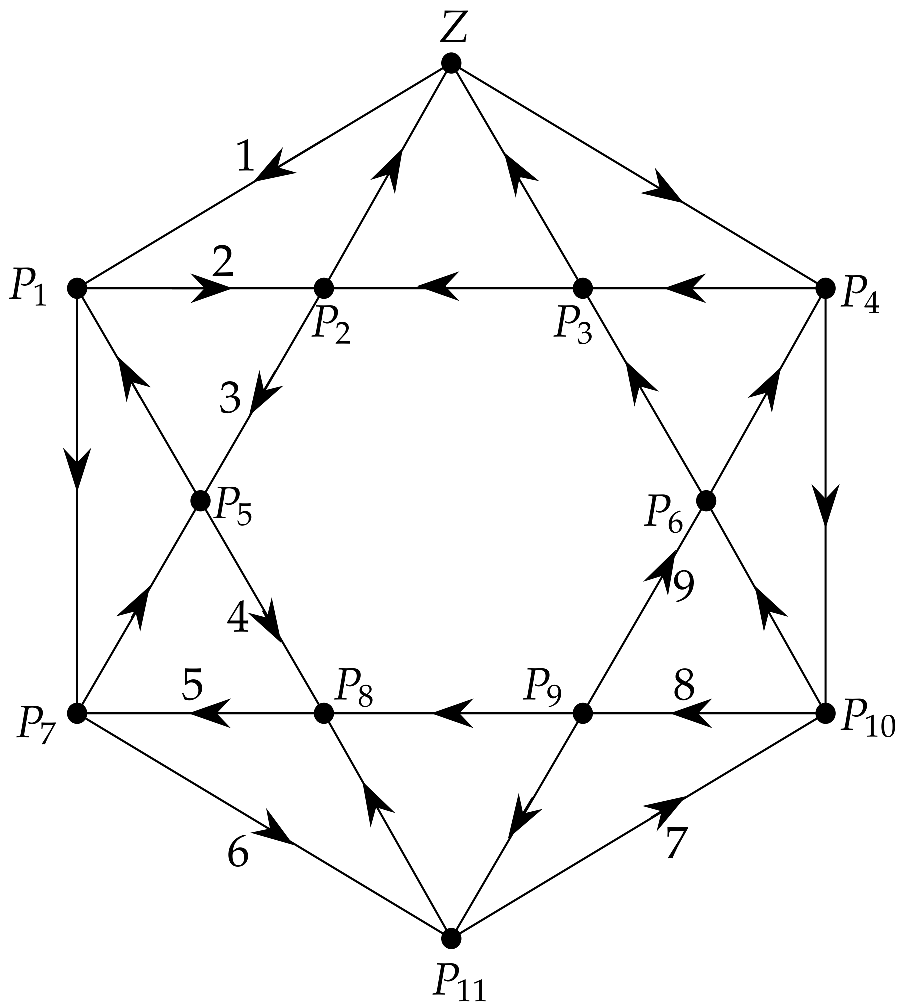
Jahrgang 21 Heft 67 September 2001

# MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker




Die einzigartige Mathe-Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
in der Bundesrepublik Deutschland,
1980 begründet von Martin Mettler
und seit 2001 herausgegeben vom Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

**Lieber Le(ö)ser!**

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

**Wichtig:** Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

**Für Schüler/innen der Klassen 5-7** sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

**Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Ecke für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern). Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

**15. 11. 2001.**

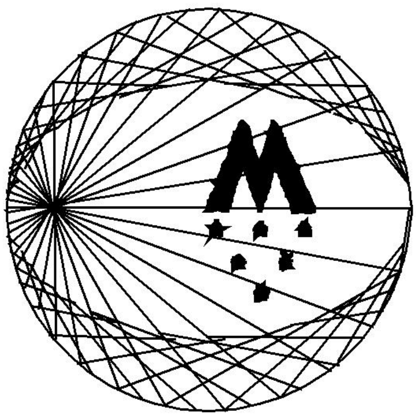
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg**
Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: MMettler@t-online.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

## Das Goldene M



Außer der Plakette mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten (z. B. Teilnahme an Wettbewerben).
Zur Ermittlung der Preisgewinner werden folgende Tätigkeiten bewertet: Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Ecke für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

# Die Magie der Zahl $1001$

von Martin Mettler

**$1001$** ist die Zahl der **Scheherezade**, der Märchenerzählerin in Tausend und einer Nacht. Sie hat die folgende besondere **Eigenschaft:**
$1001$ ist das Produkt von drei aufeinander folgenden Primzahlen $7 \cdot 11 \cdot 13$.

Weiter bemerken wir, dass $257 \cdot 1001 = 257257$, $965 \cdot 1001 = 965965$ usw.

Im Allgemeinen gilt: Ist $n$ eine dreistellige natürliche Zahl der Form $n = \overline{abc}$ wobei $a$, $b$, $c$ Ziffern sind, so ist $1001 \cdot n$ eine sechsstellige Zahl der Form $\overline{abcabc}$.

Dazu passt das folgende Spielchen zwischen Lisa, Laura, Uwe und Sven.

- Lisa gibt Laura ein Blatt Papier und fordert sie auf, eine dreistellige Zahl auf zu schreiben, z.B. $634$.
- Nun soll sie die Zahl nochmals dranhängen; sie erhält dann eine sechstellige Zahl. In unserem Beispiel ist das die Zahl $634634$.
- Weiter soll sie diese Zahl durch $7$ teilen. Lisa behauptet schon im Voraus, dass die Teilung aufgeht.
- Das Ergebnis soll Laura Uwe geben, der es durch $11$ teilen soll. Auch diesmal kann Lisa von vorne herein behaupten, dass bei der Teilung kein Rest bleibt.
- Das Ergebnis soll Uwe nun an Sven weitergeben, der es durch $13$ teilen und sein Blatt Laura geben soll. Lisa sagt nun zu Laura: „Dies ist die Zahl, die du dir ausgedacht hast“. Und es wird stimmen.

Wieso funktioniert das Spielchen?

Angenommen, Laura hat sich die Zahl $\overline{abc} = n$ ausgedacht.
Durch Anhängen erhält sie die Zahl $\overline{abcabc} = 1000 \cdot n + n = 1001 \cdot n$.
Teilt sie nun durch $7$, so erhält sie $143 \cdot n$.
Teilt Uwe dieses Ergebnis durch $11$, so erhält er $13 \cdot n$.
Wenn nun Sven das Ergebnis durch $13$ teilt, so erhält er tatsächlich die Zahl $n$.

Es sei nun $z = \overline{eu}$ eine mehrstellige Zahl, bei der $u$ für die Zahl aus den letzten drei Ziffern steht und $e$ für die Zahl aus den übrigen Ziffern. Also ist

$$z = 1000 \cdot e + u = 1001 \cdot e - e + u = 1001 \cdot e + (u - e).$$

Nun ist $1001$ durch $7$, $11$ und $13$ teilbar. Ist auch $u - e$ durch $7$ ($11$ bzw. $13$) teilbar, so ist auch $z$ durch $7$ ($11$ bzw. $13$) teilbar.

Daraus ergibt sich die folgende **Teilbarkeitsregel**: Eine Zahl ist genau dann durch $7$ ($11$ bzw. $13$) teilbar, wenn die Differenz aus der Zahl, die aus den letzten drei Ziffern gebildet ist, und der Zahl aus den übrigen Ziffern durch $7$ ($11$ bzw. $13$) teilbar ist.

Z.B.: Es ist $29134$ durch $7$ teilbar, weil $134 - 29 = 105$ durch $7$ teilbar ist.

$474672$ und die Zahl $672474$ sind jeweils durch $11$ teilbar, weil $672 - 474 = 198$ und $474 - 672 = -198$ durch $11$ teilbar sind. (Klar: Statt $u - e$ kann man auch $e - u = -(u - e)$ auf Teilbarkeit untersuchen.)

Es ist $645 - 294 = 351$ durch $13$ teilbar, also ist auch die Zahl $645294$ durch $13$ teilbar; wegen $645294 - 195 = 645099 = 13 \cdot 49623$ ist auch die Zahl $645294195$ durch $13$ teilbar usw.

Über den praktischen Wert dieser Regel lässt sich streiten. Ich wollte hier lediglich die Denkweise bei der Suche nach Teilbarkeitsregeln veranschaulichen (vgl. MONOID 66, S. 32).

# Eine besondere Geometrie-Aufgabe

von Martin Mettler

Ich hatte gerade das Buch „Vom Charme der ‚verblassten' Geometrie" herausgebracht, als ein begeisterter Mitarbeiter von MONOID mir folgende **Aufgabe** zuschickte:

*„Die Punkte $A$ und $B$ liegen außerhalb eines gegebenen Kreises $k$. Gesucht ist ein Punkt $C$ auf $k$ mit der folgenden Eigenschaft: $AC$ und $BC$ schneiden $k$ ein weiteres Mal in $D$ bzw. $E$, wobei $DE||AB$ gelten soll."*

Er bat um eine Lösung des „großen Meisters", weil diese Aufgabe ihn seit längerer Zeit, leider ohne Erfolg, beschäftigt hatte.

Ich selbst fand auf Anhieb auch keine Lösung und so überlegte ich, diese Aufgabe weiter zu geben. Zunächst gab ich sie per e-Mail an die eifrigsten Mitarbeiter von MONOID, dann an Teilnehmer der Deutschen Mathematik-Olympiade und an mehrere Kollegen und Mathematiker, die ich bei verschiedenen Veranstaltungen traf. Leider brachte keiner die Geduld auf, das Problem sauber zu lösen. Außer allgemeinen Hinweisen, die zur Lösung von Konstruktionsaufgaben herangezogen werden können, nichts!

Schließlich traf ich bei der Endrunde der 40. Deutschen Mathematik-Olympiade einen jungen, gewieften Liebhaber der Geometrie, der ebenfalls vor kurzem ein Buch Namens „geometria - scientiae atlantis" herausgegeben hat. Selbstverständlich gab ich auch ihm diese Aufgabe, obwohl ich mir keine richtige Lösung versprach. Doch der junge Mann sagte stante pede, dass eine Lösung dieses Problems in seinem Buche steht. Diese Aufgabe sei in der kanadischen Mathe-Zeitschrift „Crux Mathematicorum" als Aufgabe 2430 im April 1999 erschienen; er selbst habe damals die folgende Lösung hin geschickt, die auch in einer der nachfolgenden Ausgaben unter seinem Namen veröffentlicht wurde.

Also, ich kann nur sagen: Respekt!

Der junge Mann ist Herr Dr. Eckard Specht, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Experimentelle Physik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, mit dem Arbeitsgebiet Computerorientierte Materialwissenschaft. Demnach ist Herr Dr. Specht lediglich Hobby-Geometer.

Hier die **Lösung der Aufgabe**:

Es seien $|AP| = u$ und $|BQ| = v$ die Längen der Tangentenabschnitte von $A$ bzw. $B$ an den Kreis $k$ (siehe nachfolgende Abbildung).

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gelten die Gleichungen: $u^2 = |AC| \cdot |AD|$ und $v^2 = |BC| \cdot |BE|$ , deren gegenseitige Division

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BE|}$$

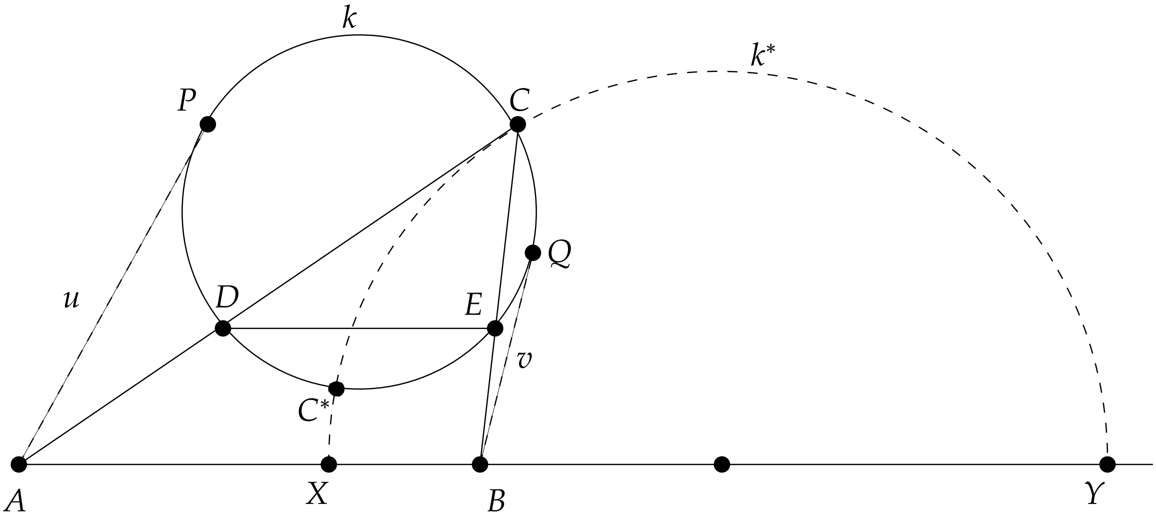
ergibt. Da $DE||AB$ gefordert ist, gilt außerdem nach dem ersten Strahlensatz

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BE|}$$

und daher mit obiger Gleichung

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{u}{v} =: q.$$

Nun sind $A$, $B$ und $k$ fest, so dass das Verhältnis $q$ eine bekannte Konstante ist. Der geometrische Ort aller Punkte $C$, dessen Entfernungen zu zwei Punkten $A$ und $B$ ein konstantes Verhältnis haben, ist der Kreis des Apollonius (s. S. 85-87 in dem Buch „Vom Charme der ‚verblassten' Geometrie" von Martin Mettler). Somit haben wir die




Strecke $AB$ innerlich und äußerlich im gegebenen Verhältnis $q$ zu teilen, um die Punkte $X$ und $Y$ als Endpunkte des Durchmessers vom Kreis des Apollonius $k^*$ zu bestimmen (vgl. Aufgabe A. 22, S. 98, in dem Buch „geometria - scientiae atlantis" von E. Specht, sowie S. 85 - 86 und 109 -111 in dem Buch „Vom Charme der ‚verblassten' Geometrie" von M. Mettler).

Die Schnittpunkte von $k$ und $k^*$ sind dann die gesuchten Punkte $C$ (bzw. $C^*$), wobei es sein kann, dass der zweite Schnittpunkt (im Bild $C^*$) herausfällt, da er keine Schnittpunkte $D$ und $E$ mit $k$ zulässt.

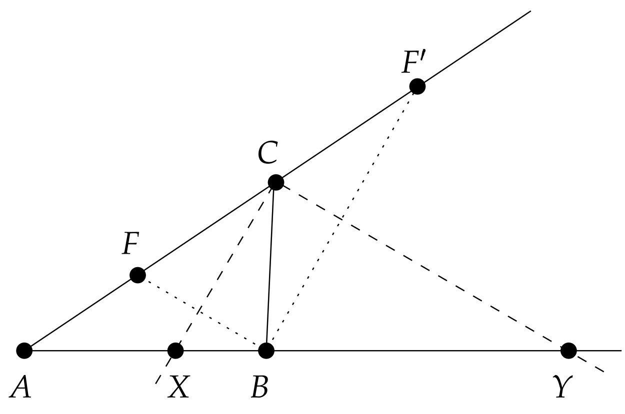
---

## Aufgabe:

a) Führe die in obiger Abbildung dargestellte Konstruktion durch (mit Zirkel und Lineal oder mit einm Geometrie-Programm wie EUKLID oder Cabri Géomètre), d.h. konstruiere bei gegebenem Kreis $k$ und gegebener Strecke $AB$ die Tangentenabschnitte $AP$ und $BQ$ und teile dann die Strecke $AB$ innerlich und äußerlich (man sagt „harmonisch") im Verhältnis $|AP| : |BQ|$. (Tipp: 2. Strahlensatz)

b) Zeige: Die Halbierenden eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten. (Nach der Konstruktion von $C$ über den Schnitt des Apolloniuskreises $k^*$ mit dem Kreis $k$ kann dies zur Kontrolle herangezogen werden.)

