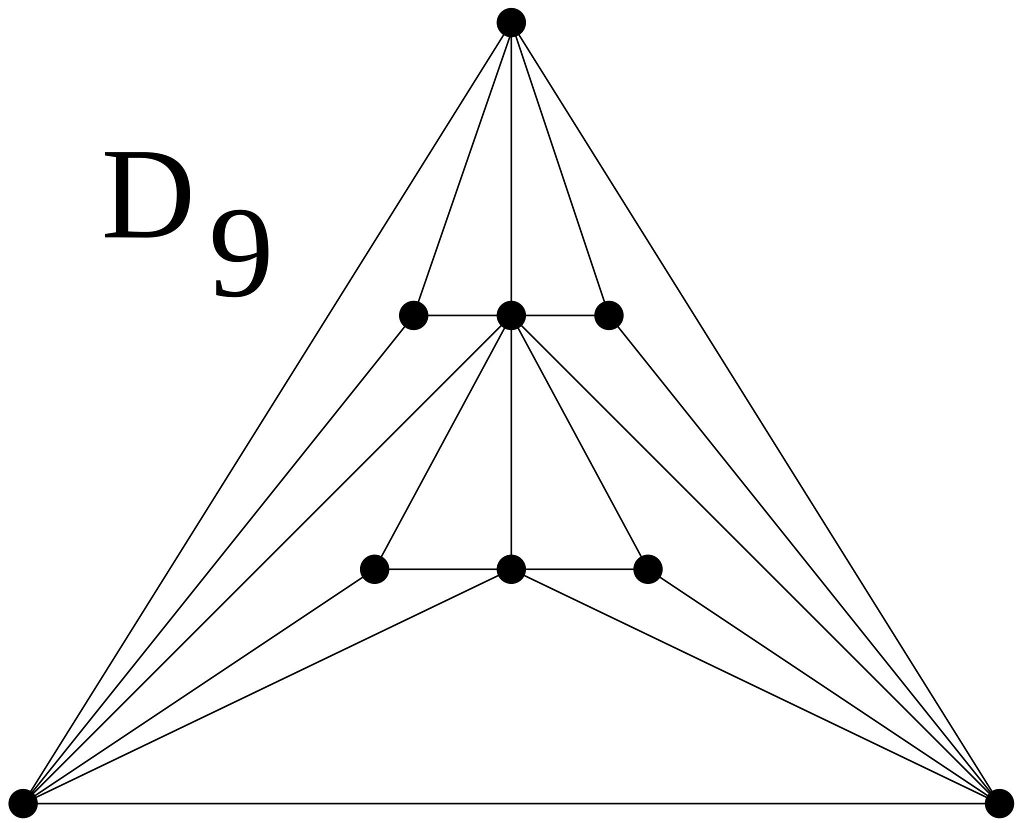
Jahrgang 22 Heft 71 September 2002

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.11. 2002.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

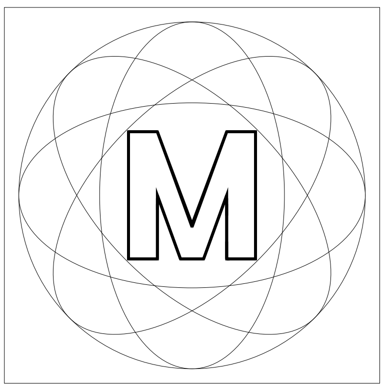
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

Das Goldene M



Außer der Medaille mit dem goldenen M, die ihr Aussehen im letzten Jahr gewandelt hat, gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Was ist die Moser-Folge?

Ein Bericht für Mathis (Schülerinnen und Schüler der Kl. 5 - 7)

von Martin Mettler

Im **MONOID 70, S. 19** stellten wir in der Mathespielerei **Zahlenfolge** die Frage:
Welche Zahl folgt auf 63 *in der Zahlenfolge* $1; 3; 7; 15; 31; 63; \ldots$ *?*

Eine mögliche **Lösung** erhält man durch Differenzen-Bildung aufeinanderfolgender Zahlen:

Die Folge:	1		3		7		15		31		63	$\ldots$
hat die Differenzenfolge:		2		4		8		16		32		$\ldots$

Nun bemerkt man leicht, dass sich in der zweiten Zeile die Zahlen stets verdoppeln; demnach muss nach 32 das Doppelte von 32 folgen, also 64.
Dann müsste in der Zeile der Folgeglieder nach 63 die $63 + 64 = 127$ stehen.

Anmerkung:
Die Differenzen-Bildung wird so lange durchgeführt bis man eine Folge erhält, bei der man das Bildungsgesetz leichter erkennen kann. Ein weiteres Beispiel:

Bestimme das 10. Glied der Folge: $1; 2; 4; 8; 16; 31; 57; 99; \ldots$
Diese Folge wird **Moser-Folge** genannt.

Lösung:
Um ein Bildungsgesetz für die Glieder dieser Folge zu finden, gehen wir folgendermaßen vor:

Die Moser-Folge:	1	2	4	8	16	31	57	99	$\ldots$
Die 1. Differenzenfolge:	1	2	4	8	15	26	42	$\ldots$	
Die 2. Differenzenfolge:	1	2	4	7	11	16	$\ldots$		
Die 3. Differenzenfolge:	1	2	3	4	5	$\ldots$			

In der letzten Zeile würde nun die 6 folgen;
also müsste man in der 2. Differenzenfolge mit $16 + 6 = 22$,
in der 1. Differenzenfolge mit $42 + 22 = 64$ und
in der Moser-Folge mit $99 + 64 = 163$ fortfahren.

Eine Anwendung:
Aus Abb. 1 erkennen wir :

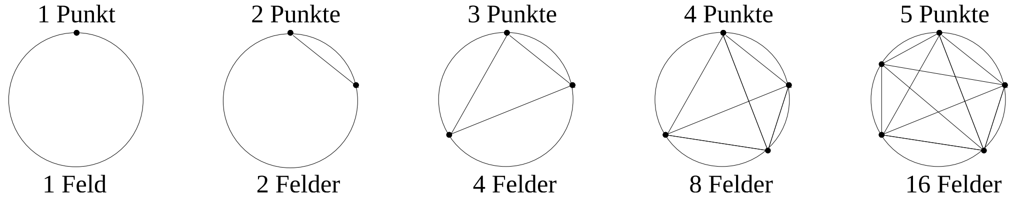


Abb. 1

- Wählt man auf einer Kreislinie 2 Punkte und zeichnet die Verbindungsstrecke, so wird dadurch der Kreis in 2 Felder geteilt.
- Wählt man auf der Kreislinie 3 Punkte und zeichnet alle möglichen Verbindungsstrecken dieser Punkte ein, so wird dadurch der Kreis in 4 Felder geteilt.
- Bei 4 Punkten erhält man 8 Felder, bei 5 Punkten 16 Felder.

- Wählt man auf der Kreislinie einen einzigen Punkt, so gibt es keine Verbindungsstrecken und somit bildet der Kreis ein einziges Feld.

Aus der Abb. 2 sehen wir:
bei 6 Punkten erhalten wir mal 30, mal 31 Felder. Das liegt daran, dass manchmal drei der Verbindungsstrecken sich im Inneren des Kreises in einem Punkt treffen. Dadurch bilden diese Strecken kein Dreieck, also geht in diesem Fall ein Feld verloren.
Im linken Kreis treffen sich drei der Strecken im Punkt P, daher erhält man insgesamt nur 30 Felder.

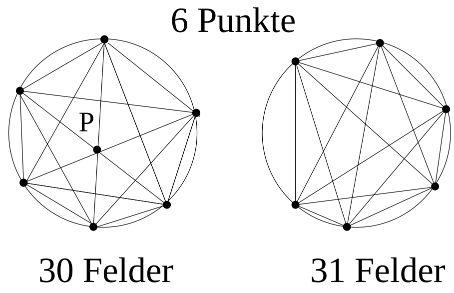


Abb. 2

Im rechten Kreis treffen sich keine drei Verbindungsstrecken im Inneren des Kreises und somit erhalten wir die größtmögliche Anzahl von Feldern 31.

Aus Abb. 3 sehen wir, dass man bei 7 Punkten höchstens 57 Felder erhält.
Im Inneren des rechten Kreises gibt es keinen Punkt in dem sich drei Verbindungsstrecken treffen, also erhält man die Höchstzahl 57 der entstehenden Felder.
Im Inneren des mittleren Kreises gibt es lediglich einen Punkt P in dem sich drei Verbindungsstrecken treffen, also erhält man $57 - 1 = 56$ Felder.
Im Inneren des linken Kreises gibt es drei Punkte P, Q, R in denen sich jeweils drei Geraden schneiden, also erhält man $57 - 3 = 54$ Felder.

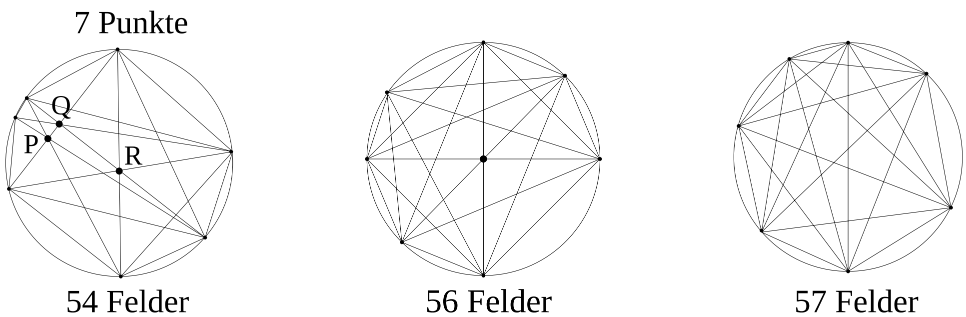


Abb. 3

Zusammenfassung:
Für 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Punkte auf dem Kreis erhält man höchstens 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57 Felder.

Frappierend, was? Die Moser-Folge löst die Frage nach der Höchstzahl der entstehenden Felder im Kreis.

Doch Vorsicht! Wir haben hier das Anzahlproblem nicht rigoros gelöst. Wir haben lediglich überprüft das für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ die entsprechenden Glieder der Moser-Folge für die jeweilige Höchstzahl der entstehenden Felder stehen. Dass diese Aussage für jede beliebige Anzahl von Punkten auf der Kreislinie gilt, müssten wir noch beweisen. Dazu laden wir die größeren Schülerinnen und Schüler ein!

Also, wer kann diese Behauptung beweisen ?

Wir betrachten nun das folgende Zahlen - Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.
\end{array}
$$

In der ersten Zeile steht eine 1.
In jeder weiteren Zeile kommt an die erste Stelle eine 1 und an die letzte Stelle eine 1; an allen anderen Stellen steht die Summe der beiden darüber stehenden Zahlen.
Das so erhaltene Dreieck wird **pascalsches Dreieck** genannt nach dem berühmten französischen Mathematiker, Philosoph und Physiker **Blaise Pascal** (1623 – 1662).

Dieses Dreieck hat sehr viele schöne Eigenschaften und Anwendungen. Z. B.:

- Das Dreieck hat unendlich viele Zeilen.
- Addiert man die Zahlen reihenweise, so erhält man die Zahlenfolge:

  $$1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; \dots$$

  Dies ist die Folge der Zweierpotenzen: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$
- Die rechte (linke) Seite des Dreiecks hat unendlich viele Zahlen; diese bilden die konstante Zahlenfolge: $1, 1, 1, \dots$ $\quad (k)$
- Die Zahlen in der ersten Parallelen zur Dreiecksseite von rechts (links) bilden die Folge: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ $\quad (e_p)$
- Die Zahlen in der zweiten Parallelen zur Dreiecksseite von rechts (links) bilden die Folge: $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ $\quad (z_p)$
- Die Zahlen in der dritten Parallelen zur Dreiecksseite von rechts (links) bilden die Folge: $1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots$ $\quad (d_p)$
- Die Zahlen in der vierten Parallelen zur Dreiecksseite von rechts (links) bilden die Folge: $1, 5, 15, 35, 56, 70 \dots$ $\quad (v_p)$ usw.
- Betrachten wir nun alle Zahlen des Dreiecks die rechts von (v_n) liegen und addieren jede Zeile dieser Zahlen, so erhalten wir die Folge:

  $$1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, \dots \qquad (m_n)$$

  Merkwürdig ! Das ist ja die **Moser-Folge**.

Und hier noch eine weitere, sehr nützliche Anwendung des pascalschen Dreiecks:
Die untere Seite des Dreiecks hat stets endlich viele Zahlen und diese ergeben die Koeffizienten für die binomischen Formeln:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= 1 \cdot a + 1 \cdot b \\
(a+b)^2 &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\
(a+b)^3 &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\
(a+b)^4 &= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b^1 + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a^1 b^3 + 1 \cdot b^4, \text{ usw.}
\end{aligned}
$$

Summen von der Form $\mathbf{S_n = x^n + y^n}$ mit $\mathbf{n \in \mathbb{N}^*}$

von Martin Mettler

Wir bezeichnen $x + y = s$ und $x \cdot y = p$ und bemerken, dass:

$$\begin{aligned}
S_1 &= x^1 + y^1 &&= s,\\
S_2 &= x^2 + y^2 &&= (x+y)^2 - 2xy = s^2 - 2p,\\
S_3 &= x^3 + y^3 &&= (x+y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = s(s^2 - 3p) = s^3 - 3ps,\\
S_4 &= x^4 + y^4 &&= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2 = s^4 - 4ps^2 + 2p^2.
\end{aligned}$$

Es scheint so, also könnte man **jede Summe von der Form $\mathbf{S_n = x^n + y^n}$ mit $\mathbf{n \in \mathbb{N}^*}$ durch s und p ausdrücken.**

Wir wollen diese Aussage durch vollständige Induktion beweisen:

Induktionsanfang: Wie oben gesehen, ist die Aussage für $n = 1, 2, 3$ und 4 wahr.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}^*, n \leq k$, wahr ist, und müssen beweisen, dass sie dann auch für $n = k + 1$ wahr ist, d. h. auch S_{k+1} kann durch s und p ausgedrückt werden.
Es ist

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= x^{k+1} + y^{k+1} = (x^k + y^k)(x + y) - x^k y - xy^k = S_k \cdot s - xy(x^{k-1} + y^{k-1}) =\\
&= S_k \cdot s - p \cdot S_{k-1}
\end{aligned}$$

Laut Annahme können S_k und S_{k-1} durch s und p ausgedrückt werden, und somit kann auch S_{k+1} durch s und p ausgedrückt werden.
Nun kann jeder nachprüfen, dass die folgenden Formeln gelten:

$$\begin{aligned}
S_5 &= x^5 + y^5 &&= s^5 - 5ps^3 + 5p^2s,\\
S_6 &= x^6 + y^6 &&= s^6 - 6ps^4 + 9p^2s^2 - 2p^3,\\
S_7 &= x^7 + y^7 &&= s^7 - 7ps^5 + 14p^2s^3 - 7p^3s.
\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 777:
Somit ergibt sich für die Aufgabe 777 folgende Lösung:
Es ist $s = 1$ und $S_5 = s^5 - 5ps^3 + 5p^2s = 211$;
$\Rightarrow 1 - 5p + 5p^2 = 211$
$\Rightarrow p^2 - p - 42 = 0$
$\Rightarrow p_1 = 7$ und $p_2 = -6$ sind die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung.

