2 + 2 - 2$; $3 = 2 + 2 : 2$; $4 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; $6 = 2 \cdot 2 + 2$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

5, 7, 9 und 11 können nicht dargestellt werden, da die einzige Möglichkeit, eine ungerade Zahl zu erhalten, darin besteht, den Term $2 : 2$ zu einer 2 zu addieren oder von ihr abzuziehen. Die nächstgrößere darstellbare Zahl nach der 8 ist $(2 \cdot 2)!\ : 2 = 12$, also ist auch die 10 nicht darstellbar.

Parteimitglieder

Von den 180 Teilnehmern einer Wahlversammlung weiß man

a) Mindestens ein Teilnehmer ist parteilos;

b) Von jeweils zwei Teilnehmern ist wenigstens einer Mitglied einer Partei.

Wie viele Teilnehmer sind parteilos ? (H. F.)

Lösung:

Es sei L eine der gemäß a) vorhandenen parteilosen Personen. Stellen wir uns vor, L stellt sich neben die Person A. Dann ist A wegen b) ein Parteimitglied. Da A jeder der übrigen 179 Versammlungsteilnehmer sein kann, folgt: sie alle sind Parteimitglieder; nur L ist parteilos.

Weinkauf

In einer Weinhandlung wird ein bestimmter guter Wein in kleinen 0,35 l-Flaschen, ein anderer guter Wein in großen 0,7 l-Flaschen verkauft. Eine große Flasche kostet 1,5 mal so viel wie eine kleine Flasche.

Ein Weinkenner kauft 7 große und 3 kleine Flaschen Wein. Hätte er 3 große und 7 kleine Flaschen Wein gekauft, dann hätte er 28 Mark weniger gezahlt.

Wieviel zahlt der Weinkenner für seinen Kauf? (H. F.)

Lösung:

7 große und 3 kleine kosten so viel wie $1,5 \cdot 7 + 3 = 13,5$ kleine Flaschen.

3 große und 7 kleine kosten so viel wie $1,5 \cdot 3 + 7 = 11,5$ kleine Flaschen.

Demnach kosten $13,5 - 11,5 = 2$ kleine Flaschen 28 Mark. Daraus folgt, dass 1 kleine Flasche 14 Mark und eine große Flasche $1,5 \cdot 14 = 21$ Mark kostet. Der Einkauf kostet $7 \cdot 21 + 3 \cdot 14 = 189$ Mark.

<u>Probe:</u> $3 \cdot 21 + 7 \cdot 14 = 161$, $189 - 161 = 28$.

Die Angler

Am linken und rechten Ufer eines Baches stehen Angler, wir sagen: L-Angler und R-Angler.

Als 2 L-Angler auf die rechte Bachseite wechseln (und so zu R-Angler werden) gibt es genau so viele L-Angler wie R-Angler. Später wechseln dann 6 R-Angler auf die andere Seite (und werden so zu L-Anglern). Damit sind es jetzt dreimal so viele L-Angler wie R-Angler. Wie viele Angler sind es insgesamt ? (H. F.)

Lösung:

Die Anzahl der L-Angler zu Beginn sei l, die der R-Angler sei r.

Nach dem ersten Seitenwechsel gilt: $l - 2 = r + 2 \Rightarrow l = r + 4$. (1)

Nach dem zweiten Seitenwechsel: $(l - 2) + 6 = 3 \cdot (r + 2 - 6) \Rightarrow l = 3r - 16$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $r + 4 = 3r - 16 \Rightarrow r = 10, l = 14$.

Die Gesamtzahl der Angler ist demnach 24.

Lösung der Sonderpreisaufgabe aus dem MONOID 65

Aufgabe. Arno, Benno und Cicero sind Logiker, die stets die Wahrheit sagen. Diesen Dreien zeigt man 7 Vogelfedern: 2 weiße, 2 schwarze und 3 gelbe.

Dann verbindet man ihnen die Augen, steckt jedem eine Feder hinter das Ohr, verbirgt die restlichen 4 Federn und nimmt Arno und Benno die Binde von den Augen, Cicero dagegen nicht.

Dann fragt man Arno: Können Sie die Farbe angeben, die Ihre Feder nicht hat? Arno antwortet mit Nein.

Die gleiche Frage an Benno führt zur gleichen Antwort Nein von Benno.

Cicero teit man mit, dass alle drei genau 1 Feder hinter dem Ohr haben.

Begründen Sie, dass Cicero aus diesen Informationen die Farbe seiner Feder ermitteln kann. Welche Farbe hat diese Feder ? (H. F.)

Bemerkung: In der ursprünglichen Version dieser Aufgabe hatte sich ein Fehler eingeschlichen. Mehrere Löser/innen haben richtig bemerkt und begründet, dass Cicero seine Federfarbe gemäß Text nicht bestimmen kann. Alle diejenigen haben die volle Punktzahl bekommen.

Hier wurde der Text korrigiert.

Antwort. Cicero ermittelt, dass seine Feder gelb ist. Er überlegt so:

Ciceros Annahme: meine Feder sei weiß.

Dann müsste Benno so schließen und antworten:

> Aus dem Nein von Arno folgt, dass Arno keine zwei weißen Federn sieht. Denn sähe er zwei weiße Federn, dann wüsste er, dass seine Feder nicht weiß sein kann (es gibt ja nur zwei weiße Federn) und entsprechend hätte er die an ihn gerichtete Frage mit Ja beantwortet.
>
> Dies tat er aber nicht. Daher müsste Benno folgern, dass seine Feder nicht weiß sein kann und er hätte die Frage an ihn mit Ja beantwortet.

Tatsächlich ist Bennos Antwort Nein. Das ist nur möglich, wenn Ciceros Annahme nicht zutrifft.

Also weiss Cicero: meine Feder ist nicht weiß.

Ersetzt man in Ciceros Gedankengängen überall „weiß“ durch „schwarz“, dann folgt mit der gleichen Überlegung, dass Ciceros Feder nicht schwarz ist.

Somit muss Ciceros Feder gelb sein.

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 65

Kl. 8-13

Aufgabe 740. In der Ebene sind 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

a) Man konstruiere ein Quadrat derart, dass auf jeder Quadratseite (bzw. deren Verlängerung) genau einer der Punkte liegt.

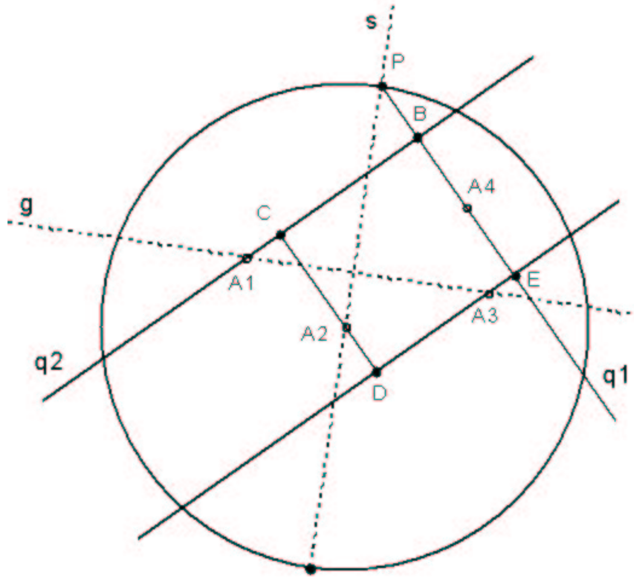
b) Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? (Kurt Rosenbaum)

Lösung des Autors. Die entscheidende Idee zur Vereinfachung hatte mein Ilmenauer Kollege Manfred Simsch.

a) Durch eine feste Lage der vier Punkte A_i sind die Strecken A_1A_3 und A_2A_4 bestimmt. Das Problem ist nun:

Man konstruiere zwei zueinander senkrechte Geraden q_1 und q_2, so dass die orthogonalen Projektionen von A_1A_3 auf q_1 bzw. von A_2A_4 auf q_2 gleich lang sind.

