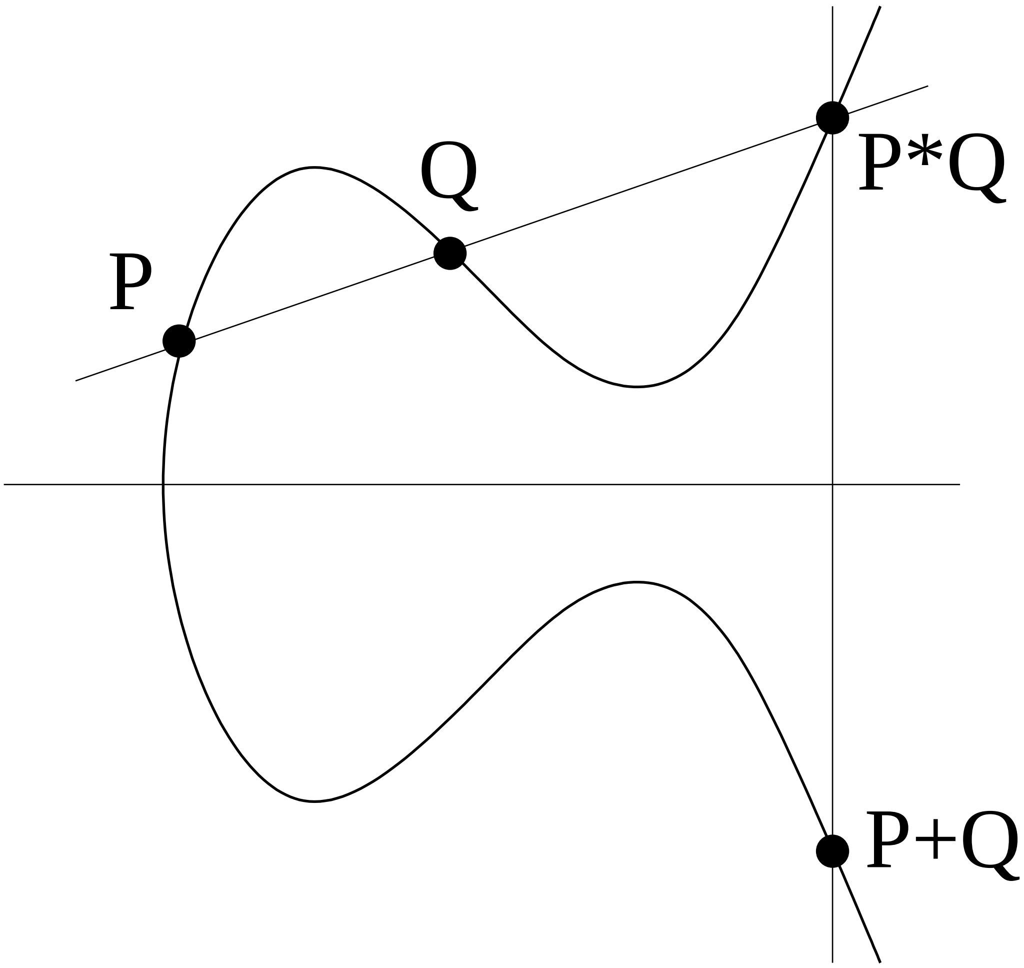
Jahrgang 23 Heft 76 Dezember 2003

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.02.2004.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg
Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler und **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Teilbarkeit durch 11

Ein Beitrag für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5-7) von Martin Mettler

In der Schule werden die Teilbarkeitsregeln für $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ und 10 behandelt, seltener die für 7 und 11, da deren Anwendung kaum schneller ist als die Division.
Dennoch stellen wir euch hier als Anregung für eigene Überlegungen zwei Teilbarkeitsregeln für 11 vor.

1. Regel:
Um zu prüfen, ob eine Zahl durch 11 teilbar ist, genügt es zu testen, ob die Differenz zwischen der Quersumme der Ziffern an geraden Stellen und jener der Ziffern an ungeraden Stellen durch 11 teilbar ist.

Beispiele:
$a = 61\,643\,142$ ist durch 11 teilbar, weil $(6+6+3+4)-(1+4+1+2) = 19-8 = 11$ durch 11 teilbar ist. Es ist in der Tat $a : 11 = 5\,603\,922$.
$b = 8\,173\,517$ ist durch 11 teilbar, weil $(8+7+5+7)-(1+3+1) = 27-5 = 22$ durch 11 teilbar ist. Tatsächlich ist $b : 11 = 743\,047$.
$c = 1\,234\,567\,890$ ist nicht durch 11 teilbar, weil
$(1+3+5+7+9)-(2+4+6+8+0) = 25-20 = 5$ nicht durch 11 teilbar ist.

Für diese Teilbarkeitsregel ist es gleichgültig, ob wir die Quersumme der Ziffern an den geraden Stellen von der Quersumme der Ziffern an den ungeraden Stellen (immer von „hinten" gezählt) subtrahieren oder umgekehrt. Wenn wir uns aber auf die erste Variante festlegen, erhalten wir immer ein Ergebnis, das bis auf Vielfache von 11 mit dem Rest übereinstimmt, das die direkte Division durch 11 liefert. So ist
$c = 112\,233\,444 \cdot 11 + \mathbf{6}$ und
$(2+4+6+8+0)-(1+3+5+7+9) = 20-25 = -5 = \mathbf{6} - 11.$
Weiteres Beispiel:
$d = 7\,192\,846 = 653\,895 \cdot 11 + \mathbf{1}$ und
$(7+9+8+6)-(1+2+4) = 30-7 = 23 = \mathbf{1} + 2 \cdot 11.$

2. Regel:
Teile die Zahl in Gruppen von je zwei Ziffern von rechts nach links und addiere die erhaltenen (höchstens) zweistelligen Zahlen. Ist das Ergebnis durch 11 teilbar, so ist auch die Zahl durch 11 teilbar.

Beispiele:
Für die Zahl a erhalten wir $42+31+64+61 = 198$ und 198 ist durch 11 teilbar: $198 : 11 = 18$.
Für die Zahl b erhalten wir $17+35+17+8 = 77$ und 77 ist durch 11 teilbar: $77 : 11 = 7$.
Für die Zahl c ergibt sich $90+78+56+34+12 = 270$ ist nicht durch 11 teilbar: $270 : 11 = 24$ Rest 6.
Für die Zahl $e = 735$ ergibt sich $35+7 = 42$, also $42 : 11 = 3$ Rest 9 in Übereinstimmung mit dem Rest bei Teilung von e durch 11.

Und hier **eine Begründung** der 2. Regel für die Zahl $a = 61\,643\,142$: Es ist

$$\begin{aligned} a &= 616\,431 \cdot 100 + 42 = 616\,431 \cdot (99+1) + 42 = 616\,431 \cdot 99 + 616\,431 + 42 \\ &= V99 + 6\,164 \cdot 100 + 31 + 42 = V99 + 6\,164 \cdot (99+1) + 31 + 41 \\ &= V99 + 6\,164 \cdot 99 + 6\,164 + 31 + 41 = V99 + 61 \cdot 100 + 64 + 31 + 41 \\ &= V99 + 61 \cdot 99 + 61 + 64 + 31 + 41 = V99 + 61 + 64 + 31 + 42. \end{aligned}$$

$V99$ bedeutet „Vielfaches von 99“, ist also durch 99 und somit auch durch 11 teilbar. Daher stimmt der Rest bei der Teilung der Zahl a durch 11 mit jenem bei der Teilung der Summe $61 + 64 + 31 + 42$ durch 11 überein.

Vielleicht habt ihr eine Idee, wie ihr eine oder beide Regeln allgemein beweisen könnt – oder vielleicht fällt euch eine weitere Regel ein. Dann schreibt uns!
Wir freuen uns auf eure Mitarbeit!

$*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Ein Blick hinter die Kulissen

von Hartwig Fuchs

Gewusst wie!
Ein Lehrer übt mit seinen Schülern das schriftliche Dividieren. Zum Schluss lässt er einen Mini-Test (ohne Taschenrechner!) schreiben. Dazu bittet er jeden Schüler, eine vierziffrige Zahl $N < 9\,999$ zu wählen und dann $N : 9\,999$ auf 4 Stellen nach dem Komma auszurechnen.
Um sich eine zeitaufwändige Korrektur zu sparen, hat er nicht ohne Grund gerade diesen speziellen Typ einer Divisionsaufgabe ausgesucht: Er kann bei jedem Schüler mit einem Blick feststellen, ob er richtig gerechnet hat oder nicht!

Wie geht das?

Der Lehrer geht von der folgenden ihm bekannten Tatsache aus:
Es sei $z_1 z_2 \ldots z_n$ eine n-ziffrige natürliche Zahl $< \underbrace{999\ldots999}_{n \text{ Ziffern } 9}$. Dann gilt:

$$(1) \qquad z_1 z_2 \ldots z_n : \underbrace{999\ldots999}_{n \text{ Ziffern } 9} = 0,\overline{z_1 z_2 \ldots z_n},\ n \geq 1.$$

Beweis:
Es sei $Z = 0,\overline{z_1 z_2 \ldots z_n}$ und 9_n die natürliche Zahl mit n Ziffern 9, also $9_n = 10^n - 1$.
Dann ist $10^n Z = z_1 z_2 \ldots z_n, \overline{z_1 z_2 \ldots z_n}$ und $10^n Z - Z = z_1 z_2 \ldots z_n$.
Wegen $10^n Z - Z = (10^n - 1)Z = 9_n Z$ folgt, dass $9_n Z = z_1 z_2 \ldots z_n$ ist.
Ersetzen wir in der letzten Gleichung Z durch die periodische Dezimalzahl $0,\overline{z_1 z_2 \ldots z_n}$ und dividieren durch $\underbrace{999\ldots999}_{n \text{ Ziffern } 9}$, so ergibt sich (1).

Beispiel

$$\begin{aligned} 1 : 9 &= 0,\overline{1} \\ 12 : 99 &= 0,\overline{12} \\ 123 : 999 &= 0,\overline{123} \\ 1234 : 9999 &= 0,\overline{1234} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Der Lehrer hat für seine Testaufgabe $n = 4$ gewählt. Wegen (1) ist dann das Ergebnis der Division $z_1 z_2 z_3 z_4 : 9\,999 = 0,\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$, und das kann er tatsächlich mit einem Blick kontrollieren.

Hättest Du es gewusst?

Was ist Ockhams Rasiermesser ?

von Hartwig Fuchs

William von Ockham, geboren 1285 in der Grafschaft Surrey (England), gestorben 1349 in München, ist einer der wirklich bedeutenden Logiker des Mittelalters, dessen logisch-philosophische Untersuchungen auch heute noch gültig und in großen Teilen wirksam sind.
Das trifft ganz gewiss zu für den Aspekt seiner Lehren, der als

Ockhams Rasiermesser (Occam's Razor)

in den modernen Wissenschaften – insbesondere im Hinblick auf ihre Begrifflichkeit und ihre Methoden der Darstellung – als sehr fruchtbar erwiesen hat.

Worum handelt es sich bei Ockhams Rasiermesser?
Ockham betrieb Logik (und Philosophie) nach der Devise:
„Entia non sunt mulitplicanda praeter necessitatum"
– im Mittelalter war Latein die Sprache der Wissenschaften! – auf Deutsch etwa:
„Wesen sollten nicht über das Notwendige hinaus vermehrt werden."
Diesen Grundsatz verstand Ockham als eine Strategie der eisernen Sparsamkeit; er forderte damit die Wissenschaftler auf, ihren Untersuchungen stets die einfachsten Annahmen (Hypothesen) zu Grunde zu legen und in der Darstellung ihrer Ergebnisse auf geizigste Weise zu verfahren – mit dem Ziel größtmöglicher Transparenz.
Wir werden diese von Ockham geforderte wissenschaftliche Arbeitsmethode, die üblicherweise als Ockhams Rasiermesser bezeichnet wird, auch das **Prinzip O.R.** nennen.

Die Naturwissenschaften – insbesondere aber auch die Mathematik – verfahren in hohem Maße nach Ockhams Grundsätzen.
Ein Mathematiker etwa achtet immer darauf, dass seine Theorien auf möglichst wenigen und zudem noch möglichst „einfachen" Annahmen – sogenannten Axiomen – gegründet sind; und auch in der Entwicklung dieser Theorien – seine tägliche mathematische Arbeit – setzt er das Prinzip O.R. als unerlässliches Instrument ein, um damit seine Texte von Überflüssigem, Weitschweifigkeiten und Auswüchsen frei zu halten und sie so letztendlich zu vereinfachen, durchsichtiger und eher nachvollziehbar zu machen.

Auf die Bedeutung des Prinzips O.R. für die Grundlegung (Axiomatik) mathematischer Theorien können wir hier nicht eingehen.
Aber die Anwendung des Prinzips O.R. bei einer Textgestaltung werden wir an einigen Beispielen demonstrieren und kommentieren.

Das Prinzip O.R. bei begrifflicher und formaler Reduktion

Aufgabe

Welche natürlichen Zahlen ergeben – wenn sie durch eine dreiziffrige Zahl dividiert werden – die Zahl $1\,001\,001$?

Lösung

Wir bezeichnen[1)] die gesuchten Zahlen mit x und die Divisoren (in Zifferndarstellung) mit abc. Dann gilt:

$x = 1\,001\,001 \cdot abc = 1\,000\,000 \cdot abc + 1\,000 \cdot abc + abc$.
Die Lösungszahlen sind daher – mit den Ziffern a, b, c geschrieben –
$x = abcabcabc$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$.[2)].

Erläuterungen

1) Symbole werden als Abkürzungen für Begriffe eingeführt.
2) Ungleichungen dienen der formalen Komprimierung von vielelementigen Mengen.

● Wir treffen hier auf eine erste wichtige Funktion des Prinzips O.R.: die **Reduktion von Objekt- und Situationsbeschreibung** in begrifflicher und formaler Hinsicht durch Einführung von Symbolen.
Damit wird die sprachliche Darstellung von Objekten und Situationen, die z.B. gehäuft in einem Text vorkommen oder nur langatmig zu beschreiben sind und dadurch den Leser vom Eigentlichen ablenken können, komprimiert zu das Textverständnis erleichternden Abkürzungen und Symbolen.

Das Prinzip O.R. bei prozeduraler Reduktion

Behauptung

Die Gleichung (1) $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$
hat keine ganzzahligen Lösungen außer $x = y = z = 0$.

Beweis

Auf der linken Seite von (1) ist genau eine der drei Zahlen x, y, z gerade (Fall (a)) oder alle drei Zahlen sind gerade (Fall (b)).
(a) Sei x gerade[1)], also $x = 2x_1$; y und z sind dann ungerade und daher gilt[2)]: $y^2 + z^2 = 2\cdot$ *ungerade Zahl*.
Folglich ist die linke Seite von (1) nur durch 2 teilbar, während die rechte Seite durch 4 teilbar ist. Der Fall (a) tritt somit nicht ein.

(b) Es seien x, y und z gerade. Dann ist $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ und damit wird (1) zur Gleichung[2)] (2) $\qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$.
Aus (2) ergibt sich mit der gleichen Argumentation[3)] wie in (a), dass x_1, y_1 und z_1 gerade sein müssen, also $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$ gilt; und damit wird (2)
zur Gleichung[2)] (3) $\qquad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2$.
So fortfahrend erhält man die Gleichungsketten[2)]

$$(4) \quad \begin{array}{l} x = 2x_1 = 2^2x_2 = \cdots = 2^nx_n = \ldots \qquad ^{4)} \\ y = 2y_1 = 2^2y_2 = \cdots = 2^ny_n = \ldots \\ z = 2z_1 = 2^2z_2 = \cdots = 2^nz_n = \ldots . \end{array}$$

Wenn also x, y, z die Gleichung (1) erfüllen, so folgt daraus die Gültigkeit der Gleichungen (4); dann aber sind x, y und z druch 2^n teilbar für jedes n. Das aber ist nur möglich für $x = y = z = 0$.

Erläuterungen

1) Wegen der Symmetrie von (1) genügt es, nur einen der drei möglichen Fälle: 1. a gerade; 2. b gerade; 3. c gerade zu betrachten.
2) Die jeweils angegebenen Gleichungen sind das Ergebnis von nicht hingeschriebenen elementaren Termumformungen.
3) Die Schlüsse des Falles (a) werden nicht erneut hingeschrieben.
4) Die Punkte ... besagen, dass die wieder und wieder ganz wie in (a) und (b) zu ziehenden Schlüsse nicht mehr angegeben werden.

● In diesem Beispiel wird eine zweite Funktion des Prinzips O.R. deutlich: **die Reduktion mathematischer Prozeduren**.
Treten nämlich in einem ausgedehnten mathematischen Zusammenhang z.B. mehrfach gleiche oder gleichartige Situationen auf, dann geht man, wenn sie sehr elementar sind nur kursorisch, sonst aber nur einmal ausführlich im Text auf sie ein und verweist dann in den übrigen Fällen auf die entsprechende Textstelle.
So werden in mathematischen Prozeduren elementare Weitschweifigkeiten und nutzlose Wiederholungen vermieden.

Das Prinzip O.R. bei inhaltlicher Reduktion

Behauptung
Für jede natürliche Zahl n stimmen die Einerziffern von n und n^5 überein.

Beweis
Wir bezeichnen mit $E(n)$ die Einerziffer von n.
Für jedes natürliche $n < 10$ gilt, wie man leicht mit dem Taschenrechner nachrechnet[1)]: $E(n^5) = n$.
Sei nun $n \geq 10$, also $n = 10m + t$ mit $m \geq 1$ und $0 \leq t \leq 9$.
Offenbar ist $E(n) = t$.
Aus der Formel[2)] $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ folgt für n:

$$\begin{aligned} n^5 = (10m+t)^5 &= (10m)^5 + 5 \cdot (10m)^4 t + \cdots + 5 \cdot 10mt^4 + t^5 = \\ &= 10(10^4 m^5 + 5 \cdot 10^3 m^4 t + \cdot + 5 \cdot mt^4) + t^5. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $E(n^5) = E(t^5)$. Da $t < 10$ ist, gilt $E(t^5) = t$ und wegen $t = E(n)$ ist schließlich $E(n^5) = E(n)$.

Erläuterungen

1) Es ist überflüssig, so elementare Rechnungen in den Text zu setzen.

2) Eine Formel, ein Satz wird als gültig vorausgesetzt und daher hier nicht bewiesen.

● In diesem Beweis ist eine weitere Funktion des Prinzips O.R. zu erkennen: **die inhaltliche Reduktion von Zusammenhängen**.
Das mag dann so aussehen: in einem mathematischen Text lässt man eigentlich erforderliche Rechnungen, Termumformungen, Schlüsse einfach weg, wenn sie so elementar sind, dass man ihre Ausführung getrost dem Leser überlassen kann; und Formeln, Sätze werden nicht bewiesen, wenn sie allgemein bekannt sind oder man auf ihren Beweis in der Literatur zurückgreifen kann.

Ein biologischer Schnitt mit Ockhams Rasiermesser
Charles Darwin machte einmal eine Bemerkung, die heute noch eine allerdings scherzhaft gemeinte Herausforderung darstellt: „Je mehr Katzen es in englischen Landen gibt, um so fetter sind die Schafe auf den Weiden.“ Dieser Bemerkung liegt eine Kette von Schlüssen zu Grunde, aus der Darwin durch einen übermütigen Schnitt mit Ockhams Rasiermesser alle Glieder bis auf das erste und letzte herausgetrennt hat. Die vollständige Kette lautet so: „Gibt es viele Katzen, so gibt es wenig Mäuse. Mäuse sind die einzigen natürlichen Feinde von Hummeln. Also: wenig Mäuse – viele Hummeln. Hummeln sind wegen ihres langen Rüssels die einzigen Bestäuber englischen Klees. Somit: viele Hummeln – viel Klee – fette Schafe.“

● Ein so radikaler Schnitt in einen wissenschaftlichen Text ist riskant. Wenn die Gedankengänge, die man mitteilen möchte, zu lückenhaft, zu stark verkürzt sind, dann läuft man Gefahr, dass sie nicht mehr nachvollziehbar sind und damit unverstanden bleiben.

Eine unlösbare Aufgabe?

– Ockhams Rasiermesser in Aktion –

Die nachfolgende Aufgabe erweckt den Eindruck, man habe bei ihr mit Ockhams Rasiermesser (vgl. Artikel Seite 5-7) so viel an benötigter Information „weggeschnitten“, dass eine Lösung nicht mehr möglich erscheint.

Die drei Mathe-Profis A, B, C sitzen gemütlich bei einem Mate-Tee. A ergreift das Wort und sagt zu B und C:

> Ich habe mir zwei natürliche Zahlen $m > 1, n > 1, m \geq n$ gedacht. Ihr Produkt $P = m \cdot n$ teile ich nur B und ihre Summe $S = m + n$ nur C mit.

Darauf entspinnt sich ein Gespräch mit längeren Denkpausen:

(1) B: Ich kann S nicht bestimmen.
(2) C: Das war mir von vornherein klar.
$(2')$ C: Ich kann aber auch P nicht bestimmen.

Darauf mischt sich A in den Dialog ein und erklärt ergänzend:

(3) A: Ich habe m und n so gewählt, dass P und S kleinstmöglich sind.
(4) B: Ich kenne jetzt m und n.
(5) C: Auch ich kenne m und n.

Wie groß sind m und n? (H.F.)

Bevor der Le(ö)ser/ die Le(ö)serin die angegebene Lösung durcharbeitet, sollte er/sie mal selbst versuchen, eine Lösung zu finden – um so den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe zu erfahren.

Lösung:

1. **Wie lässt sich $\mathbf{B's}$ Aussage $(\mathbf{1})$ erklären?**

   B kennt nur P.

   $a)$ Wäre P ein Produkt aus $\mathbf{2}$ Primzahlen m und n, dann könnte B sofort den Wert von $S = m + n$ bestimmen – und B dürfte (1) nicht behaupten. Daraus folgt:

   (6) P ist ein Produkt aus mindestens 3 Primzahlen (aber nicht notwendig verschiedenen).

   $b)$ P ist ein Produkt aus r Primzahlen, $r \geq 3$. Da B die Zahl P kennt, muss er wissen: Es gibt (mindestens) 2 verschiedene Darstellungen von P – z.B. $P = a \cdot b$ und $P = c \cdot d$ – deren zugehörige Summen $a + b, c + d$ verschieden sind. Aber B kann nicht entscheiden, welche von beiden $C's$ Summe ist.

   $c)$ Aus $a)$ und $b)$ ergibt sich die Erklärung für (1).

2. **Wie lässt sich $\mathbf{C's}$ Aussage $(\mathbf{2})$ erklären?**

   C kann $B's$ Aussage (1) nur deshalb von vornherein gekannt haben, weil er wusste: meine Summe S lässt sich nicht als $S = m + n$ mit Primzahlen m und n schreiben.

Damit kann er $B's$ Überlegungen $a)$ und $b)$ anstellen und so vorher wissen, dass B (1) behaupten wird.

3. **Wie lässt sich $\mathbf{C's}$ Aussage $(\mathbf{2'})$ erklären?**

   C weiß: wenn ich S als Summe von Primzahlen schreibe, dann brauche ich dazu mindestens drei Primzahlen, und es gibt deshalb 2 verschiedene Darstellungen von S – z.B. $S = a + b$ und $S = c + d$ – deren zugehörige Produkte $a \cdot b, c \cdot d$ verschieden sind – daher kann C nicht entscheiden, welches $B's$ Produkt ist.

4. **Wie bestimmen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ die Zahlen $\mathbf{m}$ und $\mathbf{n}$?**

   $a)$ B überlegt so: als mögliche S-Werte kommen nur Zalen in Frage, die sich nicht als Summe von 2 Primzahlen schreiben lassen. Welche ist die kleinste dieser Zahlen?

   Es ist 11. Wegen (3) entscheidet B daher: $S = 11$.

   Damit kann er folgendes Gleichungssystem aufstellen:

   $$m \cdot n = P, P \text{ ist } B \text{ bekannt,}$$
   $$m + n = 11.$$

   Er setzt $n = 11 - m$ in die erste Gleichung ein und erhält:

   $m^2 - 11m + P = 0$, woraus sich ergibt, dass $m = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{121 - 4P})$; B kennt P, also m; damit kennt B die Zahl $n = 11 - m$.

   $b)$ C überlegt so: Welche Zahlen erfüllen (6)?

   Die kleinsten sind: $8, 12, 16, 20, 24, 27, \ldots$

   Aber nicht jede Zahl Z dieser Liste kommt als P-Wert in Frage.

   Wenn man für Z alle möglichen Produktdarstellungen $Z = a \cdot b = c \cdot d = \ldots$ hinschreibt und für die zugehörigen Summen $a + b, c + d, \ldots$ gilt: Jede von ihnen ist auch eine Summe von 2 Primzahlen, dann widerspricht das (6).

   Beispiel:

   Für 12 gilt: $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \Rightarrow 6 + 2 = 8, 4 + 3 = 7$ und $8 = 5 + 3, 7 = 5 + 2$.

   Wenn nun C in obiger Liste alle „ungeeigneten“ Zahlen wie 12 streicht, dann ist 18 die kleinste der übrig bleibenden Zahlen. Wegen (3) entscheidet C deshalb, dass $P = 18$ ist.

   Nun argumentiert er so wie B: aus dem Gleichungssystem

   $$m \cdot n = 18$$
   $$m + n = S, S \text{ ist } C \text{ bekannt,}$$

   erhält man m und n.

5. **Wie groß sind $\mathbf{m}$ und $\mathbf{n}$?**

   Aus 4. folgt: $S = 11, P = 18$.

   Aus dem Gleichungssystem $m \cdot n = 18, m + n = 11$ erhält man $m = 9, n = 2$.

Lenstras Elliptische Kurven-Methode

von Theo de Jong

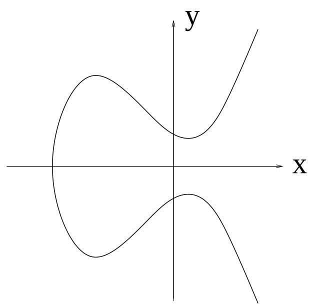
In der Schule lernt ihr, wie man große Zahlen faktorisieren kann. Haben wir z.B. die Zahl $n = 341$, dann probieren wir einfach die Primfaktoren durch und stellen schnell fest, dass 341 zwar nicht durch $2, 3, 5, 7$ teilbar ist, wohl aber durch 11. Damit haben wir $341 = 11 \cdot 31$ gefunden.
Wenn wir Faktoren von n finden wollen, brauchen wir nur die Primfaktoren bis $\sqrt{n}$ zu betrachten. Diese Methode nennt man Probedivision, und sie ist nur für nicht allzu große Zahlen durchführbar.
Nehmen wir z.B. an, dass n eine Zahl mit 19 Dezimalstellen ist. Um die Probedivision durchzuführen, brauchen wir alle Primzahlen bis ungefähr 10^{10}, und davon gibt es genau $455\ 052\ 511$.
Es stellt sich das Problem, wie man diese speichern sollte. Selbst mit Computern ist es nicht vernünftig, Zahlen n von mehr als 10 Dezimalstellen mit Probedivision zu faktorisieren.
Es gibt verschiedene moderne Faktorisierungsmethoden, die für große Zahlen viel besser funktionieren als die Probedivision. Hier wollen wir eine besprechen, nämlich **Lenstras Elliptische Kurven-Methode**, die 1985 von Lenstra vorgeschlagen wurde.

1. Elliptische Kurven

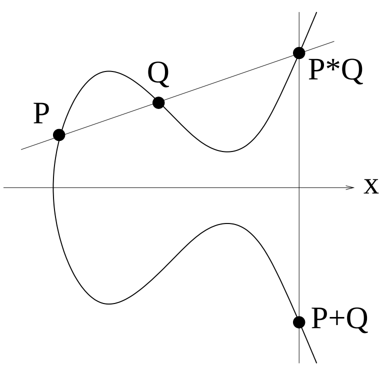
Wir erklären zunächst, was eine elliptische Kurve ist. Nehmen wir reelle Zahlen a, b und betrachten die folgende Menge:

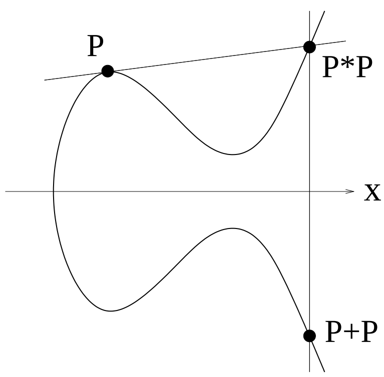
$$E_{a,b} = \{(x, y) | y^2 = x^3 + ax + b\},$$

also die Menge aller Paare (x, y), die die Gleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ lösen.
So eine Kurve $E_{a,b}$ könnte wie im nebenstehenden Bild aussehen.

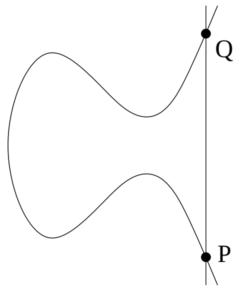


Wir können, wenn Punkte P, Q auf $E_{a,b}$ gegeben sind, einen neuen Punkt, die *Summe* $P + Q$ auf $E_{a,b}$ finden: Man nimmt die Gerade durch P und Q, findet den dritten Schnittpunkt $P * Q$ mit der Kurve, und spiegelt an der $x - Achse$.
Selbst für $P = Q$ kann man etwas machen: Um $P + P = 2P$ zu definieren, nimmt man die Tangente in P an die elliptische Kurve, findet erneut den dritten Schnittpunkt und spiegelt.





Es lässt sich zeigen, dass die Addition das Kommutativitätsgesetz $P + Q = Q + P$ und auch das Assoziativitätsgesetz $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ erfüllt. Bemerke, dass diese Konstruktion **schief** geht für den Fall, dass P und Q gespiegelt voneinander bezüglich der x–Achse liegen. Dann hat die Gerade durch P und Q nämlich nur *zwei* Punkte mit der elliptischen Kurve gemein. Diese Tatsache hat Lenstra bei seiner Faktorisierungsmethode ausgenutzt.



Formeln für die Addition sind leicht hinzuschreiben. Sind $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ Punkte auf $E_{a,b}$ dann gilt, wie man berechnen kann, $P + Q = (x_3, y_3)$ mit

$$\begin{aligned} x_3 &= m^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 &= m(x_1 - x_3) - y_1, \end{aligned}$$

wobei m die Steigung der Geraden durch P und Q ist bzw. die Steigung der Tangente an die elliptische Kurve in P. Man hat dabei

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \text{falls } P \neq Q,$$
$$m = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}, \qquad \text{falls } P = Q.$$

Man sieht, dass $P + Q$ genau dann nicht definiert ist, wenn die Steigung der Gerade durch P und Q unendlich ist, also die Gerade durch P und Q vertikal ist.

2. Rechnen Modulo n

Sind a und n gegebene natürliche Zahlen, so schreiben wir $a \bmod n$ für den Rest bei Teilung von a durch n. Also z.B.

$$11 \bmod 2 = 1; \;\; 15 \bmod 4 = 3; \;\; 98 \bmod 14 = 0.$$

Dann können wir auch modulo n addieren, zum Beispiel

$$23 + 41 \bmod 13 = 12; \;\; 1 + 1 \bmod 2 = 0; \;\; 45 + 12 \bmod 11 = 2.$$

Multiplizieren modulo n geht auch:

$$4 \cdot 7 \bmod 25 = 3; \;\; 8 \cdot 9 \bmod 71 = 1.$$

Kann man auch dividieren? Nun ja, manchmal:

$1/5 \bmod 7 = 3$, da $3 \cdot 5 \bmod 7 = 1$; $\quad 1/2 \bmod 341 = 171$, da $2 \cdot 171 \bmod 341 = 1$.

Aber es gelingt nicht, $1/22 \bmod 341$ zu berechen. Gäbe es nämlich einen Wert x mit $x \cdot 22 \bmod 341 = 1$, dann multiplizieren wir beide Seiten mit 31. Nun ist $22 \cdot 31 = 682 = 0$ (alles $\bmod 341$), also würde folgen

$$0 = x \cdot 22 \cdot 31 = 1 \cdot 31 = 31 \text{ (alles} \bmod 341),$$

also $0 \bmod 341 = 31$ was natürlich Unsinn ist. Also kann es so ein x nicht geben. Der wirkliche Grund dürfte klar sein: die Zahl 22 hat mit 341 einen gemeinsamen Teiler. Es gilt nämlich:

Satz: $\qquad 1/a \bmod n$ existiert **nicht** $\iff \mathrm{ggT}(a, n) > 1.$

Es gibt schnelle Verfahren, um den Kehrwert von a modulo n, wenn dieser existiert, auszurechnen.

3. Lenstras Methode

Wie können wir nun elliptische Kurven benutzen, um damit eine Zahl n zu faktoriseren? Lenstras Idee ist es, eine elliptische Kurve $E_{a,b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und einen Punkt P darauf zu wählen. Man könnte z.B eine Zufallszahl a wählen, $P = (2, 1)$ und $b = -2a - 7$. Nun nimmt man einen große Zahl s und versucht

$$(x_s, y_s) = sP = \underbrace{P + \cdots + P}_{s\text{-fach}}$$

zu berechen, nun aber nicht mit reellen Zahlen, sondern modulo n, der zu faktorisierenden Zahl. Man hofft dabei, dass die Berechnung irgendwann zusammenbricht. Der Grund dafür wäre, dass bei der Berechnung einer “Steigung einer Geraden” die Division modulo n nicht aufgeht. Wie im letzten Abschnitt erklärt, ist der Grund dafür, dass dann der Nenner und n einen gemeinsamen Teiler haben, den wir mit dem euklidischen Algorithmus schnell berechnen können.

Beispiel: Natürlich sollte man den Rechner diese Berechnungen durchführen lassen. Weil wir die Methode illustrieren wollen, nehmen wir aber ein kleines n, nämlich $n = 1003$, $P = (2, 1)$ und die elliptische Kurve $y^2 = x^3 + x - 9$. Wir berechnen $72P \bmod 1003$.

$2P$	$= (289, 641)$	$16P$	$= (64, 719)$
$4P$	$= (314, 713)$	$32P$	$= (550, 949)$
$8P$	$= (571, 704)$	$64P$	$= (276, 114)$

Nun müssen wir $8P + 64P$ berechnen. Dafür brauchen wir den Kehrwert von $x_{64} - x_8 = 276 - 571 = -295 = 708$ (alles $\bmod 1003$. Den gibt es aber nicht, da 1003 und 708 einen gemeinsamen Teiler haben. Diesen können wir mit dem euklidischen Algorithmus, der besagt, dass für alle a, b gilt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a - b)$, berechnen:

$$\begin{aligned}\text{ggT}(1003, 708) &= \text{ggT}(708, 295) = \text{ggT}(413, 295) = \text{ggT}(108, 295) = \text{ggT}(295, 187)\\ &= \text{ggT}(187, 118) = \text{ggT}(118, 59) = 59.\end{aligned}$$

Damit haben wir den Faktor 59 gefunden.

Bemerkungen

- Die benötigten Berechnungen sind für ein Rechner nicht schwierig.
- Schafft man es mit einem s nicht, einen Faktor von n zu finden, so könnte man es mit einem größeren s versuchen.
- Man könnte, wenn man bei einer elliptischen Kurve keinen Erfolg hat, einfach andere elliptische Kurven probieren. Also ist *Parallelisierung* der Berechnungen möglich.
- Es ist mit dieser Methode und heutigen Computern möglich, Primfaktoren van ca. 20-30 Dezimalstellen zu finden.

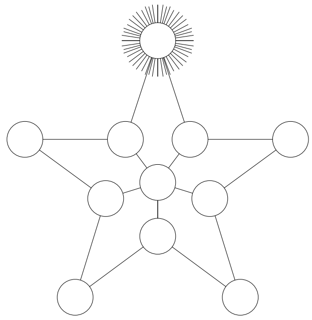
2004 2004 **Die Seite zum Neuen Jahr** 2004 2004

von Hartwig Fuchs

Sternenknobelei

Schreibe an die Stelle der Kreise die Zahlen $1998, 1999, 2000, \ldots, 2008$ so, dass die Summen der 4 Zahlen an den Ecken eines jeden der 5 Vierecke des Sterns übereinstimmen und an der Spitze des Sterns eine in dieser Zeit häufig vorkommende Zahl steht.

(H.F.)



$\mathbf{2004}$ mit lauter Vieren

Es ist

$$2004 = 4^{4+\sqrt{4}} : \sqrt{4} - 44.$$

Wer findet eine Darstellung von 2004, in der neben $+, -, \cdot,$: und dem Wurzelzeichen, weniger als 6 Ziffern 4 verwendet werden? (H.F)

Quersumme

Welches ist die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme $\mathbf{2004}$? (H.F.)

Verschlüsselte Botschaft

2	3	7	3	4	5		8
1	7	9	C	H		O	
	1	7	9	1	4	7	1
7		1	9	1	6	7	1
4	7		8		1	9	7
1	8	1	9		O		6

Ersetze die Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ durch Buchstaben (verschiedene Ziffern – verschiedene Buchstaben) und schreibe in die leeren Kästchen geeignete Buchstaben, so dass – Zeile für Zeile gelesen – ein in diese Zeit passender Satz entsteht.

Hinweis: In deutschsprachigen Texten sind die vier häufigsten Buchstaben – nach abnehmender Häufigkeit geordnet – E,N,I,S. (H.F.)

Die MONOID−Redaktion wünscht
allen unseren Lesern und Lösern
ein frohes und erfolgreiches

2004 !

Lösungen mit Pfiff (Mathis)

Nicht nur die Zahl der MONOID-Leser(innen) hat stark zugenommen, sondern auch die Zahl der Löser(innen) der Mathespielereien und der Neuen Aufgaben. Unter den eingesandten Lösungen befinden sich auch sehr gute und pfiffige Einfälle – Lösungswege, an die der Aufgabensteller selbst manchmal nicht gedacht hat. Deswegen wollen wir hier besonders elegante oder witzige oder auch besonders gründliche Lösungen vorstellen. Wenn aus Platzmangel nicht alle sofort drankommen, bitten wir um Geduld.

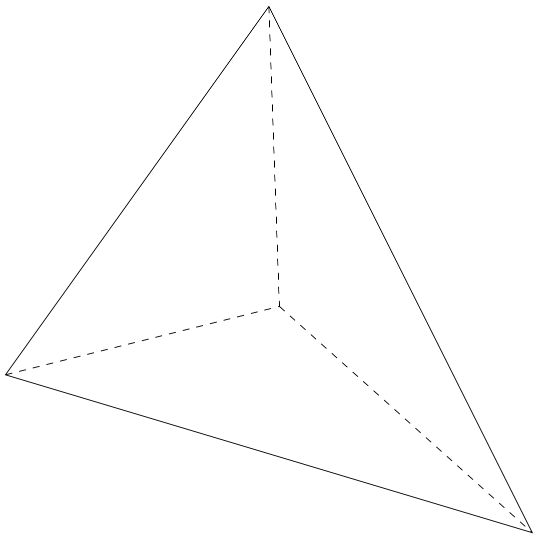
„Wenn schon, denn schon!“ dachte sich **Stefan Tran** vom Leibniz-Gymnasium Östringen und knobelte 16 Lösungen zur Mathespielerei „Nochmal passende Ziffern“ (Heft 73)

$$MONEY - STAYS = HERE$$

aus:

$$\begin{array}{ll}
41658 - 39083 = 2575 & 24067 - 18371 = 5696 \\
41658 - 32083 = 9575 & 24067 - 15371 = 8696 \\
70539 - 68196 = 2343 & 70951 - 68416 = 2535 \\
85430 - 79107 = 6323 & 70951 - 62416 = 8535 \\
70539 - 62196 = 8343 & 40269 - 38593 = 1676 \\
85430 - 76107 = 9323 & 40269 - 31593 = 8676 \\
90753 - 86238 = 4515 & 93042 - 87628 = 5414 \\
90753 - 84238 = 6515 & 93042 - 85628 = 7414
\end{array}$$

Zu dem Problem der **6 Geraden**, von denen sich jede einzelne mit genau 4 der anderen Geraden schneiden soll (ebenfalls Heft 73), hat **Stefan Tran** noch eine 3D-Lösung anzubieten:

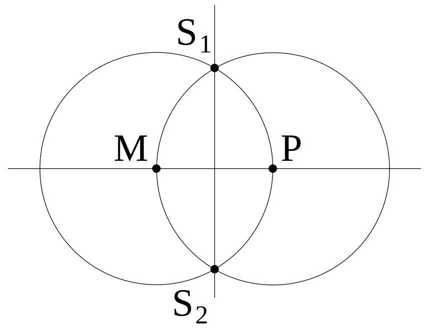


Verlängert man die Kanten eines Tetraeders, erhält man 6 Geraden, die jeweils genau 4 andere Geraden schneiden, denn jede Kante und ihre Gegenkante sind windschief, schneiden sich also nicht.

Die **„Konstruktion mit beschränkten Mitteln“** (Heft 74), bei der Hans mit einem unmarkierten Lineal und einem eingerasteten Zirkel ein Paar sich rechtwinklig schneidender Strecken konstruiert, hat viele Leser(innen) zu eigenen Entwürfen angeregt. Diese variieren die drei Grundmuster (Rautenkonstruktion oder – äquivalent – Schnitt zweier Kreise; Thaleskreis und Winkelhalbierende) auf unterschiedliche Arten:

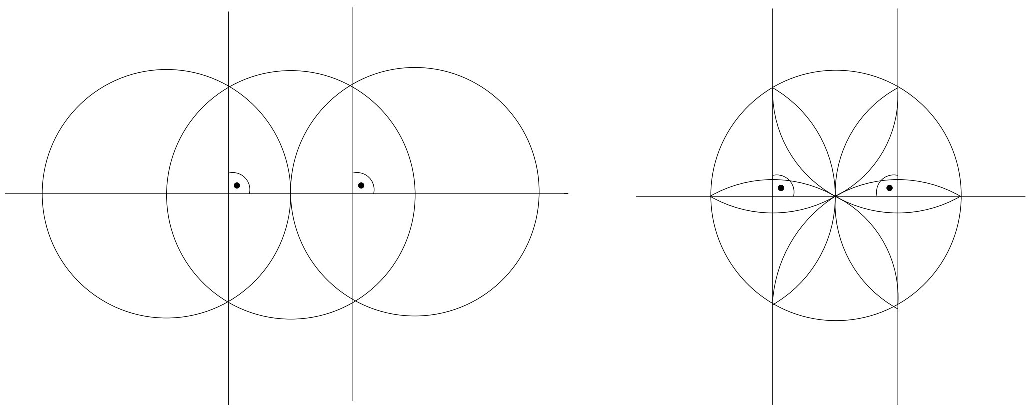
Annika Kohlhaas vom Gymnasium Marienberg in Neuss schlägt für die Kreisschnittmethode folgende Kurzform vor:

1. Mit dem Zirkel einen Kreis mit dem Radius R zeichnen.
2. Einen beliebigen Punkt (P) auf dem Kreis wählen und einen weiteren Kreis darum ziehen.
3. Eine Gerade durch den Punkt P und den Mittelpunkt M ziehen.

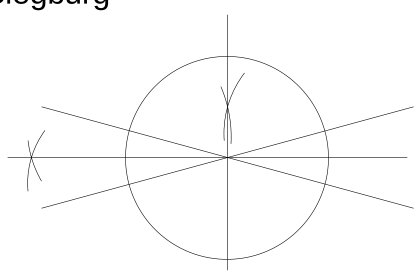


4. Eine weitere Gerade durch die beiden Schnittpunkte $S1$ und $S2$ der beiden Kreise, und wieder schneiden sich die beiden Geraden **rechtwinklig**.

Andreas und Johannes Weimer von der Fürst-Johann-Ludwig-Schule in Hadamar liefern mit ihrer Kreisschnittmethode zwei Geraden, die auf einer dritten senkrecht stehen:



Jan Boscheinen vom Anno-Gymnasium in Siegburg zeichnet zwei sich schneidende Geraden und konstruiert die Winkelhalbierenden der beiden Winkel. Diese sind zueinander senkrecht.



Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 75

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Familie Schmitt

Die ältesten Kinder der Familie Schmitt sind die achtjährigen Zwillinge Claudia und Julia. Jede von ihnen hat eine Schwester und zwei jüngere Brüder.

Wie viele Kinder haben die Schmitts? (WJB)

Lösung:

Familie Schmitt hat 4 Kinder; die Zwillinge und die beiden Brüder.

Die vier Schiffe

In einem Hafen hatten vier Schiffe festgemacht. Am Montag, dem 3. Januar 2000, verließen sie gleichzeitig den Hafen.

Es ist bekannt, dass das erste Schiff alle 4 Wochen in diesen Hafen zurückkehrt, das zweite alle 8 Wochen, das dritte alle 12 Wochen und das vierte alle 16 Wochen.

Wann trafen alle Schiffe das erste Mal wieder in diesem Hafen zusammen?

(gefunden K.E.)

Lösung:

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4,8,12 und 16 ist 48. Folglich trafen die Schiffe nach 48 Wochen wieder zusammen, das heißt am 4. Dezember 2000.

Die vietnamesiche Fliege

Dieses – allein von der Aufgabenstellung her – sehr schwierige und äußerst langwierige Rätsel stammt aus meinem Heimatland Vietnam:

Auf dem berühmstesten Fluss Song Huong, dem Parfümfluss, der durch die alte Kaiserstadt Hue fließt, befinden sich am oberen Flusslauf eine schnittige Jacht und am unteren ein traditionelles Fischerboot, die aufeinander zufahren. Die Jacht fährt dabei mit einer Geschwindigkeit von $13km/h$; das Boot ist $9km/h$ schnell. Von dem Deck der Jacht startet nun eine kleine Fliege und flattert mit $24km/h$ geradewegs zum Fischerboot. Dort angekommen, macht sie sich sofort wieder auf den Rückweg. So fliegt sie also immer hin und her. Als zusätzliche Schwierigkeit muss noch erwähnt werden, dass die Fliesgeschwindigkeit des Flusses $1km/h$ beträgt. Nach genau $25min$ seit dem Beginn ihrer Rundflüge macht es BUMM! und die Fliege wird von den beiden Booten zerquetscht.

Wie viele Kilometer flog die Fliege insgesamt, ausgehend von ihrem Start bei der Jacht, bis zu ihrem Tod?

(Stefan Tran, Leibniz-Gymnasium Östringen)

Lösung:

Die Lösung ist denkbar einfach: Relevant sind hier einzig und allein die Angabe der Fluggeschwindigkeit der Fliege von $24km/h$, sowie ihre Flugdauer von $25min$. Insgesamt fliegt sie also $24km/h \cdot 25/60\,h = 10\,km$, bis sie zerquetscht wird.

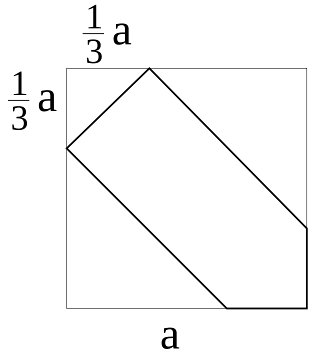
Der Rasen und Mr. Grasy

Mr. Grasy hat sich einen neuen Rasenmäher geleistet. Freudig erregt fährt er damit einfach quer über seine (ziemlich kleine) quadratische Rasenfläche mit einer Seitenlänge $a = 9m$.

a) Berechne, wie viel m^2 er mit seinem neuen Rasenmäher bereits jetzt gemäht hat.

b) Löse die Aufgabe $a)$ für eine beliebige Seitenlänge a.

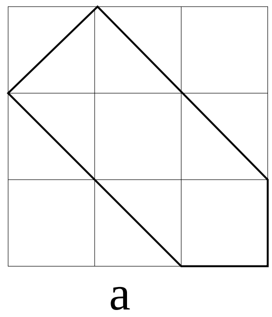
(WK)



Lösung:

Zu a):

Wir zerlegen das Rasenquadrat sinnvoll in Teilquadrate. Da an der Quadratseite links oben ein Drittel abgeschnitten wurde, ist es wohl vernünftig die Seitenlängen zu dritteln; das bedeutet für das Rasenquadrat, dass es in 9 Teilquadrate zerlegt werden sollte (siehe Skizze). Jedes Teilquadrat hat eine Seitenlänge von $9m : 3 = 3m$, also einen Flächeninhalt von $9m^2$. Wie aus der Zeichnung zu entnehmen ist, besteht die bereits gemähte Fläche aus 2 vollständigen Teilquadraten und 5 halbierten Teilquadraten.



Für den Flächeninhalt A der gemähten Fläche (in m^2) ergibt sich:

$$A = 2 \cdot 9 + 5 \cdot 4{,}5 = 40{,}5,$$

also $A = 40{,}5m^2$.

Zu b):

Die Seitenlänge jedes Teilquadrats ist $\frac{a}{3}m$ lang, jedes Teilquadrat hat also einen Inhalt von $\frac{a^2}{9}m^2$.

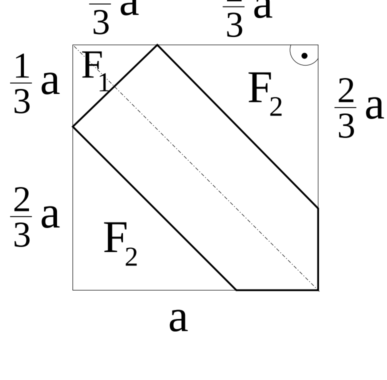
Wiederum besteht die bereits gemähte Fläche aus 2 vollständigen Teilquadraten und 5 halbierten Teilquadraten. Für den Flächeninhalt A der gemähten Fläche (in m^2) ergibt sich:

$$A = 2 \cdot \frac{a^2}{9} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{9} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{18} a^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

Das bedeutet, dass Mr. Grasy bereits die Hälfte seiner Rasenfläche gemäht hat. Doch ziemlich verblüffend, oder?

Ohne diese Gittereinteilung kann auch mit Hilfe der Fromel für die Dreiecksfläche ($1/2$ Grundseite mal Höhe, also beim rechtwinkligen Dreieck: halbes Produkt der Kathetenlängen) A schnell so berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= a^2 - F_1 - 2 \cdot F_2 \\ &= a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} a^2 \\ &= (1 - \frac{1}{18} - \frac{8}{18}) a^2 = (1 - \frac{9}{18}) a^2 = \frac{1}{2} a^2. \end{aligned}$$



M & M

X bunte M & Ms werden in eine Kiste gegeben. Der Deckel wird geschlossen und die Kiste geschüttelt. 50 % der M & Ms liegen so, dass das „M“ sichtbar ist. Diese dürfen gegessen werden. Jetzt wird die Kiste erneut geschüttelt, und es ist wieder bei 50 % der verbliebenen M & Ms das „M“ sichtbar.

Bei 5 % aller M & Ms ist das „M“ abgescheuert und nicht sichtbar. Nach dem dritten Schütteln der Kiste sind noch 25 M & Ms enthalten.

Wie viele M & Ms waren zu Anfang in der Kiste und bei wie vielen ist das „M“ nicht sichtbar gewesen?

(Judith Reinhardt, Geschwister Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:

Unter den letzten 25 M & Ms sind auch noch die 5 % ohne das „M“; da man aber nicht weiß, wie vielen M & Ms dies entspricht, muss dies erst einmal ignoriert werden.

Die 25 sind 50 % der M & Ms, die vor dem dritten Schütteln in der Kiste waren. Es waren also $25 \cdot 2 = 50$ M & Ms nach dem zweiten Schütteln in der Kiste. Dies sind wiederum 50 % derer, die vor dem zweiten Schütteln in der Kiste waren, also $50 \cdot 2 = 100$, somit $100 \cdot 2 = 200$ M & Ms, die zu Anfang in der Kiste waren. Davon haben 5 %, also 10 M & Ms, kein sichtbares „M“.

Wie funktioniert das?

Denke dir eine natürliche Zahl $Z \geq 1$, multipliziere sie mit 50, addiere 987 und verdopple dann die Summe; addiere nun 29 und subtrahiere dein (vierstelliges) Geburtsjahr.

Das Ergebnis deiner Rechnung sei A.

Die beiden letzten Ziffern von A geben dein Alter (in Jahren) an! (H.F.)

Lösung:

Es sei G das Geburtsjahr. Die Rechnung lautet dann $(Z \cdot 50 + 987) \cdot 2 + 29 - G = A$, woraus man die Gleichung $100 \cdot Z + 2003 - G = A$ herleiten kann.

Die offensichtlich zweiziffrige Zahl $2003 - G$ gibt das Alter an. Zugleich sind die 2 Ziffern von $2003 - G$ die beiden letzten Ziffern von A, während die Ziffern von $100 \cdot Z$ die übrigen Ziffern von A sind.

Wahr oder falsch?

Jede Quadratzahl (das ist das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n) hat eine ungerade Anzahl von Teilern. (H.F.)

Lösung:

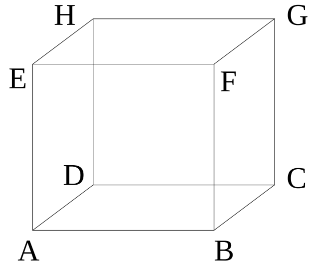
Ist t ein Teiler der Quadratzahl n^2, so ist n^2/t der zugehörige Komplementärteiler; er ist von t verschieden außer im Fall $t = n$. Fassen wir Teiler t und Komplementärteiler n^2/t zusammen, so lange $t \neq n$ ist, haben wie eine gerade Anzahl von Teilern; mit dem Fall $t = n$ ergibt sich insgesamt eine <u>un</u>gerade Anzahl, die Behauptung ist also wahr.

(Hinweis: Dies lässt sich auch durch Anwendung der Formel für die Teileranzahl aus dem Artikel „Die Anzahl der Teiler einer gegebenen Zahl“ von M. Mettler in MONOID 73 bestätigen.)

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Nummerierung von Würfelecken



Ersetze jeden Buchstaben durch eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 7$, so dass keine Zahl übrig bleibt und die Summe der beiden Zahlen an den Endpunkten einer Würfelkante jeweils eine Primzahl ist. (H.F.)

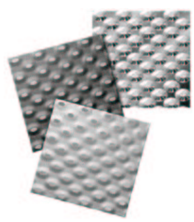
Verpackungen

$6\,000$ Streichholzschachteln sollen in Pakete mit jeweils gleicher Anzahl von Schachteln verpackt werden.
Gib an, auf wie viele Arten man das machen kann. (H.F.)

Platten

Für das Auslegen einer Fläche stehen $1m \times 1m$ große Platten zur Verfügung.

1) Wie viele Platten bilden bei einer quadratischen Fläche von $64m^2$ den Rand?
2) Wie viele Platten bilden bei einer quadratischen Fläche von n^2 Quadratmeter den Rand?
3) Eine rechteckige Fläche von $64m^2$ soll mit diesen Platten belegt werden. Die lange Seite ist dabei um $12m$ länger als die kurze. Wie viele Platten liegen hier am Rand? Begründe deine Antwort!



(Judith Reinhardt, Geschwister- Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Leichtgewicht

Die Schüler Alf, Bert und Chris aus einer 8. Klasse bestimmen ihr Gewicht, indem sich jeweils zwei Jungen gleichzeitig auf die Waage stellen:
Alf und Bert wiegen 72 kg, Bert und Chris 118 kg, Chris und Alf 80 kg.
Können diese Gewichte stimmen?

(H.F.)

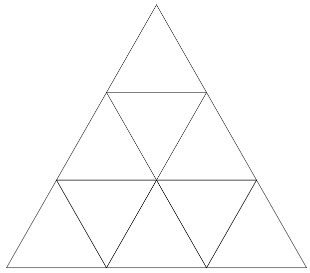
Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Gleichseitige Dreiecke

In einem gleichseitigen Dreieck wird jede der drei Seiten in drei gleichlange Teilstrecken geteilt. Durch Verbindung der Teilungspunkte erhält man kleinere gleichseitige Dreiecke – vgl. Figur.



a) Wie viele gleichseitige Dreiecke sind in der Figur zu sehen?

b) Beantworte $a)$ für den Fall, dass jede der Seiten Ausgangsdreieck in 4 (in 5, in 6) gleichlang Teilstrecken zerlegt wird.

c) Jede Seite des Ausgangsdreiecks sei nun in 100 gleich lange Teilstrecken zerlegt. Wie viele gleichseitige Dreiecke sind dann ungefähr zu sehen: $2\,500, 25\,000$ oder gar $250\,000$?

Tipp: Am Besten wäre es, wenn du eine Anzahl-Formel für $n = 3, 4, 5, \dots, 100, \dots$ angeben könntest.

(H.F.)

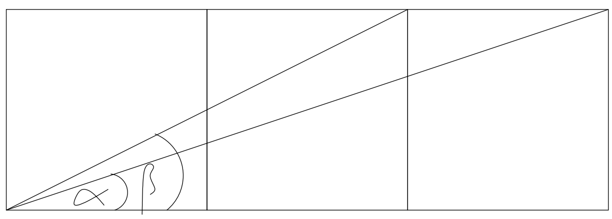
Auf dem Trödelmarkt

Fritz feilscht hartnäckig um ein altes Gramophon. Beim Preis von 270 Euro will er schließlich kaufen. Als er nun bezahlen will, stellt er fest, dass er lediglich viele 20 Euro-Scheine dabei hat. Der Verkäufer sagt: „50 Euro-Scheine habe ich einige, aber keine anderen Scheine und auch keine Münzen. Ich kann Ihnen also nicht rausgeben.“ Nach einer kurzen Überlegung findet Fritz doch eine Lösung.

Wie hat er das gemacht? (MM)

Geometrie im Rechteck

Wir fügen drei kongruente (= deckungsgleiche) Quadrate zu einem Rechteck:



Zeige: $\alpha + \beta = 45°$.

(Christoph Sievert, Bornheim)

Bereits auf Seite 19 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

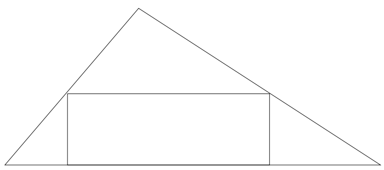
Kl. 8-13

Aufgabe 818. Verwandle Buchstaben in Zahlen!

$$\begin{array}{lrcl} (1) & A+B & = & C \\ (2) & H-J & = & G \\ (3) & C:D & = & D \\ (4) & B\cdot D & = & E \\ (5) & F:B & = & G \end{array}$$

In den Gleichungen bedeutet jeder der 9 Buchstaben eine natürliche Zahl $n, n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9\}$. Verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen. Wie lauten die Zahlengleichungen? (H.F.)

Aufgabe 819.



Über eine Seite eines Dreiecks soll ein Rechteck gelegt werden wie in der Zeichnung.

a) Finde das flächengrößte solche Rechteck!

b) Finde das Rechteck mit dem größtem Umfang!

(WJB)

Aufgabe 820. Billard

Auf einem dreieckigen Billardtisch liegen drei gleichartige Kugeln. Jede der Kugeln enthält eine Münze. Der Tisch wird in eine zufällige Richtung gekippt. Die Kugeln rollen dann in eine der Ecken. Zwei der Ecken haben Taschen, in denen jeweils zwei Kugeln gefangen werden. In die dritte Tasche passt nur eine Kugel. Der Erwartungswert des eingefangenen Betrags ist 140 Cent.

a) Welche Münzen befinden sich in den Kugeln?

b) Welche anderen ganzzahligen Cent-Beträge kann man erreichen, wenn man andere Münzen verwendet?

(WJB (nach Lewis Carrol))

Aufgabe 821. Prost Neujahr!

Ein neues alkoholfreies Getränk KIBI soll auf den Markt kommen. In der Farbe ähnelt es Bier. Wie bei Bier entsteht beim Einschenken Schaum. Dabei verwandelt sich 1% des Getränks in Schaum vom 20-fachen Volumen. Die zugehörigen Gläser mit Aufschrift „KIBI – das Kinderbier“ sollen zylindrisch sein mit (Innen-)Durchmesser 5cm. Der über das Glas hinausragende Teil der Schaumkrone soll eine Halbkugel bilden.

1. Welche Höhe H muss das Glas haben, damit man dies beim Einschenken aus einer $0,33$l – Flasche erreicht?

2. Auf welcher Höhe h beginnt dann der Schaum? (WJB)

Aufgabe 822.
Man löse das System zur Grundmenge $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &= 272 \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 &= -68 \end{aligned}$$

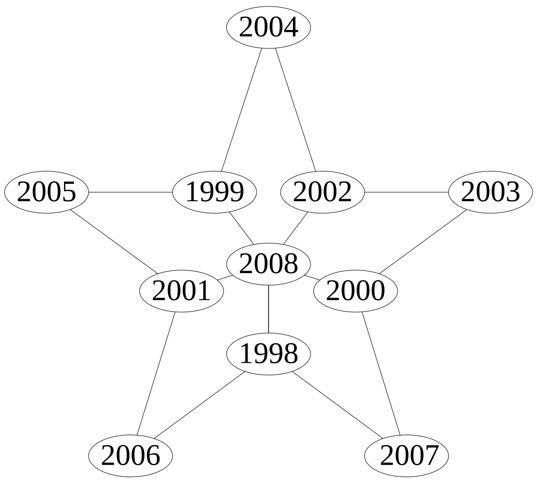
(MM)

Aufgabe 823.
Zeige, dass unter allen Dreiecken mit Eckpunkten auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ die gleichseitigen den größten Flächeninhalt haben. (VB)

* **

2004 **Lösungen zu den Neujahrsaufgaben** 2004

Sternenknobelei



Quersumme
Die kleinste Lösung muss möglichst wenige Stellen, also möglichst viele Ziffern 9 aufweisen. Wegen $2004 = 222 \cdot 9 + 6$ besteht daher die Lösungszahl aus der Ziffer 6, gefolgt von 222 Ziffern 9.

Verschlüsselte Botschaft
Die Ziffern 1 und 7 kommen zehnmal bzw. achtmal vor.
Versuchsweise setzt man daher gemäß der angegebenen Buchstabenhäufigkeit: $\mathbf{1} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{7} = \mathbf{N}$.
Das zweimal vorkommende Trippel 147 könnte dann so lauten: $147 = ESN$ oder $147 = EIN$. Wählen wir $\mathbf{4} = \mathbf{I}$, dann sollte für die dritthäufigste Zahl 9 gelten: $\mathbf{9} = \mathbf{S}$.
Aus der 5. Zeile folgt: Da die Kombination $197 = ESN$ im Deutschen sehr selten ist, wird sie wohl ein Wortende ES und den Anfangsbuchstaben eines Wortes der 6. Zeile sein; dann hätte man: $\ldots 1971819 \cdots = \ldots ES\,NE8ES \ldots$, also $\mathbf{8} = \mathbf{U}$. Aus diesen 5 Buchstaben-Zuordnungen ergibt sich nun leicht der Lösungssatz:

MONOID WUENSCHT ALLEN SEINEN LESERN EIN GUTES NEUES JAHR.

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 75

Kl. 8-13

Aufgabe 811. Zylindrisches

In einem Kreiszylinder mit dem Durchmesser $10\,mm$ und der Höhe $12\,cm$ aus leichtem Holz ist an einem Ende eine Bleikugel so eingelassen, dass er im Wasser aufrecht steht. In einem See ist der Zylinder zu $3/5$ seiner Höhe unter Wasser.

Um wieviel steigt der Wasserspiegel in einem Glaszylinder von $12\,mm$ Durchmesser, wenn wir den Holzzylinder darin schwimmen lassen? (WJB)

Lösung:

Auch im Glaszylinder muss der Boden des Zylinders um $3/5$ der Höhe, also um $72\,mm$ unter der Wasseroberfläche sein. Ist das Wasser um $x\,mm$ gestiegen, so ist der Zylinderboden um $(72 - x)\,mm$ unter dem alten Wasserspiegel. Demnach musste das Wasservolumen $5^2 \cdot \pi \cdot (72 - x) mm^3$ nach oben ausweichen. Dort berechnet sich sein Volumen zu $(6^2 \cdot \pi \cdot x - 5^2 \cdot \pi \cdot x) mm^3$. Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert $x = 50$.

Aufgabe 812. Konstantin und die Busse

Die Busse einer Linie von L nach G und zurück fahren alle 10 Minuten. Sie begegnen sich an der Haltestelle S „Schule“. Eines Tages beschließt der in G wohnende Schüler Konstantin bei schönem Wetter zu Fuß nach Hause zu gehen. Er verlässt die Schule gleichzeitig mit einem Buspaar. Nach $7\frac{1}{2}$ Minuten begegnet ihm zum ersten Mal ein Bus. Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit der Busse und die von Konstantin jeweils konstant sind.

a) Wann wird Konstantin zum ersten Mal von einem Bus überholt?

Wir nehmen weiter an, die Entfernungen LS und SG seien gleich und jeder Busfahrer habe in G, aber nicht in L, 10 Minuten Pause. Konstantin wird unterwegs von insgesamt 5 Bussen überholt. Der sechste Bus kommt gleichzeitig mit ihm in G an.

b) Wie viele Busse hat die Verkehrsgesellschaft eingesetzt?

c) Wie lange braucht Konstantin für den Heimweg?

d) Wie vielen Bussen begegnet Konstantin? Zähle dabei den Bus mit, der G gerade verlässt, wenn Konstantin dort ankommt.

(WJB/ Teil a) nach Lewis Caroll)

Lösung:

a) Der begegnende Bus muss nach weiteren $2\frac{1}{2}$ Minuten bei der Schule sein, ist also dreimal so schnell wie Konstantin. Der erste überholende Bus hat bis zum Treffpunkt 10 Minuten weniger Zeit (da er bei der Schule 10 Minuten später abgefahren ist) als Konstantin. Konstantin braucht also $t = 3(t - 10)$ Minuten. Dies ergibt $t = 15$ Minuten bis zum Treffpunkt. Also weitere $7\frac{1}{2}$ Minuten.

b) Da ein Bus in der gleichen Zeit die dreifache Strecke zurücklegt, ist der Bus, der mit Konstantin in G ankommt, gerade bei der Schule in Richtung L abgefahren, als sich Konstantin auf den Heimweg machte. Konstantin wurde also von allen den Bussen überholt (oder eingeholt), die zwischen S und L oder L und S unterwegs waren, also von der Hälfte aller Busse bis auf einen, der gerade Pause hatte. Es gibt also $2 \cdot 6 + 1 = 13$ Busse.

c) Aus Teil a) folgt, dass Konstantin alle 15 Minuten von einem Bus überholt wird. Er ist also $6 \cdot 15$ Minuten $= 90$ Minuten $= 1{,}5$ Stunden unterwegs.

d) Er begegnet alle 7,5 Minuten einem Bus, insgesamt also $\frac{90}{7{,}5} = 12$ Bussen. Dies sind gerade alle Busse, bis auf den, der Konstantin in G einholt und dann dort seine Pause beginnt.

Aufgabe 813. Lottospieler
Ein Spieler verwettet in 5 Wochen beim Lotto 465 Euro.
In jeder Woche verspielt er 11 Euro mehr als in der Vorwoche.
Wieviel hat er in der ersten und in der fünften Woche verspielt? (H.F.)

Lösung:
Der Spieler verwettet in der ersten Woche x Euro; dann verspielt er in der zweiten, dritten, vierten und fünften Woche der Reihe nach $x + 11$ Euro, $x + 22$ Euro, $x + 33$ Euro, $x + 44$ Euro.
Insgesamt hat er 465 Euro verspielt. Es gilt also

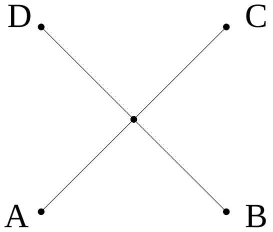
$$x + (x + 11) + (x + 22) + (x + 33) + (x + 44) = 465 \text{ oder } 5x + 110 = 465.$$

Somit ist $x = 71$. In der ersten Woche verwettet der Spieler 71 Euro, in der fünften Woche 115 Euro.

Aufgabe 814. Spiel mit Primzahlen
Wähle eine Primzahl p mit $p > 3$. Quadriere p und addiere 16. Dividiere das Ergebnis durch 12. Dabei bleibt immer der Rest 5.
Kannst du dieses Phänomen erklären? (VB)

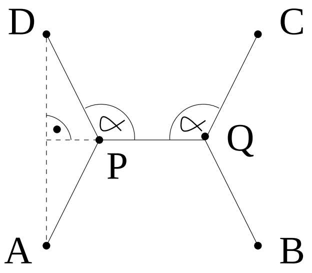
Lösung:
Die Primzahl p ist von der Form $p = 6n + 1$ oder $p = 6n - 1$. Dies gilt wegen: $6n + 2$ ist durch 2 teilbar, $6n + 3$ ist durch 3 teilbar, $6n + 4$ ist durch 2 teilbar und $6n + 5 = 6(n + 1) - 1$.
Deshalb gilt: $p^2 + 16 = (6n \pm 1)^2 + 16 = 36n^2 \pm 12n + 1 + 16$ und
$(p^2 + 16)/12 = 3n^2 \pm n + 1/12 + 1 + 4/12 = 3n^2 \pm n + 1 + 5/12$.
Das heißt: $(p^2 + 16) : 12 = (3n^2 \pm n + 1)$ Rest 5.

Aufgabe 815. Kurze Wege



Die Punkte A, B, C, D seien Eckpunkte eines Quadrats. Durch die sich kreuzenden Strecken AC und BD ist jeder der Punkte A, B, C, D von jedem anderen Punkt aus erreichbar.
Kannst du ein kürzeres A, B, C, D verbindendes Wegenetz angeben? (H.F.)

Lösung:



Es sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit): $|AB| = |BC| = 1$.
Dann hat das aus den sich kreuzenden Strecken AC und BD bestehende Wegenetz die Länge $2\sqrt{2} \approx 2,83$.
Im Wegenetz links wurden auf der Mittelparallelen zu AB und DC die Punkte P und Q so gelegt, dass $\alpha = 120°$ ist. Dann ist $\angle ADP = 30°$. Wegen $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} : |DP|$, also $|DP| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Damit ergibt sich für die Länge von PQ:

$$|PQ| = 1 - 2 \cdot (|DP| \cdot \sin 30°) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Somit hat das Wegenetz links die Gesamtlänge

$$4 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \approx 2,73.$$

Man kann zeigen: Das Wegenetz in der Figur links ist das kürzest mögliche.

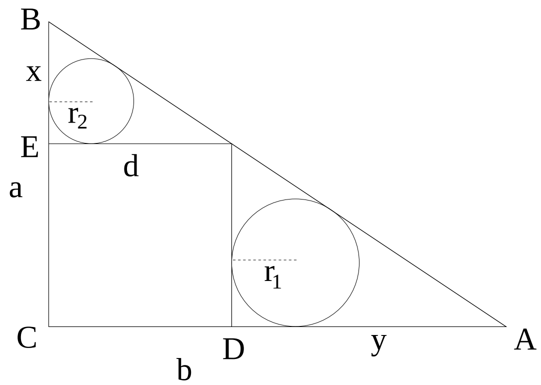
Aufgabe 816. Von Rechtecken und Quadraten
Unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat die größte Fläche.
Beweise diese Aussage ohne die Verwendung der Differentialrechnung. (WJB)

Lösung:
Betrachte ein Rechteck mit der längeren Seite x und der kürzeren Seite y.
Setze $a = \frac{x+y}{2}$ und $b = \frac{x-y}{2}$, also $x = a + b$ und $y = a - b$.
Dann hat das Rechteck den gleichen Umfang $2x + 2y = 4a$ wie das Quadrat mit der Seitenlänge a. Die Fläche des Rechtecks $xy = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ist aber kleiner als die Quadratfläche a^2.

Aufgabe 817.

In ein rechtwinkliges Dreieck ABC wird zunächst ein Quadrat wie in der Abbildung angegeben einbeschrieben. Danach wird in die verbleibenden kleinen rechtwinkligen Dreiecke jeweils ein Kreis einbeschrieben.

Man ermittle die Längen der Quadratseite d und der Kreisradien r_1 und r_2 in Abhängigkeit von den Katheten a und b.



(Steffen Biallas, Albert–Einstein–Gymnasium Magdeburg)

Lösung:
Der Kathetenabschnitt AD wird mit y, der Kathetenabschnitt BE mit x bezeichnet (vgl. obige Skizze).

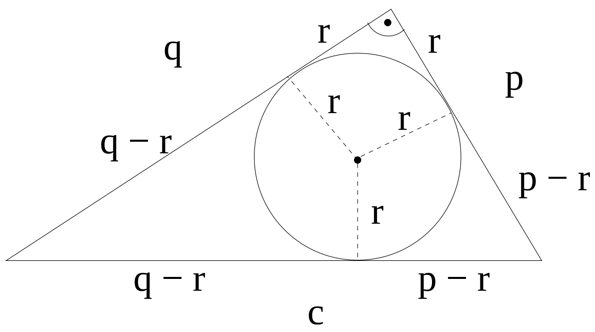
Dann gilt für die drei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke: $\frac{y}{d} = \frac{d}{x} = \frac{b}{a}$.
Außerdem gilt $y + d = b$ und $x + d = a$.
Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$y = \frac{b}{a} \cdot d = \frac{b}{a} \cdot (b - y) \Rightarrow y \cdot (1 + \frac{b}{a}) = \frac{b^2}{a} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a+b},$$

$$x = \frac{a}{b} \cdot d = \frac{a}{b}(a - x) \Rightarrow x \cdot (1 + \frac{a}{b}) = \frac{a^2}{b} \Rightarrow x = \frac{a^2}{a+b}.$$

Aus beiden Zeilen folgt jeweils für d: $\quad d = \frac{ab}{a+b}$.

Zur Berechnung des Innkreisradius r in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen p, q kann man folgende Figur nutzen:



Benutzt wird die Tatsache, dass die Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an einem Kreis gleich groß sind. Außerdem entsteht am rechten Winkel ein Quadrat aus den Radien und den Tangentenabschnitten, da in diesem Viereck drei rechte Winkel sind.
Für die Hypotenuse c dieses rechtwinkligen Dreiecks gilt:
$c = p + q - 2r$, also $2r = p + q - c$.
Damit gilt für die zu lösende Aufgabe:

$$\begin{aligned} 2r_1 &= y + d - \sqrt{y^2 + d^2} = \frac{b^2 + ab - \sqrt{b^4 + a^2b^2}}{a+b} = \frac{b(a+b) - b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \\ &= b - \frac{b}{a+b}\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2r_2 &= x + d - \sqrt{x^2 + d^2} = \frac{a^2 + ab - \sqrt{a^4 + a^2b^2}}{a+b} = \frac{a(a+b) - a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \\ &= a - \frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Ergebnisse: $d = \frac{ab}{a+b}, \quad r_1 = \frac{b}{2} \cdot (1 - \frac{1}{a+b} \cdot \sqrt{a^2+b^2}), \quad r_2 = \frac{a}{2} \cdot (1 - \frac{1}{a+b} \cdot \sqrt{a^2+b^2})$.

Lösungen mit Pfiff (Klasse 8 – 13)

In dieser Rubrik sollen auch interessante Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ vorgestellt bzw. die Autoren/innen besonders schöner Lösungen erwähnt werden – soweit sie der Redaktion von den korrigierenden Lehrerinnen und Lehrern mitgeteilt werden.

✎ So haben **Simon Bats** vom Gymnasium Oberursel, **Alexander Hillert** vom Immanuel-Kant-Gymnasium in Pirmasens, **Claudia Mack** aus Ludwigshafen und **Stefanie Tiemann** vom Gymnasium Marienberg in Neuss schöne Lösungen der Aufgabe 807 (Heft 74) eingeschickt. Stefanie Tiemann hat sich dabei der „Modulo-Rechnung“ bedient:
Für jede Primzahl $p \geq 5$ gilt $p \equiv 1 \mod 6$ oder $p \equiv 5 \mod 6$. Wird eine Zahl $5 \mod 6$ mit einer Zahl $5 \mod 6$ multipliziert, so ist das Produkt $25 \equiv 1 \mod 6$.
Also gilt für p^n: $p^n \equiv 1 \mod 6$ oder $p^n \equiv 5 \mod 6$.

- Ist $p^n \equiv 1 \mod 6$, so ist $p^n - 1 \equiv 0 \mod 6$, also ist $p^n - 1$ durch 6 teilbar.
- Ist $p^n \equiv 5 \mod 6$, so ist $p^n + 1 \equiv 0 \mod 6$, also ist $p^n + 1$ durch 6 teilbar.

✎ Eine gelungene Lösung der Lottospieler-Aufgabe (805 aus Heft 74) hat **Christoph Karg** vom Geschwister-Scholl-Gymnasium in Ludwigshafen eingeschickt.

$*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Pro und Contra Computer

Prof. Dr. Kurt Rosenbaum aus Erfurt geht in einem Schreiben an M. Mettler auf dessen Beitrag „Ein Wunderkind“(Heft 74) ein und bemerkt, dass er das dort geschilderte Verfahren des Kubikwurzelziehens aus bis zu sechsstelligen Zahlen im Kopf aus Klasse 8 seiner Schulzeit kannte, und schildert die Freude, die er darüber empfand, etwas ganz Besonderes zu können, was die Überlegenheit des eigenen Denkens über den Taschenrechner zeige.

Andererseits ist der Computereinsatz unverzichtbar, wenn es gilt, in Bereiche großer Zahlen vorzudringen. In Ergänzung des Artikels „Über Teilersummen und vollkommene Zahlen“ von E. Kroll (ebenfalls Heft 74) weist Prof. Rosenbaum darauf hin, dass zu den 33 Mersenneschen Primzahlen, die das Buch „The New Book of Prime Number Records“ von P. Ribenboim auflistet, inzwischen sechs weitere Mersennesche Primzahlen gefunden wurden. Es sind die Zahlen

$$\begin{array}{llll} M_{34} = 2^{1257787} - 1 & (1996), & M_{35} = 2^{1398269} - 1 & (1996), \\ M_{36} = 2^{2976221} - 1 & (1997), & M_{37} = 2^{3021377} - 1 & (1998), \\ M_{38} = 2^{6972593} - 1 & (1999), & M_{?} = 2^{13466917} - 1 & (2001). \end{array}$$

Das Fragezeichen als Index der letzten aufgeführten Zahl bedeutet, dass $2^{13466917} - 1$ zwar eine Mersennesche Primzahl ist, aber noch geprüft werden muss, ob zwischen ihr und der Primzahl M_{38} noch eine weitere Mersennesche Primzahl liegt. Dazu sind alle Primzahlen p zwischen 6972593 und 13466917, das sind weit über eine Million Primzahlen, daraufhin zu untersuchen, ob $2^p - 1$ eine Primzahl ist oder nicht.

Die MONOID-Redaktion dankt Prof. Rosenbaum für seinen Hinweis.

Die Seite für den Computer-Fan

Für gute Rechner

Berechne den Wert von

a) $x^2 - yz$ für $x = 123\,456\,789$, $y = 162\,558\,760$, $z = 93\,760\,427$;

b) $9x^4 - y^4 + 2y^2$ für $x = 10864$, $y = 18817$

einmal mit dem Taschenrechner (wirklich!), dann aber auch durch schriftliche Rechnung. Vergleiche die Ergebnisse! Erklärung? (H.F.)

Einsendung der Lösung an die MONOID-Redaktion in Mainz.

Lösung der Computer-Aufgaben aus Monoid 74

Wahr oder falsch?

$73\ 939\ 133$
$73\ 939\ 13$
$73\ 939\ 1$
$73\ 939$
$73\ 93$
$73\ 9$
73
7

Wenn man bei der Zahl $73\,939\,133$ von rechts her nacheinander die jeweils letzte Ziffer wegstreicht, dann sind alle acht Zahlen der Figur Primzahlen. (gefunden von H.F.)

Lösung: Wahr! Die Überprüfung kann man an Hand einer Primzahltabelle, mit einem eigenen (kleinen!) PASCAL-Programm oder – am bequemsten – mit DERIVE vornehmen.

Gleichung

Hat die Gleichung $x^2(x^2+1) + y^2(y^2+1) + z^2(z^2+1) = 2t^2(t^2+1)$ ganzzahlige Lösungen? (H.F.)

Lösung: Ja! Triviale Lösungen erhält man für $x = 0$, $y = z = t \in \mathbb{Z}$; ferner sind mit $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$ auch $(\pm x, \pm y, \pm z, \pm t) \in \mathbb{Z}^4$ Lösungen. Nach nicht trivialen Lösungen fahndet man zweckmäßiger Weise mit einem Computer-Programm. Simon Bats vom Gymnasium Oberursel und Stefanie Tiemann vom Gymnasium Marienberg Neuss haben für den Bereich $1 \le x \le y \le z \le 100$ folgende Lösungsquadrupel ermittelt:

x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t
3	5	8	7	12	20	32	28	17	63	80	73	27	45	72	63
5	16	21	19	13	25	30	28	18	30	48	42	28	32	60	52
6	10	16	14	13	35	48	43	19	80	99	91	30	50	80	70
7	8	15	13	14	16	30	26	20	64	84	76	32	45	77	67
7	33	40	37	14	66	80	74	21	24	45	39	33	55	88	77
9	15	24	21	15	25	40	35	21	35	56	49	35	40	75	65
9	56	65	61	15	48	63	57	22	48	70	62	36	60	96	84
10	32	42	38	16	39	55	49	24	40	64	56	40	51	91	79
11	24	35	31	17	18	23	22	26	70	96	86	42	48	90	78
11	85	96	91												

Es gibt aber durchaus noch größere Lösungen, z.B. $x = 64, y = 221, z = 285, t = 259$.

(Ebenfalls als Computer-Fan haben sich mit der einen oder anderen Aufgabe oder beiden Aufgaben beschäftigt: Jan Boscheinen, Alexander Hillert, Claudia Mack und Catherina Wirtz.)

Eine Verallgemeinerung der Aufgabe 808

von Martin Mettler

In MONOID 75 auf der Seite 25 wurde die Lösung zur Neuen Aufgabe Nummer 808 veröffentlicht.
Dort wird gezeigt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken im Inneren oder (auch) auf dem Rand eines Rechtecks liegen, höchstens die Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks haben kann.

Es sei nun (P) ein Parallelogramm $KLMN$ mit der Grundlänge $|KL| = g$, der entsprechenden Höhenlänge h und dem Flächeninhalt $F(KLMN)$.
Wir wollen zeigen, dass der Flächeninhalt $F(ABC)$ eines Dreiecks, dessen Ecken im Inneren oder (auch) auf dem Rande von (P) liegen, höchstens die Hälfte von $F(KLMN)$ sein kann.

Zunächst zeigen wir, dass jedes Dreieck, dessen Ecken A, B und C im Inneren von (P) liegen, auf ein Dreieck $A'B'C'$ mit größerem Flächeninhalt zurückgeführt werden kann, dessen Ecken alle auf dem Rand von (P) liegen.

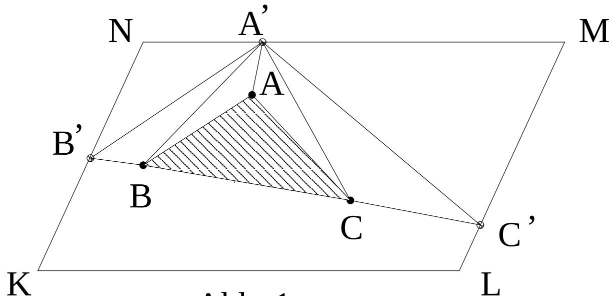


Abb. 1

Sei also ABC ein beliebiges Dreieck mit allen Ecken im Inneren von (P). Die Höhe durch A schneide NM in A' (siehe Abb. 1).
Es gilt offenbar:

$$F(ABC) < F(A'BC). \qquad (1)$$

Schneiden die Verlängerungen von BC die Seiten KN und LM von (P) in B' bzw. C', so gilt

$$F(A'BC) < F(A'B'C'). \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $F(ABC) < F(A'B'C')$, was zu zeigen war.

Demnach genügt es, wenn wir folgende zwei Fälle betrachten:

1.Fall:
Zwei Eckpunkte (z.B. die Ecken B und C) liegen auf einer Seite von (P) (vgl. Abb. 2a und 2b).

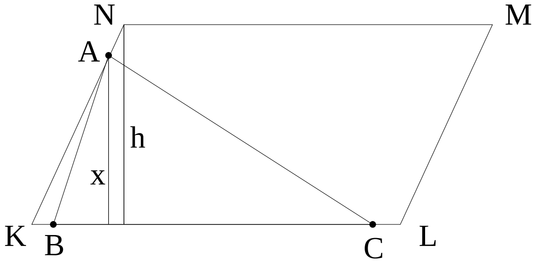


Abb. 2a

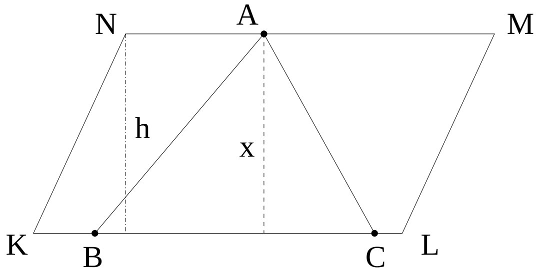


Abb. 2b

Im Dreieck ABC sei a die Länge der Grundseite BC und x die Länge der entsprechenden Höhe. Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks $F(ABC) = \frac{1}{2}ax$.
Aber $0 < x \leq h$, also ist $F(ABC) = \frac{1}{2}ax \leq \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}F(KLMN)$.

2.Fall:
Die Eckpunkte A, B und C liegen auf verschiedenen Seiten von (P) (siehe Abb. 3).

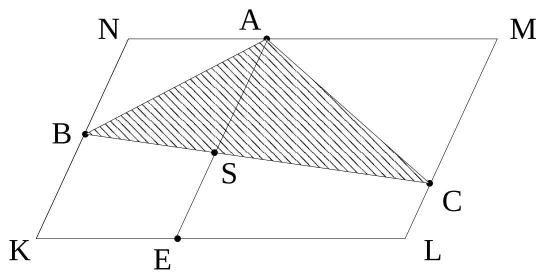


Abb. 3

Es sei $AE||KN$ und S der Schnittpunkt von AE mit BC. Damit zerlegt sich (P) in zwei Parallelogramme $KEAN$ und $ELMA$, in denen nach dem 1. Fall jeweils gilt:

$$F(ABS) \leq \frac{1}{2}F(KEAN) \text{ und } F(ASC) \leq \frac{1}{2}F(ECMA).$$

Durch Addition folgt $F(ABC) \leq \frac{1}{2}F(KLMN)$.

MONOID gratuliert!

Im Rahmen eines Festaktes, in dem auch der **Karl Heinz Beckurts-Preis 2003** verliehen wird, vergibt am 12. Dezember 2003 im Max-Josef-Saal der Münchener Residenz die Karl Heinz Beckurts-Stiftung den Lehrerpreis 2003 der Helmholtz-Gemeinschaft Deutscher Forschungszentren e. V. für hervorragende Leistungen in der Anregung von Schülerinnen und Schülern zu besonderen naturwissenschaftlichen Interessen.

Für seine Verdienste auf diesem Gebiet durch die mathematische Schülerzeitschrift MONOID gehört OStR i. R. **Martin Mettler** zu den Preisträgern. Die MONOID-Redaktion findet, dass der Begründer dieser geschätzten mathematischen Schülerzeitschrift, deren Verbreitung sich inzwischen über die ganze Bundesrepublik erstreckt, eine solche Auszeichnung längst verdient hat und gratuliert ihm ganz herzlich!

$*****$

Eine weitere sehr erfreuliche Nachricht betrifft unsere „Alt“- Monoidanerin **Kerstin Bauer**: Sie ist auch in diesem Jahr wieder **Siegerin im Bundeswettbewerb Mathematik** geworden. Auch ihr ganz herzlichen Glückwunsch von der MONOID-Redaktion!

Der indirekte Beweis
Beweisen kann man lernen

von Hartwig Fuchs

Widerspruchsbeweise sind ein unentbehrliches Arbeitsmittel des Mathematikers. Was allerdings Widerspruchsbeweise sind, das lässt sich mit wenigen Worten nicht sagen, weil sie – anders als der direkte Beweis – eine Vielfalt logischer Varianten besitzen.

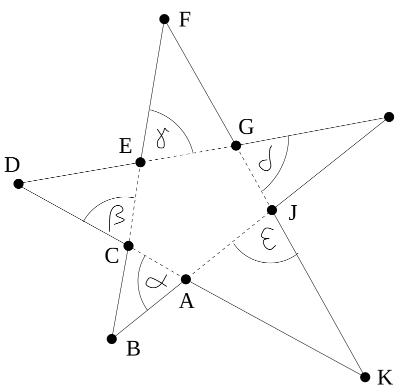
Eine erste, häufig vorkommende, dieser Varianten – die Widerlegung quantifizierter Aussagen – wurde bereits im MONOID 75 beschrieben.

Hier soll nun die wohl wichtigste Form eines Widerspruchsbeweises, der sogenannte **indirekte Beweis** [1] dargestellt werden.

Der indirekte Beweis gründet auf der Erfahrung, dass es bei manchen Behauptungen B sehr schwierig oder langwierig oder gar unmöglich ist, die Gültigkeit von B direkt nachzuweisen, während sich die Falschheit der Gegenaussage $\neg B$ (Negation von B) oft leichter nachweisen lässt. Ist aber gezeigt, dass $\neg B$ falsch ist, dann ist B wahr, was man beweisen wollte.

Wegen dieses Umwegs über $\neg B$ nennt man einen solchen Beweistyp indirekt.

König Salomos Stern



König Salomo sagte zu seinem Goldschmied:„Man hat mir von einem fünfzackigen Stern berichtet, bei dem die 10 Randstrecken $AB, BC, \dots, JK, KA$ (vgl. Figur) in dieser Reihenfolge die Längen $1, 2, \dots, 9, 10$ haben. Mach‘ mir einen solchen Stern!“

Der Goldschmied versuchte viele Male, König Salomos Auftrag auszuführen. Aber vergebens: Es wollte ihm nicht gelingen, den befohlenen Stern herzustellen, so dass er schließlich zu der Überzeugung gelangte

B: Einen solchen Stern gibt es nicht.

Wie konnte er seinem König dieses negative Ergebnis seiner Bemühungen beibringen?

Hier half ihm nur die Logik – denn König Salomo, der berühmt war für seine Weisheit, würde einen korrekten Beweis von B wohl akzeptieren müssen.

Der Goldschmied konnte B etwa wie folgt beweisen.

Voraussetzungen (nur die drei wichtigsten sind genannt):

- V_1: AB ist kürzer als BC, ..., JK ist kürzer als KA;
- V_2: Im Dreieck liegt der kürzeren Seite der kleinere Winkel gegenüber;
- V_3: Scheitelwinkel sind gleich groß.

Weil er seinem König nicht direkt widersprechen wollte, traf er dann noch die Annahme $\neg B$: Der Stern ist machbar – wobei er B zunächst als eine wahre Aussage voraussetzte.

[1] Bereits die alten Griechen kannten den indirekten Beweis – man denke nur an ihren berühmten Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$; die Logiker des Mittelalters nannten ihn „reductio ad absurdum“ (Rückführung auf das Absurde) – eine Bezeichnung, die auch heute noch manchmal verwendet wird.

Aus V_1, V_2 konnte er nun folgern: α ist größer als $\angle BCA$; wegen V_3 gilt $\angle BCA = \beta$, so dass $\alpha > \beta$ ist. Analog erhielt er die Ungleichungskette $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \epsilon > \alpha$, so dass $\alpha > \alpha$ und somit $\alpha \neq \alpha$ ist.
Damit hat er logisch korrekt die der wahren Aussage $\alpha = \alpha$ widersprechende Aussage $\alpha \neq \alpha$ hergeleitet. Diesen Widerspruch konnte er nur dadurch beseitigen, dass er seine Annahme $\neg B$ verwarf – sie musste falsch sein! Dann aber galt B; und das wollte er seinem König beweisen.

Diesem Beispiel entnehmen wir, wie ein indirekter Beweis aussehen wird. Der indirekte Beweis einer Behauptung B ist eine Kette von logisch richtigen Schlüssen, die ihren Ausgang nimmt von Voraussetzungen V sowie von der **Annahme $\neg$B**, die hier zunächst als wahr gelten soll.
Das Mittelstück der Kette bildet eine Aussage, für die gilt:
Sie steht im Widerspruch

- zu einer bereits anderweitig bewiesenen Aussage (Satz); oder
- zu einer der Voraussetzungen V; oder
- zur Annahme $\neg B$.

$(*)$ Mit Hilfe dieses Widerspruchs – er sei W genannt – lässt sich dann B beweisen.

$$\begin{array}{l}\text{Voraussetzungen V}\\ \text{Annahme } \neg\text{B}\end{array} \xrightarrow[\text{Schlüsse}]{\text{logische}} \text{Widerspruch W} \xrightarrow[\text{Schlüsse}]{\text{logische}} \text{Behauptung B}$$

Der zweite Beweisschritt $(*)$ eines indirekten Beweises lässt sich so begründen: Aus einer wahren Aussage X kann man bei richtiger Anwendung der Schlussregeln nur eine wahre Aussage Y folgern. Deshalb erhält man in einer korrekten Schlusskette nur dann eine falsche Folgerung Y, wenn bereits die Voraussetzung X falsch ist.
Angewendet auf den hier betrachteten Fall $(*)$ bedeutet dies: Da man im ersten Beweisschritt eine Aussage W hergeleitet hat, die stets falsch ist, muss bereits die Gesamtvoraussetzung G (Es gelten die Voraussetzungen V und die Annahme $\neg B$.) der Herleitung falsch sein.
Da die Komponente V von G stets wahr ist, muss die Falschheit von $\neg B$ die Ursache für die Falschheit von G sein. Wenn aber $\neg B$ falsch ist, dann ist B selbst wahr – womit $(*)$ gezeigt ist.
In der mathematischen Praxis endet ein indirekter Beweis nach dem ersten Schritt mit dem Hinweis „Widerspruch“– auf eine Begründung des zweiten Schrittes $(*)$ wird verzichtet.

Das Verfahren des indirekten Beweises wird nun für die oben genannten drei Fälle an Beispielen veranschaulicht.

Ein Widerspruch zu einem bereits bewiesenen Satz wird hergeleitet.
Die Geschichte von König Salomos Stern ist offenbar ein erstes Beispiel für den hier betrachteten Typus eines indirekten Beweises. Es folgt ein weiteres Beispiel.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$?

Man bestimme Zahlen x und y, die die Bedingungen erfüllen

$$(1) \quad x + y = 1 \qquad (2) \quad x^2 + y^2 = 2 \qquad (3) \quad x^3 + y^3 = 3.$$

Bei der Berechnung von Zahlen x, y stützt man sich natürlich auf die Gleichungen (1) bis (3). Das ist logisch nur zulässig, wenn sie sinnvoll sind – und das sind sie erst, wenn man die Annahme $\neg B$ macht, nämlich

$\neg B$: Es gibt Zahlen x, y, die (1)-(3) erfüllen.

Aus (1) bis (3) folgt dann

$1 = x + y = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ und $(4) \quad xy = -\frac{1}{2}$ sowie

$1 = x + y = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 3 + 3xy$ und $(5) \quad xy = -\frac{2}{3}$.

Aus (4) und (5) erhält man die Aussage S: Es gilt $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. Diese Aussage widerpricht natürlich der Aussage $\neg S$: Es ist $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$.

Aus der Annahme $\neg B$ haben wir also mit korrekten Schlüssen den Widerspruch: Es gelten S und zugleich $\neg S$ – hergeleitet. Deshalb ist $\neg B$ falsch; es gilt B und das heißt: Die Aufgabe hat keine Lösung.

Ein Widerspruch zu einer der Voraussetzungen V wird hergeleitet.

Eine Ungleichung für reelle Zahlen

Man beweise die Behauptung

B: Für alle reellen Zahlen $x \neq 0, y \neq 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$(1) \quad \dfrac{x^2}{x^2 + n} < \dfrac{y^2}{y^2 + n}$, wenn $x^2 < y^2$ ist.

Zum Beweis von B treffen wir die Annahme (die zunächst als wahr betrachtet wird)

$\neg B$: Es gibt reelle Zahlen $x \neq 0, y \neq 0$ und Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit

$(2) \quad \dfrac{x^2}{x^2 + n} \geq \dfrac{y^2}{y^2 + n}$, wenn $x^2 < y^2$ ist.

Aus (2) folgt nach Division durch den jeweiligen Zähler

$$\frac{1}{1 + \frac{n}{x^2}} \geq \frac{1}{1 + \frac{n}{y^2}} \quad \Longrightarrow \quad 1 + \frac{n}{y^2} \geq 1 + \frac{n}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y^2} \geq \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq y^2.$$

Mit der letzten Ungleichung haben wir aus $\neg B$ einen Widerspruch zur Voraussetzung $x^2 < y^2$ hergeiletet. Daher ist $\neg B$ falsch; es gilt die mit B behauptete Ungleichung (1).

Kubikzahlen und ihre Teiler

n^3 sei eine natürliche Kubikzahl > 1 mit genau 4 Teilern. Dann gilt die Behauptung B: n ist eine Primzahl.

Beweis:

Voraussetzungen sind u. a. $V_1 : n \in \mathbb{N}$; $\quad V_2 : n^3$ hat genau 4 Teiler.

Annahme $\neg B$: n ist keine Primzahl.

Da $\neg B$ als wahr voraussgesetzt wird, gibt es wegen V_1 zwei natürliche Zahlen r und s, $1 < r, s < n$, so dass $n = r \cdot s$ ist. Dann aber hat $n^3 = (r \cdot s)^3$ mindestens 5 Teiler, nämlich $1, r, r^2, r^3, n^3$; das heißt: Es gilt die Negation $\neg V_2$ der Voraussetzung V_2. Der Widerspruch: Es gelten V_2 und zugleich $\neg V_2$ zeigt, dass die Annahme $\neg B$ falsch und also die Behauptung B richtig ist.

Ein Widerspruch zu einer Annahme $\neg B$ wird hergeleitet.

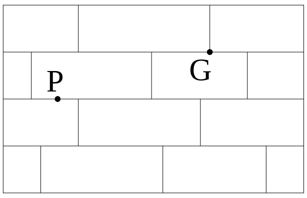
Niemals eine Quadratzahl

Behauptung B: Das Produkt von 4 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist niemals eine Quadratzahl.

Kurzform von B: $(1) \quad P = n(n+1)(n+2)(n+3) \neq Q^2$ für jedes $n \geq 1, Q \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Annahme $\neg B$: Es gilt $P = Q^2$ für ein $n \geq 1$.
Aus (1) folgt daher $(2) \quad P = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$.
Wegen des Summanden n^4 in (2) und wegen der Annahme $P = Q^2$ machen wir den Ansatz
$(3) \quad Q^2 = (n^2 + an + b)^2 = n^4 + 2an^3 + (a^2 + 2b)n^2 + 2abn + b^2$.
Vergleichen wir (2) mit (3), dann folgt aus $P = Q^2$:
$b = 0$ und es gilt $\quad (4) \quad Q^2 = n^4 + 2an^3 + a^2n^2$.
Aus (2) und (4) schließt man, dass die Aussage B: $P \neq Q^2$ gilt.
Damit haben wir den Widerspruch: Es gelten B und $\neg B$ – woraus man folgert, dass $\neg B$ falsch und somit B wahr ist.

Ein unmöglicher Rundgang



Ein Briefträger soll in seinem Bezirk (dessen Straßen durch die Strecken – auch die Randstrecken – der Figur dargestellt sind) die Post so austragen, dass er vom Postamt P startend durch jede Straße kommt, ohne dass er ein Straßenstück zwei Mal entlang geht und dass seine Tour im Postamt P endet. Kann er das?

Wir behaupten B: Ein solcher Rundgang ist nicht möglich.
Statt des Versuchs, durch systematisches Probieren die Behauptung B als wahr zu erweisen, gehen wir aus von der
Annahme $\neg B$: Es gibt einen vollständigen Rundgang.
Der Postbote kommt bei seinem Gang, der ihn wegen $\neg B$ durch alle Straßen führt, auch an eine Stelle $G \neq P$ mit einer Straßengabelung. Wie er nun auch von G aus weitergeht, irgendwann muss er das noch nicht benutzte Wegstück passieren, das in G endet. Damit aber endet sein Rundgang offenbar in G. Wegen $P \neq G$ gilt also B und dies widerspricht der Annahme $\neg B$. Aus diesem Widerspruch folgt B, nämlich: Einen Rundgang der geforderten Art gibt es nicht.

Der mit den letzten beiden Beispielen veranschaulichte Typ indirekten Beweises bedarf wohl noch eines Kommentars.
Aus der Annahme, dass die Negation $\neg B$ einer zu beweisenden Behauptung B wahr ist, wird mit logisch richtigen Schlüssen gefolgert, dass B wahr ist – und das war doch das Ziel der Beweisbemühung. Ist damit der Beweis von B erbracht? Keineswegs! Erst die anschließende Überlegung, dass $\neg B$ und B zusammen einen Widerspruch W bilden, erlaubt den Schluss:
$\neg B$ ist falsch, also ist B wahr (vgl. oben die Begründung von $(*)$).

$$\boxed{\neg B \longrightarrow \neg B \text{ und } B \longrightarrow B}$$

Der Widerspruch W ist also hier das einzige und damit ausschlaggebende Argument, um die Wahrheit der Behauptung B nachzuweisen. Ist ein solches Vorgehen nicht in sich selbst widersprüchlich? Die Logik zeigt aber, dass hier alles mit rechten Dingen zugeht (vgl. die Begründung von $(*)$).
Weil nämlich die Falschaussage W: Es gelten $\neg B$ und zugleich B – nur aus der falschen Voraussetzung gefolgert werden kann, muss die Voraussetzung $\neg B$ entgegen der Annahme falsch sein. Dann aber bleibt für B (wegen das Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, des sogenannten tertium non datur) nur die eine Möglichkeit: B muss wahr sein.

Über die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen

von Hartwig Fuchs

Satz: Jede natürliche Zahl > 1, die keine Primzahl ist, kann nur auf (genau) eine Weise in Primfaktoren zerlegt werden.

Wir wollen den Beweis von Ernst Zermelo (1871-1951) vorstellen.
Zermelo wurde 1908 durch seine Axiomatisierung der damals noch recht neuen Mengenlehre Georg Cantors allgemein bekannt.

Annahme: Es gibt natürliche, nicht-prime Zahlen > 1, die auf zwei verschiedene Arten zerlegbar sind. Die kleinste von ihnen sei Z.

Dann ist
$Z = p_1 p_2 \dots p_n$ und $Z = P_1 P_2 \dots P_m$ mit p_i, P_j Primzahlen.
Für die Primfaktoren p_i, P_j gilt:

(1) Jedes p_i ist von jedem P_j verschieden für $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Wäre nämlich ein p_i einem P_j gleich, dann wäre Z' mit $Z' = \frac{Z}{p_i} = \frac{Z}{P_j}$ auf zwei verschiedene Arten in Primfaktoren zerlegbar, und es wäre $Z' < Z$ im Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von Z. Also gilt (1).

Bilde nun den Quotienten $\frac{Z}{Z} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{P_1 P_2 \dots P_m} = 1$. Daraus folgt

(2) $\frac{p_2 \dots p_n}{P_2 \dots P_m} = \frac{P_1}{p_1}$. Wegen $p_1 \neq P_1$ ist der Bruch $\frac{P_1}{p_1}$ nicht kürzbar.

Aus (2) folgt daher $P_1 = p_2 \dots p_n$ und $p_1 = P_2 \dots P_m$.

Diese beiden Gleichungen widersprechen der Voraussetzung, dass p_1 und P_1 Primzahlen sind.
Daher ist die eingangs getroffene Annahme falsch. Es gilt also der behauptete Satz.

Landeswettbewerb Mathematik, 3. Runde 2004: Die TeilnehmerInnen

Martin Altmayer	Herzog-Johann-Gymnasium	Simmern,
Johannes Antoni	Eduard-Spranger-Gymnasium	Landau,
Ira Caspari	Sophie-Hedwig-Gymnasium	Diez,
Matthias Degen	Stefan-George-Gymnasium	Bingen,
Andreas Dixius	Max-Planck-Gymnasium	Trier,
Torsten Ewert	Werner-Heisenberg-Gymnasium	Neuwied,
Yaschar Fahimi-Zand	Cusanus-Gymnasium	Wittlich,
Michaela Fischer	Sebastian-Münster-Gymnasium	Ingelheim,
Oliver Freyermuth	Are-Gymnasium	Bad Neuenahr-Ahrw.,
Julia Goetz	Bisch. Cusanus-Gymnasium	Koblenz,
Edith Hoffmann	Cusanus-Gymnasium	Wittlich,
Tobias Junk	Gymnasium an der Stadtmauer	Bad Kreuznach,
Thomas Kochenburger	Pamina Schulzentrum	Herxheim,
Christian Mandery	Paul-von-Denis-Gymnasium	Schifferstadt,
Maximilian Merkert	Hohenstaufen-Gymnasium	Kaiserslautern,
Hanno Merten	F.-Wilhelm-Gymnasium	Trier,
Udo Muttray	Rabanus-Maurus-Gymnasium	Mainz,
Kerstin Muxfeld	Lina-Hilger-Gymnasium	Bad Kreuznach,
Kilian Nickel	Rhein-Gymnasium	Sinzig,
Sonja Paul	Johannes-Gymnasium	Lahnstein,
Christian Reinecke	Thomas-Morus-Gymnasium	Daun,
Judith Reinhardt	Geschwister-Scholl-Gymnasium	Ludwigshafen,
Anna Schmalen	Stefan-George-Gymnasium	Bingen,
Paul Schreiner	Leininger-Gymnasium	Grünstadt,
Christina Simon	Elisabeth-Langgässer-Gymnasium	Alzey,
Brain Tarasinski	Carl-Bosch-Gymnasium	Ludwigshafen,
Jennifer Wohlleben	Megina Gymnasium	Mayen.

Hinzu kommen 3 TeilnehmerInnen aus Ägypten.

Wo steckt der Fehler?

Das fragten wir in MONOID 75 auf Seite 29, wo ein altes aus vier Bauteilen bestehendes Gerät vorgestellt wurde. Auf zwei Lösungswegen war die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren des Gerätes ermittelt worden. Da die Ergebnisse von einander abwichen, musste ein Weg einen Fehler enthalten. In der Tat war die Anwendung der Pfadregel im 1. Lösungsweg unzulässig, da die mit den beiden Pfaden verbundenen Ereignisse nicht disjunkt waren: beide Reihenschaltungen können gleichzeitig funktionieren (dies ergäbe beim Wissen um die Funktionsfähigkeit aller vier Bauteile die Wahrscheinlichkeit 2 – ein offensichtlicher Widerspruch!), beide können auch gleichzeitig nicht funktionieren. Raffinierter Weise waren die Zahlenwerte so gesetzt, dass eine Versuchung, die Pfadregeln anzuwenden, entstehen konnte.

Richtig war der 2. Lösungsweg mittels Additions- und Multiplikationssatz.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Alle, die noch ihren Abo-Beitrag (Schuljahr 2003/04 oder Kalenderjahr 2004) zu überweisen haben, seien hiermit daran erinnert. Falls unklar ist, wie weit bereits gezahlt wurde: per e-Mailnachfrage bei `monoid@mathematik.uni-mainz.de` kann Auskunft eingeholt werden.

2. Es sei auch noch einmal daran erinnert, dass die Punktezählung auf das Schuljahr umgestellt wurde und mit Heft 75 begonnen hat. Wegen der früheren Ausgabe von Heft 76 (29. November zur MONOID-Feier statt Mitte Dezember) kann dieses Mal kein Löserblatt eingelegt werden. Die Rubrik der Löser(innen) erscheint aber noch im Dezember, sobald alle Punktemeldungen vorliegen, im Internet unter `http://www.uni-mainz.de/monoid` und wird wie üblich in Heft 77 abgedruckt.

3. In diesem Heft erscheint ein Artikel von Dr. **Theo de Jong**, Professor in unserem Fachbereich Mathematik und Informatik. Sein Arbeitsgebiet lässt sich am besten englisch mit „Computational Aspects of Algebraic Geometry“ umschreiben. Herr de Jong untersucht den Einsatz von Computer-Programmen in der algebraischen Geometrie und entwickelt auch solche Programme. Er ist über die Anschrift der MONOID-Redaktion erreichbar.

4. Am 5. November 2003 wurde in Gießen mit einem Festakt der Endausbau des von Professor Dr. Albrecht Beutelspacher begründeten **Mathematikums**, dem ersten „Mitmach-Museum“ für Mathematik, gefeiert. Neue Räume und neue spannende Exponate warten auf euch!

Ekkehard Kroll

MONOID-Preisträger 2003

Das „Goldene M“: Stefan Tran

Sonderpreis: Stefanie Tiemann

1. Preis: Simon Bats, Christian Behrens, Jan B. Boscheinen, Thomas Geiß, Alexander Hillert, Annika Kohlhaas, Felix Liebrich, Johannes Merz, Lisa Mettler, Verena Prägert, Judith Reinhardt, Manuel Ross, Sarah Tröbs, Rebecca Zimmer.

2. Preis: Markus Bassermann, Steffen Biallas, Carolin Dossmann, Johannes Fiebig, Nathalie Geiß, Martin Jöhlinger, Julia Jung, Patricia Kastner, Katharina Kober, Madeleine Kohlhaas, Laura Mettler, Christian Münkel, Sabine Oßwalt, Annika Sonnenberg, Annkatrin Weber.

3. Preis: Stefan Albert, Lorenz Diener, Meike Fluhr, Larissa Habbel, Robert Hesse, Johann Kirsch, Katharina Kirsch, Johanna Mees, Maximilian Michel, Sonja Sauckel-Plock, Catharina Wirtz.

MONOID-Jahresabonnement 2004: Gregor Dschung, Lisa Engel, Larissa Erben, Dorothee Fister, Christina Flörsch, Rebecca Gehm, Claudia Heiss, Christoph Karg, Claudia Mack, Miriam Menzel, Marc Rhein, Sarah Rosengarten, Franziska Schmitt, Benjamin Schuler, Annett Stellwagen, Osan Ylmaz.

MONOID-Stein für unsere neuen Löser und Löserinnen aus den 5. Klassen: Sarah Breunich, Corinna Dinges, Louisa Linn, Hannah Meilinger, Tatjana Mendt, Jonathan Peters, Desiree Schalk, Katharina Schmidt, Katrin Schlemm, Arne Siefkes, Lisa Simon, Maria Weber, Andreas Weimer, Johannes Weimer.

Das „Goldene M“, der Sonderpreis und die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet.

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 29.9.2003)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 6: Laura Brückbauer 8, Jonathan Peters 10, Arne Siefkes 12, Lisa Simon 18, Joscha Wagner 9, Osan Ylmaz 20;
Kl. 7: Janina Braun 12, Sandra Erat 9, Dorothee Fister 22, Claudia Heiss 26, Thomas Hose 16, Daniela Hottenbacher 14, Sina Lelle 7, Carolin Mann 14, Johanna Mees 30, Kristina Müller 11, Vanessa Nagel 18, Sabine Oßwalt 42, Franziska Schmitt 27, Annett Stellwagen 20, Vanessa Stübchen 5;
Kl. 8: Patricia Kastner 46, Johannes Merz 71;
Kl. 9: Markus Bassermann 45, Meike Fluhr 32;
Kl. 11: Marc Schöfer 8; **Kl. 12:** Manuel Ross 61; **Kl. 13:** Aaron Breivogel 18.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 5: Désirée Schalk 14; **Kl. 7:** Johannes Fiebig 44, Felix Liebrich 74, Lisa Mettler 56, Carolin Morlock 10, Nina Rein 14, Susanne Rogge 8, Inga Wellstein 13, Rebecca Zimmer 56; **Kl. 10:** Marc Rein 27; **Kl. 11:** Gregor Dschung 21.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 7: Thomas Geiß 80; **Kl. 10:** Lorenz Diener 32, Jens Palkowitsch 7, Stefan Tran 119.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 8: Christian Behrens 61.

Bingen, Hildegardis-Gymnasium: Kl. 6: Katharina Kirsch 37.

Bingen, Stefan-George-Gymnasium: Kl. 8: Johann Kirsch 38.

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium: Kl. 8: Larissa Erben 28.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 8: Marco Eifert 4, Manuel Giebel 8, Vanessa Lenk 7, Anna-Lena Litz 4, Maximilian Michel 30, Christian Münkel 43, Sophia Nophut 3, Laura Wiegand 4;
Kl. 9: Simon Frydrych 5.

Frankenthal, Erkenbert-Grundschule: Kl. 4: Laura Mettler 43.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 6: Ogai Bazgar 5, Matthias Bornschein 4, Corinna Dinges 11, Emine Isikhan 2, Carolin Klein 9, Christian Koch 4, Hannah Meilinger 13, Tatjana Mendt 13, Katharina Schmidt 10, Maria Weber 11, Andreas Weimer 11, Johannes Weimer 11;
Kl. 8: Lutz Brozsio 1;
Kl. 9: Corina Czarnrtzki 5, Katharina Dahlem 1, Julia Dick 7, Cornelius Doll 1, Christina Gonera 8, Theresia Krischke 1, Thomas Pahl 5, Phillip Ries 7, Christopher Schmitt 3, Nils Schaa 1, Christopher Schnee 1, Jonas Weyer 1.

Halberstadt: Kl. 7: Robert Hesse 30.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuender Lehrer Gerd Weber):
Kl. 11: Sarah Sherif 8.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 6: Stefan Hörhammer 4, Melanie Palme 8, Lena Semabach 5;
Kl. 9: Eduard Bierich 5, Stefan Bohnert 6, Kerstin Bonfice 3, Simon Gockel 2, Daniela Jung 6 , Christian Klingkowski 5, Carolin Leppla 6, Vladimir Paska 2,

Tobias Porr 6, Christoph Raum 2, Nicole Reinartz 6, Nathalie Swords 6, Anna Weber 6, Anna Woskoboynikow 6, Jonathan Zorner 6.

Kelkheim/Taunus, Eichendorfschule (Betreuende Lehrer Herr Marsen, Herr Ackermann):
Kl. 8: Clarissa Düx 13, Pascal Freund 10, Franziska Löw 6, Isabell Peyman 15, Sonja Sauckel-Plock 31, Anne-Marie Schwörer 9, Viola Sommer 13.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium: Kl. 6: Marius Rackwitz 3.

Landau, Max-Slevogt-Gymnasium: Kl. 10: Christina Flörsch 21.

Ludwigshafen: Claudia Mack 20.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 8: Katharina Kober 44; **Kl. 9:** Christoph Karg 26;
Kl. 10: Judith Reinhardt 58, Adriana Spalwisz 19.

Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 13: Steffen Biallas 47.

Magdeburg: Kl. 8: Saskia Thiele 8.

Mainz, Gutenberg-Gymnasium: Kl. 12: Moritz Priesterroth 15.

Mainz, Theresianum: Kl. 7: Carolin Dossmann 47.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Regina Friedmann 9, Natalie Geiß 47, Julia Heeß 16, Helena Schweizer 16.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 6: Saya Fukuda 6, Madeline Kohlhaas 52, Isabelle Lau 5; **Kl. 7:** Hannah Rautenberg 5; **Kl. 8:** Annika Kohlhaas 76, Miriam Menzel 22;
Kl. 9: Annika Sonnenberg 46, Stefanie Tiemann 112.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger): Kl. 8: Martin Jöhlinger 43.

Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):
Kl. 6: Max Behrent 5, Larissa Habbel 36, Patricia Kuther 4, Patricia Limpert 7, Sarah Rosengarten 25, Katrin Schlemm 12, Sophia Waldvogel 7, Valentin Walther 5;
Kl. 7: Elham Quiami 8, Katarina Radenovic 14, Marco Radenovic 13, Daniela Schüler 6, Annkatrin Weber 45;
Kl. 8: Stefan Albert 40; **Kl. 9:** Julian Scherr 4; **Kl. 10:** Simon Bats 57.

Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium: Kl. 12: Alexander Hillert 83.

Siegburg, Anno-Gymnasium: Kl. 7: Michael Kißener 8; **Kl. 8:** Franziska Groß 11; **Kl. 10:** Jan B. Boscheinen 59.

Speyer, Friedrich-Magnus-Schwerd Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Karmann): Kl. 8: Oliver Queisser 15, Benjamin Schuler 20.

Wiesbaden, Gutenbergschule: Kl. 11: Kathleen Renneißen 10.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 6: Sarah Breunich 15, Lisa Engel 22, Rebecca Gehm 27, Louisa Linn 11, Jonathan Orschiedt 5, Sophie Schäfer 1, Lisa Schwarz 4;
Kl. 7: Katharina Dietz 6, Kurosch Habibi 12, Carolin Roßbach 18, Charlotte Schitter 9, Pascal Stichler 11; **Kl. 8:** Julia Jung 49, Sarah Tröbs 60; **Kl.11:** Verena Prägert 55.

Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium:
Kl. 9: Christine Biedinger 8; **Kl. 12:** Catherina Wirtz 39.

MONOID Jahrgang 23 Heft 76 Dezember 2003

Aus dem Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Dr. Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Dr.Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Ehrenmitglied: Martin Mettler
Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Meike Fluhr, Armin Holschbach, Felix Liebrich, Isabelle Merker, Manuel Ross und Rebecca Zimmer
Korrekturen und Layout: Katrin Elter **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid