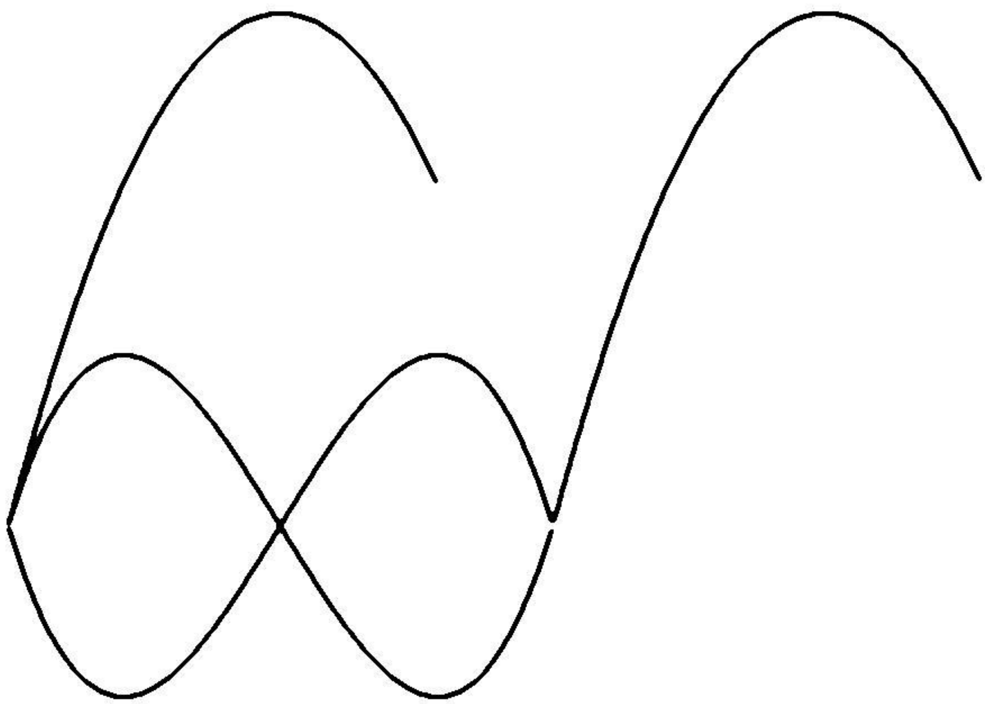
Jahrgang 22 | Heft 72 | Dezember 2002

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die **Neuen Aufgaben** und **Mathespielereien** warten auf eure Lösungen. Auch bei „Wer forscht mit“ könnt ihr euch beteiligen, selbst wenn ihr in Mathe keine „Eins“ habt. Beim Lösen mancher Aufgabe braucht ihr viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer **nur eine oder Teile einzelner Aufgaben** lösen kann, sollte teilnehmen; **der Gewinn eines Preises** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „**Mathespielereien**“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den **Neuen Aufgaben** und zur „**Seite für den Computer-Fan**“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern!) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.02. 2003.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

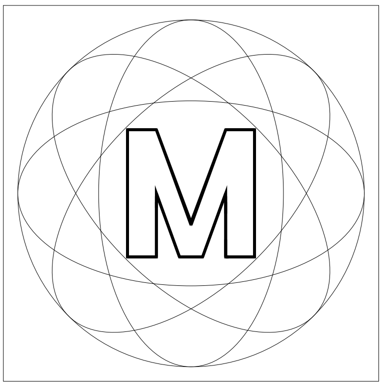
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

Das Goldene M



Außer der Medaille mit dem goldenen M, die ihr Aussehen im letzten Jahr gewandelt hat, gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:

Lösungen zu den **Neuen Aufgaben** und den **Mathespielereien**, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Das Nadelproblem von Buffon

von Martin Mettler

Ich war 15 Jahre alt, als mein Lehrer uns in der Mathe-AG folgende Aufgabe stellte:

Man nehme eine Nadel der Länge a. Auf einer horizontalen, ebenen Fläche zeichne man eine Schar paralleler Geraden (zwei benachbarte im Abstand von je $2a$ zueinander).

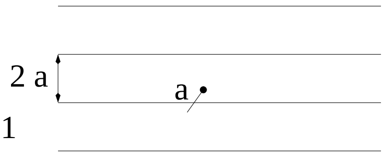


Abb. 1

Nun lasse man, möglichst oft, die Nadel aus einer Höhe von etwa 2 Meter auf diese Fläche fallen. Ist N die Gesamtzahl der Würfe und N_s die Anzahl der Würfe, bei denen die Nadel eine der Parallelen schneidet (oder gerade noch berührt), so ist das Verhältnis $N : N_s$ etwa gleich mit der Kreiszahl π.

Zunächst glaubten wir, es wäre ein Scherz, doch unser Lehrer versicherte uns, dass er es ernst meint. Wir haben einige Nachmittage mit dem Nadelwerfen verbracht und haben uns schließlich überzeugt, dass er Recht hat. Ich war verblüfft. Ich konnte mir nicht vorstellen, was das Werfen einer Nadel – ein völlig zufälliges Ereignis – mit einer Zahl, die eigentlich im Kreis steckt, zu tun haben soll.
Nun wollten wir der Sache auf den Grund gehen, indem wir das von unserem Lehrer empfohlene Buch zu Hilfe nahmen. Wir fanden einen Beweis, der sich jedoch auf viele uns unbekannte Begriffe stützte.
Es folgten einige Wochen intensiver Beschäftigung mit dem Problem. Während dieser Zeit lernten wir nicht nur die Begriffe Wahrscheinlichkeit und geometrische Wahrscheinlichkeit kennen, sondern auch wie man diese Begriffe zur Lösung von konkreten Aufgaben heranziehen kann.

Aus der Definition der Wahrscheinlichkeit als Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zur Anzahl der gleichmöglichen Fälle folgt für unser Problem:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Parallele schneidet oder gerade noch berührt, ist:

$$p = \frac{N_s}{N} \qquad (1)$$

Weiter machen wir nun folgende Überlegungen, um p durch eine geometrische Wahrscheinlichkeit darzustellen.

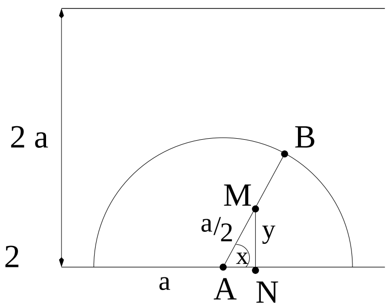


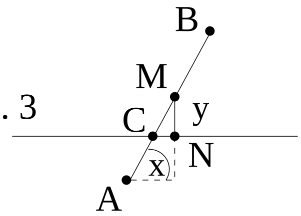
Abb. 2

Als erstes nehmen wir den Fall, in dem die Nadel gerade noch eine Parallele berührt (Abb.2). Dann entspricht die Nadel offenbar dem eingezeichneten Radius des Halbkreises um A.
Ist nun M die Mitte der Nadel und $y = |MN|$ der Abstand von der Mitte M der Nadel zur nächsten Parallele und $x = \measuredangle NAM$ der Winkel zwischen der Parallelen und der Nadel, so gilt:

$$y = \frac{a}{2} \cdot sinx, \text{ wobei } x \in [0, \pi].$$

Als zweites nehmen wir den Fall, in dem die Nadel eine Parallele schneidet (Abb.3).
Dann gilt $y < \frac{a}{2} \cdot sinx$, weil $|CM| < |AM| = \frac{a}{2}$ ist.

Abb. 3



Daraus folgt: Günstige Fälle haben wir, wenn $y \leq \frac{a}{2} \cdot sinx$ ist.
Dies ist die schraffierte Fläche F_s in Abb.4.

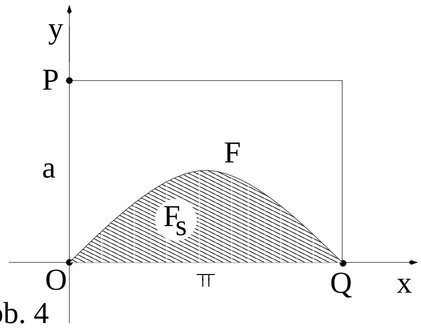


Abb. 4

Aus dieser Abb.4 folgt auch, dass für die Anzahl F der gleichmöglichen Fälle die Fläche des Rechtecks mit $\pi = |OQ|$ als Grundlinie und $a = |OP|$ als Höhe gilt, d.h. $F = a\pi$. Also ist die geometrische Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{F_s}{F}.$$

Nun mussten wir noch die F_s berechnen. Das ging sehr locker mit Hilfe des Integrals:

$$F_s = \int_0^\pi \frac{a}{2} \cdot \sin x \cdot dx = -\frac{a}{2} \cdot \cos x \Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{a}{2} \cdot \cos \pi - (-\frac{a}{2} \cdot \cos 0) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

Damit ist dann

$$p = \frac{F_s}{F} = \frac{a}{a\pi} = \frac{1}{\pi}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun: $\frac{N_s}{N} = \frac{1}{\pi}$ und somit $\frac{N}{N_s} = \pi$.
Zugegeben, wir hatten auch jetzt noch ein gewisses Unbehagen, haben wir doch – weil wir die Integralrechnung noch nicht kannten – einfach hingenommen, dass die Fläche $F_s = a$ ist. Unsere Bedenken wurden erst Jahre später mit dem Kennenlernen der Integralrechnung völlig ausgeräumt.

Anmerkung: Buffon war kein Hanswurst oder Hofnarr und auch kein Sänger von komischen Opern, sondern ein ehrsamer, französischer Graf, der als berühmter Forscher einen Ehrenplatz in der Geschichte der Naturwissenschaften hat. George Louis Leclerc, Graf von Buffon (1707-1788) ist der Autor von 40 Bänden „Allgemeine und spezielle Naturgeschichte“, in der er die Lebensweise der Tiere in den Vordergrund stellte. Er entwarf auch eine Erdgeschichte. Aber auch bei der Entstehung der Wahrscheinlichkeiteslehre war er mit dabei.

2003 2003 **Die Seite zum Neuen Jahr** 2003 2003

von Hartwig Fuchs

Drei in 2003

Nach einigem Rechnen ist es mir gelungen, die Zahl 2003 nur mit Hilfe der Ziffer 3 und den gewöhnlichen arithmetischen Operationen darzustellen

$$2003 = 3 + 3 + 3^3(3 \cdot 3^3 - (3+3)) - 3^3 - 3 : 3.$$

Dabei wurde die Ziffer 3 dreizehn Mal in der Zerlegung von 2003 verwendet.
Wem gelingt es, eine Darstellung von 2003 zu finden, die mit weniger als 13 Ziffern 3 auskommt?

Ziffern

Wie heißen die beiden letzten Ziffern von 2003^{2003}?

Quersumme

Wie heißt die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 2003?

Noch einmal die Quersumme

Wie heißt die größte natürliche Zahl, in deren Zifferndarstellung nur die Ziffern 2 und 3 vorkommen und die die Quersumme 2003 besitzt?

Summen

Eine Menge von 2003 reellen Zahlen ist gegeben. Die Summe von jeweils 100 von ihnen ist stets positiv.
Begründe, dass dann die Summe aller 2003 Zahlen ebenfalls positiv ist.

Hänschen behauptet...

2001	2014	1997 + x	2010	1993
1994 + x	**2002**	2015	1998	2006
2007	1995	**2003**	2011	1999 + x
2000	2008	1991 +x	**2004**	2012
2013	1996 + x	2009	1992	**2005**

Hänschen behauptet:
Wie auch immer man die Zahl x wählt, stets stimmen alle Zeilensummen und Spaltensummen überein.
Hat Hänschen Recht?

Die MONOID−Redaktion wünscht
allen unseren Lesern und Lösern
ein frohes und erfolgreiches

2003 !

Die Linealvermeidung

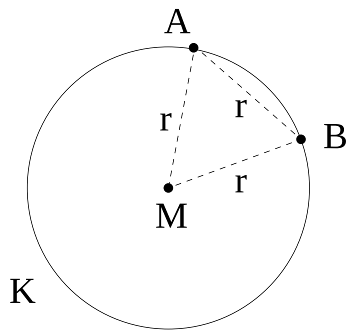
Ein kleiner Ausflug in die geometrischen Konstruktionen (II)

von Hartwig Fuchs

Wir haben gesehen, wie die Zirkel-Vermeider die Bedeutung des Zirkels bei geometrischen Konstruktionen im Laufe der Jahrhunderte mehr und mehr zurückgedrängt haben.
Daher ist es wohl zu erwarten, dass es bei den Lineal-Vermeidern eine ähnlich erfolgreiche Entwicklung gegeben hat.

Die früheste Schrift, in der Konstruktionen ohne Lineal behandelt werden, stammt von G.Mohr (1640 - 1697). In seinem kleinen, unscheinbaren Buch "Euclides Danicus" aus dem Jahre 1672 erreichte er – der wahrscheinlich keinen Vorgänger hatte – auf Anhieb das bestmögliche Resultat, indem er bewies:
Jede mit Zirkel und Lineal lösbare Konstruktionsaufgabe ist auch allein mit dem Zirkel lösbar.
Da man Geraden nicht mit einem Zirkel zeichnen kann, wird bei Zirkel-Konstruktionen angenommen, dass eine Gerade dann gegeben ist, wenn man 2 Punkte von ihr als Schnittpunkte von Kreisen konstruieren kann.

Beispiel 5:
Konstruiere den Mittelpunkt M eines gegebenen Kreises K mit Radius r allein mit dem Zirkel.

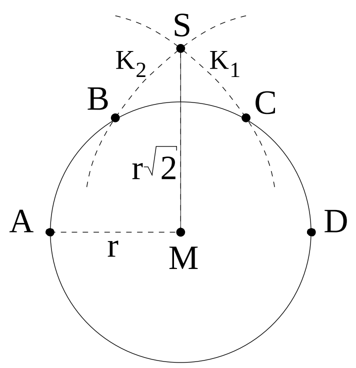


1. Zeichne einen Kreis vom Radius r, dessen Mittelpunkt A beliebig auf K gewählt sei. Dieser Kreis schneidet K in B.

2. Zeichne 2 Kreise vom Radius r, deren Mittelpunkte A und B sind.

   Diese Kreise schneiden sich in M – und M ist offenbar der gesuchte Mittelpunkt von K.

Beispiel 6:
Gegeben seien zwei Punkte A, M vom Abstand r.
Man konstruiere mit dem Zirkel
$a)$ eine Strecke der Länge $2r$,
$b)$ eine Strecke der Länge $r\sqrt{2}$.



1. Zeichne einen Kreis um M durch A mit dem Radius r.

2. Konstruiere bei A beginnend der Reihe nach die Punkte B, C, D mit der Zirkelöffnung r; somit gilt $|AB| = |BC| = |CD| = r$.

Lösung zu a):
Da D auf der Verlängerung von AM liegt, hat die Strecke AD wegen $|AM| = |MD| = r$ die Länge $2r$.

Lösung zu b):
Zeichne einen Kreis K_1 um A und einen Kreis K_2 um D, beide Kreise mit Radius $|AC|$.
K_1 und K_2 schneiden sich in S.
Die Strecke MS hat die Länge $r\sqrt{2}$.

Beweis:
Im Halbkreis des Thales über AD ist das Dreieck ADC rechtwinklig; deshalb ist $|AC|^2 = |AD|^2 - |DC|^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$.
Im rechtwinkligen Dreieck AMS gilt wegen $|AS|^2 = |AC|^2 = 3r^2$ offenbar $|MS|^2 = |AS|^2 - |AM|^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$; also ist $|MS| = r\sqrt{2}$.

G. Mohrs mathematisches Werk wurde von seiner Mit- und Nachwelt entweder vollständig übersehen oder aber vergessen.
Und so konnte es geschehen, dass L. Mascheroni (1750 - 1800) – ohne von seinem Vorgänger zu wissen – dessen Ergebnisse erneut entdeckte und in seinem 1797 erschienenen Buch "Geometria del compasso" (Geometrie des Zirkels) noch einmal bewies. Mit diesem Buch wurde Mascheroni schnell in weiten Kreisen seiner Fachkollegen sehr bekannt und diskutiert; galt er doch damals und noch lange Zeit danach als der erste, der die Nur-Zirkel-Konstruktionen (die Mohr schon vor ihm hatte) entdeckte und beschrieb.
Erst 1928 konnten durch einen zufälligen Fund von Mohrs Büchlein "Euclides Danicus" die historischen Fakten in die richtige Reihenfolge gebracht werden.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal heute

Hat man eine komplizierte geometrische Figur mit viel Akribie zu Papier gebracht und entdeckt dann einen Fehler in den Ausgangsgrößen (wurde z.B. eine Strecke zu kurz bemessen), so kann man, von vorne beginnend, alles noch einmal konstruieren.

Solche Veränderungen sind heute viel leichter nachträglich zu erreichen, wenn dynamische Geometrie-Software (DGS) wie EUKLID, Cabri Géomètre, Cinderella, Geonet u.a. benutzt wird. Diese Computersysteme simulieren Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, indem sie zwar im Hintergrund analytisch rechnen, im Vordergrund aber wie in der synthetischen Geometrie den Benutzer Figuren aus Geraden und Kreisen aufbauen lassen. Damit wird es möglich, durch Veränderung einer Ausgangsgröße, z.B. einer Strecke, die gesamte nachfolgende Figur zu verändern.

Zum Beispiel kann ein Dreieck nach Vorgabe eines Vektors v parallel verschoben werden. Wird anschließend v nach Größe und Richtung verändert, so wandert das verschobene Dreieck – wie von Geisterhand bewegt – mit.

(EK)

Wer forscht mit?

Auf Seite 11 dieses Hefts wird über den Wettbewerbserfolg des Fibonacci berichtet, der die Aufgabe der kaiserlichen Hofmathematiker löste, eine Quadratzahl zu finden, die bei Addition und Subtraktion von 5 wieder in eine Quadratzahl übergeht. Wie mochte Fibonacci wohl auf die Lösung $\left(\frac{41}{12}\right)^2$ gekommen sein? Vielleicht folgendermaßen: Aus

$$(*) \qquad x^2 + 5 = u^2 \qquad \text{und} \qquad x^2 - 5 = v^2$$

folgt $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v) = 10$. Jetzt kommt der Clou: 144 ist einerseits 12^2 und andrerseits $8 \cdot 18$, also ist $10 = \dfrac{80 \cdot 18}{12^2}$. Setzen wir $u + v = \dfrac{80}{12}$ und $u - v = \dfrac{18}{12}$, erhalten wir $u = \dfrac{49}{12}$, $v = \dfrac{31}{12}$ und $x = \dfrac{41}{12}$.

Jetzt sind die MONOID-Leser gefordert weiterzumachen!

- Wer findet weitere Lösungen der beiden Gleichungen $(*)$ in rationalen Zahlen x, u, v?
- Wer findet sogar alle rationalen Lösungen von $(*)$?
- Ersetze die Zahl 5 durch eine andere natürliche Zahl und suche erneut nach Lösungen.
- Für welche Ersetzungen der Zahl 5 durch eine andere natürliche Zahl gibt es sogar ganzzahlige Lösungen?
- Welche Verallgemeinerungen fallen dir noch ein? (VB)

Lösungen der mathematischen Entdeckungen aus Monoid 71

Zahlenspielereien

a) Wähle zwei natürliche Zahlen, die sich um 2 unterscheiden, multipliziere sie miteinander und addiere 1. Das Ergebnis der Rechnung ist stets eine Quadratzahl.
Kannst du das begründen?

b) Wähle eine Quadratzahl, subtrahiere bzw. addiere 1, multipliziere die beiden so entstandenen Zahlen miteinander und addiere 1.
Welche besondere Sorte von Zahlen erhältst du?

c) Wähle drei aufeinander folgende natürliche Zahlen, multipliziere sie miteinander und addiere dazu die mittlere der drei Zahlen.
Welche besondere Sorte von Zahlen erhältst du so jeweils? (H.F.)

Lösung:

a) $(n-1)(n+1)+1 = n^2$ oder $n(n+2)+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$
oder $(n-2)n+1 = n^2-2n+1 = (n-1)^2$

b) $(n^2-1)(n^2+1)+1 = n^4$

c) $(n-1)n(n+1)+n = n^3$ oder $n(n+1)(n+2)+n+1 = (n+1)(n^2+2n+1)$
$= (n+1)(n+1)^2 = (n+1)^3$

Große Primzahlen und schnelle Algorithmen

von Valentin Blomer

Wie jedermann sicher weiß, wird eine natürliche Zahl Primzahl genannt, wenn sie genau zwei Teiler besitzt, nämlich 1 und sich selbst. Primzahlen sind also etwa 3, 7, 131, keine dagegen sind 15, 40 und 1 - letztere, weil sie ja nur einen Teiler besitzt. Schon in der Antike hat man Primzahlen als die multiplikativen Bausteine der Zahlen erkannt, denn die Griechen wussten bereits:

Satz 1 *Jede natürliche Zahl lässt sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) auf genau eine Art als Produkt von Primzahlen schreiben.*

Im MONOID-Heft 70, Seite 6, ist erklärt, wie man den Satz durch vollständige Induktion beweist, und eigentlich ist er ja auch völlig klar: Jede Zahl lässt sich in Primfaktoren zerlegen, etwa $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ oder $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, und das ist auch eindeutig: 21 ist nicht gleichzeitig $3 \cdot 7$ und $2 \cdot 11$.

Ist der Satz wirklich klar? Betrachten wir für den Moment nur alle geraden Zahlen, also die Menge $G = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Auch in G können wir von Teilbarkeit sprechen, etwa $2 \mid 8$, denn $2 \cdot 4 = 8$, und wir nennen eine Zahl $p \in G$ vernünftigerweise Primzahl, wenn sie außer sich selbst keinen Teiler aus G besitzt. Dann sind 2, 6 und 10 - allgemein alle nicht durch 4 teilbare Zahlen n - Primzahlen. Warum? Gäbe es eine Zerlegung $n = pq$ mit $p, q \in G$, so sind p und q beide gerade, also n durch 4 teilbar, und das war ja gerade ausgeschlossen. Die Zahl 60 hat deshalb in G die beiden *verschiedenen* Primfaktor-Zerlegungen $2 \cdot 30$ und $6 \cdot 10$, hier gilt also *nicht* die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!

Es lohnt sich also schon, Satz 1 zu beweisen, und man weiß dann, dass solche Phänomene in der Menge aller natürlichen Zahlen nicht auftreten. Satz 1 zeigt, dass Primzahlen zwei widersprüchlichen Forderungen genügen müssen:

- Es darf nicht zu wenig Primzahlen geben, um sicherzustellen, dass jede Zahl eine Primfaktorzerlegung besitzt.
- Es darf nicht zu viele Primzahlen geben, um sicherzustellen, dass diese Primfaktorzerlegung eindeutig ist.

Über die Primzahlen, die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen, möchte man jetzt natürlich möglichst viel wissen, zum Beispiel:

- Wie kann ich einer Zahl ansehen, ob sie eine Primzahl ist? Dies ist - wie viele sicher wissen - für die Kryptographie und damit sozusagen im täglichen Leben von großem Interesse.
- Wie sieht die Verteilung der Primzahlen in der Menge aller natürlichen Zahlen aus? Hier kommen statistische Ideen ins Spiel: Wie groß ist zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, aus einem großen Sack, der alle ganzen Zahlen eines Intervalls $[N, N + M]$ enthält, eine Primzahl zu ziehen. Auch dies ist für inner- und außermathematische Fragen von großem Interesse.

- Kommen spezielle Muster vor? Gibt es zum Bespiel unendlich viele *Primzahlzwillinge*, d.h. Primzahlen im Abstand 2? Lässt sich jede gerade Zahl ≥ 4 als Summe zweier Primzahlen schreiben (Goldbach-Problem)?

Auf diese Fragen wollen wir versuchen, Antworten zu geben. Wir werden nicht alle Probleme lösen können, denn die Primzahlen geben ihre Geheimnisse nicht so einfach preis, und gerade ihr arithmetisches Verhalten scheint alles andere als regelmäßig zu sein.

Fangen wir mit der ersten Frage an: Wie kann ich einer Zahl ansehen, ob sie eine Primzahl ist? Es zeigt sich, dass es viel einfacher ist, einer Zahl anzusehen, dass sie *keine* Primzahl ist, also zusammengesetzt. Wenn man einer Zahl aus genügend vielen Blickwinkeln nicht ansehen konnte, dass sie zusammengesetzt ist, dann wird es sich wohl um eine Primzahl handeln. Will man zum Beispiel 131 untersuchen und stellt bei genügend vielen Probedivisionen (nämlich durch 2, 3, 5, 7 und 11) fest, dass immer ein Rest entsteht, dann weiß man, dass 131 eine Primzahl ist. Die Sache mit den Probedivisionen wird natürlich bei 100-stelligen Zahlen etwas mühsam und bräuchte selbst bei vorsichtiger Schätzung auf einem Supercomputer mehr als 10^{25} Jahre. Wenn man nicht so viel Zeit hat, muss man sich etwas Besseres einfallen lassen. Ein scheinbar handliches Kriterium liefert der Satz von Wilson:

Satz 2 *Eine natürliche Zahl n ist* genau dann *eine Primzahl, wenn die Zahl* $(n-1)!+1$ *durch n teilbar ist.*

Wer mag, kann zum Beispiel nachrechnen, dass die Division für $n = 13$ tatsächlich aufgeht, für $n = 14$ aber den Rest 1 lässt. Von theoretischem Standpunkt ist Satz 2 sehr interessant, praktisch allerdings völlig unbrauchbar, denn für ein 100-stelliges n müssen 10^{100} Multiplikationen zur Berechnung von $(n-1)!$ ausgeführt werden.

Meistens wird folgender Algorithmus (nach Rabin und Miller) angewandt, um zu testen, ob eine vorgegebene ungerade Zahl n prim ist:

- Wähle eine beliebige natürliche Zahl $a > 1$, die teilerfremd zu n ist.
- Schreibe $n-1 = 2^s t$ mit ungeradem t. Das geht auf einem Computer schnell, denn man muss höchstens logarithmisch viele Divisionen durch 2 ausführen.
- Berechne a^t mod n. Ist das Ergebnis 1 oder $n-1$, so besteht n den Test, ansonsten berechne der Reihe nach $a^{2t}, a^{4t}, a^{8t}, \ldots, a^{2^s t}$ mod n. Dies ist ein fortgesetztes Quadrieren mod n, was ebenfalls schnell geht. Taucht dabei irgendwann als Rest $n-1$ auf, so besteht n den Test ebenfalls, ist das nicht der Fall, besteht n den Test nicht.

Wir wollen nun zeigen, dass jede ungerade Primzahl p den Test besteht. Weil a zu p teilerfremd ist, gilt nach dem kleinen Satz von Fermat (siehe z.B. MONOID 67, Seite 14)

$$a^{2^s t} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{1.1}$$

d.h. $a^{2^s t}$ lässt bei Division durch p Rest 1. Welchen Rest r lässt nun $a^{2^{s-1}t}$ bei Division durch p, d.h. für welches $0 \leq r \leq p-1$ wird die Gleichung $a^{2^{s-1}t} = wp + r$ erfüllt? Quadrieren liefert

$$a^{2^s t} = w^2 p^2 + 2wrp + r^2.$$

Nach (1.1) ist aber die linke Seite von der Form $\tilde{w}p + 1$, also erhalten wir

$$r^2 - 1 = (\tilde{w} - w^2 p - 2wr)p,$$

d.h. $p \mid r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$. Weil p prim ist, muss p einen der beiden Faktoren $r-1$, $r+1$ teilen. Wegen $0 \leq r \leq p-1$ ist also entweder $r = 1$ oder $r = p-1$. Ist $r = 1$, so folgt mit dem gleichen Schluss, dass auch $a^{2^{s-2}t}$ bei Division durch p Rest 1 oder $p-1$ lässt. So fortfahrend sehen wir, dass die erste von 1 *verschiedene* Zahl unter den Resten $a^{2^s t}, a^{2^{s-1}t}, \ldots, a^t$ mod p die Zahl $p-1$ sein muss, und damit besteht p den Test.
Ich würde jetzt gerne beweisen, dass eine zusammengesetzte Zahl den Test stets nicht besteht, doch das stimmt leider nicht. Man kann jedoch folgendes zeigen (mittelschwer):
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ungerade zusammengesetzte *Zahl für einen gewissen Parameter a den Test besteht, ist weniger als 25 Prozent.*
Wie man beim Sieb des Eratosthenes genügend viele Probedivisionen machen muss, so sind hier genügend viele Testläufe mit verscheidenen Parametern a notwendig. Testet man etwa für 50 Werte von a, so ist die Fehlerwahrscheinlichkeit kleiner als $(1/4)^{50} < 10^{-30}$, das ist bereits jenseits der Grenze, die man sich noch vernünftigerweise vorstellen kann. Man kann hier die Güte der Sicherheit vorschreiben. Wer zum Beispiel eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 10^{-100} nicht überschreiten will, muss eben 170 Testläufe durchführen. Besteht die Zahl *einen* dieser Testläufe nicht, ist sie sicher zusammengesetzt, ansonsten kann man sie getrost als prim annehmen. Es spricht vieles dafür, dass n sogar *sicher* prim ist, wenn es $2\log^2 n$ Testläufe besteht. Doch ist diese Vermutung noch nicht bewiesen, und damit steht die Suche nach einem ganz sicheren und gleichzeitig effizienten Primzahltest noch aus...

Fibonacci und die Quadratzahlen

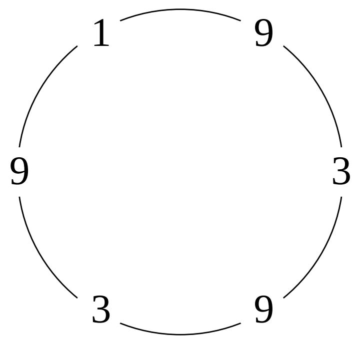
Zur Zeit Leonardos von Pisa, genannt Fibonacci (ital. Mathematiker am Hof Kaiser Friedrichs II, lebte etwa 1180 bis 1250), wurden bereits mathematische Wettbewerbe ausgerufen, bei denen es darum ging, schnelle, kurze und schöne Lösungen zu verschiedenen Aufgaben zu finden. Fibonacci nahm mit großem Erfolg an solchen Turnieren teil.
Einmal wurde ihm auf einem Turnier von dem Philosophen des Kaisers Friedrich II., dem Magister Johannes von Palermo, im Beisein des Kaisers das folgende Problem vorgelegt:
Man finde eine Quadratzahl, die jeweils in eine Quadratzahl übergeht, wenn man von ihr die Zahl 5 *subtrahiert oder addiert.*
Die Hofmathematiker des Kaisers hofften, damit eine so schwierige Frage gestellt zu haben, dass keiner von den Wettbewerbsteilnehmern eine Lösung findet.
Doch Fibonacci fand auf Anhieb, dass die Zahl $\frac{1681}{144} = (\frac{41}{12})^2$ die geforderten Bedingungen erfüllt. In der Tat gilt:
$(\frac{41}{12})^2 - 5 = \frac{1681}{144} - 5 = \frac{1681 - 720}{144} = \frac{961}{144} = (\frac{31}{12})^2$ und

$(\frac{41}{12})^2 + 5 = \frac{1681}{144} + 5 = \frac{1681 + 720}{144} = \frac{2401}{144} = (\frac{49}{12})^2$. (MM)

Die Seite für den Computer-Fan

In dem Beitrag von Valentin Blomer „Große Primzahlen und schnelle Algorithmen“ geht es um Verfahren, mit denen man eine vorgelegte natürliche Zahl daraufhin untersuchen kann, ob sie Primzahl ist oder nicht. Natürlich erleichtert der Computer diese Arbeit sehr. Darum folgen hier zwei Fragestellungen, bei denen die Computer-Fans ihr Geschick einbringen können.

Primzahlen auf einem Kreis



Überprüfe die Behauptung:
Wenn man – mit einer beliebigen Ziffer beginnend – die 6 Ziffern der Figur in beliebiger Richtung (also gegen oder im Uhrzeigersinn liest), dann ergibt sich jedesmal eine 6-ziffrige Primzahl. (H.F.)

Primzahlen in einer Zahlenfolge
Man untersuche, ob es in der Zahlenfolge

$$1, 12, 123, 1234, 12345, \ldots, 1234567689, 1234567891, 12345678912, \ldots$$

Primzahlen gibt. (H.F.)

Hinweis:
Auf die im MONOID-Heft Nr.70 erfragten Programme (euklidischer Algorithmus, Sieb des Erathostenes, Berechnung des Ostertermins nach Gauß) wird aus Platzgründen in nachfolgenden MONOID-Heften – und dann in der gebührenden Ausführlichkeit – eingegangen.

Hinweis: Die Aufgaben für den Computer-Fan sind meist ohne Bezug auf einen speziellen Rechner oder ein spezielles Programm oder eine spezielle Programmiersprache gestellt. Ihr könnt selbst entscheiden, für welche Teile es sich lohnt, z.B. einen Taschenrechner oder ein Computeralgebra-System (z.B. DERIVE) einzusetzen oder ein eigenes kleines Programm (z.B. in Pascal) zu schreiben.
Ihr könnt Eure Lösungen auch einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`.
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auch Teile eingesandter Lösungen veröffentlichen können.

Bilder zeichnen mit Funktionsgraphen

von Ekkehard Kroll

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 71

Vier Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Euro und Cents

Katja geht für ihre Mutter zum Einkaufen. Sie kauft Waren im Wert von x Cent ein, wobei der Betrag zwischen 1 Cent und 499 Cent liegt ($1 \leq x \leq 499$). Katja bezahlt mit einem 5 Euro-Schein.

a) Wieviele Münzen bekommt Katja von der Verkäuferin an der Kasse zurück, wenn bei jedem Betrag möglichst wenig Geldstücke herausgegeben werden?

b) Wieviele Münzen braucht die Kassiererin, um auf jeden Betrag zwischen 1 Cent und 499 Cent herausgeben zu können? (WJB)

Lösung:

zu a): Von den 1 Cent-, 5 Cent-, 10 Cent-, 50 Cent- und 1 Euro-Münzen braucht die Kassiererin jeweils höchstens eine, da sie zwei davon durch eine Münze mit dem doppelten Wert ersetzen kann. Von den 2 Cent-Münzen braucht sie höchstens zwei, da sie drei davon durch eine 5 Cent- und eine 1 Cent-Münze ersetzen kann. Sie braucht jedoch nicht gleichzeitig zwei 2 Cent- und eine 1 Cent-Münze, da eine 5 Cent-Münze dies ersetzt. Ähnliches gilt für die 10 Cent- und 20 Cent-Münzen bzw. für die 1 Euro- und 2 Euro-Münzen.

Schließlich braucht sie von den 2 Euro-Münzen höchstens 2 Stück, von den 20 Cent- und 10 Cent-Münzen höchstens 2 Stück und von den 1 Cent- und 2 Cent-Münzen ebenfalls höchstens 2 Stück.

Insgesamt sind es also 8 Münzen, die Katja höchstens zurück bekommt.

(Wenn Katja z.B. für $1,12$ € einkauft, braucht die Verkäuferin zur Rückgabe von $3,88$ € auch tatsächlich 8 Münzen.)

zu b): Mit einer 1 Cent-Münze und zweimal 2 Cent-Münzen kann man jeden Betrag bis zu 5 Cent geben, eine zusätzliche 5 Cent-Münze bringt uns bis zu 10 Cent, eine zusätzliche 10 Cent-Münze bis zu 20 Cent, eine weitere 10 Cent-Münze bis zu 30 Cent, dazu eine 20 Cent-Münze bis zu 50 Cent, eine 50 Cent-Münze zusätzlich bis zu 100 Cent, eine Euro-Münze bis zu 200 Cent, eine weitere bis zu 300 Cent und dazu eine 2 Euro-Münze bis zu 500 Cent. Der Gesamtbetrag dieser 11 Münzen ist 5 Euro.

Damit braucht die Kassiererin 11 Münzen, um auf jeden Betrag zurückgeben zu können.

Beim Obsthändler

Eine Balkenwaage ist im Gleichgewicht, wenn eine Orange und ein Apfel auf der einen sowie eine Banane auf der anderen Seite liegt.
Ferner sind Orange und Banane auf der einen Seite und mit sechs Birnen auf der anderen Seite im Gleichgewicht, und zwei Birnen und ein Apfel zusammen halten einer Orange die Waage.

Wie viele Äpfel wiegen eine Banane auf?

(Gefunden auf der Internetseite von SPEKTRUM)

Lösung:

Für die Gewichte der verschiedenen Früchte gilt in Gleichungsform:

$$\begin{array}{llllllll} 1 & \text{Orange} & + & 1 & \text{Apfel} & = & 1 & \text{Banane} \quad I \\ 1 & \text{Orange} & + & 1 & \text{Banane} & = & 6 & \text{Birnen} \quad II \\ 2 & \text{Birnen} & + & 1 & \text{Apfel} & = & 1 & \text{Orange} \quad III \end{array}$$

Die Einsetzungsmethode liefert nun:

$$\left.\begin{array}{lllllll} III & \text{in} & I & : & 2\text{ Birnen} + 2\text{ Äpfel} & = & 1\text{ Banane} \\ III & \text{in} & II & : & 4\text{ Birnen} - 1\text{ Apfel} & = & 1\text{ Banane} \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\text{ Birnen } = 3\text{ Äpfel}$$

Daraus ergibt sich, dass 5 Äpfel eine Banane aufwiegen.

Steuern mindern das Einkommen

Durch ein Dekret des Diktators von Arataxien werden die Einkommen aller Bürger um 10% erhöht. Da sich dadurch (z.B. wegen der erhöhten Gehälter der Staatsbediensteten) auch die Staatsausgaben erhöhen, steigert der Finanzminister im Gegenzug die Steuern um 8% von bisher 20% auf 28% des Einkommens.
Obwohl die Steigerung der Steuern (8%) geringer ist, als die der Einkommen (10%) jammern die Bürger, es gehe ihnen schlechter als zuvor. *Haben sie recht?* (WJB)

Lösung:

Bezeichne E das Einkommen vor den Erlassen.
Zieht man von E den damals aktuellen Steuersatz von 20% ab, so bleiben 80% von E als "verfügbares Einkommen". Gemessen an E hat der Bürger nach der Einkommenserhöhung (10%) 110% von E als neues Einkommen zur Verfügung. Davon muss er jedoch auch die erhöhte Steuer (28%) abziehen. Es bleiben ihm also nur 72% von dem <u>neuen</u> Einkommen. 72% von 110% sind $79{,}2\%$.
Hatte vor den Erlassen jeder Bürger 80% von E als "verfügbares Einkommen", so sind es hinterher nur noch $79{,}2\%$ von E. Die Bürger jammern also zu Recht.

Ein kompliziertes Testament

Ein Bauer, der Schafe, Rinder und Schweine besitzt, schreibt an seinem Lebensabend sein Testament. Dabei teilt er seine Tiere unter seinen 5 Kindern auf. Die Hälfte seiner Herde soll an seinen ältesten Sohn gehen, die zwei Töchter erhalten, je nach Alter ein Viertel bzw. ein Fünftel der Herde. Die Zwillinge bekommen je 12 Schafe, 10 Rinder und 9 Schweine.
Wie viele Schafe, Rinder und Schweine besitzt der Bauer?
Wie viele Tiere bekommen die drei Ältesten der Familie? (Felix Liebrich)

Lösung:

Auf beide Zwillinge zusammen entfällt $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ aller Tiere. Folglich gibt es $2 \cdot 20 = 40$ mal so viele Tiere, wie jeder Zwilling bekommt. Daher gilt:

Der Bauer besitzt 480 Schafe, 400 Rinder und 360 Schweine.
Der älteste Sohn erhält 240 Schafe, 200 Rinder und 180 Schweine.
Die ältere Tochter erhält 120 Schafe, 100 Rinder und 90 Schweine.
Die jüngere Tochter erhält 96 Schafe, 80 Rinder und 72 Schweine.

Gleichungspyramide

Dei Gleichungspyramide

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 11^2 &= 121 \\ 111^2 &= 12321 \\ 1\,111^2 &= 1234321 \end{aligned}$$

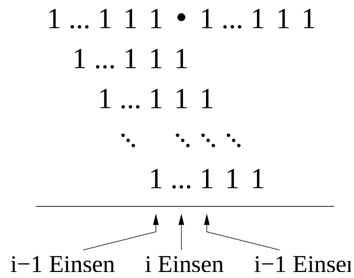
soll bis zum Quadrat von $111\,111\,111$ fortgesetzt werden.
Was fällt dir auf? Begründe deine Beobachtung!
Was passiert beim Quadrieren von $1\,111\,111\,111$*?*

Lösung:

Für $1 \le i \le 9$ gilt:

$$\underbrace{1\dots1^2}_{i-\text{ Einsen}} = 12\dots(i-1)i(i-1)\dots21$$

Der Grund liegt in der Art der Multiplikation beim Quadrieren:



Bei $i = 10$ gibt es hier einen Überlauf! Darum ist

$$1\,111\,111\,111^2 = 123\,456\,789\,00\,987\,654\,321.$$

Die verflixte 144

Der kleine Zahlentheoretiker Zahlfix schaut sich zum wiederholten Male die 144 an. Er hat früher immer bewundert, wie viele Teiler diese Zahl hat, in wie viele Faktoren man sie zerlegen kann und so weiter und so fort.
Nun stellt er etwas Neues fest. 144 ist nicht nur selbst eine dreistellige Quadratzahl, liest man die Zahl rückwärts, also 441, so ensteht wiederum eine dreistellige Quadratzahl. Er überlegt sich, ob es noch weitere dreistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.
Kannst du ihm helfen und weitere solcher Zahlen finden? (W. Kraft)

Lösung:

Wir lösen die Aufgabe durch Probieren. Es gibt ja schließlich nur 22 dreistellige Quadratzahlen. Diese stellen wir alle zusammen und bilden jeweils die umgedrehte Zahl:

Quadratzahl	100	**121**	**144**	**169**	196	225	256	289	324	361	400
umgedrehte Quadratzahl	001	**121**	**441**	**961**	691	522	652	982	423	163	004

Quadratzahl	**441**	**484**	529	576	625	**676**	729	784	841	900	**961**
umgedrehte Quadratzahl	**144**	**484**	925	675	526	**676**	927	487	184	009	**169**

Man sieht, die dreistelligen Quadratzahlen $121, 144, 169, 441, 484, 676$ und 961 haben die vorgeschriebene Eigenschaft. (Die $100, 400, 900$ sollten hier nicht verwendet werden, weil sie rückwärts gelesen eigentlich einstellig sind.)

Die dreistelligen Quadratzahlen $121, 484, 676$ sind Sonderfälle, da sie sich rückwärts gelesen nicht verändern.
Insofern hat außer dem Paar $(144; 441)$ nur noch das Paar $(169; 961)$ die exakt gleiche von Zahlfix an 144 bewunderte Besonderheit.

Die 3 Enkel einer Mathematikerin
Die nicht mehr ganz so junge Mathematikerin Matha Alda erzählt oft von ihren 3 Enkeln Archie, Babsy und Cindy, für die nicht-mathematische Umwelt leider oft in Rätseln.
Ihre Story von gestern war so:
Archie und Babsy sind zusammen 4 Jahre alt.
Babsy und Cindy sind zusammen 5 Jahre alt.
Archie und Cindy sind zusammen 3 Jahre alt.
Wie alt sind Archie, Babsy und Cindy denn nun wirklich? (W. Kraft)

Lösung:
für Schüler(innen) der Orientierungsstufe:
Wir vermuten aus den Angaben, dass Archie der jüngste Enkel ist. Wir stellen eine Tabelle auf, beginnen bei Archie mit 0 Jahren, berechnen das Alter von Babsy und Cindy mit Hilfe der beiden Aussagen und überprüfen, ob dann die dritte zutrifft:

A(rchie)	B(absy)	C(indy)	$A + C$
0	4	1	1
1	**3**	**2**	**3**
2	2	3	5

Wir sehen eine Lösung für $\mathbf{A = 1}, \mathbf{B = 3},$ und $\mathbf{C = 2}$.
Außerdem erkennen wir, dass es weitere Lösungen nicht geben kann, da die Summe $A + C$ immer größer wird, wenn Archie älter wird.

für Schüler(innen) ab der 7. Klasse:
Die 3 Aussagen übersetzen wir in 3 Gleichungen, nämlich:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & A + B & = & 4, \\ (2) & B + C & = & 5, \\ (3) & A + C & = & 3. \end{array}$$

Aus (1) ergibt sich $A = 4 - B$, aus (2) folgt $C = 5 - B$. Setzen wir diese Terme in (3) ein so gilt:

$$4 - B + 5 - B = 3 \Rightarrow 6 = 2 \cdot B \Rightarrow \mathbf{B = 3} \Rightarrow \mathbf{A = 1} \Rightarrow \mathbf{C = 2}.$$

Paradoxien

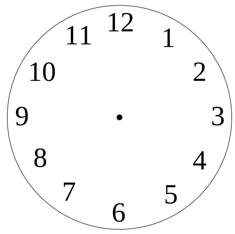
Paradox scheint es, wenn ein rechter Winkel linksorientiert ist.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Die Uhr

Zeichne 2 Strecken mit den Endpunkten auf dem Kreis so in die Uhr ein, dass die Summe der Zahlen in jedem Teil der Uhr gleich ist. (Judith Reinhardt)



Fällt Freddy?

a) Freddy soll eine Glühbirne einschrauben. Er stellt fest, dass jeder Stuhl, auf den er sich dazu stellen will, wackelt. Dann findet er einen dreibeinigen Hocker. Dieser wackelt nicht. – *Warum ist das so?*

b) Daraus, dass dreibeinige Hocker nicht wackeln können, schließt Freddy, dass er sich auf den Hocker stellen kann ohne das Risiko, dass dieser kippt und er fällt. *Ist dieser Schluss richtig?* (WJB)

Schwierige Babys

Im Zoo wurden vor kurzem 9 Giraffen-Babys geboren. Sie sitzen noch in einem gemeinsamen Quadrat als Gehege. (3 in einer Reihe, 3 Reihen). Jedes soll aber sein eigenes, kleines Gehege erhalten. *Wie viele neue Quadrate muss man in das ursprüngliche Quadrat mindestens bauen, um für jede Giraffe ein eigenes Gehege zu schaffen?*

(Felix Liebrich)

Weitere Mathespielereien findest du auf der nächsten Seite.

Logisch? Logisch!

Ein Polizist hält einen Radfahrer an:
„Das kostet Sie aber was, mein Guter!“, sagt der Polizist.
„Sie haben ja gar keine Klingel am Rad. Das macht zehn Euro Strafe. Die Rückstrahler fehlen ja auch – das kostet nochmals zehn Euro.
Jetzt sehe ich, dass auch der Scheinwerfer vorne fehlt und ein Teil der Vorderbremse, macht nochmals 20 Euro!“
„Gucken Sie doch bitte mal schnell dort hinüber“, sagt der Radfahrer, „bei dem Fußgänger dort können Sie viel Kohle machen!“
„Wieso? “
„Da fehlt das ganze Fahrrad!“

(gefunden von H.F.)

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Kreisteilung

Zeichne einen Kreis vom Radius r um den Mittelpunkt M.

a) Kannst Du nun <u>allein mit dem Zirkel</u> die Fläche dieses Kreises in 6 gleich große Flächenstücke unterteilen?

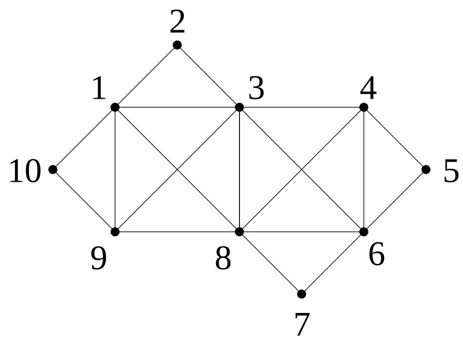
(Konstruktionsbeschreibung und Lösungsfigur angeben!)

b) Kannst Du allein mit dem Zirkel die Fläche dieses Kreises auch in 12 gleich große Flächenstücke zerlegen?

(Auch hier Konstruktionsbeschreibung und Lösungsfigur angeben!) (H.F.)

Eine schwierige Reise

Kannst du diese Figur mit einem Bleistift in eiem Zug (ohne Absetzen) nachzeichnen, ohne irgend eine Linie doppelt zu zeichnen? (Eckpunkte und Kreuzungspunkte dürfen mehrmals durchlaufen werden.) (H.F.)



In der Spielbank

Meine Arbeitskollegen meinten, Ernst Müller sollte kein schlechtes Beispiel geben, indem er sein Kind (verbotenerweise) mit in die Spielbank nimmt. Aber **Patricia ist kein Kind mehr**: Ein Jahr, bevor sie volljährig wurde, war ich dreimal so alt wie Patricia. Meine Frau ist drei Jahre jünger als ich und jetzt (2002) doppelt so alt, wie Patricia.

Wie alt bin ich? (WJB)

Honigbienen

Bei den Honigbienen entstehen die Königinnen und die Arbeiterinnen aus befruchteten Eiern, haben also zwei Eltern, eine Königin und eine Drohne. Die männlichen Drohnen entstehen aus unbefruchteten Eiern, haben also nur eine Mutter, keinen Vater.

a) Wie viele Großeltern, Urgroßeltern hat eine Drohne? Wie viele Vorfahren vor 5 Generationen?

b) Ist V_n die Anzahl der Vorfahren vor n Generationen, so lässt sich mit $V_0 = 1$ (die Drohne selbst), $V_1 = 1$ (ihre Mutter) die Anzahl V_{n+2} berechnen aus V_{n+1} und V_n. Wie ist dies möglich?

Anmerkung: Bei der Berechnung soll der ”Ahnenschwund“, – d.h. die Möglichkeit, dass mehrere Bienen einer Generation gleiche Vorfahren haben, – nicht berücksichtigt werden. (gefunden von WJB)

Bereits auf Seite 19 findest du weitere Mathespielereien.

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 789. Ernst Müller in Baden-Baden

Nach seinem hohen Gewinn in der Spielbank Wiesbaden (vgl. Monoid 72, Seite 19) leistet sich Ernst Müller einen Ausflug nach Baden-Baden, begleitet von seiner Tochter Patricia. Sie besuchen die dortige Spielbank mit einem Anfangskapital von je $10\,000$ Euro.
Herr Müller und Patricia setzen in jedem Spiel genau die Hälfte des Kapitals, das ihnen gerade zur Verfügung steht (im ersten Spiel also $5\,000$ Euro). Ernst Müller spielt wie in Wiesbaden ein Spiel, bei dem sich sein Einsatz verdreifacht. Patricia ist mutiger und spielt eine Variante, bei der zwar die Gewinnwahrscheinlichkeit geringer ist, aber im Gewinnfall der 5fache Einsatz ausbezahlt wird.
Nach jeweils drei Spielen haben Vater und Tochter zusammen $27\,500$ Euro. Wie oft hat Patricia gewonnen? (WJB)

Aufgabe 790.

Die Erde hat einen Umfang von $40\,000$ km. Ein Flugzeug kann Sprit für $20\,000$ km tanken. Es existiert nur ein Flughafen; Flugzeuge können untereinander in der Luft ohne Verlust Sprit austauschen und auch ohne Zeitverlust am Flughafen neuen Sprit tanken.
Wie viele Flugzeute benötigt man mindestens, damit ein Flugzeug die Erde ohne Zwischenlandung umrunden und auch alle Hilfsflugzeuge wieder den Flughafen erreichen kann. (gefunden von Kerstin Bauer)

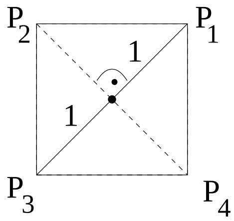
Aufgabe 791.

Der Vorstandschef eines großen Konzerns tritt am Ende des Jahres vor seine Mitarbeiter und sagt:
"Die Summe der Bilanzen an jeweils fünf aufeinanderfolgenden Monaten in diesem Jahr ist stets positiv!"
Können die Mitarbeiter daraus schließen, dass der Konzern in diesem Jahr Gewinn erwirtschaftet hat?
Wenn nein, wie hoch kann der Verlust höchstens sein?
Was wäre, wenn der Vorstandschef statt "aufeinanderfolgend" das Wort "beliebig" genommen hätte? (VB)

Aufgabe 792. Eine Aufgabe von C.F. Gauß

C.F. Gauß hat 1811 in seiner Arbeit "Summierung gewisser Reihen von besonderer Art" den folgenden geometrischen Sachverhalt mitgeteilt:
Für ein regelmäßiges n-Eck mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \dots, P_n$ und dem Umkreisradius der Länge 1 hat das Produkt der Längen aller Strecken $P_1P_2, P_1P_3, \dots, P_1P_n$ den Wert n.

Beispiel: $n = 4$

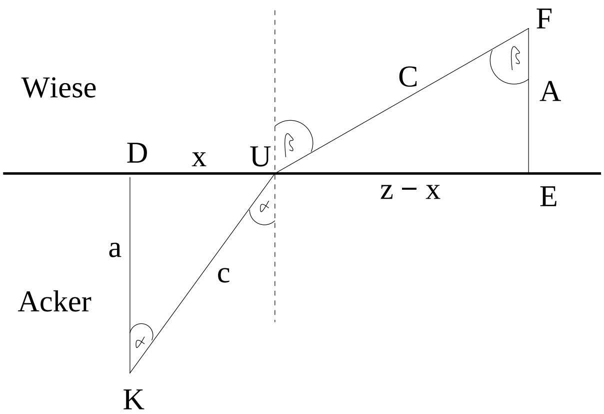


Im Quadrat $P_1P_2P_3P_4$ gilt:
$|P_1P_2| = \sqrt{2}$
$|P_1P_3| = 2$
$|P_1P_4| = \sqrt{2}$
Somit $|P_1P_2| \cdot |P_1P_3| \cdot |P_1P_4| = 4$.

Finde nun selbst Beweise für $n = 3$ (gleichseitiges Dreieck) und für $n = 6$ (regelmäßiges Sechseck).
Vielleicht findest du auch einen Beweis für $n = 5$? (H.F.)

Aufgabe 793. Karl klaut Kirschen

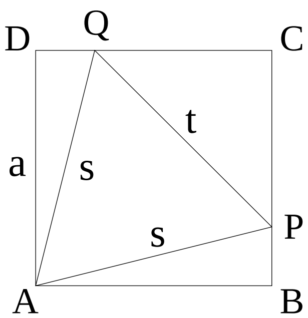
Kirschendieb Karl muss vom Kirschbaum K fliehen. Sein Fahrrad steht bei F. Auf dem Acker kommt er mit Geschwindigkeit v voran, auf der angrenzenden Wiese mit der doppelten Geschwindigkeit $2v$.



Wie muss er den Punkt U, d.h. die Winkel α bzw. β wählen, um sein Fahrrad *auf dem schnellsten Weg* zu erreichen?

(WJB)

Aufgabe 794. Dreieck im Quadrat



Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge a.
Behauptung B: Man kann in das Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so wie in der Figur (mit der Diagonale AC als Symmetrieachse) einzeichnen.
Hinweis: Verwende das Rückschluss-Verfahren aus dem Artikel „Der Rückschluss“, Seite 32-36, und gehe von der Annahme B sei wahr, also $s = t$, aus. (H.F.)

Aufgabe 795. Primzahlen-Folge

Man beweise die Behauptung
B: In der Folge $g_n = \sqrt{24n + 1}, n = 1, 2, 3, \ldots$, kommen alle Primzahlen ≥ 5 vor.
Hinweis: Man beachte, dass in der Folge $h_t = 6t \pm 1, t = 1, 2, 3, \ldots$ alle Primzahlen ≥ 5 enthalten sind.
Zur Lösung benutze man das Rückschluss-Verfahren aus dem Artikel „Der Rückschluss“, Seite 32-36.

(H.F.)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 71

Kl. 8-13

Aufgabe 782.
Zeige, dass für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$(*) \quad 2n^3 + 5n^2 + 2n - 1$ ist durch 8 teilbar. (H.F.)

Lösung:
Für eine ungerade Zahl n können wir $n = 2m + 1$ schreiben und damit den Ausdruck in $(*)$ umformen zu:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot (2m+1)^3 + 5 \cdot (2m+1)^2 + 2 \cdot (2m+1) - 1 &=\\
&2 \cdot (8m^3 + 12m^2 + 6m + 1) + 5 \cdot (4m^2 + 4m + 1) + 4m + 1 &=\\
&16m^3 + 44m^2 + 36m + 8 &=\\
&(16m^3 + 40m^2 + 32m + 8) + (4m^2 + 4m).
\end{aligned}$$

Die erste Klammer ist offensichtlich ein Vielfaches von 8; für die zweite Klammer gilt: $4m^2 + 4m = 4m(m+1)$ und da $m(m+1)$ gerade ist, muss auch die zweite Klammer durch 8 teilbar sein.

Aufgabe 783.
Zeige: Aus $x + y + z = 2$ folgt $xy + xz + yz < 2$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. (H.F.)

Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{Aus} \quad & (x+y+z)^2 = 2^2\\
\text{folgt:} \quad & x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4\\
\text{und hieraus:} \quad & xy + xz + yz = 2 - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad < 2.
\end{aligned}$$

(Der letzte Schluss gilt nur, weil $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ ist.)

Aufgabe 784.

Wie heißt die letzte Ziffer von $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}$? (H.F.)

Lösung:

$8^{7^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}$ ist eine gerade Zahl; alle Zahlen 9^2, 9^4, 9^6, $\ldots$ enden mit der Ziffer 1, also auch die gegebene Zahl $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}$.

Aufgabe 785. Wahr oder falsch?
Wenn man einen Winkel von $23°$ mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, dann ist es auch möglich, jeden Winkel mit einem ganzzahligen Winkelmaß mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.
Wurde hier richtig geschlossen? (H.F.)

Lösung:
Falls der $23°$-Winkel konstruierbar ist, dann kann man auch den $46°$-Winkel konstruieren (Winkelverdopplung).
Da der $45°$-Winkel konstruierbar ist (Halbierung des $90°$-Winkels), lässt sich auch der $(46° - 45°)$-Winkel, also der $1°$-Winkel konstruieren. Als Vielfache des $1°$-Winkels bekommt man dann jeden Winkel mit ganzzahligem Winkelmaß.

Also ist der Schluss selbst richtig, obwohl das Ergebnis – wie man weiß – nicht stimmt (z.B. kann ein $20°$-Winkel nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden). Das liegt natürlich daran, dass die Voraussetzung falsch ist.

Aufgabe 786.
Finde alle reellen Lösungen der Gleichung

$$(*) \qquad ax^6 + bx^5 - ax^4 - 2bx^3 - ax^2 + bx + a = 0,$$

wobei $a \geq 0$ und b eine beliebige reelle Zahl ist.
Tipp: Untersuche zunächst den Fall $a = 0$ und danach den Fall $a > 0$ (jeweils a und b ausklammern). (MM)

Lösung:
zu $a = 0$: $(*)$ ist äquivalent zu

$$(**) \qquad bx(x^4 - 2x^2 + 1) = bx(x^2 - 1)^2 = 0.$$

Im Fall $b = 0$ ist jede reelle Zahl x Lösung.
Falls $b \neq 0$, ist $(**)$ äquivalent zu $x = 0$ oder $(x^2 - 1)^2 = 0$.
In diesem Fall hat $(*)$ 5 reelle Lösungen, und zwar $x = 0, x = 1$ (doppelt gezählt), $x = -1$ (doppelt gezählt).
zu $a > 0$: $(*)$ ist äquivalent zu

$$a(x^6 - x^4 - x^2 + 1) + bx(x^2 - 1)^2 = 0.$$

Nach Umformen des ersten Summanden

$$x^6 - x^4 - x^2 + 1 = x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^4 - 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)^2$$

ist $(*)$ äquivalent zu

$$(x^2 - 1)^2 \cdot (a(x^2 + 1) + bx) = 0.$$

Dies bedeutet nach Division durch a (möglich wegen $a \neq 0$):

$$(x^2 - 1)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0.$$

Die erste Gleichung hat die 4 reellen Lösungen $x = 1$ (doppelt gezählt) und $x = -1$ (doppelt gezählt).

Die zweite Gleichung hat reelle Lösungen $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$ genau dann, wenn die Diskriminante $D := b^2 - 4a \geq 0$ ist.
$D = 0$ ist äquivalent zu: $b = \pm 2a$.
Für $b = 2a$ erhält man die zusätzliche Lösung $x = -1$ (doppelt zu zählen); also hat $(*)$ die 6 reellen Lösungen: $x = 1$ (doppelt gezählt) und $x = -1$ (vierfach gezählt).

Für $b = -2a$ hat $(*)$ die Lösungen $x = 1$ (vierfach gezählt) und $x = -1$ (doppelt gezählt).

$D > 0$ ist äquivalent zu $|b| > 2a$, also $-\infty < b < -2a$ oder $2a < b < \infty$; somit hat $(*)$ 6 reelle Lösungen: $x = 1$ (doppelt gezählt), $x = -1$ (doppelt gezählt) und 2 weitere verschiedene Lösungen $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

$D < 0$ ist äquivalent zu $|b| < 2a$, also $-2a < b < 2a$, und die zweite Gleichung hat keine reellen Lösungen; in diesem Falle hat $(*)$ also nur die 4 reellen Lösungen: $x = 1$ (doppelt gezählt) und $x = -1$ (doppelt gezählt).

Aufgabe 787.
Ein Spieler darf 10 Punkte beliebig auf einer Kugeloberfläche verteilen. Der Gegenspieler setzt danach eine ”Mütze” so auf die Kugel, dass sie möglichst viele der Punkte bedeckt. Die Fläche der ”Mütze” sei ein Drittel der Kugeloberfläche.
Zeige, dass der Gegenspieler mit seiner ”Mütze” mindestens 4 Punkte überdecken kann, egal wie der erste Spieler die Punkte auf der Kugeloberfläche verteilt hat.
Tipp: Versuche einen stochastischen Ansatz! (WJB)

Lösung:
Wir setzen zunächst die ”Mütze” rein zufällig auf die Kugel. Die Zufallsvariable X_j sei 1 (oder 0), wenn der Punkt j bedeckt (nicht bedeckt) wird. Dann ist
$E(X_j) = P(1 \cdot P(X_j = 1) + 0 \cdot P(X_j = 0)) = 1/3$.
Die Anzahl der überdeckten Punkte ist $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ und somit
$E(S) = 10 \cdot 1/3 > 3$.
Da die erwartete Anzahl der bedeckten Punkte größer ist als 3, ist (bei zufälliger Platzierung der Mütze) $P(S > 3) > 0$.
Bei geschickter Platzierung kann also $S > 3$ erreicht werden.

Aufgabe 788.
Ein Klebeband von $L = 10m$ Länge und $19mm$ Breite ist auf eine Plastikrolle vom Durchmesser $r = 35mm$ aufgewickelt. Es ergibt sich damit eine Rolle vom Außendurchmesser $R = 43,5mm$.

a) Versuche, die Dicke des Bandes näherungsweise zu berechnen, wobei die spiralförmige Aufwicklung des Bandes durch eine kreisförmige ersetzt werden darf.

b) Wie viele Wicklungen braucht man ungefähr? (WJB, SW)

Lösung:

zu a): In der Draufsicht haben wir einen Kreisring mit Innendurchmesser $r = 35mm$ und dem Außendurchmesser $R = 43,5mm$, also mit der Fläche $F = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Andererseits ist auch $F \approx Ld$, wobei d die Dicke des Bandes ist.

Also gilt: $$d \approx \frac{F}{L} = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{L} \approx 0,21mm.$$

zu b): Bei dem in $a)$ skizzierten Lösungsweg erhält man nur die Dicke d des Bandes, aber nicht die Anzahl n der benötigten Wickelungen. Die erhält man bei dem folgenden alternativen Lösungsweg über die Umfänge:

Nach der 1. Wickelung hat man die Länge $U_1 = 2\pi r$ des Bandes verbraucht, nach der 2. Wickelung zusätzlich die Länge $U_2 = 2\pi(r+d)$, usw., nach der gesuchten n-ten Wickelung zusätzlich die Länge $U_n = 2\pi(r+(n-1)\cdot d)$. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} L = U_1 + U_2 + \cdots + U_n &= 2\pi(n\cdot r + (1+2+\cdots+n-1)\cdot d) \\ &= 2\pi(n\cdot r + \frac{(n-1)n}{2}\cdot d), \end{aligned}$$

also: $d = \dfrac{L - 2\pi r\cdot n}{\pi\cdot(n-1)n}$ (1).

Nach der n-ten Wickelung (also vor der $(n-1)$-ten) muss $U_{n+1} = 2\pi R$ sein,

also: $r + n\cdot d = R$ (2).

Setzt man (1) in (2) ein und löst nach n auf, so erhält man:

$$n = \frac{L + \pi(R-r)}{\pi(R+r)} \approx 40{,}7.$$

Setzt man n in (2) ein, so erhält man (genauer, als beim 1. Lösungsweg):

$$d = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{L + \pi(R-r)} \approx 0{,}209 mm.$$

Trotzdem stecken (in beiden Lösungswegen) noch physikalische Idealisierungen.

Mathematik ist Glückssache

Im Umgang mit der Mathematik kann allerhand schiefgehen. Dabei muss es sich nicht einmal um richtige Mathematik handeln. Es genügt das gewöhnliche Hantieren mit Feld-, Wald- und Wiesenzahlen.

Wer Zahlen in die Hand nimmt, geht ein Risiko ein. Das gilt für Menschen aller Altersklassen und Bildungsstufen. Etwa für die junge Frau, die in der Talkshow *Sabrina* sagte: „Ich bin stolz auf meinen Freund. Er hat sich nicht nur um $180°$, sondern um $360°$ gewandelt.“

Zahlen sind riskant. Journalisten erleben das täglich.

In der *Welt* hieß es beispielsweise:

> Bonhof grübelt, ob er den 33 Jahre alten Angreifer überhaupt spielen lässt. Dabei sprechen die nackten Zahlen für Polster: Acht von 19 Bundesligatoren hat der Österreicher geschossen, mehr als die Hälfte.

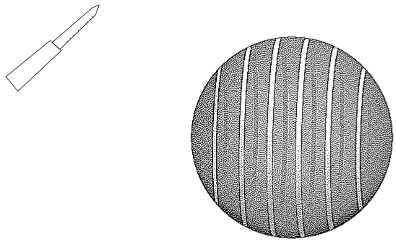
Mehr solcher Beispiele findet Ihr in dem Artikel „Mathematik ist Glücksache“ von Gero von Randow in den DMV-Mitteilungen 4/2002, welcher hier als Quelle diente.

(gefunden von KE)

Das Prinzip von Archimedes

von Duco van Straten

Eine schöne große runde Melone wird in Scheiben von 1 cm Dicke geschnitten. Die Scheiben, die aus der Mitte der Melone geschnitten werden, enthalten offensichtlich mehr Melone als die, die am Ende abgeschnitten werden.

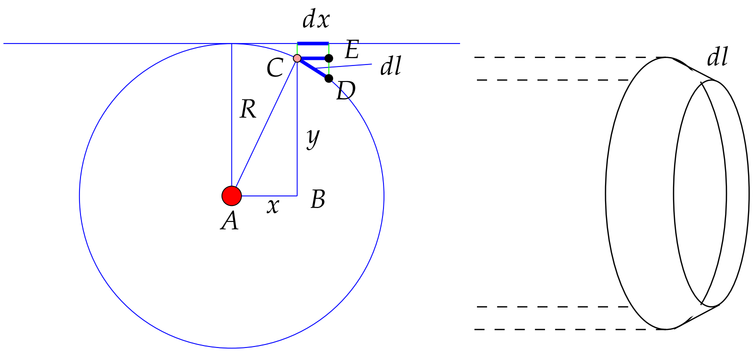


Frage:
Welches Stück hat am meisten Schale? Das in der Mitte oder das am Ende der Melone?

Versucht, bevor ihr weiterlest, eine begründete Antwort zu geben. Ihr könnt auch die Probe aufs Exempel machen, zum Beispiel mit einer Kiwi oder einer Tomate, die ja ebenfalls ziemlich rund sind.

Melonensatz
Ist die Melone eine perfekte Kugel, so haben Scheiben der gleichen Dicke genau gleich viel Schale!

Beweis
Für Flächenberechnungen sind grundsätzlich Grenzwert-Betrachtungen notwendig, d.h. ein Rechnen mit „unendlich kleinen" Strecken. Wir werden diese unterschlagen und intuitiv vorgehen. Entsprechend reicht es aus, den Satz für sehr dünne Scheiben zu zeigen; dicke Scheiben sind aufzufassen als Vereinigung von dünneren Scheiben. Die Melone habe den Radius R. Wir betrachten eine sehr dünne Scheibe der Dicke dx zwischen den Schnitten mit Abstand x und $x + dx$ vom Mittelpunkt der Melone. Wir betrachten nun die folgende Figur:



Überlegt nun, warum die Dreiecke ABC und CED ähnlich sind. Hieraus folgt direkt

$$\frac{y}{R} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CD|} = \frac{dx}{dl},$$

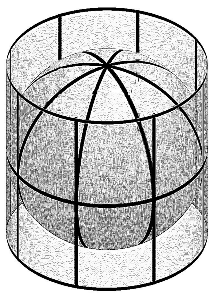
wobei dl die Breite der Schale ist.

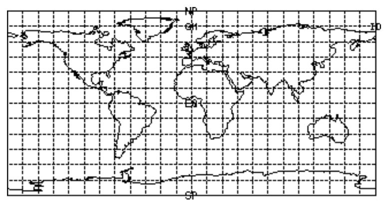
Hieraus finden wir durch „Überkreuzmultiplizieren“ und zusätzlichem Multiplizieren mit 2π:

$$2\pi y dl = 2\pi R dx.$$

Links steht die Fläche der Schale der betrachteten Scheibe, rechts die Fläche einer entsprechenden Scheibe der Dicke dx eines Zylinders mit Radius R. Insbesondere hängt dies nicht von x ab, das heißt, gleich dicke Scheiben der Melone haben gleich viel Schale. □

Dieses Ergebnis hat noch eine weitere kuriose Folgerung. Eine der einfachsten Methoden, die Erdoberfläche auf die Ebene abzubilden, ist die *axiale Projektion*: Wir projizieren die Punkte der Erdoberfläche von der Verbindungsgeraden zwischen Nord- und Südpol auf einen Zylinder, der die Erdkugel umspannt. Dann schneiden wir den Zylinder auf, und legen ihn flach.





Auf der so entstandenen Karte werden die Abstände nicht treu wiedergegeben. Auf der Karte entspricht ein Zentimeter in der Nähe des Äquators einem viel größeren Abstand auf der Erdoberfläche als ein Zentimeter in der Nähe der Pole, die auf der Karte mit der oberen und unteren Kante der Karte korrespondieren. Merkwürdigerweise ist die Abbildung aber *flächentreu*: Länder, die auf der Karte gleich große Flächen einnehmen, haben auch in Wirklichkeit gleich viele Quadratkilometer. Das folgt direkt aus dem Melonensatz: ein horizontaler Streifen auf der Karte entspricht einer Scheibe des Zylinders und somit einer gleich großen Fläche auf der Kugel. Duch Betrachtung der Breitengrade auf der Karte und der Erdoberfläche sehen wir, dass auch Rechtecke und durch *Ausschöpfung* sogar beliebige Gebiete auf der Karte und auf der Kugel gleiche Fläche besitzen!

Eine weiterere direkte Folgerung ist:

Fläche des Zylinders = Fläche der Kugel.

Also ist die Fläche der Kugel

$$2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Dieses Ergebnis wurde vor mehr als 2000 Jahren von Archimedes entdeckt. Ein und dieselbe Zahl

$$\pi,$$

welche Umfang und Fläche des Kreises bestimmt, beherrscht auch Fläche und Volumen der Kugel! Aus diesem Grund nennt man die Flächentreue der axialen Projektion oder den Melonensatz wohl das *Prinzip von Archimedes*.

Sind typische Dreiecke spitzwinklig?

von Wolfgang J. Bühler

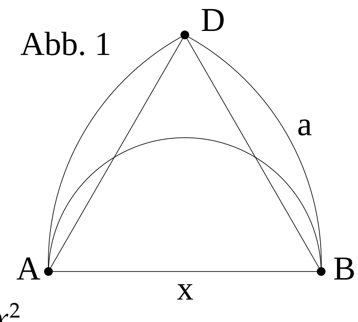
Ein *beliebiges* Dreieck wird meist spitzwinklig gezeichnet, d. h. alle seine Winkel sind kleiner als 90 Grad. Wir wollen prüfen, ob dies gerechtfertigt ist, indem wir die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass ein zufällig gewähltes Dreieck spitzwinklig ist. Dazu müssen wir zuerst präzisieren, was ein „zufällig gewähltes" Dreieck sein soll. Da es mehr als endlich viele Dreiecke gibt, können wir nicht jedem Dreieck die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnen, sondern müssen etwas kompliziertere Modelle betrachten.

Das älteste mir bekannte Modell wurde bereits Ende des 19. Jahrhunderts von dem britischen Mathematiker Charles L. Dodgson (besser bekannt unter dem Namen Lewis Caroll als Verfasser von *Alice im Wunderland*) betrachtet. Wir diskutieren es als

Modell 1:
Die längste Seite des Dreiecks sei AB, die Annahme, der dritte Eckpunkt C liege oberhalb, schränkt die Allgemeinheit nicht ein. Damit AB länger ist als AC, muss C innerhalb eines Kreises um A mit dem Radius $|AB|$ liegen. Entsprechendes gilt für den zweiten eingezeichneten Kreisbogen.

Die Fläche, innerhalb derer C liegt, ist somit zweimal die Fläche des Kreissektors $ABaDA$ minus der Fläche des Dreiecks ABD. Nennen wir die Länge $|AB| = x$, so hat der Kreissektor ein Sechstel der Fläche des Kreises mit Radius x und das gleichseitige Dreieck die Fläche $\sqrt{3}\frac{x^2}{4}$ (siehe Abb. 1).

Abb. 1



Insgesamt ergibt sich somit die Fläche: $2 \cdot \frac{\pi x^2}{6} - \sqrt{3}\frac{x^2}{4}$

Das Dreieck ist stumpfwinklig, wenn der Punkt C im Halbkreis über AB liegt. Dessen Fläche ist $\pi \cdot \frac{(\frac{x}{2})^2}{2}$. Wählt man C im *erlaubten Bereich* zufällig, so ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Dreieck ABC stumpfwinklig ist, gleich dem Quotienten

$$(\pi\frac{x^2}{8})/(2\pi\frac{x^2}{6} - \sqrt{3}\frac{x^2}{4}) = \frac{3\pi}{8\pi - 6\sqrt{3}} \approx 0,64.$$

Modell 2:
Wir geben uns die längste Seite als $c = 1$ vor und wählen a und b zwischen 0 und 1 zufällig und unabhängig voneinander. Die Seiten a, b und 1 bilden nur dann ein Dreieck, wenn $a + b > 1$; dieses Dreieck ist stumpfwinklig, wenn außerdem $a^2 + b^2 < 1$.
Die Abb.2 zeigt die Wahrscheinlichkeiten:

$P(a, b, 1$ bilden ein Dreieck$) = \frac{1}{2}$

$P(a, b, 1$ bilden ein stumpfwinkliges Dreieck$) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass das gebildete Dreieck stumpfwinklig ist, falls $a, b, 1$ überhaupt ein Dreieck bilden, ist demnach $(\pi/4 - 1/2)/(1/2) = \pi/2 - 1 \approx 0,57$.

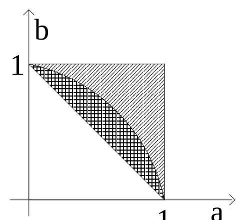


Abb. 2

Modell 3:
Wir wählen zufällig drei Punkte auf dem Rand eines Kreises, den wir uns als das Ziffernblatt einer Uhr vorstellen. Erreicht der Minutenzeiger von einem der drei Punkte aus die anderen beiden innerhalb einer halben Stunde, so ist das Dreieck stumpfwinklig. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist jeweils $\frac{1}{4}$. Da dieses Ereignis nicht für mehr als einen Punkt als Ausgangspunkt eintreten kann, dürfen wir addieren und erhalten $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ als Wahrscheinlichkeit für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Modell 4:
Wir brechen einen Stab der Länge 1 an zwei zufällig und unabhängig gewählten Stellen x und y. Im Fall $x < y$ sieht das so aus:

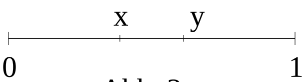


Abb. 3

Sei $a = x, b = y - x$ und $c = 1 - y$. Aus den drei Stücken lässt sich ein Dreieck mit den Seiten a, b und c bilden, wenn

$$a < b + c, \quad b < a + c \quad \text{und} \quad c < a + b \tag{1}$$

Dieses Dreieck ist stumpfwinklig, wenn eine der Ungleichungen

$$a^2 > b^2 + c^2, \quad b^2 > a^2 + c^2 \quad \text{oder} \quad c^2 > a^2 + b^2 \tag{2}$$

gilt. (1) lässt sich umschreiben zu

$$0 < x < \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2} < 1 \tag{3}$$

Die Menge der Punkte (x, y) die (3) genügen, zeigt Abb.4.

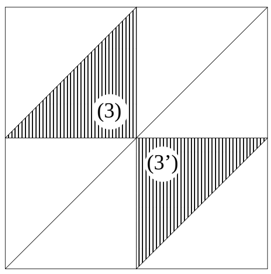


Abb. 4

Der Fall $y < x$ ergibt (durch Vertauschen von x und y) mit $a = y, b = x - y$ und $c = 1 - x$ das ebenfalls in Abb. 2 gezeigte Gebiet zur Ungleichung $(3')$.

$$0 < y < \frac{1}{2} < x < y + \frac{1}{2} < 1 \tag{3'}$$

Offensichtlich ist insgesamt $\frac{1}{4}$ des Einheitsquadrates schraffiert, d.h. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ lässt sich aus den Bruchstücken ein Dreieck bilden. Dei Ungleichungen in (2) schließen einander offensichtlich aus, genauso wie (3) und $(3')$ unvereinbar sind. Aus Symmetriegründen hat jede der Kombinationen einer der Ungleichungen (2) mit (3) oder $(3')$ die gleiche Wahrscheinlichkeit. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein stumpfwinkliges Dreieck gebildet wird, gleich dem Sechsfachen der Wahrscheinlichkeit für $(3')$ mit der zweiten Ungleichung (2), d.h. mit $(x - y) > y + (1 - x)$, oder umgeformt mit $y < (2x - 1)/2x$. Die Wahrscheinlichkeit für ein stumpfwinkliges Dreieck entspricht also dem Sechsfachen der in Abb.5 gezeigten Fläche F, die wir im Folgenden berechnen.

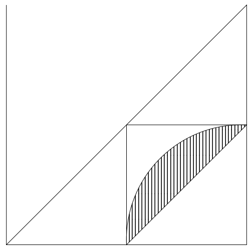


Abb. 5

$$F=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x-1}{2x}dx-\frac{1}{8}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\frac{1}{2x})dx-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\ln(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\ln(2)$$

Die *bedingte* Wahrscheinlichkeit, ein stumpfwinkliges Dreieck zu erhalten unter der Bedingung, dass die Bruchstücke überhaupt ein Dreieck bilden, ist also

$$\frac{6\cdot F}{\frac{1}{4}}=9-12\ln(2)\approx 0,68$$

Modell 5:
Wir zerlegen den $180°$- Winkel durch zwei unabhängig zufällig gewählte Werte x und y in drei Teile (analog wie in Abb.3). Die drei Winkel $x, y-x$ und $180°-x$ falls $x<y$ bzw. $y, x-y$ und $180°-y$, falls $x>y$ sind die Winkel in einem spitzwinkligen Dreieck, falls

$x<90°, y-x<90°$ und $180°-y<90°,$ d.h. $x<90°, y-x<90°$ und $y>90°$ $\quad (A)$

bzw.

$y<90°, x-y<90°$ und $180°-y<90°,$ d.h. $y<90°, x-y<90°$ und $x<90°.$ $\quad (B)$

Aus der Darstellung in Abb.6 sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit für ein spitzwinkliges Dreieck gleich $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ ist. Auch in diesem Modell überwiegt also die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ für ein stumpfwinkliges Dreieck.

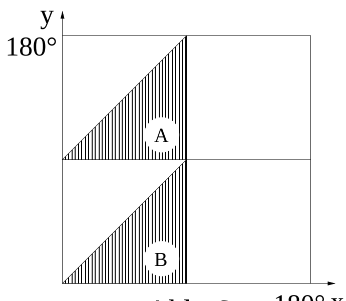


Abb. 6

Weitere Modelle sind denkbar. So könnte man etwa in einem Quadrat oder einem Kreis drei Punkte zufällig wählen und sehen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das von ihnen gebildete Dreieck stumpfwinklig ist. Da jeder Punkt zwei Koordinaten hat, ist dieses Problem einigermaßen kompliziert. Der interessierte Leser könnte jedoch ohne Schwierigkeiten mit Hilfe von sechs Zahlen aus einem Zufallsgenerator ein solches Dreieck bilden und nachsehen, ob es stumpfwinklig ist. Wiederholt er dies hinreichend oft, so erhält er die relative Häufigkeit als einen Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Der Rückschluss
Beweisen kann man lernen

von Hartwig Fuchs

Beim Beweisen oder beim Lösen von Aufgaben ist man häufig mit einem typischen Problem konfrontiert:
Es sind zunächst einmal geeignete Voraussetzungen V zu bestimmen – sei es, dass solche Voraussetzungen gar nicht (vgl. Beispiel 1) oder nur unvollständig (vgl. Beispiel 2) oder ohne eine "hilfreiche" Struktur (vgl. Beispiel 3) gegeben sind.
Wie kann man derartige Situationen meistern?

Es gibt einen Weg, der in manchen Fällen beschritten werden kann und der dann auch zum Ziel führt:
Die **Methode des Rückschlusses** oder kürzer: **das RS-Verfahren** . An Beispielen zeigen wir zunächst, wie dieses Verfahren funktioniert.

Beispiel 1
Vom berühmten Leonard Euler (1707 - 1783) stammt die folgende Aufgabe.
Drei Spieler S_1, S_2, S_3 spielen drei Mal miteinander um Geld.
Im 1. Spiel verliert S_1 so viel an S_2 und S_3, dass sich deren Startkapital verdoppelt.
Im 2. Spiel verliert S_2 so viel an S_1 und S_3, dass diese beiden ihr Kapital verdoppeln.
Im 3. Spiel verliert S_3 so viel an S_1 und S_2, dass nun S_1 und S_2 ihr Kapital verdoppeln.
Nach dem dritten Spiel lautet der Endstand:
B : Jeder der drei Spieler besitzt 24fl. (fl.= Florin, eine zu Eulers Zeit gebräuchliche Münze).
Mit welchen Geldbeträgen V begannen die Spieler das Spiel?

Lösung:

1. Bestimmung der Ausgangsbeträge V aus dem Endstand B.

   Da das Spielergebnis $B = (24fl., 24fl., 24fl.)$ bekannt ist, liegt es nahe, von B aus Spiel um Spiel zurückzurechnen bis zu den Zahlen V des Spielbeginns.

   Diese Rückschlussrechnung beschreiben wir (vgl. Tabelle) als eine Kette von Schlüssen mit Hilfe des Folgezeichens $\Rightarrow$ durch $B \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow V$ oder abgekürzt durch $B \Rightarrow V$.

	B $\Longrightarrow$	(1) $\Longrightarrow$	(2) $\Longrightarrow$	(3) $\Longrightarrow$	(4) $\Longrightarrow$	(5) $\Longrightarrow$	V
	nach dem 3. Spiel	im 3.Spiel	vor dem 3.Spiel	im 2.Spiel	vor dem 2.Spiel	im 1.Spiel	vor dem 1.Spiel
Spieler S_1	24 fl	+ 12 fl	12 fl	+ 6 fl	6 fl	− 33 fl	39fl
Spieler S_2	24 fl	+ 12 fl	12 fl	− 30 fl	42 fl	+ 21fl	21fl
Spieler S_3	24 fl	− 24 fl	48 fl	+ 24fl	24 fl	+ 12 fl	12fl

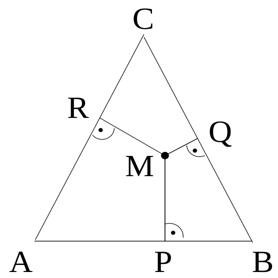
   Aus der Tabelle ergibt sich, dass mit $V = (39fl., 21fl., 12fl.)$ die Startbeträge der drei Spieler bestimmt sind.

2. Probe: $V \Rightarrow B$

   Gelangt man aus den rückrechnend erschlossenen Startzahlen V tatsächlich zum vorgegebenen Endstand B?

   Dies ist der Fall: man bestätigt $V \Rightarrow B$, indem man jeden der Schlüsse $(5) \Rightarrow V, (4) \Rightarrow (5), \ldots, B \Rightarrow (1)$ **umkehrt**.

Beispiel 2



Das Dreieck ABC sei gleichseitig.
Man beweise die Behauptung
B: Wie auch immer man den Punkt M im Inneren des Dreiecks ABC wählt, stets hat die Summe der Abstände $|MP|, |MQ|, |MR|$ des Punktes M von den Dreieckseiten den gleichen Wert.

Beweis:
Wegen der unvollständigen und für einen Beweis von B wenig hilfreichen Vorgaben gehen wir von der informationshaltigeren Behauptung B aus und versuchen so, zunächst einmal die Voraussetzung für einen Beweis von B in geeigneter Weise zu ergänzen.

1. $B \Rightarrow V$

   Wit treffen die **Annahme**: die Behauptung B sei wahr.

   Aus dieser Annahme folgt also für jede Wahl von M, dass gilt

   $$(1) \qquad |MP| + |MQ| + |MR| = c, c \text{ eine feste positive reelle Zahl.}$$

   Bezeichnet man die Längen der Dreieckseiten mit a, so gilt wegen (1):

   $$(2) \qquad \frac{1}{2}a|MP| + \frac{1}{2}a|MQ| + \frac{1}{2}a|MR| = \frac{1}{2}ac.$$

   Wenn man nun beachtet, das $\frac{1}{2}a|MP| = F(ABM), \frac{1}{2}a|MQ| = F(BCM)$ und $\frac{1}{2}a|MR| = F(CAM)$ ist – wobei $F(ABM)$ die Fläche des Dreiecks ABM bezeichne usw. – dann folgt aus (2) die **wahre Aussage**.

   $$(3) \qquad F(ABM) + F(BCM) + F(CAM) = F(ABC),$$

   wobei $F(ABC)$ eine positive Konstante ist.

2. $V \Rightarrow B$

   Wozu haben wir (3) hergeleitet?

   Wenn wir die Vorgaben des Aufgabentextes, ergänzt durch (3) und die Dreiecksflächenformel, als die Voraussetzungen V für B deklarieren, dann können wir daraus so beweisen:

   Aus V folgt, dass insbesondere (3) gilt, woraus (2) und schließlich (1) folgt und (1) besagt, dass B zutrifft.

Beispiel 3
Man beweise die Behauptung
B : es gilt $\quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ für beliebige reelle Zahlen a, b, c.

Beweis:
Da die für B genannte Voraussetzung – nämlich a, b, c sind reell – keinen Hinweis hergibt, wie man zum Beweis von B vorgehen könnte, machen wir B selbst zum Ausgangspunkt der Überlegungen.

1. $B \Rightarrow V$

   Wir treffen die Annahme: B sei wahr, d.h. es gilt

   $$(1) \qquad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \text{für } a, b, c \quad \text{beliebig reell.}$$

   Aus (1) folgt $\quad 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \quad$ und daraus

   $$(2) \qquad a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0.$$

   Damit gelangen wir zu der folgenden **wahren Aussage**

   $$(3) \qquad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \quad \text{für beliebige reelle } a, b, c.$$

2. $V \Rightarrow B$

   Wir benutzen nun die Aussage (3) als Voraussetzung V für den folgenden Beweis von B:

   Aus (3) folgt (2) und daraus (1); damit ist B bewiesen.

Die in den Beispielen 1 - 3 angewendete Schlussweise $B \Rightarrow V$ wird ein **Rückschluss-Verfahren** genannt, weil man dabei von einer Behauptung B (dem ”Gesuchten”) ausgeht und ”rückschreitend” die Voraussetzungen V (das ”Gegebene”) erschließt und danach von V aus B beweist.
Auffällig ist bei unserem RS-Verfahren, dass jeder einzelne im Beweisteil $B \Rightarrow V$ auftretende Schluss $A_1 \Rightarrow A_2$, A_1 und A_2 Aussagen, im Beweisteil $V \Rightarrow B$ ein Gegenstück $A_2 \Rightarrow A_1$ besitzt.
Wenn nun aus einer Ausage A_1 die Aussage A_2 folgt ($A_1 \Rightarrow A_2$) und zugleich aus A_2 die Aussage A_1 folgt ($A_2 \Rightarrow A_1$), dann heißt $A_1 \Rightarrow A_2$ ein **umkehrbarer Schluss**. Natürlich ist dann auch der Schluss $A_2 \Rightarrow A_1$ umkehrbar.

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich das in den Beispielen 1-3 benutzte RS-Verfahren so beschreiben:
Eine Behauptung B ist zu beweisen.
Ausgehend von der Annahme, B sei wahr, konstruiert man eine Kette $B \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow V$ von Schlüssen, von denen jeder einzelne umkehrbar ist.
Die umgekehrte Schlusskette $V \Rightarrow A_n \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_1 \Rightarrow B$ ist dann der gesuchte Beweis von B.

$$\text{RS} - \text{Verfahren:} \qquad B \begin{array}{l} \nearrow A_1 \Longrightarrow \dots \Longrightarrow A_n \searrow \\ \nwarrow A_1 \Longleftarrow \dots \Longleftarrow A_n \swarrow \end{array} V$$

Bevor aber das RS-Verfahren in das Arsenal der zulässigen Beweismethoden aufgenommen werden kann, ist noch ein sehr kritischer Punkt zu klären:

Wie kann man das RS-Verfahren logisch rechtfertigen?
Wenn man sagt, $A_1 \Rightarrow A_2$ sei ein gültiger Schluss, dann ist damit immer auch gemeint, dass gilt: $(*)$ Wenn A_1 wahr ist, dann ist (folglich) A_2 wahr.
Aus $(*)$ leitet man nun leicht eine logische Rechtfertigung für das RS-Verfahren ab.
Beim RS-Verfahren startet man stets von einem Endergebnis B aus. Das ist ganz unproblematisch im Beispiel 1.
Dort ist B eine Aussage, deren Wahrheit ein **nicht bestreitbares** Faktum darstellt.
Die Wahrheit von B überträgt sich nun wegen $(*)$ durch den gültigen Schluss $B \Rightarrow (1)$ auf das Zwischenergebnis (1), von (1) analog auf (2) usw. bis schließlich durch $(5) \Rightarrow V$ die Wahrheit von V feststeht.
Ganz anders dagegen in den Beispielen 2 und 3, wo die Startaussage B jeweils eine unbewiesene Behauptung ist, deren Wahrheit nur **hypothetisch** ist, d.h. deren Wahrheit auf der Annahme beruht, dass B wahr sei.
Darf man aber eine Behauptung B, von der man annimmt, sie sei wahr, an die Spitze des Beweisprozesses stellen, mit dem gerade die Wahrheit von B gezeigt werden soll?

Wenn in den Schlussketten $B \Rightarrow V$ der Beispiele 2 und 3 jeweils B und damit (1) als wahr vorausgesetzt werden, dann überträgt der gültige Schluss $(1) \Rightarrow (2)$ gemäß $(*)$ nur die **hypothetische Wahrheit** von (1) auf (2) – falls (1) wahr ist, dann ist auch (2) wahr – wir wissen so aber nicht, ob (2) auch wirklich wahr ist; und ganz entsprechend wird durch $(2) \Rightarrow (3)$ wieder nur die hypothetische Wahrheit von (2) auf (3) weitergegeben.
Aber: wie allgemein bekannt ist, ist die jeweilige **Aussage (3) in Beispiel 2 und Beispiel 3 tatsächlich wahr**!
Damit ändert sich die Situation grundlegend.
Denn nun gilt für die umgekehrten Ketten $V \Rightarrow B$: da (3) wahr ist, muss wegen $(3) \Rightarrow (2)$ gemäß $(*)$ auch (2) wahr sein und (1) ist wahr ebenfalls wegen $(2) \Rightarrow (1)$ und $(*)$.
Damit ist B wahr und also ist B bewiesen.

Fazit
Ein RS-Verfahren ist eine zulässige Beweismethode, wenn es folgende zwei Bedingungen erfüllt.

1. In der Schlusskette $B \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow V$ (vgl. das obige Schema) ist jeder einzelne Schluss umkehrbar.
2. Eine der Aussagen $B, A_1, \ldots, A_n, V$ ist tatsächlich wahr.

Ein häufiger Fehler
Man bestimme die reellen Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad \sqrt{4x^2 + 3x + 30} = 2x$$

Typischer Weise geht man beim Lösen von Gleichungen so vor wie hier:

1. Man trifft die Annahme B: (1) hat mindestens eine reelle Lösung a.

   Dann erhalten wir die Schlusskette

   aus B folgt

   (2) a ist Lösung der Gleichung $4x^2 + 3x + 30 = 4x^2 \quad \Rightarrow$

(3) a ist Lösung der Gleichung $3x + 30 = 0 \Rightarrow$

V: es ist $a = -10$.

2. Wenn man nun den 2. Schritt eines RS-Verfahrens unterlässt und die Schlusskette $B \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow V$ nicht auf ihre Umkehrbarkeit untersucht, dann wird man die Zahl -10 fälschlicher Weise als Lösung akzeptieren.

   Bei vollständiger Durchführung des RS-Verfahrens hätte man jedoch bemerkt, dass der Schluss $B \Rightarrow (2)$ aus obiger Kette nicht umkehrbar ist: aus (2) folgt die Gleichung $\sqrt{4x^2 + 3x + 30} = \pm 2x$ und das ist nicht die Gleichung (1); dann aber muss aus (2) auch nicht folgen, dass die Zahl -10 eine Lösung von (1) ist – und tatsächlich ist sie es ja auch nicht.

   In der Praxis kürzt man den 2. Teil des RS-Verfahrens (= die Probe) ab, indem man nur nachprüft, ob die Zahl -10 die Gleichung (1) erfüllt oder nicht.

Bemerkung
der Schluss $A_1 \Rightarrow A_2$ sei umkehrbar, d.h. es gilt auch $A_2 \Rightarrow A_1$. Diesen Sachverhalt stellt man in der mathematischen Literatur symbolisch dar durch $A_1 \Leftrightarrow A_2$ und es werden dafür die folgenden (gleichbedeutenden) sprachlichen Formulierungen gebraucht:

Wenn A_1, dann A_2 und umgekehrt;

A_1 genau dann wenn A_2;

A_1 dann und nur dann wenn A_2;

A_1 ist notwendig und hinreichend für A_2.

****

2003 **Lösungen zu den Neujahrsaufgaben** 2003

Drei in 2003
Hier müsst ihr selbst nach einer Lösung suchen.

Ziffern
Mit dem Symbol $[n]$ bezeichnen wir die beiden letzten Ziffern der Zahl n. Damit ist

$3^1 = 3$	$[3^5] = 42$	...	$[3^{17}] = 63$
$3^2 = 9$	$[3^6] = 29$	...	$[3^{18}] = 89$
$3^3 = 27$	$[3^7] = 87$	...	$[3^{19}] = 67$
$3^4 = 81$	$[3^8] = 61$	...	$[3^{20}] = 01$

und wegen $[3^{21}] = 03$ wiederholen sich die beiden letzten Ziffern mit der Periode 20.

Es gilt daher $[2003^{2000}] = 01$ und daher $[2003^{2003}] = 27$.

Quersumme
Wegen $2003 = 222 \cdot 9 + 5$ ist $\underbrace{99\ldots\ldots9}_{222 \text{ Ziffern } 9}4$ die gesuchte Zahl.

Noch einmal die Quersumme
Wegen $2003 = 1000 \cdot 2 + 3$ ist $3\underbrace{22\ldots\ldots2}_{1000 \text{ Ziffern } 2}$ die gesuchte Zahl.

Summen

1. Es gibt höchstens 99 negative Zahlen in der Menge. Denn gäbe es 100 negative Zahlen, so wäre die Summe dieser 100 Zahlen negativ – was nach Voraussetzung nicht möglich ist.
2. Teile die 2003 Zahlen in 2 Gruppen ein. Die erste Gruppte enthalte die 99 negativen Zahlen und eine weitere positive Zahl; die zweite Gruppe enthalte alle übrigen positiven Zahlen. Die Summe der Zahlen in beiden Gruppen ist positiv. Also gilt die Behauptung.

Hänschen behauptet. . .
Für jedes beliebige x haben alle Zeilen- und Spaltensummen den gleichen Wert $10\,015 + x$.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Für ein Monoid-Abo gibt es ab sofort zwei Wahlmöglichkeiten: Entweder eine Bestellung entsprechend dem **Kalenderjahr** (also Abonnement des Jahrgangs wie bisher) oder eine Bestellung entsprechend dem **Schuljahr**. So können Neueinsteiger nach den Sommerferien ihr Abo mit dem aktuellen September-Heft beginnen und dann weitere drei Monoid-Ausgaben beziehen.
2. ACHTUNG: Auch die **Punktezählung wird umgestellt!** Die Grundlage der diesjährigen Preisvergabe am 14. Dezember bilden noch die Ausgaben Dezember 01 (Monoid Nr.68) – September 02 (Monoid Nr.71). Die Anpassung erfolgt danach an das Schuljahr. D.h. die neuen Klassen können direkt mit dem September-Heft starten und sammeln bis zum Juni-Heft. Damit ergibt sich auch die Möglichkeit der Vorverlegung der Preisvergabefeier nach Mitte November (erstmalig 2003). Für die Preisvergabe im Übergangsjahr 2003 bilden ausnahmsweise nur die Hefte Dezember 02 (Monoid Nr.72), März 03 (Monoid Nr.73) und Juni 03 (Monoid Nr.74) die Basis.
3. Die festliche Preisvergabe 2002 findet am Samstag, dem 14. Dezember im Neuen Musiksaal NB 10 des Karolinen-Gymnasiums in Frankenthal/Pfalz, Röntgenplatz 5, statt; Beginn um 10.30 Uhr.
4. In diesem Heft erscheint erstmalig ein Artikel von Prof. Dr. Duco van Straten („Das Prinzip von Archimedes“). Herr van Straten ist Mitglied der Monoid-Redaktion und über die Anschrift des Fachbereichs Mathematik und Informatik erreichbar, aber auch – und dies gilt für alle Autoren dieses Heftes – über die Monoid-Redaktion.
5. Am 19.11.2002 wurde in Gießen das von Prof. Dr. A. Beutelspacher – einem „alten “ Freund und Förderer von Monoid – initiierte Mathematik-Mitmach-Museum „**Mathematikum**“ im Beisein des Bundespräsidenten eröffnet. Es bietet „Mathematik zum Anfassen“. Wir empfehlen, diesem gleichermaßen unterhaltsamen wie informativen Ort bald mal einen Besuch abzustatten.

Ekkehard Kroll

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 16.09.2002)

♢ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

■ **Kl. 6:** Ina Ebling 15, Claudia Heiss 26, Daniela Hottenbacher 13, Johanna Mees 22, Sabine Oßwalt 21, Franziska Schmitt 13, Annett Stellwagen 38;
■ **Kl. 7:** Daniel Faber 18, Johann Kirsch 18, Johannes Merz 35;
■ **Kl. 8:** Markus Bassermann 49, Matthias Eberle 7, Madeleine Fister 26, Meike Fluhr 51, Isabelle Merker 51;
■ **Kl. 9:** Isabelle Maurot 3, Christina Simon 23;
■ **Kl. 13:** Aaron Breivogel 59, Dominik Kraft 53.

♢ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

■ **Kl. 6:** Johannes Fiebig 18, Carolin Herandez-Sanchez 9, Felix Liebrich 48, Lisa Mettler 36, Carolin Morlock 17, Nina Rein 31, Susanne Rogge 21, Inga Wellstein 9, Rebecca Zimmer 22;
■ **Kl. 8:** Jeanette Stohr 9;
■ **Kl. 9:** Marc Rein 5;
■ **Kl. 10:** Gregor Dschung 47, Alexander Kent 6.

♢ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

■ **Kl. 8:** Sebastian Bischof 9, Christoph Bös 10, Patrick Eichstätter 8, Robert Vogt 21;
■ **Kl. 9:** Lorenz Diener 4, Stefan Tran 49.
■ **Kl. 10:** Thomas Schumacher 17.

♢ **Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 7:** Christian Behrens 49.

♢ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**

■ **Kl. 7:** Ann-Katrin Bock 16, Julian Hohmann 6, Christian Münkel 24;
■ **Kl. 8:** Navina Groß 6, Hannah Hauser 39, Leonie Münkel 10, Sebastian Sauer 19, Katharina Schwert 19, Marius Trabert 10.

♢ **Frankenthal, Erkenbert-Grundschule: Kl. 4:** Laura Mettler 21.

♢ **Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):**
■ **Kl. 6:** Jonas Fischer 1, Franziska Lahnstein 2, Janina Rau 2;
■ **Kl. 7:** Lukas Bünning 1, Marco Mallm 1, Carolin Marusic 2, Rodney de Meulenaer 3, Annika Scherer 1, Ann-Kathrin Tilch 1;
■ **Kl. 8:** Soria Asvar 7, Katja Dik 2, Cornelius Doll 2, Lukas Frink 4, Matthias Fritz 3, Viktoria Gerz 5, Alexander Schardt 2, Matthis Scherer 3.

♢ **Hantersbüttel: Kl. 10:** Roman Menzel 5.

♢ **Heilbronn, Walldorfschule: Kl. 13:** Carl Friedrich Bolz 18.

♢ **Kaiserlautern, Burggymnasium (Betreuender Lehrer Ernst Mischler):**
Kl. 6: Annika Buch 7, Tanita Eichler 4, Jennifer Lorch 2, Lena Sembach 2.

♢ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium: Kl. 13:** Kerstin Bauer 60.

◊ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:**
■ **Kl. 7:** Katharina Kober 16, ■ **Kl. 9:** Judith Reinhardt 61, Adriana Spalwisz 20;
■ **Kl. 12:** Alexandra Engelhardt 9.

◊ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 12:** Steffen Biallas 66.

◊ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
■ **Kl. 7:** Daniela Bongartz 4, Jennifer Döring 7, Annika Kohlhaas 11;
■ **Kl. 8:** Katharina Höveler 39; Stefanie Tiemann 62.

◊ **Neustadt a. d. W. (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):**
■ **Kl. 7:** Martin Jöhlinger 11, Robert Simon 3.

◊ **Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Angelika Beitlich und Herr Bielefeld):**
■ **Kl. 6:** Abla Alaouvi 13, Carolin Dossmann 26, Gib Gutzeit 8, Alice Kaoch 18, Julian Kleiner 4, Marcel Landua 18, Sabrina Schröder 4, Annkatrin Weber 51;
■ **Kl. 7:** Stefan Albert 33, Margarete Heinrichs 6, Nicole Witzel 8;
■ **Kl. 8:** Sarah C. Alaouvi 13, Sebastian Eckart 20, Massim Tawanaie 15, Daniel Dieth 14; ■ **Kl. 9:** Elham Qiami 3.

◊ **Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Alexander Hillert 42.

◊ **Saarburg, Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Sibylle von Bomhard 7.

◊ **Siegburg, Anno-Gymnasium:** ■ **Kl. 9:** Jan B. Boscheinen 17.

◊ **Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Moritz Klügle 3.

◊ **Wiesbaden, Gutenbergschule:** ■ **Kl. 11:** Kathleen Renneißen 11.

◊ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
■ **Kl. 6:** Katrin Brenneisen 6,5, Annika Fetzer 21, Kurosch Habibi 17, Carolin Roßbach 9, David Schuschke 15, Joanna Wendling 8;
■ **Kl. 7:** Annika Johann 36; Julia Jung 42, Lena Müller 32, Sarah Tröbs 43;
■ **Kl.10:** Verena Prägert 24.

◊ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium: Kl. 11:** Catherina Wirtz 25.

MONOID Jahrgang 22 Heft 72 Dezember 2002

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Martin Olbermann, Dr.Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Ehrenmitglied: Martin Mettler
Monoidaner: Markus Bassermann, Aaron Breivogel, Gregor Dschung, Felix Liebrich, Felix Henninger, Dominik Kraft und Marcel Zimmer
Korrekturen und Layout: Katrin Elter **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 3.12.2002)

♢ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

■ **Kl. 5:** Joscha Wagner 20;
■ **Kl. 6:** Ina Ebling 15, Claudia Heiss 31, Daniela Hottenbacher 19, Sina Lelle 12, Johanna Mees 33, Larissa Nickel 6, Sabine Oßwalt 21, Franziska Schmitt 21, Annett Stellwagen 46;
■ **Kl. 7:** Daniel Faber 18, Johann Kirsch 18, Johannes Merz 35;
■ **Kl. 8:** Markus Bassermann 59, Matthias Eberle 7, Madeleine Fister 26, Meike Fluhr 63, Isabelle Merker 64;
■ **Kl. 9:** Sven-Marc Gaubatz 7, Johannes Giarra 4, Isabelle Maurot 3, Christina Simon 23;
■ **Kl. 13:** Aaron Breivogel 87, Dominik Kraft 81.

♢ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

■ **Kl. 6:** Johannes Fiebig 29, Carolin Herandez-Sanchez 21, Felix Liebrich 73, Lisa Mettler 51, Carolin Morlock 27, Lena Radder 5, Nina Rein 44, Susanne Rogge 33, Inga Wellstein 16, Rebecca Zimmer 35;
■ **Kl. 8:** Jeanette Stohr 9;
■ **Kl. 9:** Marc Rein 21;
■ **Kl. 10:** Gregor Dschung 75, Alexander Kent 6.

♢ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

■ **Kl. 6:** Thomas Geiß 28;
■ **Kl. 8:** Sebastian Bischof 9, Christoph Bös 10, Patrick Eichstätter 8, Robert Vogt 21;
■ **Kl. 9:** Lorenz Diener 13, Stefan Tran 83.
■ **Kl. 10:** Thomas Schumacher 17.

♢ **Alzey, Gymnasium am Römerkastell:** ■ **Kl. 7:** Christian Behrens 68.

♢ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**

■ **Kl. 7:** Ann-Katrin Bock 16, Julian Hohmann 6, Christian Münkel 24;
■ **Kl. 8:** Navina Groß 6, Hannah Hauser 39, Leonie Münkel 10, Sebastian Sauer 19, Katharina Schwert 19, Marius Trabert 10.

♢ **Frankenthal, Erkenbert-Grundschule:** ■ **Kl. 4:** Laura Mettler 24.

♢ **Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):**
■ **Kl. 6:** Jonas Fischer 1, Franziska Lahnstein 2, Janina Rau 2;
■ **Kl. 7:** Lukas Bünning 1, Marco Mallm 1, Carolin Marusic 2, Rodney de Meulenaer 3, Annika Scherer 1, Ann-Kathrin Tilch 1;
■ **Kl. 8:** Soria Asvar 7, Katja Dik 2, Cornelius Doll 2, Lukas Frink 4, Matthias Fritz 3, Viktoria Gerz 5, Alexander Schardt 2, Matthis Scherer 3.

♢ **Hantersbüttel: Kl. 10:** ■ Roman Menzel 5.

♢ **Heilbronn, Walldorfschule:** ■ **Kl. 13:** Carl Friedrich Bolz 18.

♢ **Kaiserlautern, Burggymnasium (Betreuender Lehrer Ernst Mischler):**
■ **Kl. 6:** Annika Buch 7, Tanita Eichler 4, Jennifer Lorch 2, Lena Sembach 2.

♢ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium:** ■ **Kl. 13:** Kerstin Bauer 95.

♢ **Kelkheim/Taunus, Eichendorfschule:** ■ **Kl. 7:** Sonja Sauckel-Plock 11.

♢ **Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium (Betreuender Lehrer David Brungs):**
■ **Kl. 6:** Marius Rackwitz 13;
■ **Kl. 8:** Florian Lörsch 2, Daniela Rünz 3, Marvin Schuth 2.

♢ **Korschenbroich:** ■ Anita Robitzsch 4.

♢ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:**
■ **Kl. 7:** Katharina Kober 36, ■ **Kl. 9:** Judith Reinhardt 88, Adriana Spalwisz 33;
■ **Kl. 12:** Alexandra Engelhardt 9.

♢ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium:** ■ **Kl. 12:** Steffen Biallas 98.

♢ **Mainz, Willigis-Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Marcel Ackermann 23.

♢ **Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):**
■ **Kl. 7:** Maike Bäcker 10, Regina Friedmann 9, Natalie Geiß 16, Julia Heeß 16, Maximilian Jehle 11, Laura Mayer 12, Patrick Schäfer 19, Michaela Schuster 18, Helena Schweizer 14.

♢ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
■ **Kl. 7:** Daniela Bongartz 4, Laura Cohnitz 23, Jennifer Döring 7, Annika Kohlhaas 38;
■ **Kl. 8:** Katharina Höveler 54, Stefanie Tiemann 91.

♢ **Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):** ■ **Kl. 7:** Martin Jöhlinger 25, Robert Simon 3.

♢ **Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):**
■ **Kl. 5:** Sarah Rosengarten 13;
■ **Kl. 6:** Abla Alaouvi 13, Carolin Dossmann 38, Gib Gutzeit 8, Alice Kaoch 18, Julian Kleiner 4, Karina Krenke 5, Marcel Landua 18, Sabrina Schröder 4, Annkatrin Weber 72;
■ **Kl. 7:** Stefan Albert 42, Margarete Heinrichs 6, Nicole Witzel 8;
■ **Kl. 8:** Sarah C. Alaouvi 13, Sebastian Eckart 20, Massim Tawanaie 15, Daniel Dieth 14; ■ **Kl. 9:** Elham Qiami 3.

♢ **Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Alexander Hillert 64.

♢ **Saarburg, Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Sibylle von Bomhard 7.

♢ **Siegburg, Anno-Gymnasium:** ■ **Kl. 9:** Jan B. Boscheinen 17.

♢ **Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Moritz Klügle 3.

♢ **Wiesbaden, Gutenbergschule:** ■ **Kl. 11:** Kathleen Renneißen 11.

♢ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
■ **Kl. 5:** Lisa Engel 15;
■ **Kl. 6:** Katrin Brenneisen 7, Annika Fetzer 21, Kurosch Habibi 17, Carolin Roßbach 9, David Schuschke 15, Joanna Wendling 8;
■ **Kl. 7:** Annika Johann 36; Julia Jung 66, Lena Müller 32, Sarah Tröbs 64;
■ **Kl.10:** Verena Prägert 30.

♢ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium:** ■ **Kl. 11:** Catherina Wirtz 34.