(Tipp: Trage auf der Geraden $AC$ von $C$ aus nach beiden Seiten den Abstand $|BC|$ ab und erhalte so die Punkte $F$ und $F'$. Zeige dann $BF||CY$ und $BF'||CX$.)




[Lösung in MONOID 68]

# Bücher-Hinweise

In dem Artikel von Martin Mettler über „Eine besondere Geometrie-Aufgabe“ (S. 4 - 5) wird auf zwei neue Geometrie-Bücher hingewiesen, die sich sehr gut ergänzen, da sie sich im Stoff und in der Konzeption unterscheiden und die im Regal eines jeden Wettbewerbsteilnehmers, aber auch von Lehrern/innen, die Mathematik-AG´s leiten, sowie eines jeden Geometrie-Liebhabers stehen sollten:

**Geometria - scientiae atlantis** von Eckard Specht, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. ISBN 3-929757-39-7, 218 Seiten mit 277 Abbildungen, Paperback.

Dieses Buch ist im Mai 2001 erschienen und wendet sich an mathematisch begabte Schüler/innen als Übungsbuch für die Vorbereitung zur Teilnahme an Wettbewerben, aber auch an alle anderen mathematisch Interessierten zum Trainieren des Lösens von Aufgaben.
Bestellungen kann man (nur) unter

`http://www.math4u.de/download.html`

aufgeben; unterhalb des Bildes auf der Internetseite findet sich ein Link zur Online-Bestellung. Ein Exemplar kostet 23,50 DM inkl. Versandkosten (ins Ausland 25,50 DM).

Da die Canadian Mathematical Society Herrn Specht noch einmal 60 Crux-Hefte (s.u.) geschickt hat, verteilt er diese an die jetzigen Besteller gratis.

**Vom Charme der „verblassten“ Geometrie** von Martin Mettler, Verlag EUROBIT Temesvar 2001, 234 S. mit einem Vorwort von Prof. Dr. A. Beutelspacher, aus dem wir bereits auf dem Beiblatt des MONOID-Heftes Nr. 66 zitiert haben. Ein anderer bekannter Geometer, **Herr Prof. Dr. Armin Herzer** sagt unter anderem: „Welchen (noch) jungen Menschen wird es nicht vom Stuhl reißen, hier diese vielen schönen und seltsamen Sätze der Geometrie beisammen zu sehen. (Mir ging’s jedenfalls so.)“

Dieses Buch kann zum Unkostenbeitrag von 15 DM (broschiert) bzw. 18 DM (kartoniert), zuzüglich 2,50 DM für Porto und Verpackung, direkt beim Autor

**Martin Mettler**, Unterer Kurweg 29, 67316 Carlsberg,
eMail: `mmettler@t-online.de`,

oder bei der MONOID-Redaktion (s. S. 36) bestellt werden. Mit den Einnahmen vom Buchverkauf wird die Herausgabe von MONOID unterstützt.

**Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem**, herausgegeben von der Canadian Mathematical Society, eine Mathe-Zeitschrift für Schüler/innen und Mathe-Liebhaber/innen aus Canada. Sie berichtet ausführlich über mathematische Wettbewerbe in aller Welt und erscheint in englischer Sprache. Dies sollte jedoch für gute Schüler keine ernsthafte Hürde darstellen. Außerdem ist das zum Lesen und Verstehen der Aufgaben nötige Vokabular nicht sehr umfangreich und schnell erlernt. Jeder kann dort seine Lösungen hinschicken, wobei Schülerlösungen einen Bonus haben und bevorzugt abgedruckt werden. Einzig der Preis schmerzt ein wenig: US $ 30 pro Jahr (8 Ausgaben) für ein Abonnement (Studententarif, ansonsten $ 60). Im Internet:

`http://journals.cms.math.ca/CRUX/`

# *Hättest Du es gewusst?*

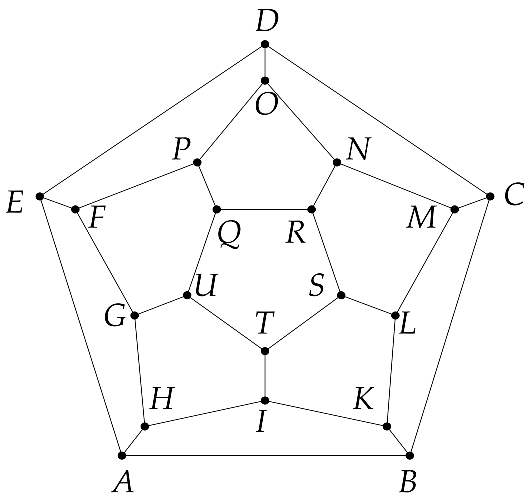
## Was ist ein Hamilton-Weg?

von Hartwig Fuchs

William R. Hamilton (1805-1865) war einer der bedeutendsten irischen Mathematiker - und so ist es durchaus vorstellbar, dass sein wissenschaftlicher Ruf sogar bis in seine Geburtsstadt Dublin gedrungen ist und die Stadtväter eine Straße ihm zu Ehren den Hamilton-Weg benannt haben. Ein solcher Weg - sofern es ihn überhaupt gibt - ist natürlich im Folgenden nicht gemeint.

Im Jahre 1859 veröffentlichte Hamilton in London das Rätselspiel „die Reise auf dem Dodekaeder".[1]
Eine der Aufgaben, die im Dodekaeder-Spiel zu lösen war, lautete:
Man finde einen Wanderweg längs der Kanten, der sämtliche Ecken genau einmal besucht.
Wir geben hier die zweidimensionale Ansicht (Netz) eines Dodekaeders, wobei man sich vorstellen möge, dass der zugehörige Körper mit der fünfeckigen Basis $ABCDE$ auf einer Ebene ruht.

**Aufgabe 1:**




Figur 1

Der Leser ist aufgefordert, in Figur 1 einige Wege gemäß Hamiltons „Spielregel" zu finden. Ferner:
Wie viele solcher Wege gibt es, die mit der Eckenfolge $U$, $T$ beginnen? (falls Du die Lösungszahl bestimmen kannst, teile sie uns bitte mit - H.F. kennt sie nämlich nicht).

Jede Lösung dieser Aufgabe heißt ein Hamilton-Weg auf dem Dodekaeder.

Wir wollen den Begriff „Hamilton-Weg" allgemeiner und genauer festlegen, wobei sich die Figur 1 zur Veranschaulichung gut eignet.
In der Ebene seien die Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$, $n \geq 1$, gegeben. Verbindet man jeden Punkt $P_i$, $i = 0, \ldots, n$ mit mindestens einem der übrigen Punkte $P_j$, $j \neq i$, durch eine Strecke, so erhält man einen Graph $G$.
Die Punkte von $G$ heißen die Ecken von $G$, und die Verbindungsstrecken nennt man die Kanten von $G$.
Das Dodekaeder-Netz ist demnach ein Graph mit 20 Ecken und 30 Kanten.

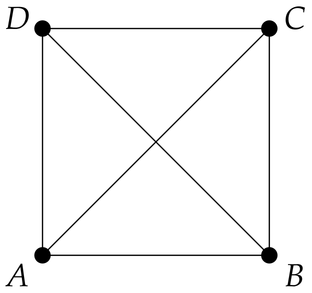
Bemerkung: In der mathematischen Literatur wird ein Graph noch allgemeiner definiert als es hier geschehen ist.

Es sei nun $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$, $m \geq 1$, eine Folge von verschiedenen Ecken eines Graphen $G$, derart dass auch eine Kantenfolge $k_1, k_2, \ldots, k_m$ existiert mit $k_1 = Q_0Q_1$,

[1] Ein Dodekaeder ist ein Körper mit 12 fünfeckigen Flächen, bei dem in jeder Ecke 3 Kanten und 3 Flächen aufeinanderstoßen.

$k_2 = Q_1Q_2$ , ..., $k_m = Q_{m-1}Q_m$ . Dann nennen wir die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_m$ einen Weg in $G$.
Wir wollen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ und $k_m, \ldots, k_2, k_1$ als den gleichen Weg betrachten.

**Beispiel 1:**



Figur 2

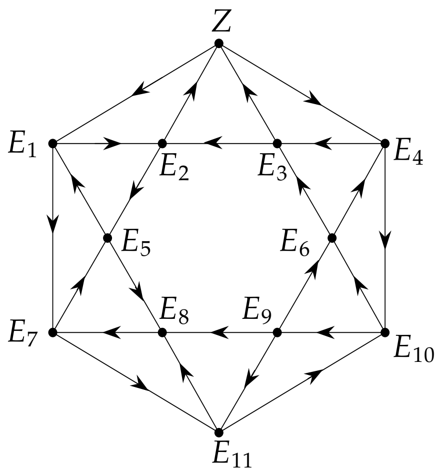
Figur 2 stellt einen Graphen $G$ mit 4 Ecken und 6 Kanten dar.
In $G$ gibt es 6 Wege aus je einer Kante, 12 Wege aus zwei Kanten und 12 Wege aus 3 Kanten.
Es gibt in $G$ keinen Weg, der aus 4 oder mehr Kanten besteht, weil ein solcher Weg mindestens 5 Ecken besitzt und daher wenigstens eine Ecke mehrfach in einem solchen Weg vorkommen müsste.

Durchläuft ein Weg jede Ecke eines Graphen $G$, dann nennt man ihn einen Hamilton-Weg.
In dem eingangs beschriebenen Dodekaeder-Netz ist z.B. der Weg $UTIKBCDEA$ $HGFPONMLSRQ$ ein Hamilton-Weg.

Was bis jetzt eher wie eine mathematische Spielerei aussieht, hat doch vielfältige und wichtige Anwendungen, etwa bei der Lösung von „Transportproblemen".

**Beispiel 2:**

Von einem Verteilungszentrum $Z$ der Post werden mit einem Lastwagen Pakete an 11 Großkunden $E_1, E_2, \ldots, E_{11}$ ausgeliefert. Die Figur 3 stellt einen Stadtplan dar, in dem die Positionen von $Z, E_1, E_2, \ldots, E_{11}$ und die Verbindungswege angegeben sind. Wenn nun von $Z$ aus alle Kunden in nur einer Fahrt beliefert und kein Kunde dabei mehrfach besucht werden soll, dann muss die zu wählende Route in dem Graphen „Stadtplan" (Figur 3) ein Hamilton-Weg sein.



Figur 3

**Aufgabe 2:**

Bestimme einen solchen in $Z$ beginnenden Hamilton-Weg, wenn keine der Verbindungsstrecken eine Einbahnstraße darstellt - die Pfeilspitzen auf den Kanten sind hierbei bedeutungslos und sollten nicht beachtet werden.

Die Aufgabe, in einem Graphen $G$ einen Hamilton-Weg zu finden, kann durch zusätzliche Bedingungen, denen $G$ unterliegt, erschwert sein.
Wenn z.B. die Kanten von $G$ mit einem Zahlenwert versehen sind (im Graphen „Stadtplan" der Figur 3 etwa mit Entfernungsangaben), dann wird man in $G$ unter allen möglichen Hamilton-Wegen auch den kürzesten bestimmen können.
Man nennt dies das Problem des Handlungsreisenden - weil es die Situation eines Handlungsreisenden beschreibt, der zahlreiche durch Straßen verbundene Geschäfte einer Stadt verständlicherweise auf einem Hamilton-Weg minimaler Länge besuchen will. Dazu ein

**Beispiel 3:**

Mit einer Maschine werden sechs verschiedene Farben produziert. Die Maschine muss

vor jedem Farbwechsel gereinigt werden, wobei die Dauer der Reinigung von den beiden Farbsorten abhängig ist (es sei vorausgesetzt, daß es keine Rolle spielt, welche der zwei Farben zuerst hergestellt wird).
Es ist nun eine Reihenfolge für die Herstellung der sechs Farben, beginnend mit Blau, so zu ermitteln, dass jede Farbe genau einmal produziert wird und die Gesamt-Reinigungszeit des Produktionsprozesses minimal wird.
Die Reinigungszeiten sind in der folgenden Tabelle angegeben, die so zu lesen ist:
Die Reinigungszeit für die Kombination Blau, Schwarz und auch Schwarz, Blau befindet sich im Kreuzungspunkt der Blau-Zeile und der Schwarz-Spalte.

| | Blau | Rot | Grün | Gelb | Schwarz | Weiß |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Blau | 0 | 10 | 11 | 11 | 6 | 10 |
| Rot | | 0 | 17 | 15 | 15 | 20 |
| Grün | | | 0 | 10 | 15 | 19 |
| Gelb | | | | 0 | 15 | 20 |
| Schwarz | | | | | 0 | 11 |
| Weiß | | | | | | 0 |

**Aufgabe 3:**
Stelle Beispiel 3 durch einen Graphen dar und bestimme den kürzesten Hamilton-Weg in diesem Graphen.

In der Figur 3 haben wir jeder Kante offenbar mittels einer Pfeilspitze einen Durchlaufungssinn gegeben.
Man nennt einen solchen Graph - bei dem also jede Kante eine Orientierung aufweist - einen gerichteten Graphen oder einen Digraphen.

**Aufgabe 4:**
Untersuche am Digraph „Stadtplan“ mit Einbahnstraßen (Figur 3 mit Kantenorientierung), ob die Post auch jetzt noch ihre Kunden auf einem Hamilton-Weg (oder sogar einem Hamilton-Kreis[2]) beliefern kann.

Digraphen mit Hamilton-Wegen sind nützliche Hilfsmittel bei der Lösung von vielerlei Anwendungsproblemen,
- z.B. bei der Organisation von Herstellungsprozessen, durch die ein Produkt in mehreren Arbeitsgängen gefertigt wird, wobei manche der Arbeiten erst begonnen werden können, wenn andere bereits durchgeführt sind; so etwa kann man die Fließband-Produktion von Autos als einen Hamilton-Weg auffassen;
- oder z.B. bei der Beschreibung hierarchischer Ordnungen in Tiergemeinschaften oder Personengruppen durch Biologen oder Soziologen wie im folgenden

**Beispiel 4:**
Wenn in einem Hühnerhof irgend zwei Hühner gleichzeitig ein begehrenswertes Korn entdecken, so wird man bemerken, dass nur eines der Hühner das Korn aufpicken „darf“. Die darin zum Ausdruck kommende Rangordnung in der Tierpopulation nennt der Biologe eine Hackordnung. Diese Hackordnung lässt sich durch einen Digraphen $D$ darstellen: die Ecken von $D$ repräsentieren die Hühner; von $A$ nach $B$ ist ein Pfeil gezeichnet, wenn Huhn $A$ einen höheren Rang als Huhn $B$ besitzt.

[2] Das ist ein Hamilton-Weg, der zum Ausgangspunkt zurückkehrt; in Figur 2 etwa der Weg $ABCDA$

Ein Hamilton-Weg in $D$ bedeutet dann, dass es eine nach dem Rang gebildete Reihenfolge der Tiere gibt, bei der das höchstprivilegierte Huhn am Anfang steht und am Ende sich das sogenannte „blinde“ Huhn befindet, welches mangels Privilegien nur selten ein Korn findet, das es selbst aufpicken darf.