Wir suchen zwei Zahlen, deren Summe und Produkt bekannt sind. Gemäß der Formel von Vieta sind diese Zahlen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - sz + p = 0.$$

In unserem Fall:

$$z^2 - z + 7 = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 - z - 6 = 0$$

Die erste der beiden Gleichungen hat keine reellen Lösungen; die zweite hat die Lösungen 3 und -2.
Demnach sind die gesuchten Zahlenpaare $(3; -2)$ und $(-2; 3)$.

Ein kleiner Ausflug in die geometrischen Konstruktionen (I)

von Hartwig Fuchs

Die alten Griechen waren Meister der geometrischen Konstruktionen, die sie mit einer Vielzahl von Instrumenten durchführten:
Lineal, Rechtwinkel-Lineal, Winkelmesser, Zirkel – sogar ein Gerät zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels war darunter.
Sie erkannten aber bald, dass einige ihrer Konstruktionswerkzeuge "vom theoretischen Standpunkt aus" überflüssig sind; z.B. ist das Rechtwinkel-Lineal entbehrlich, weil ein rechter Winkel auch nur mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.
Sie setzten sich daher zum Ziel, Konstruktionsaufgaben mit möglichst wenigen verschiedenen Geräten zu lösen.
Deshalb betrachteten sie z.B. die Konstruktion der Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks als mathematisch besonders schön, weil man dabei nur ein Instrument, den Zirkel, benötigt.

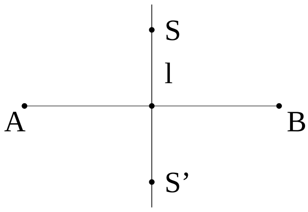
Da sich bei ihren Konstruktionen herausstellte, dass man (meistens) mit Zirkel und Lineal auskommt, entstand nach und nach die Tradition, für geometrische Konstruktionen nur noch diese beiden Instrumente als zulässig zu betrachten.

Aber nicht immer lagen die Griechen mit ihrer Beschränkung richtig.
Berühmt sind die drei geometrischen Aufgaben, die sie mit Zirkel und Lineal allein nicht lösen konnten:
Dreiteilung eines Winkels, Verdoppelung eines Würfelvolumens, Konstruktion eines Quadrats, das flächengleich mit einem gegebenen Kreis ist.
Heute weiß man: alle drei Aufgaben sind allein mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.

In späteren Jahrhunderten sahen es die Mathematiker als eine besondere Herausforderung an, über die Griechen hinaus zu gelangen, indem sie sich weitere Beschränkungen in der Wahl der für die Konstruktionen zugelassenen Instrumente auferlegten.
Dabei bildeten sich zwei Richtungen heraus:
die **Zirkel-Vermeidung** und die **Lineal-Vermeidung**, wie wir sie nennen wollen.

Die Zirkel-Vermeidung
Der erste Zirkel-Vermeider, von dem wir Kenntnis haben, ist Abu´l Wafa (940-997/998, Bagdad).
Er beschreibt Konstruktionen in einem Werk, dessen langer Titel ins Deutsche übersetzt lautet:
"Buch darüber, was der Meister an geometrischen Konstruktionen benötigt"; dabei hat er den griechischen Standard an Hilfsmitteln – nämlich Lineal und Zirkel – dadurch eingeschränkt, dass er zum Konstruieren nur das Lineal und einen "eingerosteten Zirkel" (also ein Zirkel mit unveränderlicher Öffnung) erlaubt.

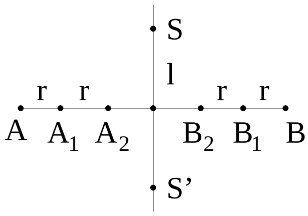
Beispiel 1
Man konstruiere nur mit Lineal und eingerostetem Zirkel das Mittellot l einer Strecke AB.
Die Zirkelöffnung sei r.



1. Fall: $|AB| < 2r$

1.1 Der Kreis um A schneidet den Kreis um B in S und S'.

1.2 Die Verbindungsstrecke SS' ist das Mittellot l von AB.

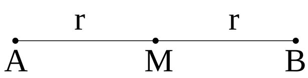


2. Fall: $|AB| > 2r$

2.1 Konstruiere A_1, B_1 mit dem Zirkel, dann (nach Bedarf) noch $A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$, bis $|A_nB_n| < 2r$ ist.

2.2 Verfahre für die Strecke A_nB_n wie in 1.1. Das Mittellot l von A_nB_n ist dann auch das Mittellot von AB.

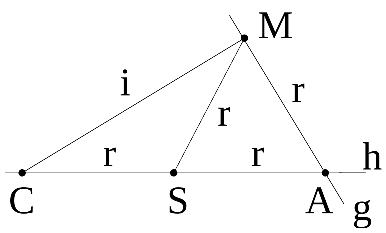
3. Fall: $|AB| = 2r$



3.1 Konstruiere den Mittelpunkt M der Strecke AB mit dem Zirkel.

3.2 Errichte in M das Lot l gemäß nachfolgendem Beispiel 2.

Beispiel 2
Man konstruiere nur mit Lineal und eingerostetem Zirkel (Zirkelöffnung r) einen rechten Winkel in einem Punkt M.



1. Zeichne eine beliebige Gerade g durch M.
2. Konstruiere A auf g im Abstand r von M.
3. Der Kreis um M schneidet den Kreis um A in S.
4. Zeichne die Gerade h durch A, S.
5. Konstruiere C auf h im Abstand r von S.
6. Zeichne die Strecke i durch C, M.

Weil A, C und M auf dem Halbkreis des Thales über dem Durchmesser AC liegen, ist der Winkel bei M ein Rechter.

Mit dem Problemkreis Konstruktion mit Lineal und "eingerostetem" Zirkel haben sich nach Abu´l Wafa noch viele Mathematiker beschäftigt. Ihre Untersuchungen fanden einen gewissen Abschluss in einem Satz, der auf J.V. Poncelet (1788-1867) und J. Steiner (1776-1863) zurückgeht:

Jede mit Lineal und Zirkel lösbare Konstruktionsaufgabe ist auch mit Lineal und "eingerostetem" Zirkel lösbar.

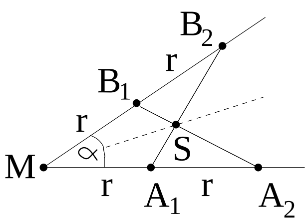
Es gelang sogar, diese Hilfsmittel noch weiter zu reduzieren, weil man beweisen konnte:

Jede Konstruktion, die mit Lineal und Zirkel möglich ist, kann auch allein mit einem Lineal durchgeführt werden, falls ein einzelner Kreis samt seinem Mittelpunkt in der Ebene gegeben ist.

Die sehr lesenswerte Betrachtung von Kerstin Bauer im MONOID 63-64, S.16-17, hat diesen Satz als Hintergrund.
Übrigens:
Der Satz gilt auch dann noch, wenn man darin den Kreis duch einen beliebig kleinen Kreisbogen ersetzt!

Die radikalen Zirkel-Vermeider sind noch einen Schritt weiter gegangen: Sie haben den Zirkel völlig aus ihren Konstruktionen verbannt; einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein ”markiertes” Lineal, bei dem an der Zeichenkante eine Strecke AB durch ihre Endpunkte A, B fest eingezeichnet ist.
Damit sind nicht mehr alle Konstruktionen, die mit Lineal und Zirkel möglich sind, ausführbar. Aber einiges geht immer noch.

Beispiel 3
Konstruiere die Winkelhalbierende eines Winkels α nur mit einem ”markierten” Lineal; die Länge der markierten Strecke sei r.

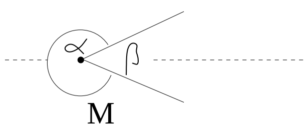


1. Fall: $\alpha < 180°$

1.1 Konstruiere die Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 mit dem markierten Lineal von M aus.

1.2 Die Verbindungsstrecken A_1B_2 und A_2B_1 schneiden sich in S.

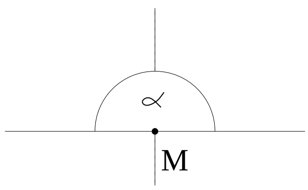
1.3 Die Strecke MS halbiert den Winkel α.



2. Fall: $\alpha > 180°$

2.1 Konstruiere die Winkelhalbierende des Winkels $\beta = 360° - \alpha$, $\alpha < 180°$, wie im 1.Fall.

2.2 Die Winkelhalbierende von β ist zugleich Winkelhalbierende von α.



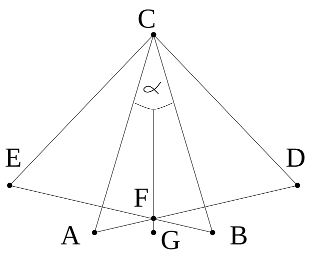
3. Fall: $\alpha = 180°$

In der Lösung der folgenden Aufgabe ist die Konstruktion der Winkelhalbierenden des Winkels α, $\alpha = 180°$, mitenthalten.

Aufgabe (Die Lösung findet sich auf Seite 30.)
Konstruiere nur mit einem ”markierten” Lineal ein Quadrat der Seitenlänge r; r sei die Länge der markierten Strecke.

Ein letztes Ergebnis in der Geometrie der Zirkelvermeidung:
1939 bewies T.R. Dawson, dass alle Punkte, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, auch mit einer unbeschränkten Anzahl gleich langer und unmarkierter Drahtstücke (eine Art Lineal also) erhalten kann.

Beispiel 4
Die Drahtstücke CA und CB schließen einen Winkel α, $0° < \alpha < 120°, \alpha \neq 60°$ ein. Man konstruiere die Winkelhalbierende des Winkels α.



Lösung:

1. Konstruiere ausgehend von AC das gleichseitige Dreieck ADC.
2. Konstruiere ausgehend von BC das gleichseitige Dreieck BCE.
3. Die Strecke CG durch F ist die gesuchte Winkelhalbierende.

Aufgabe (Die Lösung findet sich auf Seite 30.)
Konstruiere nur mit gleich langen Drahtstücken eine Senkrechte zur Strecke AB (= Drahtstück AB).

Attila Furdek:

Fehler-Beschwörer

Auflösung des Widerspruchs aus MONOID 70, Seite 12

Im MONOID 70, Seite 12, wurde ein häufiger Fehler beim **Prozentrechnen** angesprochen.

Die Aufgabe lautete:

> Die Zehnerkarte zum Linienbus kostet 8 €, eine Einzelkarte 1€.
> Um wie viel Prozent ist die Zehnerkarte billiger als 10 Einzelkarten?

1. Lösungsweg:
Eine Zehnerkarte ist um 2 € billiger als 10 Einzelkarten, die 10 € kosten; 10 € entsprechen 100%, also entspricht 1 € dem 10-ten Teil davon, das sind $100\% \div 10 = 10\%$. Folglich entsprechen 2 € dem Doppelten hiervon, also $2 \times 10\% = 20\%$.

Antwort: Die Zehnerkarte ist um **20%** billiger als 10 Einzelkarten.

2. Lösungsweg:
Offensichtlich sind 10 Einzelkarten, die zusammen 10 € kosten, um 2 € teurer als 1 Zehnerkarte, die nur 8 € kostet; 8 € entsprechen 100%, also entspricht 1 € dem 8-ten Teil davon, das sind $100\% \div 8 = 12{,}5\%$. Folglich entsprechen 2 € dem Doppelten, also $2 \times 12{,}5\% = 25\%$. Somit sind 10 Einzelkarten um 25% teurer als eine Zehnerkarte, also ist umgekehrt eine Zehnerkarte um 25% billiger als 10 Einzelkarten.

Antwort: Die Zehnerkarte ist um **25%** billiger als 10 Einzelkarten.

Wie ist dieser **Widerspruch** aufzulösen? Bei der Prozentrechnung ist entscheidend, was als **Basis** gewählt wird. Beim 1. Lösungsweg ist es der Preis für 10 Einzelkarten, also der Betrag von 10 € $(= 100\%)$. Davon sind 2 € eben 20%. Diese Antwort ist richtig. – Beim 2. Lösungsweg wird als Basis der Preis für eine Zehnerkarte, also der Betrag von 8 € $(= 100\%)$, genommen. Davon sind 2 € aber 25%. Um diesen Prozentsatz vom Preis einer Zehnerkarte sind 10 Einzelkarten teurer. Soweit ist alles richtig. **Falsch ist der Umkehrschluss**, weil dabei ein **Basiswechsel** erfolgt. E. Kroll

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Zahlenspielereien

a) Wähle zwei natürliche Zahlen, die sich um 2 unterscheiden, multipliziere sie miteinander und addiere 1. Das Ergebnis der Rechnung ist stets eine Quadratzahl.
Kannst du das begründen?

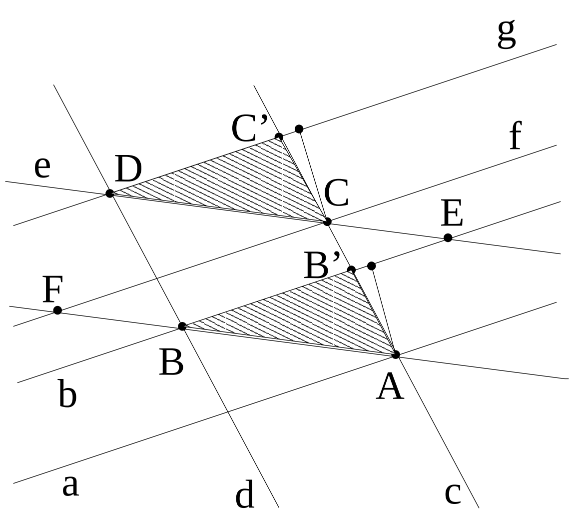
b) Wähle eine Quadratzahl, subtrahiere bzw. addiere 1, multipliziere die beiden so entstandenen Zahlen miteinander und addiere 1.
Welche besondere Sorte von Zahlen erhältst du?

c) Wähle drei aufeinander folgende natürliche Zahlen, multipliziere sie miteinander und addiere dazu die mittlere der drei Zahlen.
Welche besondere Sorte von Zahlen erhältst du so jeweils? (H.F.)

Lösungen der geometrischen Entdeckungen aus Monoid 70

Untersuchung an Parallelen

Gegeben seien zwei Paare paralleler Geraden: $a \parallel b$, $c \parallel d$, die sich gegenseitig schneiden. Sei A der Schnittpunkt von a mit c und B der Schnittpunkt von b mit d.
Ferner sei e eine beliebige Parallele zur Geraden AB und C der Schnittpunkt von c mit e sowie D der Schnittpunkt von d mit e.
Sei f die Parallele zu a durch C und g die Parallele zu b durch D.
Vergleiche die Abstände der Parallelenpaare (f, g) und (a, b) sowie (a, f) und (b, g)! Was entdeckst Du? Warum ist dies so? (E.K.)



Lösung:
Wir ergänzen die Figur aus MONOID 70 durch die Schnittpunkte B' von b mit c und C' von c mit g. Die Dreiecke ABB' und CDC' sind kongruent (Grund?). Daher haben auch einander entsprechende Höhen dieser Dreiecke übereinstimmende Längen. Der Abstand der Parallelen f und g ist die Länge des Lotes von C auf g, die mit der Länge des Lotes von A auf b, also auch mit dem Abstand der Parallelen a und b übereinstimmt.
Analog kann man mit Hilfe der kongruenten Dreiecke AFC und DEB und ihrer Höhen auf die Gleichheit der Abstände der Parallelenpaare (a, f) und (b, g) schließen. Diese folgt aber auch schon aus der formalen Rechnung (Abst := Abstand):

$$\text{Abst}(a, f) = \text{Abst}(a, b) + \text{Abst}(b, f) = \text{Abst}(f, g) + \text{Abst}(b, f) = \text{Abst}(b, g)$$

Die Seite für den Computer-Fan

Spiegelungen

Eine 7-ziffrige Zahl $abcdefg$ hat die Teiler 13, 19, 77; die zugehörige Spiegelzahl $gfedcba$ hat die gespiegelten Teiler 31, 91, 77.

Wie heißt die Zahl und ihre Spiegelzahl?

Gibt es mehr als eine Lösung? (gefunden: H.F.)

Zahlenfolge

Gegeben ist die Zahlenfolge $3, 31, 331, 3\,331, \ldots, 333\,331, \ldots,$ deren Bildungsgesetz man sofort erkennt.

a) Untersuche für die ersten neun Zahlen der Folge, ob sie allesamt Primzahlen sind.

b) Falls du in der Folge eine Nicht-Primzahl findest, kannst du dann auch noch die nächstgrößere Nicht-Primzahl in der Folge angeben? (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgaben aus Monoid 69

Quadratzahl oder nicht?

Zu untersuchen war der Ausdruck

$$(1) \quad a^2 - ab + b^2 \qquad \text{für natürliche Zahlen } a, b \text{ mit } a > b.$$

a) Durch direktes Nachrechnen stellt man fest, dass (1) für $a = 1, 2, \ldots, 7$ mit entsprechendem $b < a$ keine Quadratzahl ist.

b) Für $a = 8$ und $b = 3$ ist (1) eine Quadratzahl.

c) Eine Sichtung des Datenmaterials lässt einige (unendliche) Lösungsfolgen erkennen. Wir bezeichnen die "kleinste" Lösung $a = 8, b = 3$ mit $(a_0; b_0)$.

   Dann findet man z.B. die Lösungsfolge

   $(8; 3), (15; 8), (24; 15), (35; 24), \ldots, (a_n; b_n) = (a_{n-1} + 2n + 5; b_{n-1} + 2(n-1) + 5)$

   oder $(a_n; b_n) = (a_0 + n(n+6); b_0 + n(n+4)), n \geq 1$.

   Eine weitere Lösungsfolge ist z.B. $(21; 5), (32; 12), (45; 21), (60; 32), \ldots, (a_n; b_n) = (a_{n-1} + 2n + 9; b_{n-1} + 2(n-1) + 7)$

   oder $(a_n; b_n) = (a_0 + n(n+10); b_0 + n(n+6))$ usw.

   Allgemeines Ergebnis: alle Paare $(a; b)$ sind Lösungen von (1), wenn:

   $(2) \quad a = r^2 + 2rs$ und $b = r^2 - s^2$, r und s natürliche Zahlen, $r > s$.

   Dann gilt $a^2 - ab + b^2 = c^2$ mit $c := r^2 + rs + s^2$ (durch Einsetzen in (1)).

   Die oben angegebenen zwei Lösungsfolgen ergeben sich aus (2) für $r = 2, 3, 4 \ldots$ und $s = 1$ bzw. für $r = 3, 4, 5, \ldots$ und $s = 2$.

Griechische Berechnung

a) Für $a = 2$ erhält man $1,414214$ als Ergebnis.

b) Das Verfahren berechnet die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl, falls diese nicht negativ ist, und rundet das Ergebnis auf 6 Nachkommastellen.

Die Goldbach-Vermutung

von Gerd Hofmeister

Am 7. 6. 1742 schrieb Christian Goldbach (1690 - 1764) an den berühmten Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783) einen Brief. Am äußersten Rand des Briefes findet sich der Satz:

"Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die größer ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey."

Goldbach betrachtete 1 als Primzahl, was wir nicht tun. Wir formulieren daher die Goldbach-Vermutung in ihrem wesentlichen Kern so:

Jede gerade Zahl, die größer ist als 2, ist Summe zweier Primzahlen.

Übrigens findet sich die Goldbach-Vermutung bereits bei Descartes (1596 - 1650).

Als erstes bewiesenes Resultat in Richtung Goldbach-Vermutung gilt das Ergebnis von Viggo Brun aus dem Jahr 1920:

Jede genügend große gerade Zahl n ist darstellbar in der Form

$$n = p_9 + q_9,$$

wo p_9, q_9 höchstens 9 Primfaktoren enthalten.
Bezeichnet $r(n)$ die Anzahl der Zerlegungen einer geraden Zahl n als Summe zweier Primzahlen, so zeigte Brun noch:

$$r(n) \leq c \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p}) \frac{n}{log^2 n}$$

wo c eine geeignete positive Konstante ist und $log^2 n = (log n)^2$ bedeutet.

Mit diesem Resultat zeigte Schnirelmann (1930):

Jede genügend große Zahl ist Summe von höchstens $800\,000$ Primzahlen.

1937 zeigte Winogradow:

Jede ungerade Zahl $> 3^{3^{15}}$ (diese Zahl hat $6\,846\,165$ Stellen) ist Summe von drei Primzahlen.

Chen und Wang reduzierten 1989 diese Konstante auf $e^{e^{11,503}}$. Aber auch diese Zahl liegt weit über dem, was mit Computern heute zu schaffen ist.
Mit deren Hilfe kann man die Goldbach-Vermutung zur Zeit lediglich bis in die Größenordnung von 10^{14} verifizieren.

Ramaré zeigte 1995:

Jede gerade Zahl ist Summe von höchstens 6 Primzahlen.

Vielleicht am nächsten kommt der Goldbach-Vermutung das Ergebnis von Chen, das 1966 angekündigt, aber erst 1973 veröffentlicht wurde:

Jede genügend große gerade Zahl n ist darstellbar in der Form

$$n = p + q_2,$$

wo p Primzahl ist und q_2 höchstens 2 Primfaktoren enthält.

Bezeichnet $E(x)$ die Anzahl der geraden $n \leq x$, die möglicherweise nicht Summe zweier Primzahlen sind, so zeigten Montgomery und Vaughan 1975:

Es existiert ein $\delta < 1$ und ein $c > 0$, so dass

$$E(x) \leq c \cdot x^{\delta}.$$

1999 bewies Li, dass für genügend große x dabei $\delta = 0,921$ gewählt werden kann.

Abschließend sei noch auf zwei Probleme eingegangen, die den Namen Golbach nur deshalb tragen, weil sie sich an der Goldbach-Vermutung orientieren.

1) Das Waring-Goldbach-Problem

1937/38 zeigte Winogradow, dass für jedes $k \geq 1$ eine kleinste Zahl $w(k)$ existiert, so dass jede genügend große natürliche Zahl Summe von höchstens $w(k)$ k-ten Potenzen von Primzahlen ist. Thanigasalam zeigte 1985/87:

$$w(5) \leq 23, w(6) \leq 33, w(7) \leq 47, w(8) \leq 63, w(9) \leq 83 \text{ und } w(10) \leq 107.$$

2) Das inverse oder Anti-Golbach-Problem

benötigt einige Vorbetrachtungen.

Zunächst kann man fragen: Gibt es zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$, so dass

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\} = \mathbb{P} := \{2, 3, 5, \dots\}?$$

In dieser Form ist die Antwort trivialerweise ja: Man wähle etwa $A = \mathbb{P}, B = \{0\}$.

Verlangt man bei obiger Frage zusätzlich noch, dass beide Elementanzahlen $|A|, |B| \geq 2$ sind, so zeigt eine einfache Betrachtung der kleinsten Elemente, dass dann die Antwort nein ist.

Fragt man nun aber, ob ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ existieren, so dass $|A|, |B| \geq 2$ und lediglich

$$(A + B) \cap [n_0, \infty) = \mathbb{P} \cap [n_0, \infty)$$

gilt, so ist diese Frage noch offen und heißt das Anti-Goldbach-Problem.

Das beste Resultat hierzu hat Elsholtz:

Bezeichnen $A(x)$ und $B(x)$ die Anzahlen der $a \in A$ mit $1 \leq a \leq x$ bzw. der $b \in B$ mit $1 \leq b \leq x$ und existieren n_0, A, B wie oben verlangt, so muss schon

$$c_1 \frac{\sqrt{x}}{log^5 x} \leq A(x), \quad B(x) \leq c_2 \sqrt{x}\, log^4 x$$

gelten. Die Vermutung ist, dass es solche Tripel n_0, A, B nicht gibt.

Zu einigen der hier angeschnittenen Fragen findet man Hinweise in dem sehr empfehlenswerten Buch von H. Scheid, Zahlentheorie, B.I.

Die Vermutung von Catalán ist bewiesen!

von Hartwig Fuchs

Stolpersteine liegen überall herum, auch in der Mathematik.
Der belgische Mathematiker **E. Ch. Catalán** (1814-1894) warf einen solchen Stolperstein in den Weg seiner Zunftgenossen.
Die meisten von ihnen nahmen ihn gar nicht zur Kenntnis, andere umgingen ihn einfach; aber einige Zahlentheoretiker versuchten ihn wegzuräumen – bis vor kurzem ohne Erfolg.

Worum geht es?
Catalán stellte 1844 die folgende Vermutung auf:

> Es gibt nur zwei Potenzen natürlicher Zahlen ≥ 2, die den Abstand 1 aufweisen, nämlich 2^3 und 3^2.

Gleichbedeutend damit ist die Formulierung:

> Es seien x, y, m und n natürliche Zahlen, $x > y \geq 2$. Dann hat die Gleichung $x^m - y^n = 1$ die einzige Lösung $x = n = 3, y = m = 2$.

Über 130 Jahre widerstand diese Vermutung den Bemühungen der Mathematiker: in der Literatur ist nicht einmal ein Erfolg versprechender Ansatz für ihren Beweis oder ihre Widerlegung zu registrieren.

Erst 1976 gab es einen ersten wirklichen und dann auch gleich entscheidenden Durchbruch: Robert Tijdemans bewies, dass Catalāns Gleichung $x^m - y^n = 1$ nur endlich viele Lösungen haben kann. Damit kam Bewegung in die Sache und zugleich mehrten sich die Hinweise, dass Catalán mit seiner Vermutung Recht hatte.

So konnte man z.B. zeigen, dass es keine drei im Abstand 1 aufeinander folgende Potenzen von natürlichen Zahlen ≥ 2 gibt; ferner bewies man: gibt es neben $3^2, 2^3$ weitere Lösungen x^m, y^n der Catalán-Gleichung, dann sind x und y Primzahlen, die außerordentlich starken Bedingungen gehorchen müssen – für den erfahrenen Mathematiker ein Fingerzeig, dass es solche Primzahlpaare möglicherweise gar nicht gibt.

Und dann im Mai dieses Jahres die Mitteilung:
Der in Paderborn tätige rumänische Mathematiker **Preda Mihăilescu** hat die Catalán-Vermutung bewiesen.

Damit ist – wie vor einiger Zeit auch die Fermat-Vermutung – wieder eines der hartnäckigen Uralt-Probleme als Herausforderung an das mathematische Können erledigt.

Es gibt jedoch noch genügend zu tun. So steht der Beweis der Goldbach-Vermutung immer noch aus, obwohl schon beachtliche Zwischenresultate erzielt wurden (mehr darüber im Beitrag von Prof. Dr. G. Hofmeister auf den Seiten 13 und 14).
Dann gibt es die sieben mathematischen **"Millenium Prize Problems"**, die im *"World Mathematical Year 2000"* vom Clay Mathematics Institute, Cambridge Massachusetts, bekannt gegegben wurden und für deren Lösung Mittel in Höhe von 7 Millionen Dollar ausgeschrieben wurden: Eine Million Dollar für jedes Problem!

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 70

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Zahlenfolge

In einem Rätselheft findet Nina folgende Zahlenfolge:

$$1; \quad 3; \quad 7; \quad 15; \quad 31; \quad 63; \quad \ldots.$$

Nun überlegt sie wie die nächste Zahl lauten muss.
Kannst Du ihr helfen? Welche Zahl muss auf die 63 folgen?

Lösung:

Du könntest Nina folgendes Schema vorschlagen: Zur ersten Zahl addiere die Zahl 2; zur zweiten Zahl addiere die $2^2 = 4$, zur dritten Zahl die $2^3 = 8$ usw. Zur sechsten Zahl addiere also $2^6 = 64$. Nach der Zahl 63 muss Nina also die Zahl $63 + 64 = 127$ einsetzen.

Du könntest Nina aber auch das Prinzip "verdopple und addiere 1" empfehlen, also hier: $63 \cdot 2 + 1 = 127$.

(Wer ein einfaches Verfahren für die Fortführung von Zahlenfolgen, die nach einer bestimmten Regel aufgebaut sind, sucht, lese den Artikel von M. Mettler über "Moser-Folgen" auf S. 3-5.)

Überlegen ist besser als Knobeln

$$\begin{array}{lccccc}
(1) & A & + & B & = & C \\
(2) & C & \div & D & = & D \\
(3) & B & \cdot & D & = & E \\
(4) & G & - & H & = & J \\
(5) & A & - & B & = & G \\
(6) & & & H & > & J
\end{array}$$

Wie lauten die 5 Gleichungen, wenn verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten und nur die einziffrigen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9$ vorkommen?

(H. F.)

Lösung:

Aus (2) folgt $C = 4$, $D = 2$ oder $C = 9$, $D = 3$.
Wir wollen annehmen, es sei $C = 4$.
Aus (1) ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$A = 1$, $B = 3$	:	entfällt, weil sonst mit (5) G negativ wäre;
$A = 2$, $B = 2$	:	entfällt, weil verschiedene Buchstaben nicht die gleiche Zahl bedeuten dürfen;
$A = 3$, $B = 1$	:	entfällt wegen (3), weil sonst $D = E$ wäre.

Der Fall $C = 4$ kann also nicht eintreten. Somit bleibt nur: $\mathbf{C = 9, D = 3}$

Betrachten wir nun (3). Es ist $E \leq 9$. Aber $E = 9$ kann wegen $C = 9$ nicht eintreten. Somit ist $E < 9$.

Aus (3) ergeben sich dann wegen $B \cdot 3 = E$ zwei Möglichkeiten:

$B = 1$	:	entfällt, weil sonst $B = E$ wäre; es bleibt
$B = 2$	:	dieser Fall muss eintreten.

Somit gilt $\mathbf{B = 2}$ und daher $\mathbf{E = 6}$.

Aus (1) folgt nun sofort: $\mathbf{A = 7}$. Aus (5) folgt: $\mathbf{G = 5}$.

Da nun nur noch die Zahlen 1 und 4 nicht aufgetreten sind, heißt (4) entweder $5 - 4 = 1$ oder $5 - 1 = 4$.
Aus (6) folgt, dass $5 - 4 = 1$ zutrifft; also ist $\mathbf{H = 4}$, $\mathbf{J = 1}$.

Der Geburtstagskuchen
Nico will für seine Schwester Charlotte zum Geburtstag einen Kuchen backen. Laut Rezept soll dieser für 17 Minuten in den vorgeheizten Backofen. Leider hat Nico zur Zeitmessung nur zwei Sanduhren; eine für 7 Minuten und eine für 9 Minuten.
Wie geht er vor? (WJB)

Tipp: Die Uhren können schon laufen, bevor der Kuchen in den Backofen kommt.

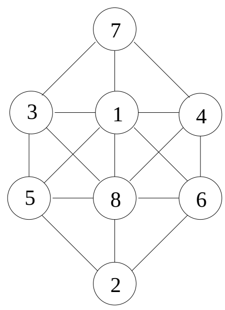
Lösung:
Nico startet mit beiden Sanduhren gleichzeitig. Nachdem die 9-Minuten-Uhr zweimal abgelaufen ist, schiebt er den Kuchen in den Backofen. Wenn die 7-Minuten-Uhr fünfmal abgelaufen ist, ist der Kuchen fertig.

Fremdsprachen
Jeder der 25 Schüler/innen einer 5. Klasse spricht mindestens eine der Sprachen Französisch und Englisch; 18 Kinder sprechen Französisch und 17 Englisch.
Wie viele Schüler/innen sprechen beide Sprachen?

Lösung:
Würde keiner beide Sprachen sprechen, so müssten es insgesamt $18 + 17 = 35$ sein. Es sind aber nur 25. Also müssen $35 - 25 = 10$ beide Sprachen sprechen.

Knobelei
Die Zahlen 1 bis 8 sind genau einmal so in die Felder einzutragen, dass unmittelbar aufeinander folgende Zahlen keine direkten Nachbarn sind. Direkte Nachbarschaft bedeutet: Verbindung durch eine Strecke.
(gefunden: H. F.)

Lösung:
(z.B.)



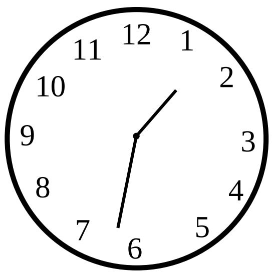
Die Uhrzeiger

Welchen Winkel bilden die Zeiger einer Uhr

a) um $13:00$ Uhr,

b) um $12:30$ Uhr,

c) um $13:17$ Uhr? (E. Grammes)



Lösung:

a) Um $13 : 00$ Uhr steht bekanntlich der große Zeiger auf der "12" und der kleine Zeiger auf der "1". Es geht also um den Winkel zwischen der "12" und der "1", folglich $360° \div 12 = \mathbf{30}°$.

b) Der große Zeiger bewegt sich von $12:00$ Uhr bis $12:30$ Uhr, also in 30 Minuten, um $360° \div 2 = 180°$. Gleichzeitig legt der kleine Zieger die Hälfte des Winkels zurück den er in einer Stunde zurücklegt, also $30° \div 2 = 15°$. Somit beträgt der Winkel zwischen den beiden Zeigern $180° - 15° = \mathbf{165}°$.

c) Der große Zeiger beschreibt in einer Minute einen Winkel von $360° \div 60 = 6°$, also in 17 Minuten einen Winkel von $17 \cdot 6° = 102°$ *von der* ”12” aus.

Der kleine Zeiger beschreibt in einer Minute, dem 60. Teil einer Stunde, einen Winkel von $30° \div 60 = 0,5°$; somit in 17 Minuten $17 \cdot 0,5° = 8,5°$ *von der* ”1” aus.

Demnach beträgt der Winkel zwischen den Zeigern um $13:17$ Uhr genau

$$102° - 30° - 8,5° = \mathbf{63,5}°$$

Würfelvolumen

Für zwei Würfel gilt: Die Kante das größeren Würfels ist um $45\ cm$ länger als die des kleineren Würfels. Außerdem ist das Volumen des größeren Würfels das Tausendfache des Volumens des kleineren Würfels.

Wie lang sind die Kanten beider Würfel? (H. F.)

Lösung:

Die Kantenlänge (in cm) des großen Würfels sei g und die des kleinen Würfels sei k.
Dann gilt für die Volumina: $g^3 = 1\,000k^3 = 10^3k^3$, woraus $g = 10k$ folgt.
Für die Kantenlängen (in cm) gilt: $k + 45 = g = 10k$, woraus $45 = 9k$, also $k = 5$ folgt.
Dann ist $g = 50$.

Ist etwa $1 = 5$? Wo liegt denn da der Fehler?

Franziska führt ihrem Bruder Thomas ihre neuesten mathematischen ”Erkenntnisse” vor. Sie legt ihrem Bruder einen Zettel hin und sagt: ”Auf diesem Papier beweise ich dir, dass es egal ist, ob ich bei der nächsten Mathe-Arbeit eine 1 oder eine 5 schreibe.”
Ziemlich interessiert liest Thomas die folgende ”Beweiskette”:
”Ich gehe von $1 = 5$ aus und zeige am Schluss, dass dies richtig sein muss.

$$\begin{aligned} 1 &= 5 && |\cdot 6 \\ 6 &= 30 && |-18 \\ 6-18 &= 30-18 \end{aligned}$$

Wegen der 2. Binomischen Formel folgt:

$$\begin{aligned} (6-18)^2 &= (30-18)^2 \\ 6^2 - 2\cdot 6\cdot 18 + 18^2 &= 30^2 - 2\cdot 30\cdot 18 + 18^2 \\ 36 - 216 + 324 &= 900 - 1080 + 324 \\ 144 &= 144 \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich wahr. Also müssen auch alle Gleichungen vorher wahr sein und folglich ist tatsächlich $1 = 5$.”
Thomas überlegt: ”Na, da muss doch irgendwo ein Fehler sein; aber wo?”
Ja, wo ist eigentlich der Fehler?

Lösung:

Der erste Mangel ist, dass Franziska in ihrem ”Beweis” von der Behauptung ausgeht. Das könnte bestenfalls dann eine *Beweisidee* liefern, wenn eine korrekte Beweisführung in umgekehrter Richtung (hier also von $144 = 144$ aus) möglich wäre. Genau dies ist hier aber nicht möglich. Die drittletzte Zeile

$$(6-18)^2 = (30-18)^2$$

ist zwar noch korrekt. Aber der nächste Schritt (”nach oben”), also zu

$$6 - 18 = 30 - 18,$$

ist nicht erlaubt, da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Euro und Cents

Katja geht für ihre Mutter zum Einkaufen. Sie kauft Waren im Wert von x Cents ein, wobei der Betrag zwischen 1 Cent und 499 Cents liegt ($1 \leq x \leq 499$). Katja bezahlt mit einem 5 Euro-Schein.

a) Wieviele Münzen bekommt Katja von der Verkäuferin an der Kasse zurück, wenn bei jedem Betrag möglichst wenige Geldstücke herausgegeben werden?

b) Wieviele Münzen braucht die Kassiererin, um auf jeden Betrag zwischen 1 Cent und 499 Cents herausgeben zu können? (WJB)

Beim Obsthändler

Eine Balkenwaage ist im Gleichgewicht, wenn eine Orange und ein Apfel auf der einen sowie eine Banane auf der anderen Seite liegt.
Ferner sind Orange und Banane auf der einen Seite und sechs Birnen auf der anderen Seite im Gleichgewicht, und zwei Birnen und ein Apfel zusammen halten einer Orange die Waage.
Wie viele Äpfel wiegen eine Banane auf?
(als Problem gefunden auf der Internetseite von SPEKTRUM)

Steuern mindern das Einkommen

Durch ein Dekret des Diktators von Arataxien werden die Einkommen aller Bürger um 10% erhöht. Da sich dadurch (z.B. wegen der erhöhten Gehälter der Staatsbediensteten) auch die Staatsausgaben erhöhen, steigert der Finanzminister im Gegenzug die Steuern um 8% von bisher 20% auf 28% des Einkommens.
Obwohl die Steigerung der Steuern (8%) geringer ist, als die der Einkommen (10%) jammern die Bürger, es gehe ihnen schlechter als zuvor. *Haben sie recht?* (WJB)

Ein kompliziertes Testament

Ein Bauer, der Schafe, Rinder und Schweine besitzt, schreibt an seinem Lebensabend sein Testament. Dabei teilt er seine Tiere unter seinen 5 Kindern auf. Die Hälfte seiner Herde soll an seinen ältesten Sohn gehen, die zwei Töchter erhalten, je nach Alter ein Viertel bzw. ein Fünftel der Herde. Die Zwillinge bekommen je 12 Schafe, 10 Rinder und 9 Schweine.
Wie viele Schafe, Rinder und Schweine besitzt der Bauer?
Wie viele Tiere bekommen die drei Ältesten der Familie? (Felix Liebrich)

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Gleichungspyramide

Die Gleichungspyramide

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 11^2 &= 121 \\ 111^2 &= 12321 \\ 1\,111^2 &= 1234321 \end{aligned}$$

soll bis zum Quadrat von $111\,111\,111$ fortgesetzt werden.
Was fällt dir auf? Begründe deine Beobachtung!
Was passiert beim Quadrieren von $1\,111\,111\,111$*?*

Die verflixte 144

Der kleine Zahlentheoretiker Zahlfix schaut sich zum wiederholten Male die 144 an. Er hat früher immer bewundert, wie viele Teiler diese Zahl hat, in wie viele Faktoren man sie zerlegen kann und so weiter und so fort.
Nun stellt er etwas Neues fest: 144 ist nicht nur selbst eine dreistellige Quadratzahl, liest man die Zahl rückwärts, also 441, so ensteht wiederum eine dreistellige Quadratzahl. Er überlegt sich, ob es noch weitere dreistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.
Kannst du ihm helfen und weitere solcher Zahlen finden? (W. Kraft)

Die 3 Enkel einer Mathematikerin

Die nicht mehr ganz so junge Mathematikerin Matha Alda erzählt oft von ihren 3 Enkeln Archie, Babsy und Cindy, für die nicht-mathematische Umwelt leider oft in Rätseln.
Ihre Story von gestern war so:
Archie und Babsy sind zusammen 4 Jahre alt.
Babsy und Cindy sind zusammen 5 Jahre alt.
Archie und Cindy sind zusammen 3 Jahre alt.
Wie alt sind Archie, Babsy und Cindy denn nun wirklich? (W. Kraft)

Calvin und Hobbes von Bill Watterson

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 782.
Zeige, dass für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$(*)\quad 2n^3 + 5n^2 + 2n - 1$ ist durch 8 teilbar. (H.F.)

Aufgabe 783.
Zeige: Aus $x + y + z = 2$ folgt $xy + xz + yz < 2$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. (H.F.)

Aufgabe 784.
Wie heißt die letzte Ziffer von $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}$? (H.F.)

Aufgabe 785. Wahr oder falsch?
Wenn man einen Winkel von $23°$ mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, dann ist es auch möglich, jeden Winkel mit einem ganzzahligen Winkelmaß mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.
Wurde hier richtig geschlossen? (H.F.)

Aufgabe 786.
Finde alle reellen Lösungen der Gleichung

$$(*)\qquad ax^6 + bx^5 - ax^4 - 2bx^3 - ax^2 + bx + a = 0,$$

wobei $a \geq 0$ und b eine beliebige reelle Zahl ist.
Tipp: Untersuche zunächst den Fall $a = 0$ und danach den Fall $a > 0$ (jeweils a und b ausklammern). (MM)

Aufgabe 787.
Ein Spieler darf 10 Punkte beliebig auf einer Kugeloberfläche verteilen. Der Gegenspieler setzt danach eine "Mütze" so auf die Kugel, dass sie möglichst viele der Punkte bedeckt. Die Fläche der "Mütze" sei ein Drittel der Kugeloberfläche.
Zeige, dass der Gegenspieler mit seiner "Mütze" mindestens 4 Punkte überdecken kann, egal wie der erste Spieler die Punkte auf der Kugeloberfläche verteilt hat.
Tipp: Versuche einen stochastischen Ansatz! (WJB)

Aufgabe 788.
Ein Klebeband von $L = 10m$ Länge und $19mm$ Breite ist auf eine Plastikrolle vom Durchmesser $r = 35mm$ aufgewickelt. Es ergibt sich damit eine Rolle vom Außendurchmesser $R = 43,5mm$.

a) Versuche, die Dicke des Bandes näherungsweise zu berechnen, wobei die spiralförmige Aufwicklung des Bandes durch eine kreisförmige ersetzt werden darf.

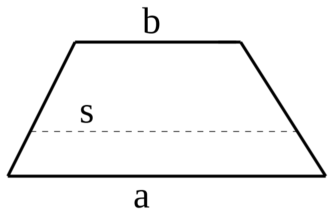
b) Wie viele Wicklungen braucht man ungefähr? (WJB, SW)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 70

Kl. 8-13

Aufgabe 776. Untersuchungen am Trapez

Ein Trapez mit einer Grundseite der Länge a und einer Oberseite der Länge b werde durch eine Strecke s parallel zur Grundseite in zwei Teiltrapeze zerlegt.



a) In welchem Verhältnis unterteilt s die Fläche des Trapezes, wenn s die Mittelparallele ist?

   Berechne in diesem Fall den Prozentanteil des unteren Trapezes an der Gesamtfläche, wenn $a = 5$ cm und $b = 3$ cm ist!

b) Welche Länge hat die Strecke s, wenn sie so gelegt wird, dass beide Teiltrapeze flächengleich sind? (Tipp: Ergänze das Trapez zu einem Dreieck!) (H. F.)

Lösung:

a) Die Mittelparallele eines Trapezes, dessen Grundseite die Länge a und dessen Oberseite die Länge b hat, ist bekanntlich $\frac{a+b}{2}$ lang. Somit hat das Gesamttrapez die Fläche $F = \frac{a+b}{2} \cdot h$, wenn h die Höhe des Trapezes ist.

   Die Fläche des oberen Trapezes ist dementsprechend $F_{oben} = \frac{1}{2}(b + \frac{a+b}{2}) \cdot \frac{h}{2}$, die des unteren $F_{unten} = \frac{1}{2}(a + \frac{a+b}{2}) \cdot \frac{h}{2}$.

   Durch einfache Umformungen erhält man:

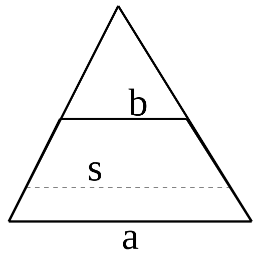
$$F_{oben} = \frac{1}{8}(a+3b) \cdot h, F_{unten} = \frac{1}{8}(3a+b) \cdot h,$$

   also $\qquad F_{oben} : F_{unten} = (a+3b) : (3a+b).$

   Im Falle $a = 5cm$, $b = 3cm$ ergibt sich somit $F = 4h$, $F_{oben} = \frac{7}{4} \cdot h$, $F_{unten} = \frac{9}{4} \cdot h$, $F_{oben} : F_{unten} = 7 : 9$.

   Setzen wir die Gesamtfläche gleich 100 %, so hat das untere Trapez daran einen Anteil von $100 \cdot \frac{9h}{16h} = \frac{900}{16} = 56{,}25$ $(\%)$.

b) Zunächst ergänze man das Trapez zu einem Dreieck. Bezeichnet man die Länge der Strecke s mit x und die Flächen der Dreiecke mit den Grundkantenlängen a, x, b der Reihe nach mit F_a, F_x, F_b, dann gilt:



$$F_x : F_b = x^2 : b^2 \quad \Rightarrow \quad (1) \quad F_x = x^2 \frac{F_b}{b^2}$$

$$F_a : F_b = a^2 : b^2 \quad \Rightarrow \quad (2) \quad F_a = a^2 \frac{F_b}{b^2}$$

   Ferner ist $\; F_a - F_x = F_x - F_b \quad \Rightarrow \quad (3) \quad F_x = \frac{1}{2}(F_a + F_b)$

Aus (3) folgt mit (2) zunächst:

$$F_x = \frac{1}{2}(\frac{a^2 F_b}{b^2} + \frac{b^2 F_b}{b^2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_b}{b^2}(a^2 + b^2)$$

Wegen (1) gilt dann:

$$x^2 \cdot \frac{F_b}{b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_b}{b^2}(a^2 + b^2) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Somit ist $x = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$

Übrigens: Die Zahl x heißt der **quadratische Mittelwert** aus a und b.

Aufgabe 777.
Zu bestimmen sind alle reellen Zahlenpaare $(x; y)$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y = 1 \qquad \text{und} \qquad x^5 + y^5 = 211$$ (MM)

Hinweis: Setze $s := x + y$ und $p := x \cdot y$ und versuche, $x^5 + y^5$ durch s und p auszudrücken! Wenn dir dies zu schwer erscheint, versuche dich an der reduzierten Problemstellung, indem du alle ganzen Zahlenpaare $(x; y)$ bestimmst, die das Gleichungssystem erfüllen.

Lösung: Wie man mit Hilfe der Summe $s := x + y$ und des Produktes $p := x \cdot y$ rekursiv alle reellen Lösungspaare $(x; y)$ bestimmen kann, steht im Artikel **"Summen von der Form $\mathbf{S_n = x^n + y^n}$ mit $\mathbf{n \in N^*}$"** auf Seite 6.

Wenn wir zunächst nur nach ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ suchen, können wir oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $x > 1$ und $y = 1 - x < 0$ annehmen. Es gilt:

$$211 = x^5 + y^5 = x^5 + (1-x)^5 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1,$$

somit nach Subtraktion von 1 auf beiden Seiten und anschließender Division durch 5:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x = 42.$$

Wegen $x(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 42$ ist x ein Teiler und $f(x) := x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ der zugehörige Komplementärteiler von 42.
Die zu untersuchenden Teilerkombinationen sind $(x; f(x)) = (2; 21), (3; 14)$ oder $(6; 7)$. Für welche Teiler x von 42 ist $f(x)$ der entsprechende Komplementärteiler? Nur für $x = 3$; dann ist $f(x) = 14$ und $y = -2$.

Wegen der Symmetrie der Aufgabenstellung in den Unbekannten x und y ist mit $(3; -2)$ auch $(-2; 3)$ ein ganzzahliges Lösungspaar. Damit haben wir bereits zwei Lösungen $x_1 = 3, x_2 = -2$ der Gleichung

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 42 = 0.$$

Indem wir von der linken Seite durch Polynomdivision die Linearfaktoren $(x - 3)$ und $(x + 2)$, also zweckmäßiger Weise gleich ihr Produkt $(x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6$ abspalten, erhalten wir $(x - 3)(x + 2)(x^2 - x + 7) = 0$.

Da das quadratische Polynom $x^2 - x + 7$ keine reelle Nullstelle hat, gibt es auch keine weiteren reellen Lösungspaare $(x; y)$.

Aufgabe 778. Diophantisches Gleichungssystem
Gegeben sind die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} I & a+b-c+d & = 11; \\ II & a+b+c+d & = 33; \\ III & a^2+b^2+c^2+d^2 & = 343. \end{array}$$

Mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $a < b < c < d$.

1. Bestimme die (eindeutige) Lösung!
2. Welchen Wert hat im Lösungsfall das Produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$? (Helmut Rössler)

Lösung: $I - II$ liefert $\mathbf{c} = 11$. Reduziertes System:

$$\begin{array}{lll} II' & a+b+d & = 22 \\ III' & a^2+b^2+d^2 & = 222 \end{array}$$

Da $d > c = 11$ sein muss, genügt es, ausgehend von III', die folgenden drei Fälle für d^2 zu untersuchen:

d^2	$222 - d^2$	$= a^2 + b^2$	a	b	d	$a+b+d$	Bemerkung
196	26	$1 + 25$	1	5	14	20	$20 < 22$
169	53	$4 + 49$	2	7	13	22	**Lösung**
144	78	$- - - -$	$-$	$-$	$-$	$- -$	$- - - -$

Also ist $\mathbf{a = 2, b = 7, c = 11, d = 13}$ die **eindeutig bestimmte Lösung**.
Für sie ist $\mathbf{a \cdot b \cdot c \cdot d = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002}$ **die aktuelle Jahreszahl** mit ihrer Primfaktorzerlegung.
Merkwürdig ist, dass die konstanten Glieder in I, II, III, II' und III', sowie das Produkt, also $11, 33, 343, 22, 222$ und 2002 ausnahmslos **Palindrome** sind! (Ziffernfolge von links und rechts gelesen ist dieselbe.)

Aufgabe 779.
Ein Mathematiker, der sich die 5-ziffrige Geheimzahl g seiner Scheckkarte nicht merken kann, zugleich aber g nicht auf einem Zettel notiert dauernd mit sich führen will, benutzt eine bemerkenswerte Beziehung zwischen g und der Zahl $h = 40\,391$, die ihm bei der Kenntnis von h jederzeit g zu berechnen gestattet, nämlich:
Die Summe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, h-1$ stimmt überein mit der Summe der Zahlen $h+1, h+2, \ldots, g$.

a) Wie geht der Mathematiker, der h auf seine Scheckkarte geschrieben hat, bei der Berechnung von g vor und wie lautet g?

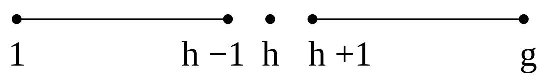
   Hinweis: Es gilt $1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{1}{2}x(x+1)$.

b) Der Mathematiker braucht nicht einmal h zu kennen, um g zu berechnen!

   Begründe dies für den Fall, dass g eine 3-ziffrige Geheimzahl ist.

(H.F.)

Lösung:



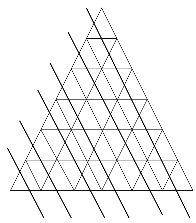
Es sei $S_1 = 1 + 2 + \cdots + h - 1$ und $S_2 = (h+1) + (h+2) + \cdots + g = (1 + 2 + \cdots + g) - (1 + 2 + \cdots + h)$.

Also ist $S_1 = S_2$ gleichwertig zu $\frac{1}{2}(h-1)h = \frac{1}{2}g(g+1) - \frac{1}{2}h(h+1)$ oder nach Umformungen: $g^2 + g - 2h^2 = 0$;
folglich gilt: $g = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+8h^2}) \quad (1)$
a) Weil $h = 40\,391$ bekannt ist und $1 + 8h^2 = 114\,243^2$ ist folgt: $\quad g = 57\,121$.
b) Wenn h unbekannt ist, dann schließt man aus (1):
h muss gerade sein, damit $1+8h^2$ eine ungerade Quadratzahl ist, für die $-1+\sqrt{1+8h^2}$ durch 2 teilbar ist;
ferner folgt aus (1): $g \approx \frac{1}{2}\sqrt{8h^2}$ – also $g \approx h\sqrt{2}$ – womit aus $100 \leq g \leq 999$ noch $70 \leq h \leq 706$ folgt. Mit einem Computer findet man nur die Zahl $h = 204$, die alle Bedingungen erfüllt.
Dann ist $g = 288$ die gesuchte Zahl.

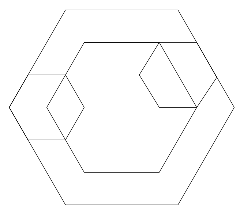
Aufgabe 780.
In einem Quadrat der Seitenlänge n findet man leicht n^2 Quadrate der Seitenlänge 1.

a) Wieviele gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 findet man in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge n?
b) Wieviele regelmäßige Sechsecke der Seitenlänge 1 findet man in einem regelmäßigen Sechseck der Seitenlänge n? (WJB)

Lösung:

zu a):

1. Lösungsweg: Die Streifen enthalten $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ Dreiecke. Somit ergibt sich die Anzahl $1+3+5+7+\cdots+2n-1 = n^2$.

2. Lösungsweg: Die Fläche des großen Dreiecks ist n^2 mal der Fläche des kleinen Dreiecks. Es wird also in n^2 solcher Dreiecke zerlegt.

zu b):

Wir denken uns das große Sechseck von innen her aufgebaut. Beim ersten Schritt entstehen zusätzlich zum vorhandenen Sechseck 6 neue. Beim 2. Schritt entstehen 12 neue Sechsecke, deren Mittelpunkte die in der Skizze markierten "Randpunkte" sind.
So geht das weiter, bis im Schritt von der Seitenlänge $n-1$ zur Seitenlänge n gerade $6(n-1)$ bisherige Randpunkte zum Mittelpunkt kleiner Sechsecke werden. Die Lösung ist also:

$$1 + 6 + 2\cdot 6 + \cdots + (n-1)6 = 1 + 6\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 3n(n-1).$$

Aufgabe 781. Eine schwierige Knobelei (für die Sommerferien)
Streckenzüge und Potenzen im Quadrat

Lösung:
Vorweg zwei Abkürzungen: $AZ :=$ Anfangsziffer, $EZ :=$ Endziffer.
Zunächst sollte man die 5 Potenzen, die alle die gleiche Basis n, $2 \leq n \leq 9$, haben, herausfinden.
Für die 17-ziffrige Potenz n^x gilt bei der Beachtung von (5):

(a) $10^{16} \leq n^x \leq 10^{17}$ und $AZ = 5$ oder $EZ = 5$.

Mit einem Taschenrechner ermittelt man, welche Potenzen n^x, $2 \leq n \leq 9$, die Ungleichung (a) erfüllen.

n^x	2^{54}	2^{55}	2^{56}	3^{34}	3^{35}	4^{27}	4^{28}	5^{23}	5^{24}	6^{21}	7^{19}	7^{20}	8^{18}	9^{17}
AZ	1	3	7	1	5	1	7	1	5	2	1	7	1	1
EZ	4	8	6	9	7	4	6	5	5	6	3	1	4	9

In der 2. und 3. Zeile der Tabelle sind die AZ und EZ der betrachteten Potenzen aufgelistet. Danach erfüllen nur 3^{35}, 5^{23} und 5^{24} die Bedingung (a). Daraus folgt:
Die Basis der fünf gesuchten Potenzen ist entweder 3 oder 5.

Für die 16-ziffrige Potenz n^y, $n = 3$ oder $n = 5$, gilt bei Beachtung von (1):

(b) $10^{15} \leq n^y \leq 10^{16}$ und n^y hat $AZ = 1$ oder $EZ = 1$.

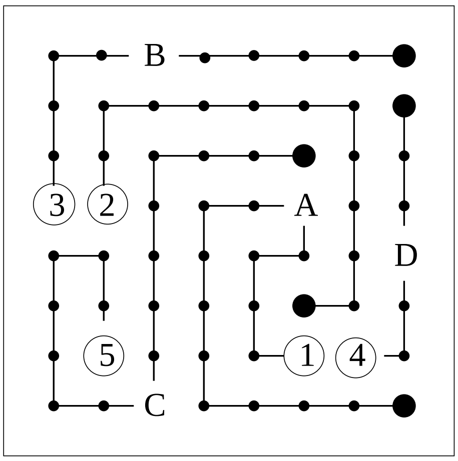
Die Ungleichung (b) wird nur erfüllt von $n^y = 3^{32}, 3^{33}$ und 5^{22}.
Nun gilt:
3^{32} hat $AZ = 1$, $EZ = 1$; 3^{33} hat $AZ = 5$, $EZ = 3$ und 5^{22} hat $AZ = 2$, $EZ = 5$.
Also erfüllt nur $n^y = 3^{32}$ beide Bedingungen von (b).
Daher ist 3^{32} die Lösung für (1).
Mit der Lösung für (1) schließt man aus (a), dass $n^x = 3^{35}$ die Lösung von (5) ist.
Nun gilt für die Lösung von (5): 3^{35} hat $AZ = 5$, aber $EZ = 7$.
Damit ist nach Voraussetzung klar:
Die in (1) – (5) vorkommenden Ziffern sind die AZ der fünf zu bestimmenden Potenzen.
Übrigens hat die Lösung 3^{32} von (1) wie verlangt $AZ = 1$.
Die drei fehlenden Potenzen sind bei bekannter Anfangsziffer und vorgegebener Stellenzahl leicht zu bestimmen; sie sind 3^{26}, 3^{22} und 3^{14}.

Zusammenfassung:

Streckenzug		einzutragende Zahl				
(1)	$1 - A - E$	3^{32}	$=$	$1\,853\,020\,188\,851\,841$	mit	$A = 2$
(2)	$2 - F - G$	3^{26}	$=$	$2\,541\,865\,828\,321$		
(3)	$3 - B - H$	3^{22}	$=$	$31\,381\,059\,609$	mit	$B = 0$
(4)	$4 - D - J$	3^{14}	$=$	$4\,782\,969$	mit	$D = 2$
(5)	$5 - C - K$	3^{35}	$=$	$50\,031\,545\,098\,999\,707$	mit	$C = 0$

Die Zahl $ABCD$ lautet $2\,002$.

Die Streckenzüge (1) – (5), längs denen die gefundenen Potenzen von 3 Ziffer um Ziffer einzutragen sind, sind z. B.



Anzahl-Probleme bei Dreiecken (III)

Ein Bericht für Mathis und Fortgeschrittene

von Hartwig Fuchs

Im Anschluss an Teil II dieser Serie (MONOID 70) betrachten wir zunächst folgende Aufgabe:

Aufgabe 2:

a) Gib alle verschiedenen Kombinationen von Werten $G_3, \dots, G_6$ an, die bei den Figuren D_7 möglich sind.

b) Welche der folgenden Kombinationen von Werten $G_3, G_4, \dots$ sind bei den Figuren D_8, D_9, D_{10} möglich?

$$\begin{array}{rclllll}
D_8 & : & G_3 = 2, & G_4 = 4, & G_5 = G_6 = 0, & G_7 = 2 & \\
D_9 & : & G_3 = 4, & G_4 = 0, & G_5 = 2, & G_6 = 2, & G_7 = 0, \quad G_8 = 1 \\
D_{10} & : & G_3 = 4, & G_4 = 1, & G_5 = G_6 = 2, & G_7 = G_8 = 0, & G_9 = 1 \\
D_{10} & : & G_3 = 2, & G_4 = 2, & G_5 = 1, & G_6 = 3, & G_7 = G_8 = 1
\end{array}$$

Lösungen:

a) Es gibt 3 verschiedene D_7 - Figuren. Die zugehörigen Kombinationen $G_3, \dots, G_6$ sind:

$$\begin{array}{llll}
(1)\ G_3 = 2, & G_4 = 3, & G_5 = 0, & G_6 = 2; \\
(2)\ G_3 = G_4 = G_5 = 2, & G_6 = 1; & & \\
(3)\ G_3 = 3, & G_4 = 0, & G_5 = 3, & G_6 = 1;
\end{array}$$

b) Versuche zunächst selbst, Lösungen zu finden! Erst dann überzeuge man sich, dass Bild 12 und Bild 13 Lösungen sind.

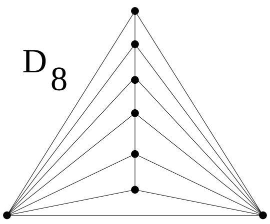


Bild 12

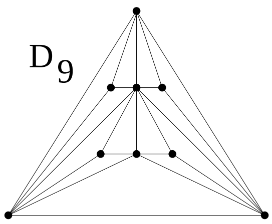


Bild 13

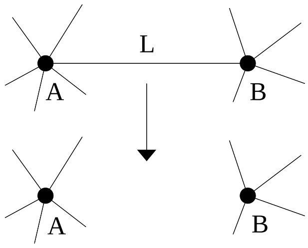
Eine Figur D_{10} mit den angegebenen Gradzahlen gibt es nicht (s. unten (12))!

U sei die Anzahl aller Eckpunkte aus D_n, $n \geq 3$, die einen **ungeraden Grad** besitzen. Wir schlagen nun ein Experiment vor: Bestimme die **U** - Werte für die Figuren in Bild 1, 2, 7, 8, . . . , 13.

Vermutung:

(V) In jeder Figur D_n, $n \geq 3$, ist die Anzahl der Eckpunkte mit ungeradem Grad stets gradzahlig.

Der Beweis beruht auf einer sehr originellen Idee.



Wir betrachten zwei Eckpunkte A, B aus einer Figur D_n, $n \geq 3$, die durch eine Kante L verbunden sind; $g(A)$, $g(B)$ seien die Grade von A, B und U sei die Anzahl der Eckpunkge ungeraden Grades in D_n.
Wir streichen nun die Kante L aus D_n weg!
Wie verändern sich dadurch $g(A)$, $g(B)$ und U?

vor der Streichung von L		nach der Streichung von L
$g(A)$ und $g(B)$ sind ungerade oder	$-->$	$g(A)-1$ und $g(B)-1$ sind gerade; aus U wird $U-2$
$g(A)$ und $g(B)$ sind gerade oder	$-->$	$g(A)-1$ und $g(B)-1$ sind ungerade; aus U wird $U+2$
$g(A)$ ist ungerade, $g(B)$ ist gerade oder	$-->$	$g(A)-1$ ist gerade, $g(B)-1$ ist ungerade; U bleibt ungeändert
$g(A)$ ist gerade, $g(B)$ ist ungerade	$-->$	$g(A)-1$ ist ungerade, $g(B)-1$ ist gerade; U bleibt ungeändert.

(10) Ergebnis: durch die Streichung von L ändert sich U umd -2 oder um $+2$ oder U ändert sich gar nicht.

Nun denke man sich nacheinander alle Kanten von D_n weggestrichen. Bei jeder Streichung tritt ein "Ergebnis (10)" ein. Nach der Streichung der letzten Kante ist $g(A) = 0$, $g(B) = 0$ und $U = 0$.
Deshalb muss der ursprüngliche Wert von U wegen (10) gerade gewesen sein. Also gilt tatsächlich (V).

Für die Anzahl der Eckpunkte aus D_n mit einem gradzahligen Grad gilt übrigens keine der Regel (V) entsprechende Aussage.
Wie Bild 12 und Bild 13 zeigen, kann diese Anzahl sowohl gerade (Bild 12) oder ungerade (Bild 13) sein.

Aus (V) folgt sofort eine Ergänzung zu (I), nämlich

(VI) **Jede Figur D_n, $n \geq 4$, enthält mindestens zwei Eckpunkte vom Grade 3.**

Es sollen noch zwei Gleichungen bewiesen werden, die der Kontrolle dienen können bei der Untersuchung der Frage, welche Kombination von Werten $G_3, G_4, \ldots, G_{n-1}$ (vgl. Aufgabe 2) für Figuren D_n möglich sind.

Bei einer Figur D_n, $n \geq 4$, seien E bzw. K die Anzahl der Eckpunkte bzw. Anzahl der Kanten und m sei der größte in D_n vorkommende Eckengrad. Dann gelten:

(11) $G_3 + G_4 + \cdots + G_m = E = n$

(12) $3G_3 + 4G_4 + \cdots + mG_m = 2K = 6n - 12$

Beweis:

(11) Da jeder Eckpunkt von D_n in genau einer der Zahlen $G_3, \ldots, G_m$ einmal mitgezählt ist, gibt $G_1 + \cdots + G_m$ die Anzahl der Eckpunkte in D_n an.

(12) Es sei $G_3 = d$. Dann gibt es also in D_n d Eckpunkte $P_1, \ldots, P_d$ von denen jeweils 3 Kanten ausgehen.

$3G_3$ gibt damit die Gesamtzahl aller von P_1, von P_2, …, von P_d ausgehenden Kanten an.

Entsprechend sind $4G_4, \ldots, mG_m$ zu interpretieren.

Nun wird in der Folge $3G_3, 4G_4, \ldots, mG_m$ jede Kante, da sie 2 Endpunkte besitzt, zeimal mitgezählt.

Daher gibt $3G_3 + 4G_4 + \cdots + mG_m$ nicht die Anzahl aller Kanten von D_n sondern das Doppelte dieser Anzahl an.

Wegen (2) ist damit (12) bewiesen.

Aufgabe 3:
Überprüfe die Angaben aus Aufgabe 2b) mittels (11) und (12).

Folgerung aus (11) und (12)

(13) Für jede Figur D_n, $n \geq 4$, gilt: $3G_3 + 2G_4 + G_5 \geq 12$.

Beweis:
Für $n = 4, 5$ und 6 gilt die Behauptung – man rechne Beispiel 3b) nach.
Sei also $n \geq 7$.
Vom 6-fachen von (11) subtrahiere man (12); man erhält:

$$\begin{array}{rcl} 6G_3 + 6G_4 + 6G_5 + 6G_6 + 6G_7 + \cdots + 6G_m & = & 6n \\ -3G_3 - 4G_4 - 5G_5 - 6G_6 - 7G_7 - \cdots - mG_m & = & -(6n-12) \\ \hline 3G_3 + 2G_4 + G_5 \qquad - G_7 - \cdots - (6-m)G_m & = & 6n - (6n-12) = 12 \end{array}$$

Daraus folgt:
$3G_3 + 2G_4 + G_5 \geq 12$, so dass (13) zutrifft.

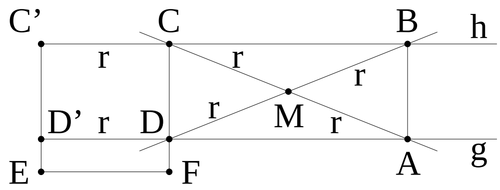
Mit (13) können nun die Eigenschaften (I), (IV), (VI) zusammengefasst werden zu:

(VII) Jede Figur D_n, $n \geq 4$, hat mindestens 2 Eckpunkte vom Grad 3, sowie mindestens zwei weitere Eckpunkte von einem Grad ≤ 5.

Beweis:
$G_3 = 1$ oder $G_3 = 3$ sind nach (V) nicht möglich.
Sei also $G_3 = 2$.
Dann können nicht beide $G_4 \leq 1$ und $G_5 \leq 1$ sein, weil sonst $3G_3 + 2G_4 + G_5 \leq 6 + 2 + 1 \leq 12$ wäre, was nach (13) nicht möglich ist.
Somit ist $G_4 \geq 2$ oder $G_5 \geq 2$ und das bedeutet: es gibt in D_n mindestens 2 Punkte vom Grade 4 oder 5 – und (VII) trifft zu.
Fallls $G_3 \geq 4$ ist, ergibt sich die Richtigkeit von (VII) unmittelbar.

Lösungen zu den Aufgaben des Artikels ”Ein kleiner Ausflug in die geometrischen Konstruktionen” (Seite 7-10)

Lösung zu Aufgabe 1:



1. Konstruktion eines Rechtecks.

1.1 Zeichne 2 beliebige sich schneidende Geraden g, h; ihr Schnittpunkte sei M.

1.2 Konstruiere von M aus die Punkte A, B, C, D auf g, h mit dem markierten Lineal. A, B, C, D sind die Eckpunkte eines Rechtecks.

2. Konstruktion des Quadrats.

2.1 Verlängere BC und AD um eine Strecke der Länge r; die Endpunkte der Verlängerungen seien C' und D'.

2.2 Verlängere $C'D'$ und CD um r, so dass $|C'D'| = |CD| = r$; die Endpunkte E, F bilden mit C', C die Eckpunkte des gesuchten Quadrats.

Lösung zu Aufgabe 2:
Man konstruiere wie in Beispiel 6 die Winkelhalbierende CG des Winkels α. Offenbar ist CG orthogonal zu AB – falls CG die Strecke AB nicht schneidet, verlängert man CG durch zusätzliche Drahtstücke.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Erratum zu MONOID 70

- Auf S. 19 muss bei den **Neuen Mathespielereien** in der Aufgabe **Fremdsprachen** im Aufgabentext das Wörtchen ”nur” zweimal gestrichen werden. Es muss also heißen: ” . . . 18 Kinder sprechen Französisch und 17 Englisch.”

Als das erste vollautomatisierte Flugzeug der Welt startete, waren die Passagiere ein wenig besorgt. Dann hörten sie über den Lautsprecher die sanfte, beruhigende Stimme des Computers: ”Meine Damen und Herren, Sie genießen den Vorzug, mit dem ersten vollautomatischen Flugzeug der Welt flliegen zu dürfen. Es gibt keine Piloten, denen ein menschliches Versagen unterlaufen könnte; Sie werden von unfehlbaren Computern gelenkt. Für all Ihre Bedürfnisse wird gesorgt. Sie brauchen sich keine Sorgen zu machen – Sorgen zu machen – Sorgen zu machen . . . .”
(aus R. Smullyan: Wie heißt dieses Buch? Seite 153)

Der direkte Beweis (2. Teil)

Beweisen kann man lernen

von Hartwig Fuchs

In "Beweisen kann man lernen (II)" (vgl. MONOID 70) wurde die Struktur eines direkten Beweises herausgearbeitet. Das Ergebnis kann so zusammengefasst werden: **der direkte Beweis** einer mathematischen **Behauptung** besteht darin, dass aus **Voraussetzungen** (= wahre Aussagen) mit Hilfe von logischen **Schlüssen** (= logische Regeln, die aus den Voraussetzungen **Folgerungen** produzieren) ohne Umschweife ein mathematischer **Satz** (= bewiesene Behauptung) gewonnen wird.
Schematisch sieht das so aus:

Voraussetzungen	——	logische Schlüsse	⟶	Satz
(wahre Aussagen)		(Regeln/ Folgerungen)		(bewiesene Behauptung)

Solche durch dies abstrakte Schema festgelegten Beweisprozesse werden nun durch Beispiele veranschaulicht – dabei können wir allerdings die verwendeten Regeln nicht diskutieren; das muss auf später verschoben werden.

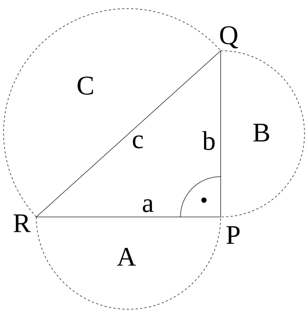
Beispiel 1
Ein Tennisturnier, zu dem sich n Spieler gemeldet haben, wird nach dem K.O.-System durchgeführt:
In jeder Runde werden durch Losentscheid Paare gebildet; jedes Paar spielt ein Spiel – der Verlierer scheidet aus. Ein bei der Paarbildung übrig bleibender Spieler kommt ohne Spiel eine Runde weiter.
Zeige: *Zur Ermittlung des Siegers müssen $n-1$ Spiele gespielt werden.*

Beweis:

Voraussetzungen	(1)	Es gibt n Spieler.
	(2)	Es gibt einen Turniersieger.
	(3)	Zur Ermittlung eines Verlierers wird ein Spiel gespielt.
Logischer Schluss,		Aus (1) und (2) folgt:
Folgerung	(4)	es gibt $n-1$ Verlierer.
		Wegen (3) und (4) gilt:
Bewiesene Behauptung	:	$n-1$ Spiele müssen gespielt werden.

Beispiel 2
Für die Flächen F_A, F_B und F_C der Halbkreise A, B und C mit den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks PQR als Durchmesser gilt:

$$F_A + F_B = F_C.$$



Beweis *:

Voraussetzungen	(1)	Das Dreieck PQR ist rechtwinklig bei P.
	(2)	Für dei Seitenlängen a, b, c des Dreiecks PQR gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ (vgl. Figur).
	(3)	Die Halbkreise A, B, C haben die Durchmesser a, b, c.
	(4)	Die Fläche eines Kreises mit Radius r ist πr^2.
Logische Schlüsse,		Aus (3) und (4) folgt:
Folgerung	(5)	$F_A = \frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2, F_B = \frac{1}{2}\pi(\frac{b}{2})^2, F_C = \frac{1}{2}\pi(\frac{c}{2})^2.$
		Aus (5) folgt:
	(6)	$F_A + F_B = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2)$ und $F_C = \frac{\pi}{8}c^2$.
		Aus (2) und (6) folgt:
Bewiesene Behauptung	:	$F_A + F_B = F_C$.

* Es ist nicht üblich, Beweise so streng zu strukturieren wie in unseren Beispielen. Meist werden Voraussetzungen, die jeder kennt (z.B. (4)) und auch elementare Schlüsse (z.B. (6)) einfach weggelassen.

Zusammengesetzte direkte Beweise

Wenn man sich die Struktur von direkten Beweisen genauer anschaut, dann zeigt sich manchmal, dass sie aus Komponenten aufgebaut sind, die ihrerseits in sich abgeschlossene direkte Beweise sind.

Zwei Typen von so zusammengesetzten Beweisen sollen nun in Beispielen vorgestellt werden.

a) Verkettete direkte Beweise

Beispiel 3

Im Folgenden seien a und b beliebige positive reelle Zahlen.

Für sie gilt die Behauptung S_3: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$.

Der Beweis von S_3 wird durch 3 verkettete direkte Beweise geführt.

1) Direkter Beweis der Behauptung S_1: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Voraussetzungen	(1)	Mit a, b sind auch $a \pm b$, $a \cdot b$, $a : b$ reell.
	(2)	Das Quadrat einer reellen Zahl ist ≥ 0.
Logische Schlüsse,		Wegen (1) ist $a - b$ reell, so dass mit (2) gilt:
Folgerung	(3)	$(a - b)^2 \geq 0$.
		Wegen (3) ist $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, so dass
Bewiesene Behauptung	:	$a^2 + b^2 \geq 2ab$.

2) Direkter Beweis der Behauptung S_2**:** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$.

Voraussetzungen		(1) und S_1
	(4)	$\frac{c}{e} \geq \frac{d}{e}$, falls $c \geq d$ und $\frac{c}{e} > \frac{d}{e}$, falls $c > d$ und c, d, e beliebige positive reelle Zahlen.
Logische Schlüsse,		Aus (1), S_1 und (4) folgt:.
Folgerung	(5)	$\frac{a^2+b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2$.
		Wegen $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ folgt aus (5)
Bewiesene Behauptung	:	$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

3) Direkter Beweis der Behauptung S_3**:** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$.

Voraussetzungen		(1), (4) und S_2.
Logische Schlüsse,		Aus (1) und (4) folgt
		$(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b) = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} > \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$, woraus sich mit S_2 ergibt:
Folgerung	(6)	$(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b) > 2$
		Aus (6) ergibt sich unmittelbar:
Bewiesene Behauptung	:	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$.

Schematisch sieht dieser verkettete Beweis so aus – womit auch der Begriff "verkettet" erklärt ist – ($V =$ Voraussetzung, $LS =$ Logische Schlüsse, $S =$ Satz; die Verkettungsstellen sind durch $*$ markiert)

$$(\mathrm{V} - \mathrm{LS} \rightarrow \mathrm{S}_1) * (\mathrm{V}, \mathrm{S}_1 - \mathrm{LS} \rightarrow \mathrm{S}_2) * (\mathrm{V}, \mathrm{S}_2 - \mathrm{LS} \rightarrow \mathrm{S}_3)$$

b) Gebündelte direkte Beweise

Beispiel 4

Man beweise die Behauptung S_4: In der Folge F von natürlichen Zahlen $9, 98, 987, \ldots$, $9\,876\,543\,210, 9\ldots109, 9\ldots1098, 9\ldots10987, \ldots$ gibt es keine Primzahlen.

Der Beweis von S_4 lässt sich in 3 "parallele" direkte Beweise zerlegen, die dann zu einem vierten direkten Beweis gebündelt werden.

1. direkter Beweis

Voraussetzung	(1)	Wenn die natürliche Zahl n die Einerziffer $0, 2, 4, 6$ oder 8 besitzt, dann ist n ein Vielfaches von 2.
Logischer Schluss		Aus (1) folgt:
Satz S_1	:	eine natürliche Zahl $n > 2$ mit der Einerziffer $0, 2, 4, 6$ oder 8 ist keine Primzahl.

2. direkter Beweis
Analog wie im 1. Beweis erhält man die Gültigkeit von
Satz S_2 : eine natürliche Zahl $n > 5$ mit der Einerziffer 5 ist keine Primzahl.

3. direkter Beweis
Voraussetzungen (2) Die Einerziffer einer Zahl n der Folge F sei 1, 3, 7 oder 9.
(3) Ist die Quersumme einer natürlichen Zahl n durch 3 teilbar, dann ist auch n durch 3 teilbar.
Logische Schlüsse Wir bezeichnen $9\,876\,543\,210$ mit B und jede der Zahlen 9, 987, $9\,876\,543$ und $987\,654\,321$ mit C. Dann gilt offenbar:
Folgerung (4) jede der Zahlen C und B hat eine durch 3 teilbare Quersumme und folglich ist jede von ihnen durch 3 teilbar.
Dann gilt weiter:
(5) Jede der Zahlen BC, BBC, $BBBC$, $\ldots$ ist durch 3 teilbar.
Aus (4) und (5) erhält man:
Satz S_3 : Die Zahlen der Folge F mit der Einerziffer 1, 3, 7 oder 9 sind keine Primzahlen.

4. direkter Beweis
Voraussetzungen (6) für eine Zahl n der Folge F trifft genau eine der Aussagen S_1, S_2, S_3 zu.
Daraus folgt sofort:
Satz S_4 : keine der Zahlen n der Folge F ist eine Primzahl.

Das Schema dieses zusammengesetzten Beweises sieht so aus – wodurch auch der Begriff ”gebündelt” erklärt ist – :

$$\left.\begin{array}{l} (V \text{ — } LS \rightarrow S_1) \\ (V \text{ — } LS \rightarrow S_2) \\ (V \text{ — } LS \rightarrow S_3) \end{array}\right\rangle \ast\, (S_1, S_2, S_3 \text{ — } LS \rightarrow S_4)$$

Bemerkung
Wenn ein direkter Beweis aus einer unendlich ”langen” Kette oder aus einem unendlich ”dicken” Bündel von Einzelbeweisen zusammengesetzt ist, dann kann man nicht so vorgehen, dass man wie oben die Einzelbeweise der Reihe nach abarbeitet. Es sind dann andere Beweismethoden erforderlich; eine von ihnen, die häufig zum Ziel führt, ist die **vollständige Induktion** – darüber später mehr.

Elementare direkte Beweise
Der 1., der 2. und der 4. Beweis in Beispiel 4 stellen die wohl einfachste Form eines direkten Beweises dar – sie funktionieren so: auf gegebene Voraussetzungen werden logische Regeln angewendet und man gelangt so ohne Zwischenüberlegungen, ohne Zwischenergebnisse direkt zu einem mathematischen Satz:

$$V \text{ ——— Regeln} \longrightarrow S$$

Beispiel 5:

Man zeige: die Summe $3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n$ ist ungerade für eine ungerade natürliche Zahl n.

Beweis:

(1) Es sei n eine ungerade natürliche Zahl.

(2) Es gilt: jede Potenz von 3 ist ungerade.

(3) Die Summe von ungeradzahlig vielen ungeraden Zahlen ist ungerade.

Aus den Voraussetzungen (1), (2) und (3) folgt sofort, dass die Behauptung zutrifft.

Kritik und Ausblick

In unseren Beispielen 1 - 5 lässt sich eine Problematik erkennen, die jedem direkten Beweis anhaftet und die wir an einem weiteren Beispiel ganz deutlich herausstellen wollen.

Beispiel 6

Für die Elemente einer Folge $\{g_n\}$ mit $g_n = 3n^2 - n + 10, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$, gilt

S: ein beliebiges Folgenelement g_n ist stets kleiner als das nachfolgende Element g_{n+1}.

Beweis:

Voraussetzungen	(1)	$g_n = 3n^2 - n + 10, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$
	(2)	$0 < 6n + 2$ für jedes beliebige $n \geq 1$.
Logischer Schluss		Aus (2) folgt
	(3)	$3n^2 - n + 10 < (6n + 2) + 3n^2 - n + 10.$
		Wegen $6n + 2 + 3n^2 - n + 10 = 3(n + 1)^2 - (n - 1) + 10$
		folgt mit (1) für $n + 1$, dass gilt:
Satz	:	die Behauptung S ist wahr.

Aus zunächst nicht nachvollziehbaren Gründen wird in diesem Beweis die Ungleichung (2) vorgegeben und durch den Trick mit der Addition von $3n^2 - n + 10$ in (4) wird man zwangsläufig zu der Behauptung (1) geführt.

Man kann offenbar den direkten Beweis nur führen, wenn man schon **vorher** weiß, welche Voraussetzungen und welche Zwischenschritte (= Schlüsse) man **später** machen wird. Genau genommen müsste man also den Beweis bereits kennen, damit man ihn auch durchführen kann!

Bei jedem direkten Beweis steht also vorweg die Frage im Raum: wie findet man die Voraussetzungen und die notwendigen Schlüsse ohne langwieriges Probieren? Gibt es dafür vielleicht systematische Verfahren?
Eine Methode, die häufig zum Erfolg führt, ist der **Rückschluss** – davon später mehr.

Ein anderes Problem, das ebenfalls die Voraussetzungen eines direkten Beweises betrifft, ensteht aus der Frage: Woher weiß man, dass die in einem Beweis benutzten Voraussetzungen wahr sind?
Wenn sich unter den Voraussetzungen die mathematischen Sätze $S_1, \ldots, S_m$ befinden, dann müssen sie alle bewiesen sein. Um aber $S_1, \ldots, S_m$ zu beweisen, muss man offensichtlich auf andere wahre Sätze $S'_1, \ldots, S'_l$ als Voraussetzungen zurückgreifen; aber zum Beweis von $S'_1, \ldots, S'_l$ werden wiederum bewiesene Sätze $S''_1, \ldots, S''_k$ benötigt. Und so immer weiter "rückwärts"?
Eine Antwort hierauf später unter dem Stichwort **Axiome**.

MONOID-Le(ö)ser/innen schreiben

An dieser Stelle wollen wir den MONOID-Lesern und Leserinnen ein Forum anbieten, auf dem Anregungen, interessante Aufgaben, Tatsachen und Fakten sowie natürlich auch Lob und Kritik mitgeteilt werden können.
Gerne freuen wir uns über Ihre/eure Zusendungen, und wir wünschen uns, dass diese Rubrik eifrig von den Le(ö)sern und Le(ö)serinnen genutzt wird.

Viel Spaß dabei wünscht Ihnen/euch das MONOID-Team.

Hanna Jöhlinger aus Neustadt a. d. W. schreibt:
Zu den Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 69, abgedruckt in MONOID 70 auf Seite 16, und zwar zu den Buchstabengleichungen

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{rcccc} & & \text{G} & \text{I} & \text{B} \\ + & & \text{M} & \text{I} & \text{R} \\ \hline & \text{G} & \text{E} & \text{L} & \text{D} \end{array} \qquad\qquad \text{(II)}\quad \begin{array}{rccccc} & & \text{S} & \text{E} & \text{N} & \text{D} \\ + & & \text{M} & \text{O} & \text{R} & \text{E} \\ \hline & \text{M} & \text{O} & \text{N} & \text{E} & \text{Y} \end{array}$$

habe ich eine Anmerkung:

Während die im Heft 70 angegebene Lösung zu (II) wohl die einzige Lösung ist, gibt es zur Gleichung (I) **mehrere** Lösungen.
Man sollte diese Tatsache den Lesern nicht vorenthalten, auch wenn nur eine mögliche Lösung abgedruckt wird.

Hier die damals von meinem Sohn Martin und mir in Zusammenarbeit gefundenen Lösungen zur Gleichung (I), wobei stets $G = 1, E = 0$ und $M = 8$ oder 9 sein muss:

$$\begin{array}{r} 123 \\ +925 \\ \hline 1048 \end{array}\quad \begin{array}{r} 125 \\ +923 \\ \hline 1048 \end{array}\quad \begin{array}{r} 126 \\ +928 \\ \hline 1054 \end{array}\quad \begin{array}{r} 128 \\ +926 \\ \hline 1054 \end{array}\quad \begin{array}{r} 132 \\ +935 \\ \hline 1067 \end{array}\quad \begin{array}{r} 135 \\ +932 \\ \hline 1067 \end{array}\quad \begin{array}{r} 134 \\ +938 \\ \hline 1072 \end{array}\quad \begin{array}{r} 138 \\ +934 \\ \hline 1072 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 136 \\ +938 \\ \hline 1074 \end{array}\quad \begin{array}{r} 138 \\ +934 \\ \hline 1074 \end{array}\quad \begin{array}{r} 142 \\ +943 \\ \hline 1085 \end{array}\quad \begin{array}{r} 143 \\ +942 \\ \hline 1085 \end{array}\quad \begin{array}{r} 142 \\ +945 \\ \hline 1087 \end{array}\quad \begin{array}{r} 143 \\ +942 \\ \hline 1087 \end{array}\quad \begin{array}{r} 163 \\ +864 \\ \hline 1027 \end{array}\quad \begin{array}{r} 164 \\ +863 \\ \hline 1027 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 164 \\ +865 \\ \hline 1029 \end{array}\quad \begin{array}{r} 165 \\ +864 \\ \hline 1029 \end{array}\quad \begin{array}{r} 165 \\ +867 \\ \hline 1032 \end{array}\quad \begin{array}{r} 167 \\ +865 \\ \hline 1032 \end{array}\quad \begin{array}{r} 172 \\ +873 \\ \hline 1045 \end{array}\quad \begin{array}{r} 173 \\ +872 \\ \hline 1045 \end{array}\quad \begin{array}{r} 173 \\ +879 \\ \hline 1052 \end{array}\quad \begin{array}{r} 179 \\ +873 \\ \hline 1052 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 173 \\ +876 \\ \hline 1049 \end{array}\quad \begin{array}{r} 176 \\ +873 \\ \hline 1049 \end{array}\quad \begin{array}{r} 174 \\ +879 \\ \hline 1053 \end{array}\quad \begin{array}{r} 179 \\ +874 \\ \hline 1053 \end{array}$$

Alexander Hillert aus Pirmasens schreibt zu Aufgabe 777 aus MONOID 71:
Man zerlegt $x^5 + y^5$ so weit, dass man es durch $s = x + y$ und $p = x \cdot y$ ausdrücken kann. Bei der Zerlegung entstehen meist Teile, die wieder subtrahiert werden müssen.

$x^5 + y^5 =$
$= (x^4 + y^4) \cdot (x + y) - (x^4y + y^4x)$
$= (x^4 + y^4) \cdot (x + y) - (xy(x^3 + y^3))$
$= ((x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2) \cdot (x + y) - xy((x^2 + y^2) \cdot (x + y) - xy \cdot (x + y))$
$= (((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2) \cdot (x + y) - xy(((x + y)^2 - 2xy) \cdot (x + y) - xy \cdot (x + y))$

$= ((s^2 - 2p)^2 - 2p^2) \cdot s - p \cdot (s(s^2 - 2p) - (p \cdot s))$

Nun verwendet Alexander Hillert die Bedingungen $s = x + y = 1$ und $x^5 + y^5 = 211$ und kann so $p = 7$ bzw. $p = -6$ berechnen. Für $p = 7$ gibt es keine reellen Lösungen für y, während sich für $p = -6$ die Werte $y = 3$ und $y = -2$ und folglich $x = -2$ bzw. $x = 3$ ergeben.

Catherina Wirtz aus Zweibrücken schrieb uns folgende Entdeckung:

Mathematik

Hexen-Einmaleins aus dem Faust

Von Jan Haase

Du musst versteh'n,
aus Eins mach Zehn.
Die Zwei lass geh'n.
Die Drei mach gleich,

Also kommt in die erste Reihe: 10,2,3

So bist du reich.

Reich an Wissen, denn jetzt weiß man schon: Die Summe muss immer 15 ergeben.

Verlier die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex,
Mach Sieben und Acht,

Aha, also in die zweite Reihe: 0,7,8 – und siehe da, die Summe ist wieder 15.

So ist's vollbracht:

Es ist erst fast vollbracht, aber man hat jetzt alles zusammen, um die dritte und letzte Reihe zu erstellen: die "verlorene" Vier taucht wieder auf, so dass sich 5, 6, 4 ergibt. Die Summe ist wieder 15.

Und Neun ist Eins,

Diese neun Felder ergeben ein magisches Quadrat . . .

Und Zehn ist keins.

. . . und magische Quadrate mit 10 Feldern gibt es nicht.

Das ist das Hexen-Einmaleins!

Na, war es schwer?

Diesen Artikel habe ich in einer Sonderausgabe der Frankfurter Rundschau zum Goethe-Geburtstag 1999 gefunden.

Goethe hat also ein magisches Quadrat gedichtet.

Wer behauptet hier, Mathematik sei nichts für sprachbegabte Menschen?

Hoffentlich haben Sie viel Freude an dem Quadrat, vielleicht können Sie ja was damit anfangen.
Ich habe das Gedicht mal meinen Freundinnen gegeben und es sie lösen lassen.

Viele Grüße und ein ganz großes Lob an die MONOID-Redaktion für Ihre tolle Zeitschrift!

Hier ist die Lösung zu dem links abgedruckten Artikel:

10	2	3	=15
0	7	8	=15
5	6	4	=15
=15	=15	=15	

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 27.06.2002)

◊ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

■ **Kl. 5:** Ina Ebling 4, Claudia Heiss 11, Johanna Mees 15, Sabine Oßwalt 12, Annett Stellwagen 25;
■ **Kl. 6:** Daniel Faber 18, Johann Kirsch 18, Johannes Merz 35;
■ **Kl. 7:** Markus Bassermann 28, Matthias Eberle 7, Madeleine Fister 26, Meike Fluhr 30, Isabelle Merker 30;
■ **Kl. 8:** Isabelle Maurot 3, Christina Simon 23;
■ **Kl. 12:** Aaron Breivogel 37, Dominik Kraft 31.

◊ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

■ **Kl. 5:** Johannes Fiebig 10, Carolin Herandez-Sanchez 9, Felix Liebrich 30, Lisa Mettler 27, Carolin Morlock 17, Nina Rein 25, Susanne Rogge 21, Inga Wellstein 9, Rebecca Zimmer 10;
■ **Kl. 7:** Jeanette Stohr 9; ■ **Kl. 9:** Gregor Dschung 18, Alexander Kent 6.

◊ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

■ **Kl. 7:** Sebastian Bischof 9, Patrick Eichstätter 8, Robert Vogt 11;
■ **Kl. 8:** Lorenz Diener 4, Stefan Tran 28.

◊ **Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 6:** Christian Behrens 33.

◊ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**

■ **Kl. 6:** Julian Hohmann 6, Christian Münkel 24;
■ **Kl. 7:** Hannah Hauser 26, Sebastian Sauerbier 19, Katharina Schwert 4, Marius Trabert 10.

◊ **Frankenthal, Erkenbert-Grundschule: Kl. 3:** Laura Mettler 21.

◊ **Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):**

■ **Kl. 5:** Jonas Fischer 1, Franziska Lahnstein 2;
■ **Kl. 6:** Lukas Bünning 1, Marco Mallm 1, Carolin Marusic 2, Rodney de Meulenaer 3, Annika Scherer 1, Ann-Kathrin Tilch 1;
■ **Kl. 7:** Soria Asvar 5, Katja Dik 2, Lukas Frink 4, Matthias Fritz 3, Viktoria Gerz 5, Alexander Schardt 2, Matthis Scherer 3.

◊ **Hantersbüttel: Kl. 9:** Roman Menzel 5.

◊ **Heilbronn, Walldorfschule: Kl. 12:** Carl Friedrich Bolz 18.

◊ **Kaiserlautern, Burggymnasium (Betreuender Lehrer Ernst Mischler):**
Kl. 5: Annika Buch 4.

◊ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium: Kl. 12:** Kerstin Bauer 36.

◊ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:**
■ **Kl. 8:** Judith Reinhardt 36, Adriana Spalwisz 7; ■ **Kl. 11:** Alexandra Engelhardt 9.

◊ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 11:** Steffen Biallas 38.

◇ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
■ **Kl. 6:** Daniela Bongartz 4, Jennifer Döring 7, Annika Kohlhaas 11;
■ **Kl. 7:** Katharina Höveler 21; Stefanie Tiemann 42.

◇ **Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Angelika Beitlich und Herr Bielefeld):**
■ **Kl. 5:** Abla Alaouvi 13, Carolin Dossmann 19, Gib Gutzeit 8, Alice Kaoch 18, Julian Kleiner 1, Marcel Landua 10, Sabrina Schröder 4, Annkatrin Weber 41;
■ **Kl. 6:** Stefan Albert 23, Margarete Heinrichs 6, Nicole Witzel 8;
■ **Kl. 7:** Sarah C. Alaouvi 13, Sebastian Eckart 10, Massim Tawanaie 15, Daniel Dieth 14; ■ **Kl. 8:** Elham Qiami 3.

◇ **Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Alexander Hillert 20.

◇ **Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Moritz Klügle 3.

◇ **Wiesbaden, Gutenbergschule:** ■ **Kl. 10:** Kathleen Renneißen 11.

◇ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
■ **Kl. 5:** Annika Fetzer 21, Kurosch Habibi 17, Carolin Roßbach 3, David Schuschke 15, Joanna Wendling 8;
■ **Kl. 6:** Annika Johann 24; Julia Jung 34, Lena Müller 32, Sarah Tröbs 23;
■ **Kl.9:** Verena Prägert 15.

◇ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium: Kl. 10:** Catherina Wirtz 11.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Für die zahlreichen neuen Abonnent(inn)en, die sich im Laufe des Jahres der Gemeinschaft der MONOIDaner(innen) zugesellt haben, sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Zählung der Punkte für die Aufgaben immer vom Dezember- bis zum September-Heft läuft. Dies ergibt die Basis für die Preisvergabe im Dezember. Die Preisträger werden im März-Heft bekannt gegeben. Der aktuelle Punktestand erscheint zunächst auf dem Einlegeblatt im aktuellen Heft und wird im folgenden Heft nochmals abgedruckt.

2. Die festliche **Preisvergabe 2002** findet am Samstag, dem **14. Dezember** im Neuen Musiksaal NB 10 des **Karolinen-Gymnasiums in Frankenthal/Pfalz**, Röntgenplatz 5, statt; Beginn um 10:30 Uhr. Wir dürfen heute schon alle Freunde und Freundinnen von MONOID herzlich dazu einladen und sie bitten, sich diesen Termin vorzumerken.

3. In diesem Heft erscheint ein Artikel von Prof. Dr. G. Hofmeister ("Die Goldbach-Vermutung"). Herr Hofmeister ist über die Anschrift des Fachbereichs Mathematik und Informatik erreichbar, aber auch – und dies gilt für alle Autoren dieses Heftes – über die MONOID-Redaktion.

4. Auf dem "Wissenschaftsmarkt" am 7. und 8. September auf dem Gutenbergplatz in Mainz haben wir auch MONOID vorgestellt; die Freiexemplare, mit denen wir geworben haben, gingen "weg wie warme Semmeln".

Ekkehard Kroll

MONOID Jahrgang 22 Heft 71 September 2002

Inhalt

Die Redaktion

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 16.09.2002)

◇ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

■ **Kl. 6:** Ina Ebling 15, Claudia Heiss 26, Daniela Hottenbacher 13, Johanna Mees 22, Sabine Oßwalt 21, Franziska Schmitt 13, Annett Stellwagen 38;
■ **Kl. 7:** Daniel Faber 18, Johann Kirsch 18, Johannes Merz 35;
■ **Kl. 8:** Markus Bassermann 49, Matthias Eberle 7, Madeleine Fister 26, Meike Fluhr 51, Isabelle Merker 51;
■ **Kl. 9:** Isabelle Maurot 3, Christina Simon 23;
■ **Kl. 13:** Aaron Breivogel 59, Dominik Kraft 53.

◇ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

■ **Kl. 6:** Johannes Fiebig 8, Carolin Herandez-Sanchez 9, Felix Liebrich 48, Lisa Mettler 21, Carolin Morlock 9, Nina Rein 15, Susanne Rogge 9, Inga Wellstein 9, Rebecca Zimmer 22;
■ **Kl. 8:** Jeanette Stohr 9;
■ **Kl. 9:** Marc Rein 5;
■ **Kl. 10:** Gregor Dschung 47.

◇ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

■ **Kl. 8:** Sebastian Bischof 9, Patrick Eichstätter 8, Robert Vogt 11;
■ **Kl. 9:** Lorenz Diener 4, Stefan Tran 28.

◇ **Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 7:** Christian Behrens 49.

◇ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**

■ **Kl. 7:** Ann-Katrin Bock 16, Julian Hohmann 6, Christian Münkel 24;
■ **Kl. 8:** Navina Groß 6, Hannah Hauser 39, Leonie Münkel 10, Sebastian Sauer 19, Katharina Schwert 19, Marius Trabert 10.

◇ **Frankenthal, Erkenbert-Grundschule: Kl. 4:** Laura Mettler 21.

◇ **Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):**

■ **Kl. 6:** Jonas Fischer 1, Franziska Lahnstein 2, Janina Rau 2;
■ **Kl. 7:** Lukas Bünning 1, Marco Mallm 1, Carolin Marusic 2, Rodney de Meulenaer 3, Annika Scherer 1, Ann-Kathrin Tilch 1;
■ **Kl. 8:** Soria Asvar 7, Katja Dik 2, Cornelius Doll 2, Lukas Frink 4, Matthias Fritz 3, Viktoria Gerz 5, Alexander Schardt 2, Matthis Scherer 3.

◇ **Hantersbüttel: Kl. 10:** Roman Menzel 5.

◇ **Heilbronn, Walldorfschule: Kl. 13:** Carl Friedrich Bolz 18.

◇ **Kaiserlautern, Burggymnasium (Betreuender Lehrer Ernst Mischler):**
Kl. 6: Annika Buch 7, Tanita Eichler 4, Jennifer Lorch 2, Lena Sembach 2.

◇ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium: Kl. 13:** Kerstin Bauer 60.

♢ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:**
■ **Kl. 8:** Katharina Kober 16, ■ **Kl. 9:** Judith Reinhardt 61, Adriana Spalwisz 20;
■ **Kl. 12:** Alexandra Engelhardt 9.

♢ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 12:** Steffen Biallas 66.

♢ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
■ **Kl. 7:** Daniela Bongartz 4, Jennifer Döring 7, Annika Kohlhaas 11;
■ **Kl. 8:** Katharina Höveler 39; Stefanie Tiemann 47.

♢ **Neustadt a. d. W. (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):**
■ **Kl. 7:** Martin Jöhlinger 11, Robert Simon 3.

♢ **Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Angelika Beitlich und Herr Bielefeld):**
■ **Kl. 6:** Abla Alaouvi 13, Carolin Dossmann 26, Gib Gutzeit 8, Alice Kaoch 18, Julian Kleiner 4, Marcel Landua 18, Sabrina Schröder 4, Annkatrin Weber 51;
■ **Kl. 7:** Stefan Albert 33, Margarete Heinrichs 6, Nicole Witzel 8;
■ **Kl. 8:** Sarah C. Alaouvi 13, Sebastian Eckart 20, Massim Tawanaie 15, Daniel Dieth 14; ■ **Kl. 9:** Elham Qiami 3.

♢ **Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Alexander Hillert 42.

♢ **Saarburg, Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Sibylle von Bomhard 7.

♢ **Siegburg, Anno-Gymnasium:** ■ **Kl. 9:** Jan B. Boscheinen 17.

♢ **Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Moritz Klügle 3.

♢ **Wiesbaden, Gutenbergschule:** ■ **Kl. 11:** Kathleen Renneißen 11.

♢ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
■ **Kl. 6:** Katrin Brenneisen 6,5, Annika Fetzer 21, Kurosch Habibi 17, Carolin Roßbach 9, David Schuschke 15, Joanna Wendling 8;
■ **Kl. 7:** Annika Johann 36; Julia Jung 42, Lena Müller 32, Sarah Tröbs 43;
■ **Kl.10:** Verena Prägert 24.

♢ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium: Kl. 11:** Catherina Wirtz 25.

Die **Sonderpreisaufgabe** (aus MONOID 70, Nr. 784) haben gelöst:
Kerstin Bauer, Steffen Biallas, Aaron Breivogel, Gregor Dschung, Alexander Hillert, Dominik Kraft, Judith Reinhardt.