Daraus ergibt sich der folgende, verblüffend einfache Konstruktionsplan:



1. Zeichne die Gerade g, die durch die Punkte A_1 und A_3 geht.

2. Fälle das Lot s von A_2 auf die Gerade g.

3. Auf dem Lot durch A_2 trage man von A_2 an die Strecke $A_2P = A_1A_3$ mit $|A_2P| = |A_1A_3|$ ab.

4. Zeichne die Gerade $(PA_4) = q_1$.

Auf q_1 liegt eine Quadratseite. Eine benachbarte Quadratseite liegt auf dem Lot q_2 von A_1 auf q_1. Die weiteren Quadratseiten liegen auf dem Lot von A_2 auf q_2 bzw. auf dem Lot von A_3 auf q_1. Das gesuchte Quadrat ist $BCDE$.

Begründung: Die „Diagonalen" A_1A_3 (hat die gleiche Länge wie A_2P) und A_2A_4 haben gleichlange senkrechte Projektionen auf orthogonale Geraden.

b) Trägt man auf dem Lot durch A_2 die Länge der Strecke A_1A_3 in der anderen Richtung ab, so entsteht ein anderes Quadrat.

Da man zu Beginn der Konstruktion auch A_1 mit A_2 bzw. A_1 mit A_4 verbinden kann, entstehen auf die geschilderte Weise insgesamt (höchstens) $2 \cdot 3 = 6$ Lösungen.

Aufgabe 741. Wo liegt der Fehler?
Für zwei Unbekannte x, y gelte: $6x + 2y = 5$ und $y = 2 - 3x$.
Ersetzt man nun das y der ersten Gleichung durch die rechte Seite der zweiten Gleichung, so erhält man:
$6x + 2(2 - 3x) = 5$, woraus $6x + 4 - 6x = 5$, d. h. $4 = 5$ folgt. (H. F.)

Lösung. Man forme die zweite Gleichung um zu $3x + y = 2$; multipliziert man diese Gleichung mit 2, so folgt $6x + 2y = 4$.
Diese Gleichung ist offensichtlich mit der ersten Gleichung $6x + 2y = 5$ unverträglich. Die Annahme, dass x und y die beiden gegebenen Gleichungen erfüllen, muss daher zu einem Widerspruch führen.

Aufgabe 742. Ein Radfahrer fährt von A nach B mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 8km/h und anschließend von B nach A zurück mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 18km/h in insgesamt einer Stunde und 5 Minuten. Wie lang ist der Weg von A nach B ? (MM)

Lösung. Sei s der Weg. Wir nehmen an, dass er x Stunden für die Fahrt von A nach B und y Stunden für die Fahrt von B nach A braucht. Dann ist $s = 8x = 18y \Rightarrow 4x = 9y$. Es ist auch $x + y = \frac{13}{12}$, wegen 1 h 5 min $= 1\frac{5}{60}$ h $= 1\frac{1}{12}$ h $= \frac{13}{12}$ h.

$$\Rightarrow \quad 12x + 12y = 13 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (4x) + 12y = 13$$
$$\Rightarrow \quad 3 \cdot (9y) + 12y = 13 \quad \Rightarrow \quad 39y = 13 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}.$$

Der Weg von A nach B hat demnach eine Länge von 18km/h $\cdot \frac{1}{6}$ h $= 6$ km.

<u>Probe:</u> $x = \frac{13}{12} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow s = 8$ km/h $\cdot \frac{3}{4}$ h $= 6$ km.

Aufgabe 743. A, B, C, D seien Personen, für die folgende Bedingungen gelten:
(1) Wenn A ein Mann ist, dann ist D eine Frau.
(2) Ist A eine Frau und C ein Mann, dann ist B eine Frau.
(3) Sind B und C Männer, dann ist A eine Frau.
(4) Wenn B ein Mann ist, dann ist C ein Mann.
(5) Wenn D ein Mann ist, dann ist C ein Mann.
(6) Wenn B eine Frau ist, dann ist D ein Mann.
Welche der Personen sind Männer, welche sind Frauen? (H. F.)

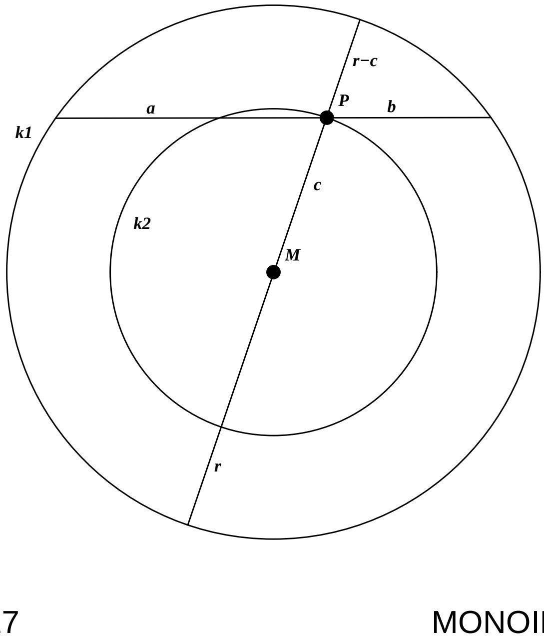
Lösung. Wir treffen eine vollständige Fallunterscheidung

1. A sei Mann und B sei Mann. (4)$\Rightarrow$ C ist Mann; (3) $\Rightarrow$ A ist Frau. Widerspruch.
2. A sei Mann und B sei Frau. (1)$\Rightarrow$ D ist Frau; (6) $\Rightarrow$ D ist Mann. Widerspruch.
3. A sei Frau und B sei Mann. (4)$\Rightarrow$ C ist Mann; (2) $\Rightarrow$ B ist Frau. Widerspruch.
4. A sei Frau und B sei Frau. (6)$\Rightarrow$ D ist Mann; (5) $\Rightarrow$ C ist Mann.

Damit ist die einzige, nicht auf einen Widerspruch führende Lösung gefunden.

Aufgabe 744.
Wir bezeichnen den Radius des inneren Kreises k_2 mit c. Die Sehne a, b schneidet sich mit der Sehne $r + c, r - c$ in P.
Nun kommt der *Sehnensatz* zur Anwendung:
Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnittslängen der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnittslängen der anderen Sehne.

$$a \cdot b = (r + c) \cdot (r - c) = r^2 - c^2 .$$



Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit π, erhalten wir:
$$\pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot c^2 .$$
Der Flächeninhalt des Kreisringes zwischen k_1 und k_2 beträgt damit: $A_{diff} = \pi \cdot a \cdot b$.