### Lösungen der Aufgaben

**Lösung zu Aufgabe 1:** z.B. $UTI\,KBC\,DEAHGF\,PON\,MLS\,RQ$ .

**Lösung zu Aufgabe 2:** z.B. $Z\,E_1\,E_7\,E_{11}\,E_{10}\,E_4\,E_6\,E_9\,E_8\,E_5\,E_2\,E_3$.

**Lösung zu Aufgabe 3:** Die sechs Farben werden durch sechs Punkte, die Aufeinanderfolge der Produktion zweier Farben durch die Verbindungsstrecke der entsprechenden zwei Punkte, die Reinigungszeiten als Wertangaben an diesen Strecken dargestellt. So entsteht ein vollständiger, bewerteter Graph, in dem jede Ecke mit allen übrigen Ecken verbunden ist. Der kürzeste Hamilton-Weg in diesem Graphen ist

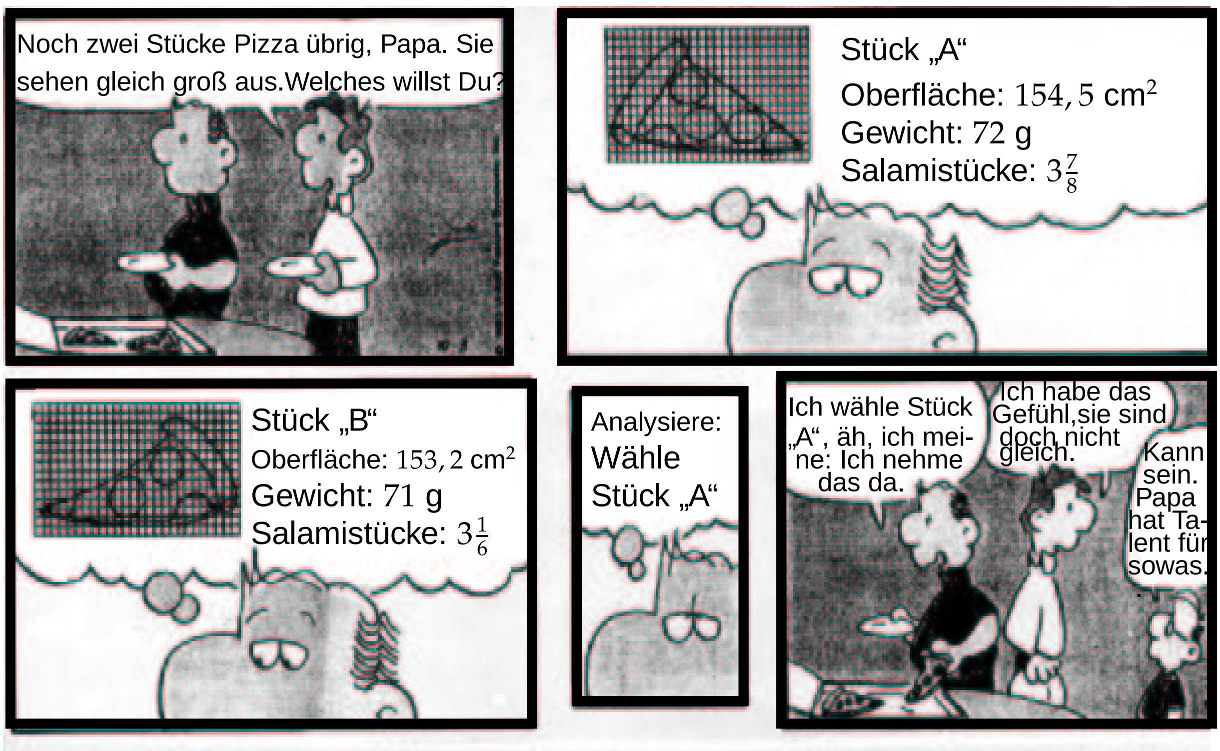
($*$) Blau - Rot - Gelb - Grün -Schwarz -Weiß.

Zur Lösung noch eine Bemerkung:
Wenn man nach der Farbe Weiß den Herstellungsprozess fortsetzen will, dann wird man dies offenbar mit der Farbe Blau tun. Auf diese Weise wird der kürzeste Hamilton-Weg ($*$) zu einem „geschlossenen“ Weg - man nennt dies einen Hamilton-Kreis.

**Lösung zu Aufgabe 4:** In Figur 3 gibt es nur einen einzigen, in $Z$ beginnenden Hamilton-Kreis, mit dem natürlich auch ein Hamilton-Weg gegeben ist:
$Z\,E_1\,E_2\;E_5\,E_8\,E_7\;E_{11}\,E_{10}\,E_9\;E_6\,E_4\,E_3\,Z$ .

---

## Comic



# Die Seite für den Computer-Fan

**Bemerkenswerte Zahlen**

Die 10-ziffrige Zahl $Z = 3\,816\,547\,290$ ist aus (mindestens) zwei Gründen bemerkenswert:

(1) sie enthält jede der Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ genau einmal;

(2) die Zahl, gebildet

aus der 1. Ziffer von $Z$ ist durch $1$ teilbar,

aus den zwei ersten Ziffern von $Z$ ist durch $2$ teilbar,

$\vdots$

aus den neun ersten Ziffern von $Z$ ist durch $9$ teilbar;

und $Z$ selbst ist durch $10$ teilbar.

Im folgenden verlangen wir (1) nicht mehr.

(a) Wie viele 10-ziffrige Zahlen mit der Eigenschaft (2) gibt es? Wie heißen die kleinste und die größte von ihnen?

Es sei nun $Z$ eine n-ziffrige Zahl, $n \geq 1$, mit der Eigenschaft:

(3) für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ sei die Zahl, welche aus den ersten $i$ Ziffern von $Z$ gebildet ist, durch $i$ teilbar.

(b) Bestimme für $n = 20, 21, 22, 23, 24$, wie viele n-ziffrige Zahlen mit der Eigenschaft (3) es jeweils gibt.

(c) Überprüfe: Es gibt nur eine 25-ziffrige Zahl mit der Eigenschaft (3). Wie heißt sie?

(d) Begründe: Es gibt <u>keine</u> n-ziffrige Zahl, $n \geq 26$, mit der Eigenschaft (3)

(H.F.)

**Ein erstaunliches Zahlenquadrat**

Wenn man jede Zeile des Quadrates - von links nach rechts bzw. von rechts nach links gelesen - und jede Spalte - von oben nach unten oder von unten nach oben gelesen - und jede Diagonale - vorwärts oder rückwärts gelesen - jeweils als eine vierziffrige Zahl auffasst, dann enthält das Quadrat $8 + 8 + 4 = 20$ verschiedene vierziffrige Zahlen.

Überprüfe folgende Behauptung: Jede dieser Zahlen ist eine Primzahl. (H.F.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 1 | 9 |
| 9 | 5 | 5 | 1 |
| 1 | 2 | 8 | 3 |
| 1 | 9 | 3 | 3 |

**Hinweis:** Die Aufgaben für den Computer-Fan sind meist ohne Bezug auf einen speziellen Rechner oder ein spezielles Programm oder eine spezielle Programmiersprache gestellt. Ihr könnt selbst entscheiden, für welche Teile es sich lohnt, z.B. einen Taschenrechner oder ein Computeralgebra-System (z.B. DERIVE) einzusetzen oder ein eigenes kleines Programm (z.B. in Pascal) zu schreiben.

Ihr könnt Eure Lösungen auch einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`.

Ein mathematisches Objekt mit vielen Anwendungen:

# Die Gruppe (II)

von Valentin Blomer

Das letzte Mal haben wir ein wichtiges algebraisches Objekt definiert, die Gruppe. Zur Erinnerung noch einmal:

**Definition.** Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ ist eine Menge $G$, bei der je zwei Elemente miteinander verknüpft ($\circ$) werden können, wobei man als Ergebnis wieder ein Element der Menge erhält. Dabei soll gelten:

A1: [Assoziativgesetz] $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.
A2: [Existenz eines neutralen Elements]
Es gibt ein $I \in G$ mit $I \circ a = a$ für alle $a \in G$.
A3: [Existenz eines inversen Elements]
Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b \circ a = I$.

Als Beispiele für Gruppen hatten wir unter anderem die Symmetrien eines Dreiecks mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung, die ganzen Zahlen mit der Addition und die reellen Zahlen ohne $0$ mit der Multiplikation. Ein weiteres Beispiel noch zum Aufwärmen:
Kann sich jemand vorstellen, wie man die Punkte eines Kreises zu einer Gruppe machen kann? Dazu müssen wir erklären, was die Verknüpfung zweier Kreispunkte sein soll. Wir stellen uns einen Kreis mit Radius $1$ und Mittelpunkt im Koordinatenursprung $O$ vor. Den Punkt $(1, 0)$ nennen wir (ganz zufällig...) $I$. Zu jedem Punkt $P$ auf dem Kreis zeichnen wir die Strecke $OP$. Sie schließt mit der Strecke $OI$ einen Winkel $\varphi$ zwischen $0°$ und $360°$ ein. Jetzt definieren wir einfach: Die Verknüpfung zweier Kreispunkte $P_1, P_2$ mit den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2$ soll der Kreispunkt $Q$ mit dem Winkel $\psi := \varphi_1 + \varphi_2 \ (mod\ 360°)$ sein, vgl. Abb. 5. Es ist nicht schwer, die Gruppenaxiome nachzuprüfen (zum Beispiel ist das neutrale Element der Punkt $I$). In der Fachsprache heißt diese Gruppe übrigens $S^1$, wobei $S$ für Sphäre und $1$ für eindimensional steht.

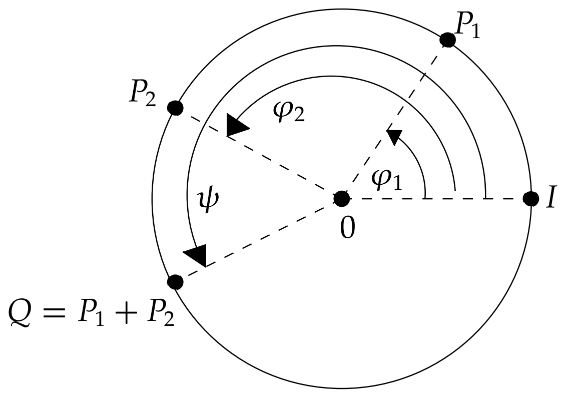



Abbildung 5: So wird ein Kreis zur Gruppe.

Nachdem wir also festgestellt haben, dass es ganz unterschiedlich geartete Beispiele für Gruppen gibt, wollen wir etwas mathematische Theorie treiben. Zunächst ziehen wir ganz einfache Folgerungen aus den Gruppenaxiomen. Die Aussagen der folgenden Hilfssätze („Lemmata“) mögen vielleicht banal klingen, aber es ist gar nicht so einfach, sie nur mithilfe der drei Gruppenaxiome aus der Definition zu beweisen. Man braucht auch etwas Zeit, um sich daran zu gewöhnen, dass das Kommutativgesetz nicht zu gelten braucht.

**Lemma 1** *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $I$ das neutrale Element. Dann gilt auch $a \circ I = a$ für alle $a \in G$. (Mit anderen Worten: $I$ ist auch „von rechts" ein neutrales Elemant; das ist natürlich nur in nichtabelschen Gruppen eine nichttriviale Aussage.)*

**Beweis.** Sei $a \in G$ beliebig. Wähle $b, c \in G$ nach Axiom 3 so, dass $b \circ a = I$ und $c \circ b = I$. Dann gilt

$$a = I \circ a = (c \circ b) \circ a = c \circ (b \circ a) = c \circ I,$$

also

$$a = c \circ I = c \circ (I \circ I) = (c \circ I) \circ I = a \circ I.$$

**Übung:** Man zeige mithilfe von Lemma 1: Aus $a \circ b = I$ folgt $b \circ a = I$.

**Lemma 2** *Es gibt in einer Gruppe $(G, \circ)$* genau *ein neutrales Element.*

**Beweis.** Wir stellen uns zwei Kandidaten $I$, $J$ für das neutrale Element vor und zeigen, dass diese in Wirklichkeit gleich sind. Sei also $I \circ a = J \circ a = a$ für alle $a \in G$. Dann gilt insbesondere (setze in der Mitte $a = I$)

$$J \circ I = I.$$

Andrerseits gilt nach Lemma 1 auch $a \circ I = a$ für alle $a \in G$. Wählt man $a = J$, folgt

$$J \circ I = J.$$

Ein Vergleich beider Gleichungen zeigt $I = J$.

**Lemma 3 (Kürzungsregel)** *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und gelte $a \circ x = a \circ y$ für $a, x, y \in G$. Dann gilt $x = y$. (Ebenso folgt $x = y$ aus $x \circ a = y \circ a$.)*

**Beweis.** Sei $b$ ein nach Axiom 3 zu $a$ inverses Element, also $b \circ a = I$. Dann gilt

$$x = I \circ x = (b \circ a) \circ x = b \circ (a \circ x) = b \circ (a \circ y) = (b \circ a) \circ y = I \circ y = y.$$

Aus der Kürzungsregel folgt übrigens, dass in einer Gruppentafel in jeder Zeile und jeder Spalte jedes Element höchstens einmal auftreten darf; man vergleiche dazu die Gruppentafeln aus dem ersten Teil dieser Reihe.

**Übung:** Zeige wie in Lemma 2, dass es zu $a \in G$ *genau* ein inverses Element $b \in G$ gibt. Dieses Element nennt man *das* inverse Element und bezeichnet es mit $a^{-1}$.

Wenn ein Mathematiker ein Objekt mit einer gewissen Struktur vor sich hat, ist eine der ersten Fragen, welche Unterstrukturen das Objekt besitzt. Was soll das heissen? Wenn wir zum Beispiel eine Gruppe $(G, \circ)$ haben, wollen wir wissen, ob es Teilmengen $U \subseteq G$ gibt, die dieselbe Struktur tragen, die also selbst mittels $\circ$ eine Gruppe bilden.

Nehmen wir zum Beispiel die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ und die Teilmenge aller durch $3$ teilbaren ganzen Zahlen $3\mathbb{Z} := \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$. Man überzeugt sich leicht, dass $(3\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe bildet und nennt sie eine **Untergruppe** von $(\mathbb{Z}, +)$. Die Menge $U := \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ aller ganzen Zahlen, die bei Division durch $3$ Rest $1$ lassen, bildet jedoch keine Untergrupe von $(\mathbb{Z}, +)$, denn zum Beispiel ist $1 + 4 = 5 \notin U$. Dieses Beispiel zeigt also, dass nicht jede Teilmenge einer Gruppe bezüglich derselben Verknüpfung selbst eine Gruppe ist.

Wir kommen nun zu einem ersten Höhepunkt in der Gruppentheorie, dem **Satz von Lagrange**, der uns eine notwendige Bedingung an die Hand gibt, um festzustellen, ob eine Teilmenge einer Gruppe eine Untergruppe *sein kann*. Zur Schreiberleichterung schreiben wir die Verknüpfung in den betrachteten Gruppen wie eine Multiplikation und lassen den $\cdot$ weg. Außerdem definieren wir für eine endliche Gruppe $G$ die **Ordnung** von G als die Anzahl ihrer Elemente und schreiben dafür $\mid G \mid$.

**Theorem 1** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $U$ eine Untergruppe von G. Dann ist die Ordnung von $U$ ein Teiler der Ordnung von $G$.*

Der Beweis zu diesem und dem übernächsten Satz steht im dritten Teil dieses Artikels im nächsten Heft. Ich habe beide Beweise sehr ausführlich und anschaulich aufgeschrieben und würde mich sehr freuen, wenn der eine oder andere sie zu verstehen versucht, denn sie zeigen einige nützliche und vielseitig anwendbare Beweistechniken. Aus dem Satz von Lagrange kann man großartige Folgerungen ziehen. Zum Beispiel kann eine Gruppe mit 10 Elementen keine Untergruppe der Ordnung 3 haben, weil 3 kein Teiler von 10 ist. Eine Gruppe von Primzahlordnung kann überhaupt nur sich selbst und die einelementige Gruppe als Untergruppe haben. Die vielleicht wichtigste Folgerung ist die folgende (man braucht außer dem Satz von Lagrange noch ein paar weitere Zutaten, aber das ist nicht sehr schwer):

**Theorem 2** *Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $m$, also mit $m$ Elementen. Dann gilt $g^m := \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{m\text{-mal}} = I$ für alle $g \in G$.*

Wer mag, kann dies an Beispielen der bereits aufgestellten Gruppentafeln nachprüfen. Als Beispiel für die vielseitige Anwendbarkeit des Satzes 2 wählen wir uns eine natürliche Zahl $m > 1$ und betrachten die Menge $G_m$ aller zu m teilerfremden Zahlen zwischen $1$ und $m$. Zum Beispiel ist $G_{12} = \{1, 5, 7, 11\}$. Die Anzahl der Elemente von $G_m$ wird traditionell mit $\varphi(m)$ bezeichnet und Euler-Funktion genannt. $\varphi(12)$ ist also $4$.

**Theorem 3** *Bezüglich der Multiplikation (mod $m$) bildet $G_m$ stets eine Gruppe mit dem neutralen Element $I = 1$.*

Wir wollen auf $G_m$ den Satz 2 anwenden. Dazu nehmen wir uns irgendein Element aus $G_m$, also eine zu $m$ teilerfremde Zahl $a$, und verknüpfen sie $\varphi(m)$-mal mit sich selbst, d. h. wir berechnen $a^{\varphi(m)}(mod\ m)$. Nach Satz 2 liefert dies das neutrale Element $1$ und wir erhalten den **Satz von Euler**:

**Theorem 4** $a^{\varphi(m)} \equiv 1$ *(mod $m$) für alle zu m teilerfremden Zahlen $a$.*

Ein Spezialfall ist der sogenannte **„kleine Fermat“**, denn es gilt $\varphi(p) = p - 1$ für alle Primzahlen $p$ (wieso?).

**Theorem 5** *Sei $p$ eine Primzahl, die kein Teiler von $a$ ist. Dann gilt:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ mod } p$$

Was ist also $137^6$ (mod 7)? Richtig, $1$.

Zum Schluss eine kleine **Übung** (hat nichts mit dem Satz von Lagrange zu tun): Gilt in einer Gruppe mit neutralem Element $I$ für jedes Element $g$ die Gleichung $g \circ g = I$, so ist die Gruppe abelsch.

# Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 66

*Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)*

**Wer hat das rheinhessische Hängebauchschwein?**

Über fünf Schüler aus dem südlichen Rheinhessen, die alle aus verschiedenen Klassen stammen, in verschiedenen nebeneinanderliegenden Orten wohnen, verschiedene Tiere besitzen, unterschiedliche Sportarten und Gesellschaftsspiele ausüben, ist bekannt:

1. Der 5.Klässler wohnt in Eppelsheim.
2. Der 4.Klässler hat einen Hund.
3. In Heimersheim wird Mau-Mau gespielt.
4. Der 8.Klässler dagegen spielt Schach.
5. Gleich links neben Weinheim ist Heimersheim.
6. Der Bienenzüchter spielt Fußball.
7. Der Handballspieler wohnt in Flomborn.
8. In dem Dorf in der Mitte wird missmutig Monopoly gespielt.
9. Der 6.Klässler wohnt im ersten Dorf.
10. Der Unsportliche wohnt im Nachbardorf von dem Jungen mit dem Schaf.
11. Im Nachbardorf des Schülers mit dem Pferd wird Handball gespielt.
12. Der Dorfbewohner, der Hockey spielt, spielt abends Dame.
13. Der 7.Klässler spielt Volleyball.
14. Das Dorf des 6.Klässlers liegt neben Gau-Odernheim.
15. Der Schachspieler wohnt im Nachbardorf des Monopolyspielers.

Ermittle aus diesen Informationen

a) wer Skat spielt,
b) wer ein Hängebauchschwein hat.

(Johannes Merz, Kl. 5, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

**Lösung.** Die fertige Lösungstabelle sieht wie folgt aus:

| Ort | Flomborn | Gau-Odernheim | Eppelsheim | Heimersheim | Weinheim |
|---|---|---|---|---|---|
| Klasse | 6 | 8 | 5 | 7 | 4 |
| Tier | Schaf | Pferd | Biene | | Hund |
| Sport | Handball | unsportlich | Fußball | Volleyball | Hockey |
| Spiel | | Schach | Monopoly | Mau-Mau | Dame |

Daraus ergibt sich:
a) Der 6.Klässler aus Flomborn spielt Skat, und
b) der 7.Klässler aus Heimersheim hat ein Hängebauchschwein.

**Die Rechnungen müssen alle stimmen**

In der folgenden Aufgabe stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern:

$$\begin{array}{cccccccccc}
c & a & b & - & a & d & b & = & c & b \\
 & + & & & & - & & & + & \\
 & & d & + & & e & b & = & e & d \\
\hline
c & a & d & - & a & f & b & = & f & d
\end{array}$$

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass senkrecht und waagrecht alle Rechnungen korrekt sind.

(Johann Kirsch, Kl. 5, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

**Lösung**

$$\begin{array}{cccccccccc}
5 & 4 & 0 & - & 4 & 9 & 0 & = & 5 & 0 \\
 & + & & & & - & & & + & \\
 & & 9 & + & & 2 & 0 & = & 2 & 9 \\
\hline
5 & 4 & 9 & - & 4 & 7 & 0 & = & 7 & 9
\end{array}$$

### „Eins“ gewinnt

Alex und Benjamin spielen ein Würfelspiel, bei dem eine „Eins“ gewinnt. Alex würfelt mehrmals und erhält als Mittelwert für die Zahl der geworfenen Einsen $0,15$. Benjamin würfelt doppelt so oft wie Alex und erhält den Mittelwert $0,1875$ für seine geworfenen Einsen. Wie viele Einsen hat Alex mindestens geworfen?

(Klaus Ronellenfitsch, Leibniz-Gymnasium Östringen)

**Lösung**

Alex habe $n$ mal gewürfelt. Dann ist $n$ durch $20$ teilbar, denn $n \cdot 0,15$ (das ist die Zahl der Einsen, die Alex würfelt), muss eine ganze Zahl sein. Hätte Alex $20$ mal gewürfelt, so hätte Benjamin $40$ mal gewürfelt. Da aber $40 \cdot 0,1875 = 7,5$ keine ganze Zahl ist, kann das nicht sein. Also hat Alex mindestens $40$ mal gewürfelt und demnach mindestens $6$ Einsen geworfen.

### Passende Ziffern

Welche verschiedene Ziffern passen für die Buchstaben $A$, $B$, $C$ und $D$, wenn

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\
+ & A & B & C \\
+ & & A & B \\
+ & & & A \\
\hline
4 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

gilt? (Hans Engelhaupt)

**Lösung**

Man bemerkt, dass $AAAA + BCD + BC + C = 4321$ sein muss. Also muss $A \leq 3$ sein, weil $4444$ bereits größer als $4321$ ist. Für $A = 3$ muss also $BCD + BC + B = 4321 - 3333 = 989$, d. h. $BBB + CD + C = 989$ sein. Daraus folgt $B \leq 8$. Für $B = 8$ folgt $CD + C = 101$ und daraus ergibt sich $C = 1$ und $D = 9$. Damit ergibt sich die Lösung $ABCD = 3891$. Für $A = 2$ folgt $BBB + CD + C = 4321 - 2222 = 2099$, was unmöglich ist. Für $A = 1$ folgt $BBB + CD + C = 4321 - 1111 = 3210$, was ebenfalls unmöglich ist. Also ist $ABCD = 3891$ die einzige mögliche Lösung.

### Wahr oder falsch?

Der Abstand zwischen $2000^5$ und $2001^5$ ist größer als $50$ Billionen. (H. F.)

**Lösung:** $2001^5 - 2000^5 \approx 8 \cdot 10^{13} > 50\,000\,000\,000\,000$.

### Große Unordnung

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & = & 26 \\
2 & 3 & 4 & 5 & = & 27 \\
3 & 4 & 5 & 6 & = & 28 \\
4 & 5 & 6 & 7 & = & 29
\end{array}$$

Zwischen den 4 Zahlen links vom Gleichheitszeichen fehlen die Rechenzeichen ($+$, $-$ und $\cdot$ sind möglich), es können auch Klammern fehlen und die Zahlen selbst sind nicht immer in der richtigen Reihenfolge angegeben.

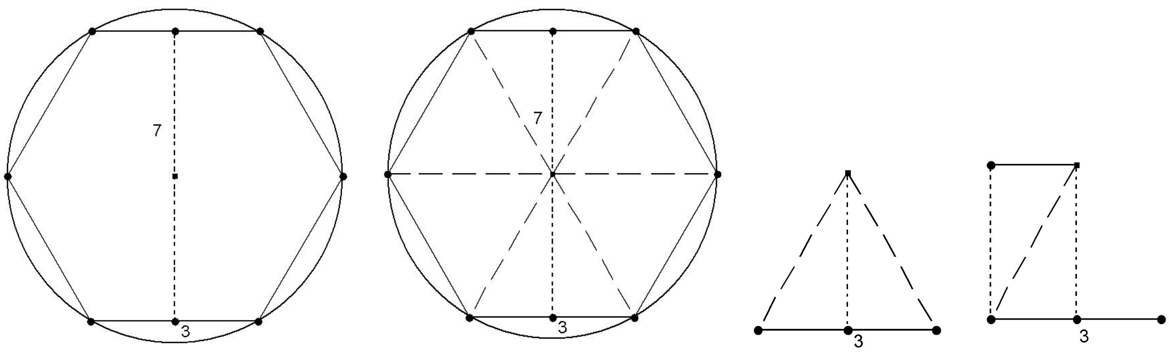
Ebenso stehen die 4 Zahlen rechts von den Gleichheitszeichen nicht in der richtigen Zeile. Wem gelingt es, die 4 richtigen Gleichungen herzustellen? (H. F.)

**Lösung:** $(1+2\cdot 3)\cdot 4 = 28$; $2\cdot 3\cdot 5-4=26$; $3+5\cdot 6-4=29$; $4\cdot 7-6+5=27$.

**Regelmäßiges Sechseck**

Jochen spielt mit dem Zirkel. Er hat einen Kreis gezeichnet. Mit der gleichen Zirkelöffnung zeichnet er nun Punkte auf der Kreislinie und siehe da: die Kreislinie lässt sich in genau 6 gleiche Stücke aufteilen. Verbindet er die Punkte, so erhält er ein sogenanntes reguläres Sechseck. Nun will er den Flächeninhalt des regulären Sechsecks wissen. Er misst die Seitenlänge 3 cm und den Abstand zwischen zwei gegenüber liegenden Seiten 7 cm.
Wie groß ist der Flächeninhalt? (MM)

**Lösung**
Durch Einzeichnen der Radien zu den Eckpunkten zerlegt sich das regelmäßige Sechseck in 6 kongruente Dreiecke (s. Abb. 2). Eines dieser Dreiecke haben wir in Abb. 3




Abbildungen 1-4

gezeichnet. Durch das eingezeichnete Lot zerlegt sich dieses Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Diese kann man nun so umlegen, dass ein Rechteck mit der Grundseite $1,5$ cm und der Höhe $3,5$ cm entsteht. Der Flächeninhalt des Sechsecks ist $A = 6\cdot g\cdot h = 6\cdot 1,5$ cm $\cdot 3,5$ cm $= 31,5$ cm$^2$.

**Noch eine Aufgabe des Schulleiters vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** *(Diesmal gibt es sogar 11 Lösungen)*:

Stelle die Zahl $6$ als Komposition von genau drei mal einer der Zahlen $1,2,\ldots,10$ dar. Die Zahlen dürfen durch $+$, $-$, $\cdot$, : , !, und $\sqrt{\ }$ verknüpft werden. Z.B. $6 = 2+2+2$; $6 = 2\cdot 2+2$ usw.
(Hilfe: $4!$ bedeutet $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, also $4! = 24$; oder: $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{4}=2$)
(G. Hoffmann)

**Lösung**
$(1+1+1)! = 6$; $2+2+2=6$; $3\cdot 3-3=6$; $4+4-\sqrt{4}=6$; $5+5:5=6$; $6+6-6=6$; $7-7:7=6$; $(\sqrt{8+8:8})! = 6$; $\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{9}=6$; $(\sqrt{10-10:10})! = 6$.
Anmerkung: Sogar für die $0$ gibt es eine Lösung und zwar $(0!+0!+0!)! = (1+1+1)! = 3! = 6$, weil ja in der Mathematik vereinbart wurde $0! = 1$ zu nehmen.

# Neue Mathespielereien

*Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)*

**Die Rechnungen müssen alle stimmen**

In der folgenden Aufgabe stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k | m | n | + | a | b | = | c | k | d |
| | + | | | + | | | | + | |
| | b | b | + | k | l | = | | n | b |
| k | e | d | + | d | b | = | c | e | m |

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass senkrecht und waagrecht alle Rechnungen korrekt sind. (Marcel Kuhn, Kl. 6, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

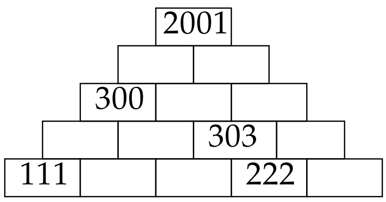
**Der größere Bruder**

Max und Moritz sammeln zusammen Nüsse und wollen sie hinterher verteilen. Da sagt Max: Gib mir doch bitte noch eine Nuss, damit wir beide gleich viele haben. Darauf antwortet Moritz: Da ich der Größere bin, steht mir eigentlich das Doppelte zu. Dafür musst du mir noch eine Nuss geben. Wie viele Nüsse haben sie gesammelt?

**Pyramide**

In dieser Pyramide ist die Zahl jedes oberen Bausteins die Summe der Zahlen der beiden darunterliegenden Bausteine. Ergänze die fehlenden Zahlen!

(Helmut Rössler)




**Quersumme**

Gesucht wird eine zweistellige Zahl mit folgender Eigenschaft: Verdoppelt man die Zahl, so bleibt die Quersumme unverändert.

Gibt es überhaupt eine solche Zahl? Wenn ja, welche Quersumme hat sie?

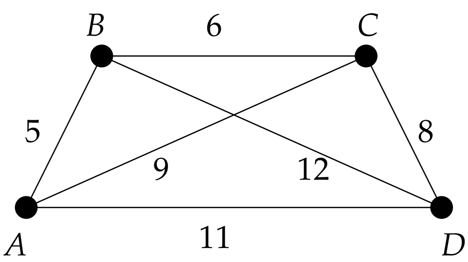
Gibt es vielleicht mehrere zweistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft? Wenn ja, wie viele? (Christoph Sievert)

**Knobelei mit Potenzen**

Für welche natürlichen Zahlen $x$ ist $2^x + x^2$ ein Vielfaches von $10$?

Hinweis: Versuche, die Lösungen durch Überlegung zu finden. Achte auf die Endziffern der beiden Summanden und deren Summe. Rechnen führt nicht weit, weil die Zahlen $2^x$ sehr schnell sehr groß werden. (H.F.)

**Kürzester Weg**




Ein Wanderer will von $A$-Stadt aus jedes der drei Dörfer $B$, $C$, $D$ besuchen und am Schluss nach $A$-Stadt zurückkehren. Natürlich soll seine Route möglichst kurz sein. Wie sollte er seinen Weg wählen?

(Jeder Ort ist mit jedem anderen Ort durch einen nicht notwendig geradlinigen Weg verbunden, dessen Länge Du der Abbildung entnimmst.) (H.F.)

**Der Mittlere**

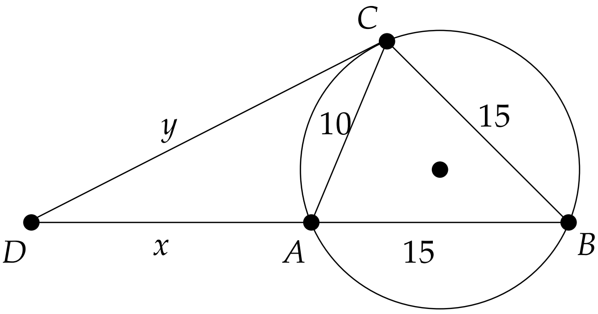
Beim Training stellt Herr Müller die Sportler in eine Reihe und fordert den Mittleren auf herauszutreten, doch es tut sich nichts. Keiner meldet sich. Warum wohl?

# Neue Aufgaben

Kl. 8-13

**Aufgabe 757.** Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck $ABC$ mit den Seitenlängen $BC = BA = 15$ und $AC = 10$. Die Tangente an den Umkreis des Dreiecks $ABC$ in $C$ schneidet $AB$ in $D$. Berechne die Länge von $DA$.

(Hans Engelhaupt)




**Aufgabe 758. Eins-Zwei-Drei.**
Gesucht sind alle Zahlen $a$ und $b$, für die gilt

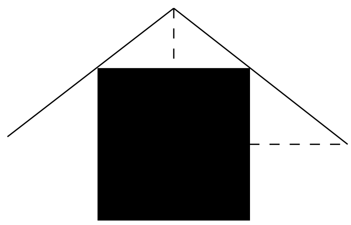
$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{ab} \quad \text{und} \quad \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{ab} \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

(Klaus Ronellenfitsch, Leibniz-Gymnasium Östringen)

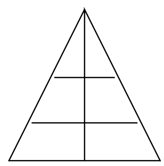
**Aufgabe 759.** Gibt es Vielfache von $49$, deren Ziffern sämtlich gleich sind? (H. F.)

**Aufgabe 760. Ein Quadrat in einer Raute.**
Einem Quadrat mit der Seitenlänge $2$ cm ist eine Raute mit der Seitenlänge $5$ cm umbeschrieben. Zeige: Die Fläche der Raute ist mehr als dreimal so groß wie die Fläche des Quadrates.

(Klaus Ronellenfitsch)



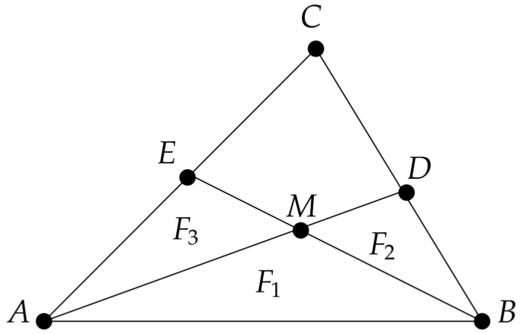
**Aufgabe 761.** Der Mantel eines Kreiskegels mit der Höhe von $15$ cm wird durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen in drei gleich große Teile zerlegt. Welchen Abstand haben diese Ebenen von der Spitze?



**Aufgabe 762.** Zeige: Eine Zahl von der Form $49n - 2$ kann für keine natürliche Zahl $n$ das Produkt zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen sein. (MM)

**Aufgabe 763.**
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck $ABC$, ein Punkt $D$ auf $BC$ mit $D \neq B, C$ und ein Punkt $E$ auf $AC$ mit $E \neq A, C$ (siehe Skizze). $M$ sei der Schnittpunkt von $BE$ und $AD$. Kann man den Flächeninhalt von $\Delta ABC$ berechnen, wenn die Flächeninhalte von $\Delta ABM$, $\Delta AME$ und $\Delta BMD$ bekannt sind?

(Kerstin Bauer, Kl. 12, Kaiserslautern)



# Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 66

Kl. 8-13

**Aufgabe 748. (Sierpinski-Prozesse)**
a) Bestimme die Schleife des $P_3$-Prozesses mit der Startzahl $2000$.
b) Bestimme $x$ sowie die Schleife $z \xrightarrow{(y)} z$ des $P_3$-Prozesses $2001 \xrightarrow{(x)} z \xrightarrow{(y)} z$.
c) Überprüfe, ob gilt: $2004 \xrightarrow{(x-1)} z \xrightarrow{(y)} z$. (H.F.)

**Lösung:**
a) $2000 \xrightarrow{(24)} 8 \xrightarrow{(6)} 8$
b) $x = 14$, $z = 9$ und $y = 6$. Der $P_3$-Prozess ist $2001 \xrightarrow{(14)} 9 \xrightarrow{(6)} 9$.
c) Ja, es gilt: $2004 \xrightarrow{(13)} 9 \xrightarrow{(6)} 9$.

**Aufgabe 749. (Sierpinski-Prozesse)**
Zeige: Jeder $P_3$-Prozess mit 1- oder 2-stelliger Startzahl führt in eine Schleife. (H.F.)

**Lösung:** Jeder $P_3$-Prozess mit 1- oder 2-stelliger Startzahl führt in eine der folgenden Schleifen der Länge 3 bzw. 6:
$1 \xrightarrow{(3)} 1$, $15 \xrightarrow{(3)} 15$, $26 \xrightarrow{(3)} 26$, $8 \xrightarrow{(6)} 8$, $9 \xrightarrow{(6)} 9$, $12 \xrightarrow{(6)} 12$, $13 \xrightarrow{(6)} 13$, $16 \xrightarrow{(6)} 16$, $19 \xrightarrow{(6)} 19$, $23 \xrightarrow{(6)} 23$.

**Aufgabe 750. (Sierpinski-Prozesse)**
Zeige: jeder $P_4$-Prozess mit 1-ziffriger Startzahl führt in die Schleife $1 \xrightarrow{(L)} 1$.
Wie groß ist $L$ ? (H.F.)

**Lösung:** Jeder $P_4$-Prozess mit 1-ziffriger Startzahl führt in die Schleife $1 \xrightarrow{(L)} 1$ mit $L = 54$. Und zwar ist:
$1 \xrightarrow{(54)} 1$, $2 \xrightarrow{(2)} 1$, $3 \xrightarrow{(40)} 1$, $4 \xrightarrow{(6)} 1$, $5 \xrightarrow{(53)} 1$, $6 \xrightarrow{(1)} 1$, $7 \xrightarrow{(39)} 1$, $8 \xrightarrow{(5)} 1$, $9 \xrightarrow{(6)} 1$.

**Aufgabe 751. (Sierpinski-Prozesse)**
Es seien $z = 100101$, $z' = 10001001$, $z'' = 1000010001$.

a) Vergleiche die Prozesse $P_5$, $P_{10}$, $P_{50}$, $P_{100}$ für die Startzahl $z$.
b) Vergleiche die Prozesse $P_5$, $P_{10}$, $P_{100}$, $P_{1000}$ für die Startzahl $z'$.
c) Es ist für $P_5$: $z'' \xrightarrow{(36000)} z''$ (mit Computer nachprüfen !).

   Wie lang sind die Schleifen bei den Prozessen $P_{100}$, $P_{1000}$, $P_{10000}$ für die Startzahl $z''$ ?
d) Vergleiche die Prozesse $P_{10}$, $P_{100}$, $P_{1000}$ für die Startzahl $z'$ ($z''$). (H.F.)

**Lösung:**

a) $P_5 : z \xrightarrow{(360)} z$, $P_{10} : z \xrightarrow{(180)} z$, $P_{50} : z \xrightarrow{(36)} z$, $P_{100} : z \xrightarrow{(18)} z$ .
b) $P_5 : z' \xrightarrow{(3600)} z'$, $P_{10} : z' \xrightarrow{(1800)} z'$, $P_{100} : z' \xrightarrow{(180)} z'$, $P_{1000} : z' \xrightarrow{(18)} z'$.
c) $P_{10} : z'' \xrightarrow{(18000)} z''$,$P_{100} : z'' \xrightarrow{(1800)} z''$, $P_{1000} : z'' \xrightarrow{(180)} z''$, $P_{10000} : z'' \xrightarrow{(18)} z''$.
d) Ergibt sich aus b) und c).

**Aufgabe 752.** Eine monoton wachsende Zahlenfolge enthält alle Zahlen, die eine Dreierpotenz darstellen oder die als Summe von verschiedenen Dreierpotenzen geschrieben werden können. Das sind $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $4 = 3^1 + 3^0$, $9 = 3^2$, $10 = 3^2 + 3^0$, $12 = 3^2 + 3^1$, $13 = 3^2 + 3^1 + 3^0$, $27 = 3^3$, .... Wie heißt die 100. Zahl dieser Folge?

(Hans Engelhaupt)

**Lösung:** Im Zehnersystem enthält also die Folge alle Zahlen von der Form

$$a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^2 + \cdots + a_k \cdot 3^k, \text{ mit } a_i = 0 \text{ oder } 1,$$

d. h. alle Zahlen, die im Dreiersystem nur mit den Ziffern „0“ und „1“ geschrieben werden. Also im Dreiersystem $1_3$; $10_3$, $11_3$, $100_3$, $101_3$, $110_3$, $111_3$, $1000_3$, $\cdots$

Liest man diese Ziffernfolgen im Zweiersystem, so erhält man die Folge der natürlichen Zahlen im Zehnersystem: $1_2 = 1_{10}$, $10_2 = 2_{10}$, $11_2 = 3_{10}$, usw.

Nun schreibt man die Zahl $100_{10}$ aus dem Zehnersystem als $1100100_2$ im Zweiersystem. $100_{10} = 1100100_2$. Aber $1100100_3 = (3_{10})^6 + (3_{10})^5 + (3_{10})^2 = 729_{10} + 243_{10} + 9_{10} = 981_{10}$

Antwort: Die 100. Zahl dieser Folge ist $981$.

**Aufgabe 753.** Gegeben seien zwei Kreise $k'$ und $k''$ mit den Mittelpunkten $M'$ und $M''$. Ein Halbkreis $k$ mit $M'M''$als Drchmesser schneidet $k'$ bzw. $k''$ in $P'$ bzw. $P''$. Die Gerade $g = (P'P'')$ schneidet dann aus den Kreisen $k'$ und $k''$ gleichlange Sehnen aus.

(Kurt Rosenbaum)

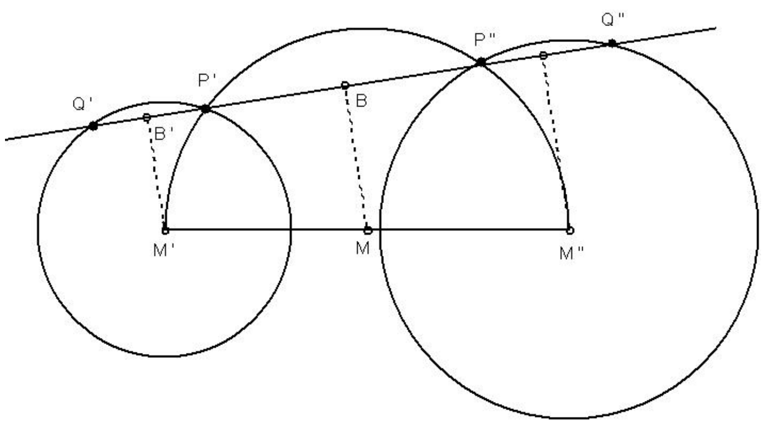
**Lösung:**

Es sei $M$ der Mittelpunkt des Halbkreises, $k' \cap g = \{P'\}$, $k'' \cap g = \{P''\}$, und $M'B' \perp g$, $M''B'' \perp g$ sowie $MB \perp g$. Dann gilt:

$$P'B' = B'P' = \frac{1}{2} \cdot Q'P' \qquad (1)$$

$$P''B'' = B''P'' = \frac{1}{2} \cdot Q''P'' \qquad (2)$$

$$BP' = BP'' = \frac{1}{2} \cdot P'P'', \qquad (3)$$




weil die Mittelsenkrechte einer Sehne durch den Mittelpunkt geht, und $M'B'||MB||M''B''$, weil $M'B'$, $MB$, $M''B''$ senkrecht auf $g$ sind. Da $MM' = MM''$ gleich dem Radius des Halbkreises ist, folgt, dass $MB$ Mittellinie im Trapez $M''B''B'M'$ ist und somit ist

$$BB' = BB''. \qquad (4)$$

Subtrahiert man von (4) die (3), so erhält man: $BB' - BP' = BB'' - BP'' \Leftrightarrow P'B' = P''B''$, was mit (1) und (2) zu $Q'P' = Q''P''$ führt.

**Aufgabe 754.** Zu bestimmen sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x = y^3 + y - 343 \qquad (1)$$
$$y = x^3 + x - 343 \qquad (2)$$

(MM)

**1. Lösungsweg:** Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so erhält man

$$\begin{aligned} & y-x &&= x^3-y^3+x-y \\ \Leftrightarrow\quad & (x-y)(x^2+xy+y^2)+2\cdot(x-y) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-y)(x^2+xy+y^2+2) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x-y &&= 0 \qquad (3) \\ & \text{oder}\quad x^2+xy+y^2+2 &&= 0. \qquad (4) \end{aligned}$$

Einsetzen von (3) in (1) ergibt: $x = x^3 + x - 343 \Leftrightarrow x^3 = 343x = \sqrt[3]{343} = 7$.
Für $x \neq y$ muss (4) gelten.

$$\Rightarrow \quad x^2+xy+y^2=-2 \qquad (5)$$

Hätten nun die Zahlen $x$ und $y$ das gleiche Vorzeichen, so wäre die linke Seite von (5) positiv und die rechte negativ. Widerspruch.
Es gilt

$$(5) \Leftrightarrow x^2+xy+y^2+xy-xy=-2 \Leftrightarrow (x+y)^2=-2+xy \qquad (6)$$

Hätten nun die Zahlen $x$ und $y$ entgegengesetzte Vorzeichen, so wäre $xy < 0$; dann wäre in (6) die linke Seite positiv und die rechte negativ. Widerspruch. Demnach ist das einzige Lösungspaar $(7|7)$.

**2. Lösungsweg:** Es sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3+x-343 = y$ gegeben. Diese Funktion ist offenbar streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und somit erlaubt sie eine Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jedem $y$-Wert einen entsprechenden $x$-Wert zuordnet, d. h. $y \Leftrightarrow x = y^3+y-343$. Die Lösungen des Systems $(1) \wedge (2)$ sind demnach die Schnittpunkte der Graphen von $f$ und $f^{-1}$. Diese beiden Graphen sind aber symmetrisch in Bezug auf die erste Winkelhalbierende $y = x$, also liegen ihre Schnittpunkte auf der Symmetrieachse. Setzen wir $y = x$ in (1) ein, so erhalten wir $x = x^3+x-343 \Leftrightarrow x = 7$ usw.

**3. Lösungsweg:** Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+x-343$ ist offenbar monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, d. h. aus $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$.
Es sind nun aber $f(x) = x^3+x-343 = y$ und $f(y) = y^3+y-343 = x$; mit $f(x) \leq f(y)$ folgt $y \leq x$. Da aber $x \leq y$ war, folgt dann $x = y$ usw.

**Aufgabe 755. Wo liegt der Fehler?**

Behauptung: Es gilt $T = \sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{b^2+y^2} \leq (a+x)-(b+y)$

für nichtnegative Zahlen $a$, $b$, $x$, $y$ mit $a^2+x^2 \geq b^2+y^2$.

Beispiel: $\sqrt{12^2+5^2} - \sqrt{4^2+3^2} < (12+5)-(4+3) \quad \Leftrightarrow \quad 13-5 < 17-7$.

„Beweis“: 
$$\begin{aligned} T &= \sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{b^2+y^2} = \frac{(a^2+x^2)-(b^2+y^2)}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}} = \\ &= \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}} + \frac{x^2-y^2}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}} \end{aligned}$$

Durch Weglassen von $x^2$ und $y^2$ im 1. Nenner und von $a^2$ und $b^2$ im 2. Nenner wird der jeweilige Radikand kleiner, also wird auch der Nenner des entsprechenden Bruches kleiner. Wird der Nenner eines Bruches kleiner, so wird der Wert des Bruches größer. Damit folgt:

$$T \leq \frac{(a-b)(a+b)}{\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}} + \frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}} = (a-b)+(x-y) = (a+x)-(b+y), \quad \text{„q.e.d.“}$$

Gegenbeispiel: $\sqrt{10^2+1^2}-\sqrt{8^2+3^2} > 0,$ aber $(10+1)-(8+3)=0,$

also ist die Behauptung falsch. (H.F.)

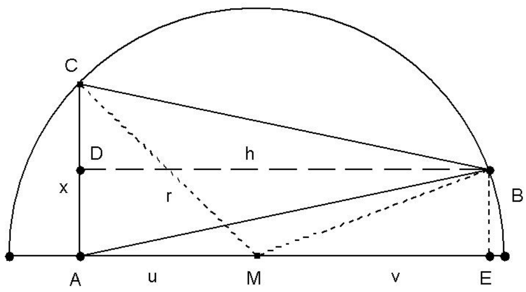
**Lösung:** Die Behauptung „Wird der Nenner eines Bruches kleiner, so wird der Wert des Bruches größer“ gilt nur für positive Brüche. Der Wert eines negativen Bruches wird kleiner, wenn man seinen Nenner verkleinert. Ist nun $a^2 \geq b^2$ und $x^2 \geq y^2$ und auch $a \geq b$ und $x \geq y$, so ist die Beweisführung korrekt; für $a < b$ oder $x < y$ ist sie falsch, weil dann mindestens einer der Brüche negativ ist. Die Behauptung

$$T = \sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{b^2+y^2} \leq (a+x)-(b+y)$$

ist demnach für alle nichtnegativen Zahlen $a, b, x, y$ mit $a \leq b$ und $x \leq y$ gültig.

**Aufgabe 756.** Einem Halbkreis (Radius $r$) wird ein gleichschenkliges Dreieck größten Flächeninhalts einbeschrieben, dessen Höhe zur Grundseite parallel zum Durchmesser ist. Wie groß ist seine Grundseite? (Helmut Rössler)

**Lösung:**
Die Grundseite $AC$ habe die Länge $x$, die Höhe habe die Länge $h = u + v$ (s. Abb.). Dann ist




$$\begin{aligned} h &= \sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{4\,r^2-x^2}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2A+B), \end{aligned}$$

wobei $A = \sqrt{r^2-x^2}$ und $B = \sqrt{4\,r^2-x^2}$ ist.
Die Flächeninhaltsfunktion ist

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x(2A+B)$$

Der geometrisch sinnvolle Definitionsbereich der Funktion ist $D = [0, r]$. Die Ableitung der Funktion ist

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot (2A+B+2A'+B') = \frac{1}{4} \cdot (2A+B+x \cdot (2 \cdot \frac{-2x}{2A} + \frac{-2x}{2B})).$$

$F'(x) = 0$ ergibt:

$$2A+B-2 \cdot \frac{x^2}{A} - \frac{x^2}{B} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 \cdot A - 2 \cdot \frac{x^2}{A} = \frac{x^2}{B} - B.$$

Durch Quadrieren folgt:

$$
\begin{aligned}
& & 4A^2 - 8x^2 + 4 \cdot \frac{x^4}{A^2} &= \frac{x^4}{B^2} - 2x^2 + B^2 & \\
\Leftrightarrow & & 4r^2 - 4x^2 - 6x^2 + 4 \cdot \frac{x^4}{A^2} &= \frac{x^4}{B^2} + 4r^2 - x^2 & \\
\Leftrightarrow & & 4 \cdot \frac{x^4}{A^2} &= \frac{x^4}{B^2} + 9x^2 & \Big| \cdot \left(\frac{A \cdot B}{x}\right)^2 \\
\Rightarrow & & x^2 \cdot B^2 = x^2 \cdot A^2 &= 9 \cdot A^2 \cdot B^2 & \\
\Leftrightarrow & & x^2 \cdot (15r^2 - 3x^2) &= 9(r^2 - x^2)(4r^2 - x^2). &
\end{aligned}
$$

Wir teilen durch $3$ und bezeichnen $x^2 =: t$ und $r^2 =: a$:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow & \quad t(5a - t) &= 3(a - t)(4a - t) & \\
\Leftrightarrow & \quad 5at - t^2 &= 12a^2 - 12at - 3at + 3t^2 & \\
\Leftrightarrow & \quad 4t^2 - 20at + 12a^2 &= 0 & \quad |: 4 \\
\Leftrightarrow & \quad t^2 - 5at + 3a^2 &= 0 &
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2 - 12a^2}}{2} = \frac{(5 \pm \sqrt{13}) \cdot a}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2,3,4} = \pm r \cdot \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Im Definitionsbereich liegt lediglich $x_3 = r \cdot \frac{5-\sqrt{13}}{2} \approx 0{,}835 \cdot r$, weil $x_{1,2} < 0$ und $x_4 = r \cdot \frac{5+\sqrt{13}}{2} > r \cdot 2$, was bereits außerhalb von $D$ liegt. Es ist $x_2 < 0 < x_3$ und $F'(0) = \frac{1}{4} \cdot (2r + 2r + 0 \cdot (...)) = r > 0$. Auch ist $x_3 < 0{,}99 \cdot r < r < x_4$.

$$A(0{,}99 \cdot r) = \sqrt{r^2 - 0{,}9801r^2} = 0{,}141 \cdot r; \; B(0{,}99 \cdot r) = \sqrt{4r^2 - 0{,}9801r^2} = 1{,}738 \cdot r$$

$$\Rightarrow \qquad F'(0{,}99 \cdot r) = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 0{,}141 + 1{,}738 - 0{,}992 \cdot (\frac{2}{0{,}141} + \frac{1}{1{,}738})) < 0.$$

Also ist $x_3$ eine Nullstelle der 1. Ableitung mit Vorzeichenwechsel von $+$ auf $-$ und somit ist $x_3 = r \cdot \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ die Maximumstelle.

**Aufgabe C1. (Sierpinski-Prozesse)** Untersuche, ob der $P_5$-Prozess mit der Startzahl $114$ in die Schleife $(A)$ gelangt. Wenn ja, welche Länge hat der Vorlauf ? (H.F.)

**Lösung:** Der $P_5$-Prozess mit der Startzahl $114$ gelangt in die Schleife $(A)$ mit einem Vorlauf der Länge $L = 16525$.

**Aufgabe C2. (Sierpinski-Prozesse)** Berechne die Schleifenlängen $L$ für $P_5$-Prozesse mit den Anfangszahlen $100101$, $10001001$, $1000010001$.
Gibt es einen Zusammenhang zwischen diesen Startzahlen $z$ und der zugehörigen Schleifenlänge $L$ ? (H.F.)

**Lösung:**
Für $z_1 = 100\,101$ ist $L_1 = 360$;
für $z_2 = 1000\,1001$ ist $L_2 = 3600$;
für $z_3 = 1000\,10001$ ist $L_3 = 36000$.
Man hat bewiesen: der $P_5$-Prozess mit der Startzahl $Z = 10^{2n+3} + 10^{n+1} + 1$ besitzt eine Schleife der Länge $L = 36 \cdot 10^n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ .

# Ortskurven im Dreieck (II)

Eine Anwendung zur dynamischen Geometrie am Personalcomputer

von Ingmar Rubin

## Ortskurve vom Höhenschnittpunkt

### Konstruktion der Ortskurve in EUKLID

Die Höhen eines $\triangle ABC$ schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt $H$, dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

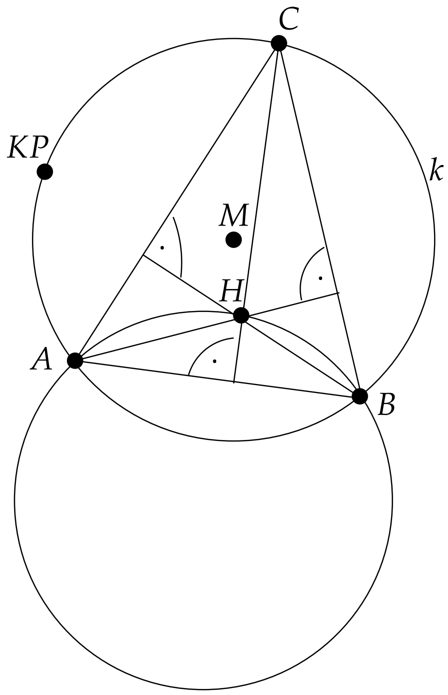



Abbildung 1: Ortskurve des Höhenschnittpunktes in EUKLID

Der Konstruktionstext in EUKLID lautet:

```
M  ist ein freier Basispunkt
KP ist ein freier Basispunkt
k  ist ein Kreis um M durch KP
A  ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
C  ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
B  ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
s1  ist die Strecke  [ A ; C ]
s2  ist die Strecke  [ C ; B ]
s3  ist die Strecke  [ B ; A ]
g1  ist das Lot von C auf  s3
g2  ist das Lot von B auf  s1
H   ist der Schnittpunkt der Linien g1 und g2
OL1 ist eine Ortslinie des Punktes H, wenn C gezogen wird
```

## Parameterdarstellung der Ortskurve von $\mathbf{H}$

Wir bezeichnen die Koordinaten der Punkte $A, B, C$ mit :

$$A(x_a, y_a), \quad B(x_b, y_b), \quad C(x_c, y_c) \tag{1}$$

Die Höhen stehen senkrecht zu den Dreiecksseiten und verlaufen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte. Daraus kann die Geradengleichung der Höhen ermittelt werden.

$$m_b = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \qquad m_{hb} = -\frac{1}{m_b} = \frac{x_a - x_c}{y_c - y_a} \tag{2}$$

$$y_b = m_{hb} \cdot x_b + n_b \quad \rightarrow \quad n_b = y_b - m_{hb} \cdot x_b \tag{3}$$

$$h_b : \qquad y = \frac{x_a - x_c}{y_c - y_a} \cdot x + y_b - \frac{x_a - x_c}{y_c - y_a} \cdot x_b \tag{4}$$

$$m_c = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad m_{hc} = -\frac{1}{m_c} = \frac{x_a - x_b}{y_b - y_a} \tag{5}$$

$$y_c = m_{hc} \cdot x_c + n_c \quad \rightarrow \quad n_c = y_c - m_{hc} \cdot x_c \tag{6}$$

$$h_c : \qquad y = \frac{x_a - x_b}{y_b - y_a} \cdot x + y_c - \frac{x_a - x_b}{y_b - y_a} \cdot x_c \tag{7}$$

Für die Schnittpunktberechnung genügt die Kenntnis von zwei der drei Höhenlinien. Die Tatsache, das sich alle drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt schneiden, sei vorausgesetzt. Aus $h_b = h_c$ folgen die Schnittpunktkoordinaten von $P$ :

$$x = \frac{(x_a(x_b(-y_a + y_b) + x_c(y_a - y_c)) - (x_b x_c + (y_a - y_b)(y_a - y_c))(y_b - y_c))}{(-x_b y_a + x_c y_a + x_a y_b - x_c y_b - x_a y_c + x_b y_c)} \tag{8}$$

$$y = \frac{(-(x_a - x_b)((x_a - x_c)(x_b - x_c) + y_a y_b) + (x_a y_a - x_b y_b + x_c(-y_a + y_b))y_c)}{(x_b y_a - x_c y_a - x_a y_b + x_c y_b + x_a y_c - x_b y_c)} \tag{9}$$

Wir ersetzen die kartesischen Koordinaten der Punkte $A, B, C$ durch ihre Polarkoordinaten:

$$x_a = r\cos(\alpha), \qquad y_a = r\sin(\alpha) \tag{10}$$

$$x_b = r\cos(\beta), \qquad y_b = r\sin(\beta) \tag{11}$$

$$x_c = r\cos(t), \qquad y_c = r\sin(t) \tag{12}$$

Die Polarkoordinaten ergeben die gewünschte Parameterdarstellung der Ortskurve von $H$:

$$x(t) \;=\; r \cdot \cos[t] + r \cdot (\cos[\alpha] + \cos[\beta]) \tag{13}$$

$$y(t) \;=\; r \cdot \sin[t] + r \cdot (\sin[\alpha] + \sin[\beta]) \tag{14}$$

Die Ortskurve entspricht einem Kreis mit dem Radius $r$. Der Mittelpunkt befindet sich bei

$$x_m = r \cdot (\cos[\alpha] + \cos[\beta]), \qquad y_m = r \cdot (\sin[\alpha] + \sin[\beta]). \tag{15}$$

# Automaten und Monoide

## *Erster Teil: Automaten*

von Andrea Krol

Jeder hat schon einmal mit Automaten zu tun gehabt - man denke nur an Getränkeautomaten, Fahrkartenautomaten, Waschautomaten und andere nützliche Helfer des alltäglichen Lebens. Aber einige werden Automaten auch aus dem Informatikunterricht kennen, dort kommen sie jedoch nicht nur als konkrete Rechenautomaten, sondern auch als abstrakte Denkmodelle vor. Was also sind Automaten? Dieser Frage werden wir im ersten Teil nachgehen. Nun zu den Monoiden! Vorweg sei gesagt, dass es sich bei ihnen um Objekte der Mathematik handelt, die das abstrakte Denkmodell eines Automaten ersetzen können. Die Brücke von den Automaten zu den Monoiden werden wir im zweiten Teil im MONOID Heft 68 schlagen.

Zur Klärung der Frage, wie ein Automat funktioniert, betrachten wir als **Beispiel** einen Getränkeautomat.

Was tue ich?

1. Ich wähle mit einer Taste das gewünschte Getränk.
2. Ich werfe so lange Geld in den Automat, bis der Preis des Getränks erreicht ist, oder, falls ich nicht das passende Kleingeld habe, bis der Preis des Getränks überschritten ist.

Wie reagiert der Automat?

1. Wirft man Geld ein, bevor man das Getränk gewählt hat, so fällt das Geldstück einfach durch.
2. Der Automat registriert meinen Getränkewunsch und den fälligen Getränkepreis.
3. Der Automat registriert meinen Geldeinwurf und berechnet den noch zu zahlenden Restbetrag.
   (a) Ist der Restbetrag Null, so gibt er das gewählte Getränk aus.
   (b) Ist der Restbetrag größer als Null, so wartet der Automat auf den Einwurf des restlichen Geldes.
   (c) Bei Überbezahlung gibt der Automat das gewünschte Getränk und das Wechselgeld aus.

Um die Arbeitsweise eines Automaten zu zeigen, beschränken wir uns einmal nur auf einen Teil eines Automaten, d.h. wir wollen annehmen, dass der Käufer sich eine Cola kaufen möchte, also bei der Getränkeauswahl die Colataste drückt. Eine Cola kostet 1,50 DM und unser Automat akzeptiert nur 50PF-Münzen oder 1DM-Stücke. Wichtig ist es bei einem solchen Automat, dass zu jedem Zeitpunkt klar sein muss, was der Automat tut, wenn er irgendeine Eingabe bekommt. Wir wollen nun an einer Grafik ( Abbildung 1) veranschaulichen, was passiert, wenn wir erst die Colataste drücken und dann nacheinander erst eine 50PF-Münze und dann ein 1DM-Stück einwerfen. Zunächst befindet sich der Automat im Startzustand (Auswahl treffen). Nach dem Ereignis „*Colataste gedrückt*" geht der Automat vom Startzustand über in den Zustand (0DM) (dargestellt durch den Pfeil). Durch das Ereignis „$Einwurf\ von\ 50PF$" geht der Automat in den Zustand (50PF) über; dem Ereignis „$Einwurf\ von\ 1DM$" folgt der Endzustand (Cola ausgeben). Man sagt, der Automat hat die Ereignis-Folge ($Colataste\ drücken,\ Einwurf\ 50PF,\ Einwurf\ 1DM$) akzeptiert.

Um unser Beispiel nicht zu kompliziert zu machen, gehen wir davon aus, dass der Getränkeautomat, nachdem er einen Endzustand erreicht hat, von selbst in den Startzustand zurückgeht und wir denken uns unseren Automat ohne Abbruchtaste.

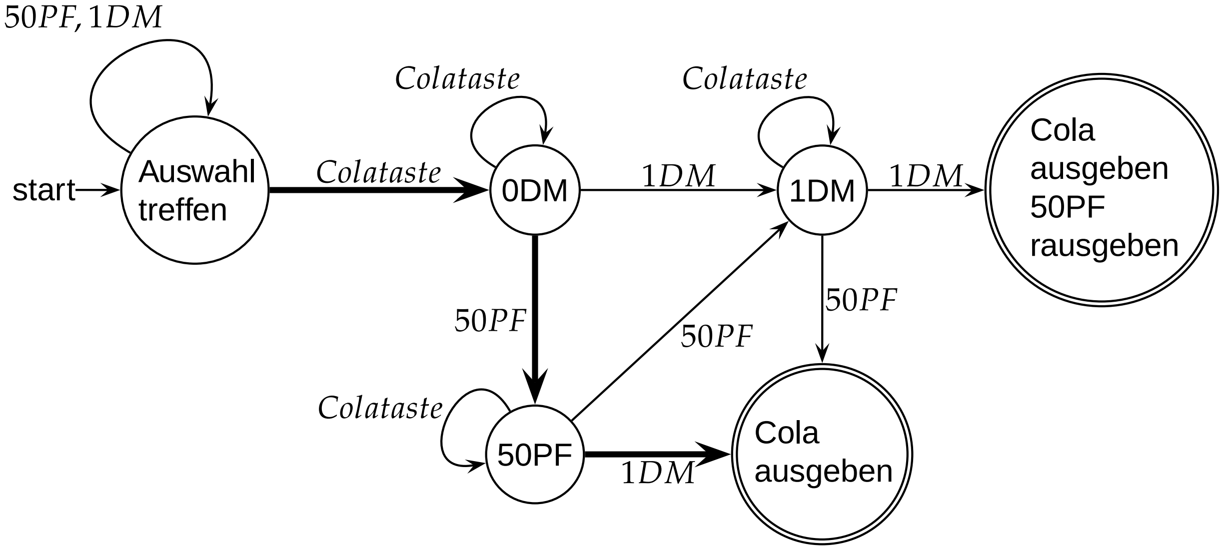
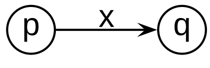



Abbildung 1: Getränkeautomat

An dem Beispiel des Getränkeautomaten erkennen wir die wesentlichen Elemente, die für ein gedankliches Modell eines Automaten notwendig sind: Wir haben eine endliche Menge $Z$ von Zuständen (in der Grafik die Kreise), eine endliche Menge $\mathcal{A}$ von Ereignissen (in der Grafik die Beschriftung der Pfeile). Außerdem haben wir eine Abbildung $f$ ( in der Grafik alle Pfeile), die jeden Zustand bei Eintreten eines Ereignisses in einen anderen (manchmal auch denselben) Zustand überführt. Schauen wir uns diese Abbildung einmal genauer an: $f$ ist definiert auf dem kartesischen Produkt aus der Menge $Z$ der Zustände und der Menge $\mathcal{A}$ der Ereignisse und hat die Menge $Z$ der Zustände als Wertebereich. Also $f : Z \times \mathcal{A} \to Z$. Hat man zwei Zustände $p$ und $q$ und ein Ereignis $x$, so wird $f(p,x) = q$ in einer Grafik, die einen Automat beschreibt, folgendermaßen dargestellt:




Da $f$ eine Funktion ist, muss sie natürlich für alle Paare $(p,x)$ aus $Z \times \mathcal{A}$ definiert sein. Daher muss es im Automat für jeden Zustand und für jedes mögliche Ereignis einen Nachfolgezustand geben. Deshalb treten in unserem Beispiel auch bei den Zuständen (Auswahl treffen), (0DM), (50PF) und (1DM) Pfeile auf, die mit „$50PF, 1DM$"

bzw. „*Colataste*“ beschriftet sind und auf den selben Zustand zurückzeigen, obwohl eine solche Auswahl durch einen Benutzer unsinnig erscheint.

Bezeichnet man noch den Startzustand mit $s$ und die Menge der Endzustände (in der Grafik die Doppelkreise) mit $E$, dann versteht man unter einem (endlichen) Automat $M$ das 5-Tupel $(Z, \mathcal{A}, f, s, E)$. Der Automat $M$ akzeptiert eine Folge von Ereignissen (in der Grafik die Folge *Colataste drücken*, *Einwurf 50PF*, *Einwurf 1DM*), wenn eine Überführungsfolge (in der Grafik die dicken Pfeile) den Startzustand $s$ in einen der Endzustände überführt. Da die Mengen $Z$ und $\mathcal{A}$ nur endlich viele Elemente haben, sprechen wir von einem endlichen Automat. Eine Grafik, wie wir sie für den Getränkeautomat betrachtet haben, nennt man ein Zustandsüberführungsdiagramm.

Betrachten wir ein weiteres

**Beispiel:** automatische Worterkennung

Wir möchten einen Text so bearbeiten, dass er den neuen Rechtschreiberegeln entspricht. Dazu möchten wir, dass der Texteditor das Wort „daß“ findet, bzw. die Kombination {beliebige Buchstaben daß beliebige Buchstaben} erkennt. Die Menge $\mathcal{A}$ der Ereignisse ist in diesem Fall das gesamte deutsche Alphabet, also die Buchstaben A, ..., Z, a, ..., z. Wir sprechen daher auch vom Alphabet $\mathcal{A}$, statt von der Menge der Ereignisse. Ein Automat, der dies leistet, wird durch folgendes Diagramm beschrieben.

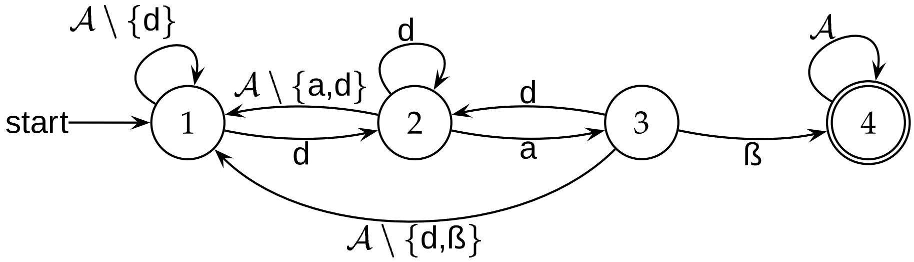



Abbildung 2: Texterkennungsautomat

Wenn wir als Pfeilmarkierung $\mathcal{A} \setminus \{$d $\}$ benutzt haben, so beschreiben wir damit die Menge aller Buchstaben des deutschen Alphabets außer dem Buchstaben d, d.h. die Menge $\mathcal{A}$ ohne das Element d. Die Zustände dieses Automaten sind $1, 2, 3$ und $4$; der Startzustand ist die $1$, und der einzige Endzustand ist $4$. Dieser Automat erkennt genau die Folgen von Buchstaben, die, im Startzustand eingelesen, den Automaten in den Endzustand überführen. Also nur, wenn der Automat der Reihe nach die Buchstaben d, a, ß im Text liest, gelangt er vom Startzustand 1 in den Endzustand 4; in jedem anderen Fall bleibt der Automat im Zustand 1 „stecken“.

Wie die Überführungsfunktion definiert ist, lesen wir am Diagramm ab: $f(1,\text{a}) = 1$, $f(1,\text{b}) = 1$, $f(1,\text{c}) = 1$, aber $f(1,\text{d}) = 2$ und dann wieder $f(1,\text{e}) = 1, \cdots, f(1,\text{z}) = 1$, usw. Eine bessere Übersicht darüber, wie die Funktion $f$ definiert ist, erhält man, wenn man sich eine Tabelle erstellt, in der in der obersten Zeile alle Zustände aufgeführt sind und in der ersten Spalte alle Buchstaben unseres Alphabets $\mathcal{A}$. Dann trägt man in die einzelnen Spalten neben den Buchstaben ein, in welchen Zustand der Automat übergeht, nachdem er den Buchstaben in den verschiedenen Zuständen gelesen hat. Betrachten wir einmal eine solche Tabelle für den Texterkennungsautomat aus Abbildung 2:

| **Buch-** | **Zustände** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **staben** | 1 | 2 | 3 | 4 |
| a | 1 | 3 | 1 | 4 |
| b | 1 | 1 | 1 | 4 |
| c | 1 | 1 | 1 | 4 |
| d | 2 | 2 | 2 | 4 |
| $\vdots$ | | | | |
| s | 1 | 1 | 1 | 4 |
| ß | 1 | 1 | 4 | 4 |
| $\vdots$ | | | | |

Tabelle 1: Zustandsüberführungstabelle

Neben den Buchstaben a trägt man in die Spalte mit der Überschrift $1$ ein, in welchen Zustand der Automat übergeht, wenn er im Zustand 1 den Buchstaben a liest; in die nächste Spalte trägt man ein, in welchen Zustand er übergeht, wenn er im Zustand 2 den Buchstaben a liest, usw. Nach diesem Muster füllt man die gesamte Tabelle für alle Buchstaben aus $\mathcal{A}$ aus. Am Ende stehen dann in dieser Tabelle alle Funktionswerte der Überführungsfunktion $f$. In der zweiten Zeile kann man z.B. nacheinander die Funktionswerte $f(1,\text{a})$, $f(2,\text{a})$, $f(3,\text{a})$ und $f(4,\text{a})$ ablesen, in der dritten Zeile die Funktionswerte $f(1,\text{b})$, $f(2,\text{b})$, $f(3,\text{b})$ und $f(4,\text{b})$.

**Aufgabe 1:** Gib das Diagramm eines Automaten an, der das Wort „beben“ in einem Text findet.

(Die Lösung dieser und der nächsten Aufgabe wird im MONOID, Ausgabe 68, veröffentlicht.)

Zum Schluss noch eine Aufgabe, die uns zeigt, wie die Sprache, die ein Automat erkennt, formalisiert werden kann. Die Zustände dieses Automaten sind 1, 2 und 3. Das

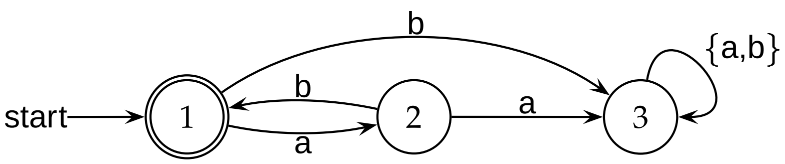



Abbildung 3: Spracherkennungsautomat

Alphabet $\mathcal{A}$ besteht aus den zwei Buchstaben a und b, der Startzustand ist die Eins, und die Menge der Endzustände besteht nur aus der 1.

**Aufgabe 2:** Gegeben sei ein Automat $M = (\{1, 2, 3\}, \{\text{a,b}\}, f, 1, \{1\})$ durch das Diagramm Abbildung 3.

1. Gib die Werte von $f(i,\text{a})$ und $f(i,\text{b})$ für $i = 1, 2, 3$ durch eine Zustandsüberführungstabelle an.

2. Welche Folgen von Buchstaben bestehend aus a und b überführen den Automat $M$ vom Startzustand in den Endzustand?

In der Überschrift und in der Einleitung zum voran gegangenen Artikel aus der Informatik über Automaten und Monoide taucht das Wort auf, das schon in früheren Heften erwähnt wurde, weil es auch der Name dieser Zeitschrift ist:

MONOID

In der Mathematik versteht man darunter eine „Halbgruppe mit neutralem Element"; was bedeutet das?

Wenn man zum Beispiel die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ miteinander multipliziert, erhält man wieder natürliche Zahlen, die Multiplikation ist eine **Verknüpfung** auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, die nicht aus $\mathbb{N}$ herausführt. Auf Klammern kann man dabei verzichten: $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c$ aus $\mathbb{N}$ (die Multiplikation ist **assoziativ**). Eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung heißt eine **Halbgruppe**. Die $1$ verändert beim Multiplizieren mit einer Zahl diese nicht, sie verhält sich **neutral**. Also ist $\mathbb{N}$ mit der Multiplikation *eine Halbgruppe mit neutralem Element*. Eine solche Struktur bezeichnet man auch kurz als ein **Monoid**. Aus dem Artikel von Valentin Blomer über die *Gruppe* als mathematische Struktur ersieht man, dass eine Gruppe ein Monoid ist, in dem jedes Element ein „inverses" Element besitzt, so dass also die Verknüpfung mit diesem das neutrale Element ergibt. Dagegen existiert zu keiner natürlichen Zahl (außer der $1$) eine natürliche Zahl, so dass beider Produkt $1$ ist: Außer $1$ hat also keine natürliche Zahl eine zu ihr inverse natürliche Zahl. In dieser Hinsicht ist $\mathbb{N}$ ziemlich weit entfernt davon, eine Gruppe zu sein.

Weil ein Monoid also - verglichen mit einer Gruppe - eine „bescheidenere" Struktur darstellt und diese Zeitschrift auch nur ganz bescheiden Freude an der Mathematik wecken will und keine großen Sätze hervorbringt und keine neue Theorien entwickelt, heißt sie schlicht MONOID. Wer darüber noch etwas mehr nachlesen möchte, sei auf die Seiten 226 bis 230 in dem schönen Geometrie-Buch von Martin Mettler „Vom Charme der ‚verblassten' Geometrie" (s. S. 6) verwiesen.

Dass MONOID auch noch eine andere Rolle spielen kann, zeigt ein Blick in die Presse (s. S. 35). (E.K.)

---

## Errata

**Alexandra Bauer**, die die 8. Klasse des Gymnasiums Michelstadt besucht, schrieb uns, dass sich in der Lösung der Aufgabe „Eine ungewöhnliche Quersumme" aus MONOID 64 (Lösung in MONOID 65 auf Seite 19) ein Fehler befindet: Im dritten Teil der Aufgabe war gefragt, wie viele zweiziffrige Zahlen $n$ eine spezielle Quersumme $SQ < 36$ haben. Die Antwort lautete, dass dies für alle $98$ Zahlen, die kleiner als $99$ sind gilt, da $SQ(99) = 36$ ist. Alexandra bemerkte, dass hier auch die Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ mitgezählt wurden. Da diese aber nur einstellig sind, lautet die richtige Antwort, dass nur für $89$ Zahlen $SQ(n) < 36$ ist.

*Anmerkung der Redaktion: Wir sind dankbar für alle Hinweise zu Fehlern! Die passieren leider trotz großer Sorgfalt immer mal wieder. Wir sind deshalb auf aufmerksame Leser angewiesen. Natürlich freuen wir uns auch über Anregungen und Kritik aller Art.*

*Ausgerechnet Mathematik!*

# Das Mathe-Forum

für Knobler, Schnelldenker, Tiefsinnige, Hintergründige, ...

MONOID soll als Zeitschrift an der Schnittstelle von Schule und Universität auch über Angebote des Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz berichten, die von Schulen, Lehrern und Lehrerinnen, Schülern und Schülerinnen genutzt werden können. Diese Angebote betreffen

- **Informationstage** über Studien- und Berufsperspektiven, verbunden mit mathematischen Beiträgen und der Möglichkeit, Vorlesungen und Workshops zu besuchen,
- **Projekttage bzw. -wochen** an Schulen oder in der Universität,
- Einladungen zu **Forschungsaktivitäten** (PC-Labors),
- **Aufgaben-Wettbewerbe** mit der Aussicht, Preise zu gewinnen,
- **Arbeitskreise** für mathematisch besonders Interessierte,
- **Ferienkurse** in Mathematik und Informatik,
- **Ausstellungen**.

Ein **Informationstag**, der sich an alle Gymnasien in Rheinland-Pfalz und einen großen Teil der Gymnasien in Hessen richtete war der **Schülertag 2001**, der am 7. Juni in der Uni Mainz mit rund 250 Oberstufenschülern/innen stattfand. Im MONOID 65 war dazu eingeladen worden. Es gab auch einen Mathematik-Wettbewerb mit neun Aufgaben aus der Mathematik und einer Aufgabe aus der Informatik. Die Aufgaben waren sicher nicht leicht. Dennoch wurden mehrere vollständig richtige Lösungen eingesandt. Bei der Preisverleihung am Nachmittag des 7. Juni erhielten

- <u>den ersten Preis</u> (500 DM + das Buch „Alles Mathematik - Von Pythagoras zum CD-Player“ von Martin Aigner und Ehrhard Behrends (Hrsg.) + eine LaTeX-CD mit Handbuch) die Gruppe **Thomas Lauber**, **Magnus Mager** und **Jan Schütz** von der Carl-von-Ossietzky-Schule Wiesbaden;
- <u>jeweils einen zweiten Preis:</u>

  **Kerstin Bauer** aus Kaiserslautern (3 Bücher + LaTeX-CD);

  **Heiner Olbermann** vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal (2 Bücher + LaTeX-CD + 10 kg Haribo Goldbären) und

  die Gruppe **Florian Johann**, **Andreas Menge** und **Richard Paraiss** vom Martin-Butzer-Gymnasium Dierdorf (1 Buch + LaTeX-CD + 20 kg Haribo Goldbären).

<u>Bitte vormerken:</u> **Schülertag 2002 am 23. Mai in Mainz**; Einladungen gehen im März 2002 an die Schulen.

Einen **Arbeitskreis** für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler bietet der Fachbereich Mathematik **im kommenden Wintersemester** immer mittwochs nachmittags an; darum heißt es:

*Ausgerechnet Mathematik!* **MMM statt WWW.**

**Mathematik am Mittwoch Mittag**

Jeden Mittwoch 15-18 Uhr ab 7.11.2001; Leitung: Prof. Dr. Duco van Straten

(Nähere Informationen auf dem eingelegten Blatt!)

# Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Zunächst möchten wir alle neuen Abonnenten herzlich begrüßen! Die Gemeinde der „MONOIDaner" hat sich auch in den Monaten Juni und Juli weiter vergrößert; zum Jahresende werden wir Bilanz ziehen. Aber vorerst wollen wir noch weiter werben; denn es sollten möglichst viele Schülerinnen und Schüler etwas von der Schönheit, aber auch Nützlichkeit mathematischer Ideen erfahren. Sehr erfreulich finde ich die Bereitschaft - auch von Schülerinnen und Schülern - Artikel und Aufgaben für MONOID zur Verfügung zu stellen. Ich bitte um Nachsicht, wenn wir nicht gleich antworten; es geht nichts verloren, sondern alles wird gesammelt, bis ein geeigneter Platz in einem der nächsten Hefte für die Veröffentlichung zur Verfügung steht. Schön wäre es, wenn sich wie in den drei MONOID bereits unterstützenden Gymnasien in Alzey, Frankenthal und Östringen auch an anderen Schulen MONOID-AG's bilden würden; Ansätze dazu sind schon in einigen weiteren Gymnasien vorhanden.

2. Zum 1. Januar 2002 müssen auch wir den Abonnementspreis von DM auf EURO umstellen. Das Jahresabonnement kostet zur Zeit 15 DM (für 4 Hefte einschließlich Versand); das wären umgerechnet 7,67 EUR. Da der Abonnementspreis schon knapp kalkuliert ist, können wir nicht abrunden. Eine Aufrundung auf volle EURO ergibt 8 EUR. Also: **2001 kostet das Jahresabonnement noch 15 DM, ab 1. Januar 2002 dann 8 EUR.**

3. Auch die Bankverbindung werden wir bei dieser Gelegenheit umstellen. Aus der Zeit der Herausgabe von MONOID durch Herrn Mettler haben wir das MONOID-Konto Nr. 123 646 bei der Stadtsparkasse Frankenthal (BLZ 545 510 30) beibehalten. Um Gebühren zu sparen und auch um einen einfacheren Zugriff auf das Konto zu haben, haben wir ein Konto für MONOID bei der Mainzer Volksbank (gebührenfrei!) eingerichtet. Ab sofort kann auch dieses benutzt werden. Es lautet auf meinen Namen (Dr. Ekkehard Kroll; Zusatzbezeichnung: Monoid) und hat die **Konto-Nr.: 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00).**

   Das Frankenthaler Konto werden wir für eine Übergangszeit (bis 31. März 2002) noch beibehalten.

4. Falls es noch nicht gemerkt wurde: Auf der Homepage von MONOID gibt es immer zwei Aufgaben aus dem aktuellen Heft, die - soweit möglich - dynamisch und interaktiv gestaltet sind. Die Adresse:

   `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid/`

5. In diesem Heft werden auf der **„Seite für den Computer-Fan"** wieder Aufgaben vorgeschlagen, die (zumindest teilweise) unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder ein Computeralgebra-Systems oder eines eigenen kleinen Programms zu behandeln sind. Auch hierbei kann man Punkte erhalten.

6. Die jährliche **MONOID-Feier** zur Vergabe von Preisen für die erfolgreichsten Löser(innen) wird in diesem Jahr **in Mainz** stattfinden. Termin: Samstag, **15. Dezember 2001**; Beginn: 10.15 Uhr; Ort: Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Fachbereich Mathematik, Staudingerweg 9, Raum 05-514. Die Preisträger werden noch persönlich eingeladen. Alle Freunde und Förderer von MONOID seien

schon jetzt herzlich eingeladen. Näheres zum Programm wird auf der MONOID-Homepage `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid/` zu finden sein.

7. In diesem Heft beginnen wir mit der Wiedergabe von Aufsätzen und Aufgaben aus der **Informatik**. MONOID nennt sich zwar „Mathematikblatt“, aber ohne den Einsatz von Computern und Programmen sind umfangreiche praktische Probleme nicht zu bewältigen. Eine der drei Wurzeln der Informatik ist neben der Elektro- und der Nachrichtentechnik die Mathematik; insbesondere die theoretische Informatik enthält umfangreiche Mathematik-Anteile. Ein wichtiges Kapitel der theoretischen Informatik ist die Automatentheorie; eine kleine Einführung in dieses Thema und gleichzeitig die Herausstellung der Verbindung zur Mathematik über den Monoid-Begriff bietet der Aufsatz von Andrea Krol über „Automaten und Monoide“, der im nächsten Heft fortgesetzt wird.

8. Die Anschriften der **Autoren** dieses Heftes:

   - Valentin Blomer, Th.-Veiel-Straße 62, 70374 Stuttgart.
   - Dr. Hartwig Fuchs, Friedrich-Naumann-Straße 36, 55131 Mainz.
   - Andrea Krol, Fachbereich Mathematik / Institut für Informatik an der Universität, 55099 Mainz
   - Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, 67316 Carlsberg
   - Ingmar Rubin, Kienbergstraße 25, 12685 Berlin.

Für Herausgeber und Redaktionsleitung: Ekkehard Kroll

---

## *Zum Image der Mathematik in der Literatur*

> Die Spielregeln verletzen: Der Mathematiker Ta malte seinen Schülern eine sehr unregelmäßige Figur auf und stellte ihnen die Aufgabe, ihren Flächeninhalt zu berechnen. Sie teilten die Figur in Dreiecke, Vierecke, Kreise und andere Figuren, deren Flächen man berechnen kann, aber keiner konnte den Inhalt der unregelmäßigen Figur wirklich genau angeben. Da nahm Meister Ta eine Schere, schnitt die Figur aus, legte sie auf eine Waagschale, wog sie und legte auf die andere Waagschale ein leicht berechenbares Rechteck, von dem er so lange Stücke abschnitt, bis die Waagschalen gleich standen. Me-ti nannte ihn einen Dialektiker, weil er anders als seine Schüler, welche nur Figuren mit Figuren verglichen, die zu behandelnde Figur als ein Stück Papier mit einem Gewicht behandelt (und so die Aufgabe als eine wirkliche Aufgabe, unbekümmert um Regeln, gelöst) hatte.
>
> Bert Brecht: Me-ti, Buch der Wendung

MONOID im Spiegel der Presse; hier: Artikel aus dem Magazin JOGU der Johannes Gutenberg-Universität Mainz - Nr. 175 / 2001

# MONOID - ein Mittel gegen Studentenschwund

**Der Fachbereich Mathe geht an die Schule**

*Schnelldenker und Tiefsinnige auf die Spuren der Mathematik in der Alltagswelt aufmerksam machen, für ein Fach begeistern, dass bei vielen Unbehagen weckt, dieses Ziel setzt sich der Fachbereich Mathematik mit der Herausgabe der Schülerzeitung MONOID.*

„Von den in Chelsea wohnenden Invaliden haben 70 Prozent ein Auge, 75 Prozent ein Ohr, 80 Prozent einen Arm und 85 Prozent ein Bein in einem unsinnigen Krieg verloren. Wie hoch ist mindestens der Prozentsatz derjenigen, die mit vier Verlusten leben müssen?“ Das ist eine der Rechenaufgaben, die sich Mathematiker Charles Ludwidge Dodgson, eher unter dem Namen Lewis Caroll (Alice im Wunderland) bekannt, aus Liebe zu Poesie und Mathematik ausgedacht hat.

Und dies ist auch eine Aufgabe für Schüler ab der fünften Klasse und andere Mathematikfans in der 65. Ausgabe der Mathematikzeitung MONOID. Seit diesem Jahr gibt der Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, mit Unterstützung des Vereins der Freunde und dreier Gymnasien, das Matheblatt heraus. Knobeln - so früh wie möglich, ist dabei die Devise. „Es ist für uns sehr wichtig, Nachwuchs zu rekrutieren“, erklärt Dr. Ekkehard Kroll, akademischer Direktor an der Uni, den Grund für sein Engagement in die Schülerzeitschrift. „Es gibt viel zu wenige Mathematiker - nicht nur an der Uni, sondern vor allem in der Industrie.“

*Knobeln - so früh wie möglich*

Mit der MONOID wollte schon ihr Begründer Martin Mettler seit 1980 Schnelldenker und Tiefsinnige auf die Spuren der Mathematik in der Alltagswelt aufmerksam machen, für ein Fach begeistern, dass bei vielen Unbehagen weckt. Eingebunden in Beispiele werden Sierpinskiprozesse anschaulich erklärt oder mit Punktequadrupeln Dreieckssätze bewiesen. Mathespielereien für Jüngere, aber auch Aufgaben für Schülerinnen und Schüler ab der 8. Klasse sind in der MONOID versammelt. Alles auf hohem Niveau und gleichzeitig für Jedermann verständlich. Und Mitdenken lohnt sich. Als Belohnung für ein hartnäckiges Rechnen und Rätseln gibt es für Zahlenfanatiker, die ihr Können in allen vier Ausgaben eines Jahres bewiesen haben, Bücherpreise, Knobelspiele oder auch ein goldenes MONOID- und Mathe-„M“. „Die Resonanz ist recht hoch“, sagt Kroll, „ab und an bekommen wir sogar Aufgaben von Schülern zugesandt, die so gut sind, dass wir sie abdrucken.“

Die Herausgabe und Verbreitung der MONOID an Rheinland-Pfälzischen und Hessischen Gymnasien ist aber nur ein Projekt, mit dem der Fachbereich die Aufmerksamkeit für das Zahlenfach erhöhen will. Die Mathematiker investieren zudem viel Zeit in das „Mathe-Forum“, eine Art Marktplatz für Mathematik. Von dieser Plattform aus wirken die Mainzer bei Landeswettbewerben mit und organisieren Lehrerfortbildungen und Schülertage.

Pia Heinemann

MONOID Jahrgang 21 Heft 67 September 2001

# Inhalt



# Die Redaktion




**Betreuung der Abonnements:** Fachbereich Mathematik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 15 DM (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 123646 bei der Stadtsparkasse Frankenthal, BLZ 54551030, oder auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000.

**Herausgeber:** Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

**Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey**,
**Karolinen-Gymnasium Frankenthal**,
**Leibniz-Gymnasium Östringen**.



**Anschrift:** Fachbereich Mathematik der Universität Mainz, 55099 Mainz
Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
**e-Mail:** monoid@mathematik.uni-mainz.de
**Homepage:** http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

## Rubrik der Löser und Löserinnen

***(Stand: 14.09.2001)*** [3]

**Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

Kl. 6: Julia Becker 7, Daniel Faber 18, Marina Kauff 7, Johann Kirsch 32, Nadine Meitzler 7, Johannes Merz 35, Daniel Noll 14, Katharina Oehl 7, Marie-Christine Salamon 7, Lisa Schäfer 7, Jennifer Stemmler 7, Marlene Weber 7, Jana Thielmann 7;

Kl. 7: Markus Bassermann 59, Meike Fluhr 32, Jennifer Großer 7, Isabelle Merker 31, Mareike Scholl 6;

Kl. 8: Isabelle Maurot 14, Christina Simon 24, Florian Schnitter 32;

Kl. 9: Marc Schöfer 17;

MSS 11: Manuel Kochenburger 15;

MSS 12: Aaron Breivogel 16, Dominik Kraft 49;

MSS 13: Christoph Peters 28, Sönke Loitz 38.

**Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

Kl. 9: Felix Henninger 8, Alexander Kent 5, Gregor Dschung 47;

MSS 12: Marcel Zimmer 10;

MSS 13: Ramona Christmann 12.

**Leibniz-Gymnasium Östringen** (Betreuender Lehrer **Klaus Ronellenfitsch**):

Kl. 7: Sebastian Bischof 25;

Kl. 8: Stefan Tran 46.

**Bad Kreuznach**, Lina-Hilger-Gymnasium: Kl. 13: Peter Antes 22;

**Hamburg:** Kl. 13: Wolfram Regen 23;

**Holzhausen:** Thomas Hotschicke 3;

**Kaiserslautern:** Kl. 12: Kerstin Bauer 92;

**Magdeburg**, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 11: Steffen Biallas 73;

**Mannheim** (Betreuender Lehrer **Ulrich Wittekindt**):

Kl. 8: Matthias Werner 16, Adrian Streitz 6;

**Marienberg** (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):

Stefanie Tiemann 21;

**Münster**, Schule auf der Aue (Betreuender Lehrer **H. Stapp**):

Kl. 8: Sarah Danz 2, Tobias Eggert 3, Ingo Gerhold 12, Nadine Kenntje 5, Marc Leonhardt 2, Jonas Löbig 3;

**Oberusel:** Kl. 10: Boris Traskow 14;

**Osthofen:** Eugen Keller 23;

**Westerburg**, Konrad-Adenauer-Gymnasium:

Kl.10: Julius Demmer 2, Kathrin Hehl 2, Josef Keller 3, Alexandra Rienert 3, Tatjana Schmidt 9, Lena Schürg 9;

**Winnweiler**, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer **Herr Kuntz**):

Kl. 6: Annika Johann 36, Julia Jung 23;

Kl. 8: Michael Kuntz 54;

Kl.10: Verena Prägert 32;

**Zweibrücken**, Hofenfelsgymnasium: Kl. 10: Catherina Würtz 18.

---

[3]Wegen der Schulferien kam es in einigen Fällen zu Verzögerungen bei der Aktualisierung. Deshalb sind einige Punktzahlen noch nicht auf dem neuesten Stand.

# *Ausgerechnet Mathematik!*

# MMM STATT WWW

## Mathematik am Mittwoch Mittag

Dieses Programm richtet sich an interessierte Schülerinnen und Schüler und hat das Ziel, Spaß an der Mathematik und ihrer Schönheit zu vermitteln, junge Leute in die Zauberwelt der Mathematik einzuführen. An diesen Veranstaltungen mit spielerischem, informellen Charakter können die Schüler und Schülerinnen aktiv mitmachen.

| **Ort:** | **Zeit:** |
|---|---|
| Johannes Gutenberg-Universität<br>Fachbereich 17 - Mathematik<br>Staudingerweg 9<br>55099 Mainz | Jeden Mittwoch von 15 bis 18 Uhr<br>Voraussichtlicher Beginn:<br>7. November 2001 |

**Nachfrage und Anmeldung:**

Prof. Dr. Duco van Straten; Tel. 06131 / 39-22435

email: `straten@mathematik.uni-mainz.de`

Sekretariat (Frau Emerenziani); Tel. 06131 / 39-23335

email: `emerenz@mathematik.uni-mainz.de`

**Themen:**

• Harmonische Zahlen • Die magischen Würfel • Endlich und Unendlich • Flachland • Polyeder • Pflasterungen • Dreiecke • Komplexe Zahlen • Spielen mit Kreisen • Symmetrie • Archimedische Körper • Rechnen mit der Uhr • Achilles und die Schildkröte • Dynamische Systeme und Chaos • Rechnen mit Kurven • Relativitätstheorie • RSA-Kryptosystem • Die Domino-Brücke • $\pi$ • Das arithmetisch-geometrische Mittel

Auch die Schüler und Schülerinnen können Themen vorschlagen.