Aufgabe 745. Drei Herren, 5 Kugeln
Jedem der drei Herren Armin, Bodo und Chris wird aus einem Vorrat von 3 weißen und 2 roten Kugeln eine auf den Rücken kurz angebunden.
Keiner weiß, was für eine Kugel er trägt und welche Kugeln unbenutzt bleiben. Jede Verständigung ist verboten. Die drei Herren dürfen sich lediglich in einem spiegellosen Raum frei bewegen. So sollen sie versuchen durch Denken und Schließen möglichst schnell festzustellen, was für eine Kugel sie tragen. Nach vorläufiger Umkreisung bleiben sie zunächst sehr schweigsam, werden nachdenklich, scheinbar auch unruhig, bis endlich nach langem Schweigen einer, etwa C die Farbe der Kugel, die er trägt, richtig nennt. Welche Farbe nennt er und wie hat er überlegt? (H. F.)

Antwort: Weiß. Zur Lösung werden alle möglichen Situationen in folgender Tabelle festgehalten (W steht für weiße Kugel und R für rote).

Fall	Armin	Bodo	Chris
1.	W	W	W
2.	W	W	R
3.	W	R	W
4.	R	W	W
5.	W	R	R
6.	R	W	R
7.	R	R	W

Für C gibt es folgende Möglichkeiten. Er sieht:

a) 2 rote (7. Fall), oder
b) eine weiße und eine rote (3. Fall, 4. Fall, 5. Fall, 6. Fall), oder
c) 2 weiße (1. Fall und 2. Fall)

Bei a) folgert C sofort, dass er eine weiße Kugel haben muss, da es ja lediglich 2 rote gibt, für ihn also keine mehr übrig bleibt.
Bei b) sagt C sich: Hätte ich eine rote, so würde einer der beiden anderen zwei rote Kugeln sehen, also könnte er mit Sicherheit behaupten - was er auch tun würde - dass er eine weiße trägt. Wenn also keiner der beiden anderen weiß, welche Kugel er trägt, so kann C behaupten, dass er eine weiße Kugel trägt.
Bei c) sagt C sich: Ich muss eine weiße haben, denn hätte ich eine rote, so würde einer der beiden anderen eine weiße und eine rote sehen; dann würde dieser gemäß b) von sich behaupten können, dass er eine weiße trägt.
Also: Wenn keiner der beiden anderen etwas zur Sache sagt, muss C in jedem der Fälle eine weiße Kugel tragen, was er dann auch behaupten kann.

Aufgabe 746. Sierpinski-Prozesse.
Untersuche Prozesse P_1 mit 2-ziffrigen Startzahlen. Weisen diese Prozesse bemerkenswerte Eigenschaften oder irgendwelche Gemeinsamkeiten auf? Wenn ja, welche?

Antwort: Alle Prozesse der Länge L führen in die Schleife (1) und zwar:
für z mit $90 \leq z \leq 99$ ist $L = 1$, falls $z = 99$, sonst ist $L = 2$;
für z mit $80 \leq z \leq 89$ ist $L = 1$, falls $z = 89$, $L = 3$, falls $z = 88$, sonst $L = 4$; usw. ...
für z mit $10 \leq z \leq 19$ ist $L \leq 18$.

Aufgabe 747. Sierpinski-Prozesse.
Wende S_1 auf die folgenden Zahlen an. Was fällt auf?

Lösung:
a) $9, 99, 999 \to 1$
b) $29 \to 3, 209 \to 12, 20099 \to 102$. Die Anzahl der Ziffern der Startzahlen wird jeweils (außer bei 9) um mindestens 1 verringert.

Ein mathematisches Objekt mit vielen Anwendungen:

Die Gruppe (I)

von Valentin Blomer

Jeder hat schon einmal ein gleichseitiges Dreieck gesehen und die Erfahrung gemacht, dass viele geometrische Sachverhalte, die in beliebigen Dreiecken gelten, in gleichseitigen Dreiecken beinahe trivial werden, weil die meisten Linien und Punkte dort zusammenfallen. Anders ausgedrückt, das gleichseitige Dreieck besitzt viele *Symmetrien*. Wir zeichnen in ein gleichseitiges Dreieck ABC die drei Seitenhalbierenden (das sind gleichzeitig die Winkelhalbierenden, Höhen und Mittelsenkrechten) ein und wollen systematisch untersuchen, welche Symmetrien das Dreieck besitzt.

Zunächst kann man es an jeder der drei Seitenhalbierenden spiegeln. Wir wollen diese Operationen S_a, S_b und S_c nennen. Außerdem kann man das Dreieck um den Mittelpunkt (den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) drehen, und zwar um $120°$ und um $240°$. Die Drehungen nennen wir D_{120} und D_{240}, vgl. Abb. 1. Stets verändern sich dabei zwar die Namen der Eckpunkte, das Dreieck als Ganzes geht jedoch in sich selbst über. Fällt jemandem noch eine Symmetrie-Operation ein?

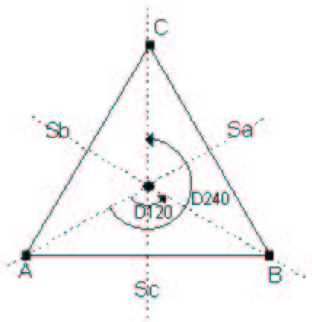


Abbildung 1: Symmetrieoperationen eines Dreiecks

Na ja, es gibt noch eine ganz einfache: Wir machen überhaupt nichts und lassen das Dreieck so, wie es ist. Wir nennen diese Operation I für Identität.

Jetzt kommt die entscheidende Beobachtung: Wenn wir irgendwelche zwei Operationen hintereinander ausführen, ist das wieder eine Symmetrie-Operation, denn das Dreieck geht in sich selbst über!

Und wir machen gleich die zweite Beobachtung: Die „Doppel-Symmetrie-Operationen" liefern gar keine neuen Operationen, sondern lassen sich durch die bereits bekannten Spiegelungen und Drehungen ausdrücken. Wenn wir zum Beispiel erst um $120°$ drehen und dann die Spieglung S_b ausführen, erhalten wir als Ergebnis die Spiegelung an S_c (vgl. Abb. 2).
Wir wollen dafür folgende Schreibweise einführen: $S_b \circ D_{120} = S_c$.

Achtung: Man lasse sich nicht dadurch verwirren, dass die *zuerst* ausgeführte Operation *rechts* steht. Das ist eine (durchaus sinnvolle) Konvention, und man gewöhnt sich ganz schnell daran.

Wir systematisieren dies nun und tragen in die folgende Tabelle die Operationen ein, die sich aus allen möglichen Doppel-Kombinationen ergeben (vgl. Abb. 3). Wem das Spaß macht, kann auch einmal die entsprechende Tabelle für das Quadrat aufstellen.

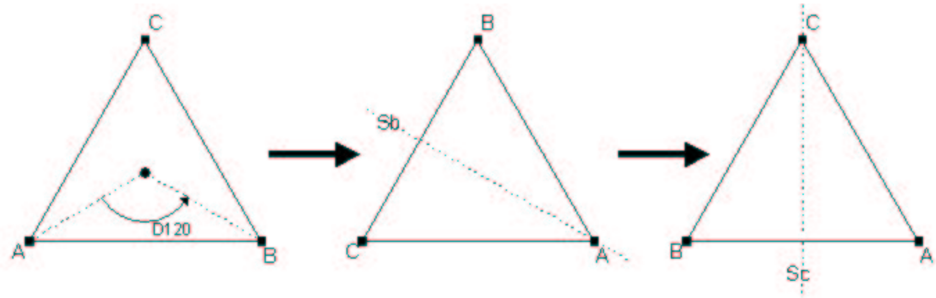


Abbildung 2: Es gilt $S_b \circ D_{120} = S_c$.

$1.Op \diagdown 2.Op$	I	D_{120}	D_{240}	S_a	$\mathbf{S_b}$	S_c
I	I	D_{120}	D_{240}	S_a	S_b	S_c
$\mathbf{D_{120}}$	D_{120}	D_{240}	I	S_b	$\mathbf{S_c}$	S_a
D_{240}	D_{240}	I	D_{120}	S_c	S_a	S_b
S_a	S_a	S_c	S_b	I	D_{240}	D_{120}
S_b	S_b	S_a	S_c	D_{120}	I	D_{240}
S_c	S_c	S_b	S_a	D_{240}	D_{120}	I

Abbildung 3: Gruppentafel für die Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks; hervorgehoben ist die Verknüpfung $S_b \circ D_{120} = S_c$.

Wir fassen zusammen: Wir haben eine Menge von Symmetrie-Operationen, aus der wir je zwei Elemente miteinander *verknüpfen*, d.h. hintereinander ausführen, können. Dabei erhalten wir erhalten wir als Ergebnis wieder ein Element aus der Menge der Symmetrie-Operationen.

Wir wollen uns diese Verknüpfung etwas näher betrachten.
Es kommt offenbar darauf an, in welcher Reihenfolge verknüpft wird. Zum Beispiel gilt $D_{120} \circ S_c = S_b$, aber $S_c \circ D_{120} = S_a$. Zur Erinnerung noch einmal: Die zuerst ausgeführte Operation steht rechts.
Wir können natürlich auch drei oder mehr Elemente miteinander verknüpfen, indem wir sukzessive immer das nächste Element mit dem Ergebnis der vorhergehenden Verknüpfung verknüpfen, etwa

$$S_b \circ (S_a \circ (D_{120} \circ D_{240})) = S_b \circ (S_a \circ I) = S_b \circ S_a = D_{240}.$$

Wir hätten die Klammern auch anders setzen können und hätten trotzdem dasselbe Ergebnis erhalten, zum Beispiel

$$(S_b \circ (S_a \circ D_{120})) \circ D_{240} = (S_b \circ S_b) \circ D_{240} = I \circ D_{240} = D_{240}.$$

Glücklicherweise ist das kein Zufall, sondern gilt stets. Diese Unabhängigkeit des Ergebnisses von der Klammerung nennt man das *Assoziativgesetz*.
Schließlich stellen wir noch fest, dass wir jede Operation rückgängig machen können. Wenn wir zum Beispiel aus Versehen um $120°$ gedreht haben und das gar nicht wollten, drehen wir einfach noch einmal um $240°$, und nichts ist geschehen! Formal: $D_{240} \circ D_{120} = I$.

Wir sind nun gerüstet, das Objekt zu definieren, um das es in diesem und den folgenden Artikeln geht.

Definition 1 *Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ ist eine Menge G, bei der je zwei Elemente miteinander verknüpft ($\circ$) werden können, wobei man als Ergebnis wieder ein Element der Menge erhält. Dabei soll gelten:*

A1: [Assoziativgesetz] $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.
A2: [Existenz eines neutralen Elements]
Es gibt ein $I \in G$ mit $I \circ a = a$ für alle $a \in G$.
A3: [Existenz eines inversen Elements]
Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b \circ a = I$.

Das Kommutativgesetz, also $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$, wird ausdrücklich nicht gefordert (sonst wären unsere Symmetrie-Operationen auch keine Gruppe). Gilt es aber trotzdem, so heißt die Gruppe **abelsch** nach dem berühmten Mathematiker N. H. Abel.

Wir überlegen uns zunächst weitere Beispiele für Gruppen:

1. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, wobei die Verknüpfung zweier Zahlen die Addition sein soll, bildet eine Gruppe. Statt des merkwürdigen Kringels in der Definition schreiben wir jetzt also $+$. Das neutrale Element ist 0 (denn $0 + a = a$ für alle ganzen Zahlen a) und das zu a inverse Element ist $-a$. Diese Gruppe ist sogar abelsch.
2. Wir wählen uns nun eine feste natürliche Zahl m und führen die Addition immer (mod m) aus. Wir brauchen als Menge also nur die Zahlen $G = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Ergibt die Summe zweier Elemente aus G einen Wert $\geq m$, so rechnen wir (mod m), ziehen also m ab und landen wieder in G. Auch dies liefert eine abelsche Gruppe. Insbesondere gibt es für jede natürliche Zahl m eine Gruppe mit m Elementen. (Auch für $m = 1$; dann besteht die Gruppe nur aus dem neutralen Element I und der Verknüpfungsvorschrift $I \circ I = I$.) Abb. 4 zeigt die Gruppentafel für $m = 4$.
3. Wie ist es, wenn wir als Verknüpfung zweier ganzer Zahlen die Multiplikation nehmen? Dann gilt das Assoziativgesetz $a(bc) = (ab)c$. Das neutrale Element ist jetzt die 1, denn $1 \cdot a = a$. Außer zu 1 und -1 gibt es jedoch kein inverses Element, denn z.B. die Gleichung $x \cdot 5 = 1$ ist ja in ganzen Zahlen nicht lösbar. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist also keine Gruppe. Wenn jedoch nur das Axiom A3 verletzt ist, so nennt man dies MONOID. Ein Monoid ist also fast eine Gruppe, in der eben nur das Axiom A3 verletzt sein kann.
4. Nimmt man statt $\mathbb{Z}$ die Menge $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, so bildet $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ eine Gruppe, denn nach Ausschluß der 0 kann man in den reellen Zahlen problemlos dividieren.
5. Ganz kurz zum Schluß: Ist die leere Menge eine Gruppe? Nein, denn nach Axiom A2 muß in der Gruppe wenigstens das neutrale Element I enthalten sein.

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Abbildung 4: Gruppentafel für die Addition modulo 4

Lösungen des Mathematikwettbewerbs aus MONOID 65

Aufgabe 1 (Prof. Dr. V. Bach)**:**

a) Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung des Wochentags desselben Datums.
Beispiel: 12.1.01 ist ein Freitag.
$\Rightarrow$ 12.1.00 war ein Mittwoch = Freitag - 2.

b) Warum ist eine natürliche Zahl genau dann durch 3 oder 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 oder 9 teilbar ist?

c) Entwickeln Sie eine entsprechende Regel für Teilbarkeit durch 11.

Lösung:

a) Sei J_a das aktuelle Jahr, W_a der aktuelle Wochentag (als Ziffer zwischen 1 und 7). J_g sei das Jahr, aus dem wir den Wochentag W_g wissen wollen. Weiter benötigen wir $n := J_g - J_a$; $R := n \, mod\, 7$ und A_F, welches die Anzahl 29. Februare, die es in der Zeitspanne $[W_a, W_g]$ gibt bzw. die Anzahl 29. Februare, die es in der Zeitspanne $[W_g, W_a]$ gab, im zweiten Fall multipliziert mit -1 ist. Dann gilt: $W_g = (W_a + R + A_F) \, mod\, 7$, denn da 365 bei der Division durch 7 den Rest 1 hat, kommt in jedem Jahr ein Tag dazu. Zusätzlich müssen die Schalttage berücksichtigt werden.

b) Es gilt: $10^\nu = (9+1)^\nu = 9 \cdot k_\nu + 1$ für alle $\nu \geq 0$. Für eine natürliche Zahl N, deren Dezimalschreibweise $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ ist, gilt also:

$$\begin{aligned} N &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\ &= a_n \cdot (9\,k_n + 1) + a_{n-1} \cdot (9\,k_{n-1} + 1) + \cdots + a_1 \cdot (9\,k_1 + 1) + a_0 \cdot (9\,k_0 + 1) \\ &= 9 \cdot (a_n\,k_n + a_{n-1}\,k_{n-1} + \cdots + a_1\,k_1 + a_0\,k_0) \;+\; (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0), \end{aligned}$$

d.h. N ist genau dann durch 9 teilbar, wenn $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ durch 9 teilbar ist. Da 3 ein Teiler von 9 ist, gilt die Behauptung auch für 3.

c) Es ist $10^\nu = (11-1)^\nu = 11 \cdot k'_\nu + (-1)^\nu$ für alle $\nu \geq 0$. Also gilt:

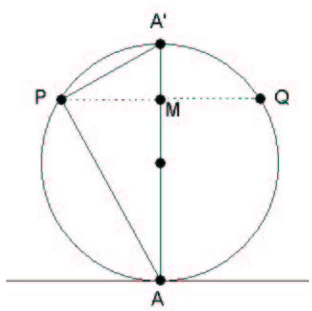
$$\begin{aligned} N &= a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \\ &= 11 \cdot (a_n\,k'_n + a_{n-1}\,k'_{n-1} + \cdots + a_1\,k'_1 + a_0\,k'_0) \;+ \\ &\quad + \left((-1)^n\,a_n + (-1)^{n-1}\,a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0\right)\right), \end{aligned}$$

somit ist N genau dann durch 11 teilbar, wenn seine alternierende Quersumme $(-1)^n\,a_n + (-1)^{n-1}\,a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0$ durch 11 teilbar ist.

Bemerkung: Die Lösung dieser Aufgabe kann man auch mit *Restklassenringen* formulieren. Der Ring $\mathbb{Z}_9$ etwa hat die neun Elemente $\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{8}$. Die Menge $\overline{i}$ enthält jeweils alle ganzen Zahlen, die bei der Division durch 9 den Rest i haben.

Aufgabe 2 (Martin Mettler)**:**

Auf einem horizontalen Tisch liegen drei Kugeln mit verschiedenen Radien. Eine zur Tischfläche parallele Ebene schneidet alle drei Kugeln in Kreisen.
Man bestimme die Höhe der Schnittebene in Bezug auf den Tisch so, dass die Gesamtfläche dieser Kreise maximal wird.



Lösung: Wir betrachten zunächst eine Kugel mit dem Radius R, dem Stützpunkt A, dem Durchmesser AA'. Ferner sei PQ ein Durchmesser, M der Mittelpunkt und $r = |PM| = \frac{1}{2} \cdot |PQ|$

der Radius des Schnittkreises, sowie $|AM| = y$. Laut Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck APA' gilt:

$$(PM)^2 = AM \cdot MA' \Leftrightarrow r^2 = y\,(2R - y)\,.$$

Sind r_1, r_2, r_3 die Radien der Schnittkreise und R_1, R_2, R_3 die Radien der Kugeln, so gilt für die Gesamtfläche:

$$\begin{aligned} A = \pi\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) &= \pi\,\left(y\,(2R_1 - y + 2R_2 - y + 2R_3 - y)\right) = \\ &= \pi\,\left(-3y^2 + 2\,(R_1 + R_2 + R_3)\,y\right)\,. \end{aligned}$$

Wegen $f''(y) = -3 < 0$ hat die quadratische Funktion $f:\ y \to -3y^2 + 2\,(R_1 + R_2 + R_3)\,y$ ein Maximum an der Stelle y mit $f'(y) = 0$:

$$y = \frac{-2\,(R_1 + R_2 + R_3)}{2 \cdot (-3)} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}\,.$$

Anmerkung: Man bemerkt, dass die gewünschte Ebene durch den Schwerpunkt des Dreiecks geht, das durch die Mittelpunkte der Schnittkreise bestimmt ist.

Aufgabe 3 (Prof. Dr. M. Hanke-Bourgeois)**:**

Untersuchen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen

$$U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{\sin(\arccos x)}\,, \qquad -1 < x < 1\,.$$

Zeigen Sie, dass U_n ein Polynom in x vom Grad n ist. Bestimmen Sie den Koeffizienten vor der höchsten Potenz x^n sowie die Funktionswerte des Polynoms an den Stellen $x = 0$ und $x = \pm 1$. Skizzieren Sie den Graph des Polynoms.

Lösung: Für $n = 0$ ist $U_0(x) = 1$ in $-1 < x < 1$, also eine konstante Funktion (ein Polynom vom Grad 0).
Für $n = 1$ ergibt sich aus der Halbwinkelformel

$$U_1(x) = \frac{\sin(2\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = \frac{2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = 2\cos(\arccos x) = 2x\,,$$

also ein Polynom vom Grad 1.
Für $n \geq 2$ verwenden wir die trigonometrischen Additionstheoreme

$$\sin\big((n+1)\arccos x\big) = \sin(n\arccos x)\cos(\arccos x) + \sin(\arccos x)\cos(n\arccos x)$$

und

$$\sin\big((n-1)\arccos x\big) = \sin(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(\arccos x)\cos(n\arccos x).$$

Durch Summation erhalten wir hieraus

$$\sin\big((n+1)\arccos x\big) + \sin\big((n-1)\arccos x\big) = 2x\sin(n\arccos x)$$

beziehungsweise $U_n(x) + U_{n-2}(x) = 2xU_{n-1}(x)$.
Also gilt für $n \geq 2$ die Rekursionsformel $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$, und man erkennt, daß jede Funktion U_n ein Polynom vom Grad n sein muß. Durch Auswertung der Rekursion ergibt sich beispielsweise

$$U_2(x) = 4x^2 - 1\,, \qquad U_3(x) = 8x^3 - 4x\,, \qquad U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1\,,$$

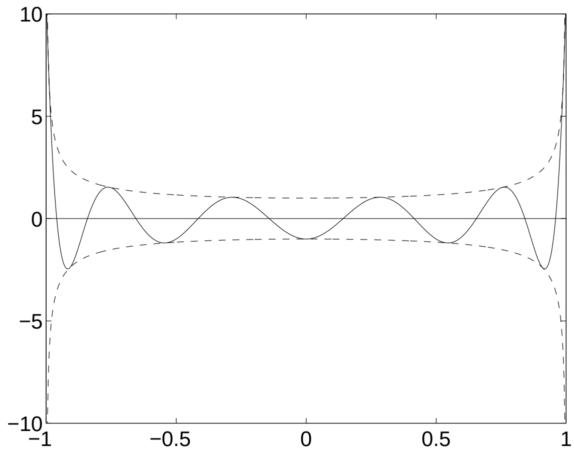
usw. Der Koeffizient von U_n vor x^n ist offensichtlich gleich 2^n. Ferner sieht man sofort, daß alle U_n mit geradem Index spiegelsymmetrisch zu $x = 0$ sind und alle U_n mit ungeradem Index punktsymmetrisch zu $x = 0$ sind.

Für die Werte $\{U_n(0)\}$ ergibt die Rekursion $U_n(0) = -U_{n-2}(0)$ und hieraus folgt unmittelbar $U_{2n}(0) = (-1)^n$ und $U_{2n+1}(0) = 0$.
Für die Werte $\{U_n(1)\}$ gilt $U_n(1) = 2U_{n-1}(1) - U_{n-2}(1)$.
Ein wenig Raten ergibt die Lösung $U_n(1) = n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aus der Symmetrie folgt schließlich $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$.

Die Nullstellen von U_n sind diejenigen x mit $\arccos x = k\pi/(n+1)$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$, also $x_k = \cos\big(k\pi/(n+1)\big)$, $k = 1, \dots, n$. Diese Punkte liegen alle im offenen Intervall $(-1, 1)$.

Generell gilt: $$|U_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\arccos x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das Polynom oszilliert also immer zwischen den gebrochen eingezeichneten Kurven hin und her. Lediglich für $\arccos x = (2k+1)\pi/(2n+2)$, also $\widetilde{x}_k = \cos\big((2k+1)\pi/(2n+2)\big)$, $k = 0, \dots, n$, werden diese Grenzwerte erreicht.
Die folgende Abbildung zeigt das Polynom U_{10} und die gestrichelt eingezeichneten Funktionen $\pm 1/\sqrt{1-x^2}$.



Aufgabe 4 (Martin Mettler)**:**
Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\sqrt[7]{(x+127)^6} - 8 \cdot \sqrt[7]{(x-127)^6} = 7 \cdot \sqrt[7]{(x^2-16129)^3}.$$

Lösung:
Zur Lösung teilen wir zunächst beide Seiten der Gleichung durch $\sqrt[7]{(x-127)^6}$ (die Division ist erlaubt, da $\sqrt[7]{(x-127)^6} \neq 0$ für $x \neq 127$ ist) und erhalten:

$$\sqrt[7]{\left(\frac{x+127}{x-127}\right)^6} - 8 \cdot 1 = 7 \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{(x+127)(x-127)}{(x-127)^2}\right)^3}$$

Wir kürzen in der letzten Wurzel $(x-127)$ heraus und setzen

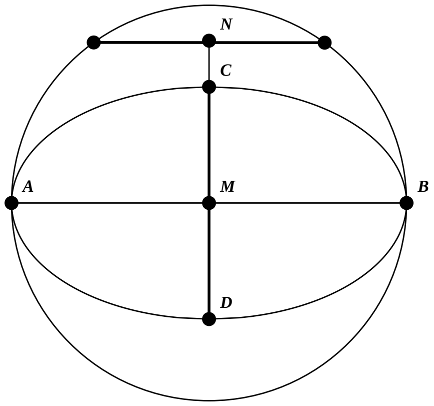
$$\sqrt[7]{\left(\frac{x+127}{x-127}\right)^3} =: y. \qquad (*)$$

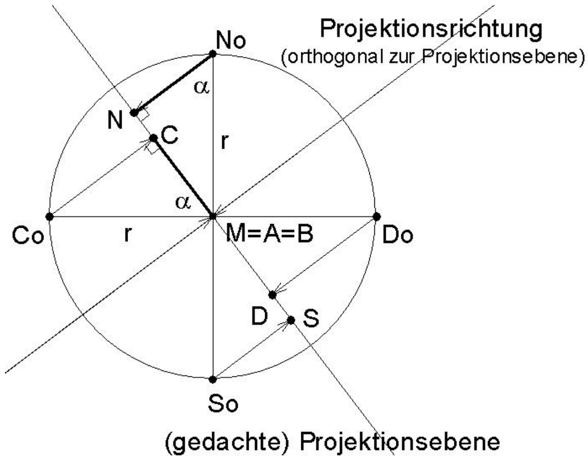
Wir erhalten: $y^2 - 8 = 7y$ mit den Lösungen -1 und 8.
Rückeinsetzen in $(*)$ liefert für $y = -1$ die Lösung $x = 0$ und für $y = 8$ die Lösung $x = 129$. Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{0, 129\}$.

Aufgabe 5 (Dr. E. Kroll)**:**

Um eine Kugel mit Nordpol N und Äquatorkreis räumlich darzustellen, wird der Nordpol in das Innere des Umrisskreises gelegt und so eine Draufsicht simuliert. Der Äquator ist dann als Ellipse zu zeichnen, deren Hauptachse so lang ist wie ein Kreisdurchmesser. Zeigen Sie, dass die Nebenachse die in der Zeichnung angegebene Länge haben muss!

Lösung: Wir ergänzen die Aufgabenstellung durch einige Bezeichnungen und stellen die Raumsituation im Kreuzriss dar, wobei die Zusammenhänge unmittelbar klar werden:





Es ist $|N_0N| = |MC|$, da die Dreiecke MN_0N und C_0MC kongruent sind.

Aufgabe 6 (Prof. Dr. V. Bach)**:**

a) Beweisen Sie, dass $\log_n(1+x) \leq x$ für alle $x \geq 0$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 3$.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer, reeller Zahlen, $a_n \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere:

$$p_n \quad := \quad (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent ist, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ endlich ist. Benutzen Sie 6 a).

c) Sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ endlich, also $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Geben Sie durch A eine obere Schranke für $\lim_{n\to\infty} p_n$ an.

Lösung:

a) Die Ableitung von $f(x) := log_n(x+1)$ ist $f'(x) = \frac{1}{(x+1) ln\, n}$. Für alle $x \geq 0$ gilt: $f'(x) \leq 1$ (= Ableitung von $g(x) := x$), wenn $n \geq e$. Da beide Funktionen an der Stelle $x = 0$ den gleichen Wert haben, d.h. $f(0) = g(0) = 0$, ist die Behauptung für $n \geq e$ richtig.

b) Da alle $a_n \geq 0$, gelten folgende Abschätzungen:

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n) \tag{1}$$

$$ln\big((1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n)\big) = ln(1+a_1) + \cdots + ln(1+a_n) \overset{a)}{\leq} a_1 + \cdots + a_n$$

$$\Leftrightarrow \qquad (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq e^{a_1+\cdots+a_n}. \tag{2}$$

Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt. Daraus und aus der wachsenden Monotonie von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt die Behauptung.

c) Nach der letzten Gleichung in b) gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \le e^A$.

Aufgabe 7 (Martin Mettler)**:**

Zu bestimmen ist der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)^2+(2n)^2}}$.

Lösung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Also ist sie auch integrierbar auf $\mathbb{R}$ und somit auch auf dem Intervall $I = [0, 1]$.
Ist aber f integrierbar auf I, so hat jede riemannsche Integralsumme von f denselben Grenzwert, der gleich ist mit dem Integral von 0 nach 1 aus $f(x)$.

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot f(\xi_k) \to \int_0^1 f(x)dx \quad \text{für} \quad \nu = max(x_k - x_{k-1}) \to 0.$$

Wir bilden die Teilung des Intervalls I in n gleiche Teile durch die Punkte

$$x_0 = 0\,,\ x_1 = \frac{1}{n}\,,\ x_2 = \frac{2}{n}\,, \dots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n}\,,\ x_n = 1$$

und wählen auf den Teilintervallen $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ jeweils ihre Mittelpunkte

$$\xi_1 = \frac{1}{2n}\,,\ \xi_2 = \frac{3}{2n}\,,\ \xi_3 = \frac{5}{2n}\,, \dots\ \xi_n = \frac{2n-1}{2n}\,.$$

Dann ist

$$\sigma_n = (x_1 - x_0)\frac{\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2n}\right)^2}} + (x_2 - x_1)\frac{\frac{3}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2n}\right)^2}} + \dots + (x_n - x_{n-1})\frac{\frac{2n-1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2}}\,.$$

Wegen $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} = \nu$ ist nun

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(2n)^2 + 1^2}} + \frac{3}{\sqrt{(2n)^2 + 3^2}} + \dots + + \frac{2n-1}{\sqrt{(2n)^2 + (2n-1)^2}} \right) = a_n\,.$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t\,dt}{t} = t\Big|_1^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1\,.$$

Das Integral erhält man durch die Substitution $1 + x^2 = t^2$.

Aufgabe 8 (Dr. M. Brühl, Dipl.-Math. M. Strehl)**:**

Gegeben seien n reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$. Bestimmen Sie Minimum und Minimalstelle von

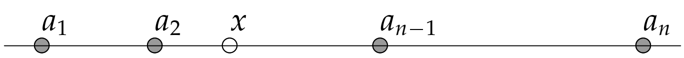
a) $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$,

b) $g(x) = \max\{|x - a_1|, |x - a_2|, \dots, |x - a_n|\}$,

c) $h(x) = \sqrt{|x - a_1|^2 + |x - a_2|^2 + \dots + |x - a_n|^2}$.

Sind die jeweiligen Minimalstellen eindeutig bestimmt?

Lösung: Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$.



1. Für beliebiges $j \le n/2$ ist

$$|x - a_j| + |x - a_{n+1-j}| = l_j := a_{n+1-j} - a_j \qquad \text{für } x \in [a_j, a_{n+1-j}]$$

und $\quad |x - a_j| + |x - a_{n+1-j}| > l_j \qquad$ für $x \notin [a_j, a_{n+1-j}]$.

Fall n gerade: Damit ist

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n/2} \left(|x-a_j| + |x-a_{n+1-j}|\right) \geq \sum_{j=1}^{n/2} l_j$$

und Gleichheit gilt genau dann, falls x in allen Intervallen, also im innersten $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$ enthalten ist. Jedes x aus diesem Intervall minimiert also $f(x)$.

Fall n ungerade: Jetzt gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \left(|x-a_j| + |x-a_{n+1-j}|\right) + |x-a_{(n+1)/2}| \\ &\geq \sum_{j=1}^{(n-1)/2} l_j + |x-a_{(n+1)/2}| \geq \sum_{j=1}^{(n-1)/2} l_j \end{aligned}$$

und genau für $x^* = a_{(n+1)/2}$ gilt in beiden Abschätzungen Gleichheit.

2. Offenbar ist $g(x) = \max\{|x-a_1|, |x-a_n|\}$ und für $x^* = (a_1+a_n)/2$ ist $g(x^*) = (a_n - a_1)/2$ das Minimum; die Minimalstelle ist eindeutig bestimmt.

3. $h^2(x) = \sum_{j=1}^n (x-a_j)^2 = nx^2 - 2(\sum_{j=1}^n a_j)x + \sum_{j=1}^n a_j^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Die Minimalstelle x^* von $h^2(x)$ ergibt sich als Lösung von $(h^2)'(x) = 2nx - 2\sum_{j=1}^n a_j = 0$, also $x^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j$.

   Der Wert des Minimums beträgt dann

   $$h^2(x^*) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j - a_k)^2,$$

   wie man nach einiger Rechnung feststellt. Die Funktion $h(x)$ nimmt ihr Minimum ebenfalls an der Stelle x^* und nur dort an und

   $$h(x^*) = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j - a_k)^2}.$$

Aufgabe 9 (Martin Mettler)**:**

Zeige: Ist die Funktion $f : [-a, a] \to [-a, a]$ stetig auf ihrem ganzen Definitionsbereich, so gibt es mindestens eine Zahl b auf dem Intervall $[-a, a]$, für die $f(b) = b$ gilt und mindestens eine Zahl c auf dem Intervall $[-a, a]$, für die $f(c) = -c$ gilt.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $g : [-a, a] \to [-a, a]$, $g(x) = f(x) - x$, die ebenfalls stetig auf $[-a, a]$ ist (als Differenz zweier stetiger Funktionen).
Für alle x mit $-a \leq x \leq a$ ist $-a \leq f(x) \leq a$.
Dann gilt $g(a) = f(a) - a \leq 0$, da $f(a) \leq a$ ist.
Außerdem ist $g(-a) \leq f(-a) - (-a) = f(-a) + a \geq -a + a = 0$.
Die auf $[-a, a]$ stetige Funktion g hat an den Enden des Intervalls $[-a, a]$ verschiedene Vorzeichen, also gibt es mindestens eine Stelle b, an der sie den Wert Null hat. Also ist $0 = g(b) = f(b) - b$, d.h. $f(b) = b$. Eine ähnliche Überlegung für die Funktion $h(x) = f(x) + x$ liefert die Existenz mindestens eines c mit $f(c) = -c$.

Aufgabe 10 (Dipl.-Math. Astrid Schnädelbach, PD Dr. Klaus Barthelmann)**:**

Das iterierte Gefangenendilemma

Der amerikanische Politologe R. Axelrod hat durch Simulationen gezeigt, daß sich Zusammenarbeit auch in einer Ellenbogengesellschaft lohnt. Die hier besprochene Erweiterung geht auf J.-P. Delahaye zurück. So sind die Regeln:

- Wenn zwei Individuen zusammenarbeiten, erhalten beide jeweils drei Punkte.
- Wenn ein Individuum zusammenarbeiten will, das andere aber betrügt, erhält der Betrüger vier Punkte und der Betrogene geht leer aus.
- Wenn beide Individuen betrügen, erhält jedes einen Punkt.
- Ein Individuum kann die Zusammenarbeit aufkündigen. Diese Entscheidung ist unwiderruflich. Von diesem Zeitpunkt an erhalten beide jeweils zwei Punkte pro Runde.

Ein Turnier wird eine vorgegebene Anzahl von Runden (z.B. 1000) gespielt, die den Individuen aber nicht bekannt ist. In jeder Runde trifft jedes Individuum mit jedem anderen zusammen. Die erhaltenen Punkte werden für jedes Individuum zusammengezählt. (Es zählen also weder die Punktdifferenzen innerhalb der Paare – dann wären die Betrüger nicht zu schlagen – noch die Gesamtpunktzahl der Gemeinschaft – dann würde man sich ehrliche Individuen wünschen.)
Eine zusätzliche Erweiterung besteht darin, nach einer bestimmten Anzahl von Runden (z.B. 100) die Anzahlen der beteiligten Individuen entsprechend ihres Erfolgs zu verändern.
Das ursprüngliche Beispiel handelte von Gefangenen, die entweder gestehen (d.h. den anderen belasten, d.h. betrügen) oder schweigen (d.h. zusammenarbeiten) können. Die genannten Punkte stehen dabei für Jahre in Freiheit, die von den eigentlich verdienten fünf Jahren Gefängnis abgezogen werden.
Es gibt aber viele weitere Beispiele: Sollen zwei Geschäftspartner immer fair liefern bzw. zahlen, oder lohnt es sich, ab und zu schlechte Ware zu liefern bzw. die Bezahlung endlos zu verzögern? Sollen zwei Tierarten sich den vorhandenen Lebensraum friedlich aufteilen oder immer wieder gegenseitig streitig machen?
Überraschenderweise zeigt sich, daß es – abhängig von der Umgebung natürlich – im allgemeinen schlecht ist, die Initiative zum Betrug zu ergreifen. Es ist aber auch schlecht, sich alles gefallen zu lassen. Dies soll durch eigene Experimente überprüft werden. Dazu werden sowohl ein Auswertungsprogramm als auch Strategien benötigt. Eine Strategie ist eine (programmiersprachliche) Funktion, die aus den bisherigen eigenen und gegnerischen (*ein* Gegner) Aktionen die nächste Aktion ermittelt. Das Auswertungsprogramm wird typischerweise ein Feld von Funktionen verwenden. Es läßt die einzelnen Strategien gegeneinander antreten und gibt am Ende den Verlauf (d.h. die erzielten Punkte) aus.

Eure Aufgabe ist es, Euch verschiedene Strategien zu überlegen und diese zu implementieren! Falls Ihr in Object-Pascal programmiert, könnt Ihr ein schon fertiges Auswertungsprogramm verwenden. Außerdem würden wir dann am Schülertag ein Turnier veranstalten, in dem Ihr Eure Strategien gegen die anderer Schulklassen testen könnt.
Abzugeben sind die Strategien und eine kurze Beschreibung der Ergebnisse Eurer Experimente.

Lösung: Der Erfolg einer Strategie hängt wesentlich vom Umfeld (d.h. den anderen teilnehmenden Strategien) ab. Deshalb gibt es keine optimale Strategie. Dennoch lassen sich einige allgemeingültige Ergebnisse nennen. Die Experimente bestätigen die in der Aufgabenstellung gemachten Aussagen: Es ist im allgemeinen schlecht, die Initiative zum Betrug zu ergreifen. Andererseits ist es aber auch schlecht, sich alles gefallen zu lassen. Läßt man die Kündigung außer Acht, ist TIT FOR TAT eine gute Strategie. Sie lautet: Kooperiere in der ersten Runde. Dann tue immer das, was der Gegner in der letzten Runde getan hat.
Die Kündigung empfiehlt sich, wenn der Gegner stets betrügt. TIT FOR TAT MIT SCHMERZGRENZE ist eine sehr erfolgreiche Strategie: Spiele TIT FOR TAT, aber zähle alle fünf Züge die erreichten Punkte zusammen. Wenn das bisherige Spiel weniger als zwei Punkte pro Zug eingebracht hat, dann kündige.
Sehr gut und ausführlich wird das iterierte Gefangenendilemma beschrieben in: Delahaye, J. und Mathieu, P.: Altruismus mit Kündigungsmöglichkeit, Spektrum der Wissenschaft, Februar 1998.
Im Internet findet Ihr unter `http://www.informatik.uni-mainz.de/~astra/schueler/dilemma.html` das Ergebnis des Turniers aller eingesandten Strategien.

Mitteilungen der Redaktion

1. Am 22. März 2001 fand aus Anlass der Übernahme der Herausgabe von MONOID durch den Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz eine Feier statt, in der nach Grußworten des Dekans des Fachbereichs Mathematik, Prof. Dr. Klaus Doerk, und des Vizepräsidenten für Studium und Lehre der Johannes Gutenberg-Universität, Prof. Dr. Ulrich Druwe, der erste Communicatorpreisträger der Deutschen Forschungsgemeinschaft, der Giessener Professor Dr. Albrecht Beutelspacher die Verdienste des Gründers und bisherigen Herausgebers von MONOID, OStR i.R. Martin Mettler, würdigte und anschließend über interessante Perspektiven der Mathematik an der Schnittstelle von Schule und Universitätßprach.

2. In den Monaten April und Mai gingen zahlreiche Abonnementsbestellungen ein. Auch in Zuschriften gab es positive Resonanz auf die Veränderung in der Herausgabe; die Kontakte per eMail oder Brief werden wir weiter pflegen.

3. Das Titelbild dieses Heftes zeigt das Logo von MONOID, das auch im Internet unter `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid` zu finden ist. Es stellt einen Spezialfall eines der bekanntesten geometrischen Sätze, des Satzes von Pascal, dar: Sind 6 Punkte auf einer Kegelschnittskurve (Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel) gegeben und zeichnet man 6 Verbindungsgeraden so, wie auf dem Titelblatt dargestellt, so liegen die drei Schnittpunkte auf einer gemeinsamen Geraden, sie sind „kollinear“. Im Internet findet Ihr den Satz in einer dynamisierten Form, so dass Ihr die Figur verändern könnt, wobei Ihr feststellen werdet, dass die Kollinearität der drei Schnittpunkte erhalten bleibt.

4. Auf der Homepage von MONOID gibt es inzwischen die Rubrik „Errata“. Zwar sind wir bestrebt, fehlerfrei zu arbeiten, aber errare humanum est, und so passieren doch immer wieder mal kleine Versehen, wofür wir um Nachsicht bitten. Wir nehmen dankbar Hinweise auf solche Pannen auf; denn dies ist an den Mathematikern sympathisch: sie geben ihre Fehler zu und sind bestrebt, sie so schnell wie möglich zu korrigieren.

5. MONOID erfährt von verschiedenen Institutionen Unterstützung, so schon traditionell durch das Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey unter seinem Leiter OStD G. Hoffmann, durch das Karolinen-Gymnasium in Frankenthal unter seinem Leiter OStD Dr. J. Theisohn und durch das Leibniz-Gymnasium in Östringen unter seinem Leiter OStD Dr. W. Hintzmann. Ansprechpartner für MONOID-Le(ö)ser in den genannten Gymnasien sind OStR Wolfgang Kraft (ELG, Frankenstraße 17, 55232 Alzey), OStR Arthur Köpps (KG, Röntgenplatz 5, 67227 Frankenthal) und OStR Klaus Ronellenfitsch (LG, Postfach 1120, 76677 Östringen).

6. Hier die bisher noch nicht genannten Anschriften dreier Autoren dieses Heftes:

   Valentin Blomer, Th.-Veiel-Straße 62, 70374 Stuttgart.

   Dr. Hartwig Fuchs, Friedrich-Naumann-Straße 36, 55131 Mainz.

   Ingmar Rubin, Kienbergstraße 25, 12685 Berlin.

Für die Redaktionsleitung: Ekkehard Kroll

MONOID Jahrgang 21 Heft 66 Juni 2001

Inhalt

Die Redaktion

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 15 DM (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 123646 bei der Stadtsparkasse Frankenthal, BLZ 54551030.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik der Universität Mainz, 55099 Mainz
Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid