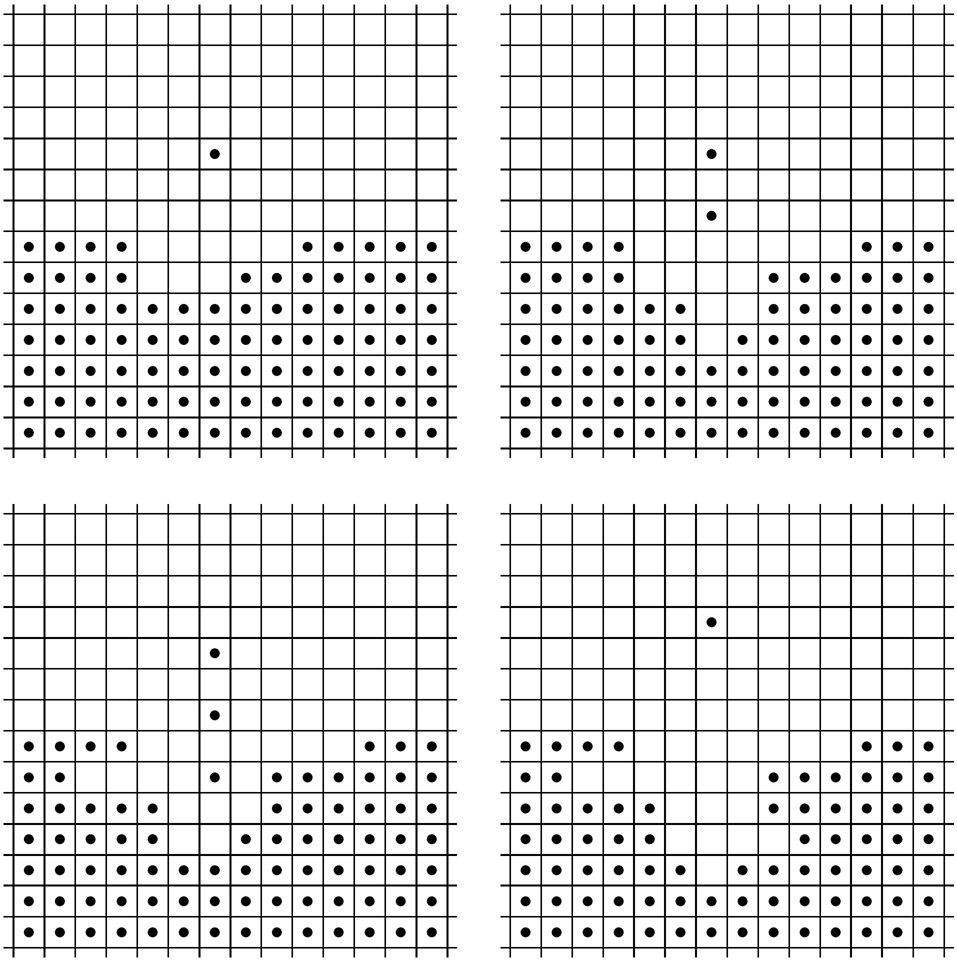
Jahrgang 24 Heft 77 März 2004

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.05.2004.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg
Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler und **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Monat. Woche. Tag. Wochentag.

Von Martin Mettler

Während einer Freistunde vereinbaren Bernd und Claus, mathematische Knobelaufgaben zu lösen.
Claus stellt die Frage: *„Mein Geburtsdatum ist der 19. August 1992. In meinem Geburtsmonat war an drei geradzahligen Tagen Sonntag. Kannst du mir sagen, an welchem Wochentag ich geboren wurde?“*

Bernd, dem auf Anhieb nichts zur Lösung der Aufgabe einfällt, meint: „Diese Frage kann man gar nicht mit Hilfe von mathematischen Mitteln beantworten. Falls überhaupt eine genaue Antwort auf diese Frage gegeben werden kann, so höchstens über irgendwelche logische Überlegungen.“
Darauf erwidert Claus: „Da hast du vollkommen recht. Aber wo ist schon die Grenze zwischen Mathematik und Logik? Versuch's doch trotzdem, der Frage nachzugehen.“

Wir wollen nun mit Bernd zusammen überlegen:
Ein Monat hat mindestens 28 und höchstens 31 Tage. Eine Woche hat 7 Tage.
Aus $28 : 7 = 4$ und $31 : 7 = 4$ Rest 3 können wir schließen, dass in jedem Monat mindestens 4 und höchstens 5 Sonntage sind.
Wann kann ein Monat 5 Sonntage haben?
Angenommen, am 1. Tag im Monat ist Sonntag, so ist auch am 8., 15., 22., 29. Tag im Monat Sonntag. Also könnte der Monat dann 5 Sonntage haben.
Wäre am 2. Tag im Monat Sonntag, so wäre auch am 9., 16., 23., 30. Tag im Monat Sonntag. Also könnte auch diesmal der Monat 5 Sonntage haben.
Jetzt kannst du sicherlich selbst überprüfen, dass der Monat auch dann 5 Sonntage haben kann, wenn der 3. ein Sonntag ist; aber wenn der erste Sonntag im Monat erst am 4., 5. usw. Tag im Monat ist, dann hat der Monat nur 4 Sonntage.
Daraus schließen wir, dass ein Monat höchstens dann 5 Sonntage haben kann, wenn der erste Sonntag am 1., 2. oder 3. Tag des Monats liegt.
Die gleichen Überlegungen gelten auch, wenn wir statt Sonntag als Tag Montag oder Dienstag usw. betrachten.
Also: Jeder Wochentag kommt mindestens 4 und höchstens 5 mal im Monat vor.

Zurück zur Aufgabe: Lasst uns doch mal zusammen überlegen, was uns die Aussage bringt, dass drei mal im Monat Sonntag an geradzahligen Tagen ist.
Wir bemerken zunächst: 7 ist ungerade.
Ist also der erste Sonntag im Monat an einem ungeraden Tag, so ist der zweite an einem geraden, der 3. an einem ungeraden usw.
Ist der erste Sonntag im Monat an einem geraden Tag, so ist der zweite an einem ungeraden, der 3. an einem geraden usw.
Demnach gilt: Hat ein Monat 4 Sonntage, so müssen zwei an geraden und zwei an ungeraden Tagen liegen.
Die Aussage *„drei mal im Monat ist Sonntag an geradzahligen Tagen“* sagt uns, dass der Monat 5 Sonntage hat.
Nach unseren Vorüberlegungen muss der erste Sonntag dann zwingend der 2. Tag des Monats sein. Dann ist wieder Sonntag am 9., 16., 23. und 30.
Der 19. Tag des Monats ist also ein Mittwoch (als dritter Tag nach Sonntag, dem 16.).

Hättest Du es gewusst?

Was das Schaltjahr 2004 mit Kettenbrüchen zu tun hat.

Von Ekkehard Kroll

Vor Kurzem konntest Du beim Blick auf den Kalender ein Datum ablesen, das nur alle vier Jahre vorkommt – genauer, wenn die Jahreszahl durch 4 teilbar ist wie im Falle von 2004: Der 29. Februar. Wirklich alle vier Jahre? Da gibt es doch noch eine andere Regel, die sagt: Wenn die Jahreszahl durch 100 teilbar ist, gibt es keinen zusätzlich eingeschobenen „Schalttag". Stimmt wohl aber auch wieder nicht ganz, denn Du erinnerst Dich vielleicht: Das Jahr 2000 hatte – obwohl offensichtlich durch 100 teilbar – doch einen 29. Februar (es war ein Dienstag).

„Keine Regel ohne Ausnahme!" wird gesagt. Aber woher kommen die Regeln und ihre Ausnahmen bei der Festlegung, welches Kalenderjahr ein Schaltjahr ist, also statt der üblichen 365 Tage „ausnahmsweise" 366 Tage besitzt?

Die Dauer eines Jahres leitet sich von der Zeit ab, die die Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne benötigt; die Dauer eines Tages dagegen bestimmt sich von der Zeit, die die Erde für eine Umdrehung um ihre Achse braucht. Das ganze Dilemma mit den Schaltjahren rührt nun daher, dass sich die Erde bei einem kompletten Umlauf um die Sonne etwas mehr als 365-mal um ihre Achse dreht. Einigermaßen genau gilt nämlich:

$$1 \text{ Kalenderjahr} = 365 \text{ Tage} + 5 \text{ Stunden} + 48 \text{ Minuten} + 45{,}8 \text{ Sekunden}$$

Drückt man dies in Tagen aus, so gilt:

$$1 \text{ Kalenderjahr} = \left(365 + \frac{104629}{432000}\right) \text{ Tage}$$

Da taucht jetzt ein Bruch mit unangenehm großem Zähler und Nenner auf. Um seinen Wert näherungsweise zu bestimmen, entwickeln wir ihn in einen sogenannten **Kettenbruch** und zwar durch wiederholte Division mit Rest. Wir schauen uns das Prinzip erst mal bei kleineren Zählern und Nennern an, z.B. bei dem Bruch $\frac{69}{25}$. Es ist:

$$69 = 2 \cdot 25 + 19, \text{ also } \quad \frac{69}{25} = 2 + \frac{19}{25};$$

$$25 = 1 \cdot 19 + 6, \quad \text{somit } \quad \frac{25}{19} = 1 + \frac{6}{19}, \text{ also } \frac{19}{25} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{6}{19}};$$

$$19 = 3 \cdot 6 + 1, \quad \text{folglich } \quad \frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}, \text{ daher } \frac{6}{19} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}.$$

Da im nächsten Schritt die Division aufgeht: $6 = 6 \cdot 1$, können wir hier die Kettenbruchentwicklung beenden; das Ergebnis lautet somit:

$$\frac{69}{25} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}}.$$

Diese Darstellung ist sehr sperrig! Auf das Malen der Bruchstriche mit Einsen im Zähler können wir allerdings verzichten; denn die wesentliche Information steckt in der Folge $[2, 1, 3, 6]$, so dass wir abkürzend $\frac{69}{25} = [2, 1, 3, 6]$ schreiben wollen.

Versuche es nun selbst einmal mit dem Bruch $\frac{24}{40}$; Dein Ergebnis müsste lauten:

$$\frac{24}{40} = [0, 1, 1, 2]$$

Kehren wir nun zu unserem Ausgangsproblem zurück! Für den Tagesanteil, um den ein Kalenderjahr die Zahl von 365 Tagen übersteigt, gilt in der Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{104629}{432000} = [0, 4, 7, 1, 3, 6, 2, 1, 170]$$

(Du hast hoffentlich mitgerechnet?!) Indem wir diese Entwicklung vorzeitig abbrechen, erhalten wir Näherungswerte für den Bruch auf der linken Seite:

0-te Näherung: $\frac{104629}{432000} \sim [0]$, d.h. es werden überhaupt keine regelmäßigen Schalttage eingeführt (wie im alten Ägypten, wo aber in großen Abständen das Jahr auf einmal um mehrere Tage verlängert wurde);

1-te Näherung: $\frac{104629}{432000} \sim [0, 4]$, d.h. der Bruch, der eigentlich kleiner als $\frac{1}{4}$ ist, wird durch ein Viertel Tag ersetzt, was bedeutet, dass jedes vierte Jahr ein Schaltjahr mit 366 Tagen ist, wie es bei dem vom römischen Imperator Julius Caesar im Jahre 46 v. Chr. eingeführten Julianischen Kalender der Fall war. Die Kalenderjahre sind damit im Durchschnitt zu lang. Besser ist der von Papst Gregor XIII im Jahre 1582 eingeführte und für uns noch heute verbindliche **Gregorianische Kalender**, der die

5-te Näherung: $\frac{104629}{432000} \sim [0, 4, 7, 1, 3, 6] = \frac{194}{801}$ berücksichtigt. An diesem Bruch ist abzulesen, dass in 800 Jahren 6 Schaltjahre ausfallen müssen. Wenn jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ein Schaltjahr sein soll, erreicht man dies durch die Regel, dass alle Jahre, deren Jahreszahl durch 100 teilbar ist, keine Schaltjahre sind außer denjenigen, deren Jahreszahl von 400 geteilt wird (Beispiel: 2000 – wie gehabt ein Schaltjahr). Auch diese Regelung ist nicht völlig korrekt; jedoch wird der Fehler erst im Jahre 4915 einen Tag ausmachen.

Kettenbruchentwicklungen besitzen vielerlei Anwendungen, worauf in einem der nachfolgenden MONOID-Hefte einmal eingegangen werden kann. Für dieses Mal soll es mit einem Literaturhinweis getan sein:

Harald Scheid, Zahlentheorie. Spektrum Akademischer Verlag 2003

Stimmt die folgende Aussage, in der das Jahr $\mathbf{2004}$ auftaucht?

> Jede natürliche Zahl der Form $\mathbf{2004} + 6^n$, aber auch jede natürliche Zahl der Form $\mathbf{2004} + 4^{2n}$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$) ist durch 10 teilbar. (H.F.)

*　*　*　*　*　*　*

Bilde aus den Zahlen $2000, 2001, \ldots, 2008$ ein magisches Quadrat mit der magischen Summe $3m$ (d.h. jede Zeilensumme, jede Spaltensumme und jede Diagonalensumme hat den gleichen Wert $3m$). (H.F.)

$m-1$		
	$\mathbf{2004}$	
		$m+1$

Die **Lösungen** findet Ihr an anderer Stelle in diesem Heft!

Einige Probleme der Bruchrechnung, die in der Mathematik der Pharaonenzeit ungelöst blieben

von Hartwig Fuchs

Die alten Ägypter trieben nur anwendbare und damit im Wesentlichen **rechnende Mathematik** – also keine beweisende Mathematik wie die Griechen; ihre Geometrie z.B. befasste sich hauptsächlich mit numerischen Problemen der Landvermessung (die jährlichen Nilüberschwemmungen!) und der Architektur (Pyramidenbau!). Deshalb könnte man vermuten, dass ihre Mathematik ein System von Regeln zur Lösung ihrer praktischen Probleme darstellte.

Aber das war wohl nicht der Fall: Sie war eher eine Beispiel- und Aufgaben-Mathematik. Man erkennt dies deutlich an einem der frühesten überlieferten „Lehrbücher" ägyptischer Mathematik, dem von Ahmes um 1700 v.Chr. geschriebenen so genannten Papyrus Rhind:

> **„Genaues Rechnen. Einführung in die Kenntnis . . . aller dunklen Geheimnisse . . ."**

Diese sachlich wohl geordnete Sammlung gelöster Aufgaben beginnt – wie es der Titel verspricht – mit dem Rechnen und zwar sofort mit der Bruchrechnung. Das ist wohl so zu erklären: Addition, Subtraktion und Multiplikation waren für ägyptische Mathematiker unproblematisch. Anders die Division: Sie stellte für sie wohl eine komplizierte Angelegenheit dar, weil sie eine recht ungewöhnliche Auffassung von Bruchzahlen hatten. Unter einem **Bruch** verstanden sie einen **Stammbruch**, also einen Bruch mit dem Zähler 1 (einzige Ausnahme: $\frac{2}{3}$).

Was entsprach dann aber bei ihnen einem Bruch $\frac{a}{b}$ (moderne Schreibweise!) mit einem Zähler $a > 1$? Eigentümlicher Weise verzichteten sie auf die nahe liegende Darstellung durch $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}$ (a Summanden $\frac{1}{b}$). Sie wählten vielmehr einen ungleich schwierigeren Weg, indem sie verlangten, dass die in einer Summe vorkommenden Stammbrüche allesamt verschiedene Nenner besitzen.

Für den Bruch $\frac{2}{21}$ schreiben sie also nicht $\frac{1}{21} + \frac{1}{21}$, sondern z.B. $\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$. Und damit ist klar, welche Schwierigkeit die ägyptischen Mathematiker in das Fundament ihrer Wissenschaft eingebaut hatten – wie findet man etwa für den Bruch $\frac{2}{87}$ die Darstellung $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$ (Beispiel von Ahmes!)?

Das erklärt, warum Ahmes an den Anfang seines Papyrus – sozusagen als Startplattform für die nachfolgende Bruchrechnung – eine Liste der in Stammbrüche zerlegten Brüche $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{2}{101}$[1] setzt.

Ahmes sagt nicht, wie er diese Zerlegungen gefunden hat – eine Regel dafür hatte er aber sicher nicht: Sonst hätte er die Regel und nicht die konkrete Zerlegungsliste angegeben!

[1] Ahmes muss gewusst haben, dass der Bruch $\frac{2}{2n}$ und der Stammbruch $\frac{1}{n}$ den gleichen Wert haben – deshalb enthält die Liste nur Brüche mit ungeradzahligem Nenner

Ahmes' Papyrus gab vermutlich den um 1700 v.Chr. erreichten Stand seiner Wissenschaft wider. Man stelle sich daher einmal vor, welches Aufsehen es erregt hätte, wenn jemand damals die folgende Aufgabe gelöst hätte:

Finde eine Regel zur „Verlängerung" der Zerlegungsliste, die die anerkannte mathematische Kapazität Ahmes angegeben hat!

Wir heutigen Mathematiker mit unserer sehr zweckmäßigen Darstellung von Brüchen können die Lösung schnell angeben.

Aus $\frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} > \frac{1}{n}$ ergibt sich ein Lösungsansatz $\frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{a}{b}$,
woraus $\frac{a}{b} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} = \frac{2n-(2n-1)}{n(2n-1)} = \frac{1}{n(2n-1)}$ folgt.

Regel 1: $\quad \dfrac{2}{2n-1} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n(2n-1)}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$

Beispiel: Zerlege $\frac{2}{39}$. Wegen $2n-1 = 39$, ist $n = 20$; also: $\frac{2}{39} = \frac{1}{20} + \frac{1}{780}$.

Von Regel 1 aus ist es nur ein kleiner Schritt zur Regel 2, deren Auffindung für die ägyptischen Mathematiker aber wohl eine Sensation gewesen wäre.

Regel 2: $\quad \dfrac{3}{2n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n}$ und $\dfrac{3}{2n-1} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{n(2n-1)}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$

Es ist $\frac{3}{2n} = \frac{2}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$. Mit Regel 1 ist
$\frac{3}{2n-1} = \frac{2}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(2n-1)} + \frac{1}{2n-1}$.

Beispiel: Zerlege $\frac{3}{29}$. Wegen $2n-1 = 29$ ist $n = 15$, also $\frac{3}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{29} + \frac{1}{435}$.

Man wird nun allerdings nicht so fortfahren und Zerlegungsregeln für Brüche mit den Zählern $4, 5, 6, \ldots$ suchen. Vielmehr wird man eine Regel für jeden beliebigen echten Bruch vorziehen.

Regel 3: Zu jedem Bruch $\frac{m}{n}$, m und n teilerfremd, $2 \leq m < n$ und daher $n = t \cdot m + r$ mit $0 < r < m$, gibt es einen Bruch $\frac{m_1}{n_1}$, so dass gilt:

$$(1)\ \frac{m}{n} = \frac{1}{t+1} + \frac{m_1}{n_1} \text{ mit } (2)\ \frac{m_1}{n_1} = \frac{m-r}{n(t+1)} \text{ und } (3)\ \frac{m_1}{n_1} < \frac{1}{t+1}\text{; weiter gilt:}$$

$(4)\ \dfrac{1}{t+1}$ ist der größte mögliche Stammbruch.

Mit $n = t \cdot m + r$ und $\frac{m}{n} = \frac{m}{tm+r} = \frac{1}{t+\frac{r}{m}}$ folgt (4), denn $\frac{1}{t} > \frac{1}{t+\frac{r}{m}} > \frac{1}{t+1}$.

Aus (4) ergibt sich für (1) die Existenz des Bruches $\frac{m_1}{n_1}$, für den (2) zutrifft, wie man selbst leicht nachrechnet.

Nachweis von (3): Aus $\frac{1}{t+1} \leq \frac{m_1}{n_1}$, also $\frac{1}{t+1} \leq \frac{m-r}{n(t+1)}$ folgt der Widerspruch $1 \leq \frac{m-r}{n}$ oder $n \leq m-r$. Also gilt (3).

Falls die Zerlegung von $\frac{m}{n}$ gemäß (1) auf einen Bruch $\frac{m_1}{n_1}$ mit $m_1 > 1$ führt, wird man den letzten Bruch wieder mit Regel (3) zerlegen usw., bis man auf eine Summe aus zwei Stammbrüchen stößt. Dann ist $\frac{m}{n}$ vollständig zerlegt.

Beispiel: Zerlege $\frac{42}{43}$ vollständig mit (1) und (2)

$43 = 1 \cdot 42 + 1$	$86 = 2 \cdot 41 + 4$	$258 = 6 \cdot 37 + 36$	
also $t = 1, r = 1$	also $t = 2, r = 4$	also $t = 6, r = 36$	$\Longrightarrow \frac{42}{43} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{1806}$
$\frac{42}{43} = \frac{1}{2} + \frac{41}{86}$	$\frac{41}{86} = \frac{1}{3} + \frac{37}{258}$	$\frac{37}{258} = \frac{1}{7} + \frac{1}{1806}$	

Man muss sich natürlich überlegen, ob der durch die wiederholte Anwendung von Regel 3 in Gang gesetzte Zerlegungsprozess tatsächlich immer auf eine Summe aus Stammbrüchen führt.

Hier liegt nun ein „dunkles Geheimnis" für die ägyptischen Mathematiker, dessen Schleier sie nicht lüften konnten, weil sie sich nie fragten, ob es vielleicht Brüche gibt, die nicht in verschiedene Stammbrüche zu zerlegen sind.

Sie hielten eine Zerlegung für stets durchführbar – und sie hatten Glück mit dieser Überzeugung; denn es gilt der

Satz: Jeder echte Bruch mit einem Zähler > 1 kann als eine Summe aus endlich vielen paarweise verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden.

Beweis für einen Bruch $\frac{m}{n}$, der die Voraussetzungen von Regel 3 erfüllt.

Für $\frac{m}{n}$ gibt es nach (1) eine Darstellung $\frac{m}{n} = \frac{1}{t+1} + \frac{m_1}{n_1}$.
Falls $m_1 = 1$ ist, sind wir fertig. Sei also $m_1 > 1$. Dann kann man $\frac{m_1}{n_1}$ als Summe schreiben $\frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{t_1+1} + \frac{m_2}{n_2}$. Ist $m_2 = 1$, dann sind wir fertig; ansonsten wird der Bruch $\frac{m_2}{n_2}$ weiter zerlegt usw. Für die dabei auftretenden Zähler $m, m_1, m_2, \ldots$ ist wegen (1) und (2): $m > m_1 > m_2 > \ldots$ Diese absteigende Kette von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element m_k, und es muss $m_k = 1$ sein (sonst wäre der Zerlegungsprozess fortsetzbar). Somit gilt

$$(5)\ \frac{m}{n} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t_1+1} + \cdots + \frac{1}{t_{k-1}+1} + \frac{m_k}{n_k} \quad \text{mit } m_k = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die in (5) rechts vorkommenden Nenner $t+1, t_1+1, \ldots, n_k$ alle verschieden sind. Das folgt aber aus (1) und (3) so:

$$\frac{1}{t+1} > \frac{m_1}{n_1} > \frac{1}{t_1+1} > \cdots > \frac{1}{t_{k-1}+1} > \frac{1}{n_k}$$

und damit ist der Satz bewiesen und das „dunkle Geheimnis" der ägyptischen Bruchrechnung aufgeklärt.

Historische Nachbemerkung
Die Regel 3 wurde im Wesentlichen erstmals von Fibonacci in seinem „Liber Abaci" (Buch vom Rechenbrett) 1202 – also immerhin etwa 3000 Jahre nach Ahmes – beschrieben. Aber das in ihrem Fundament liegende Problem hat erst J. J. Sylvester erkannt und 1880 bewiesen; nämlich, dass sich *jeder* echte Bruch überhaupt als eine Summe aus verschiedenen Stammbrüchen darstellen lässt.
Und 1956 hat man sich dann die (m.W.) bis heute nicht beantwortete Frage gestellt, ob *jeder* echte Bruch mit ungeradem Nenner stets als eine Summe verschiedener Stammbrüche mit ungeraden Nennern geschrieben werden kann.
Die Bruchrechnung der Pharaonen hat – wie man sieht – Nachwirkungen bis heute.

Wie viele Schnittpunkte können n Geraden höchstens haben?

Von Hartwig Fuchs

Man denke sich n Geraden, $n \geq 3$, beliebig in der Ebene gezeichnet. Je nachdem, in welcher Lage die Geraden sich zueinander befinden, können dann 1 oder 2 oder 3 oder $\cdots$ Schnittpunkte auftreten. Bezeichnen wir mit $A(n)$ die größte mögliche Anzahl von Schnittpunkten, dann können $A(n)$ Schnittpunkte sicher nicht in den folgenden Situationen vorkommen: mindestens drei der n Geraden gehen durch einen Punkt (vgl. Figur 1) oder: mindestens zwei der n Geraden sind parallel (vgl. Figur 2). Tritt keiner dieser Fälle ein, dann haben die n Geraden $A(n)$ Schnittpunkte (vgl. Figur 3).

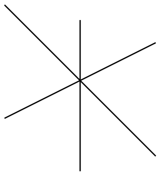


Fig. 1

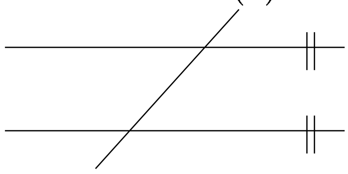


Fig. 2

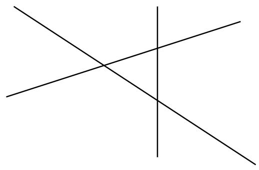


Fig. 3

Für die folgenden Überlegungen setzen wir daher voraus:
(1) Keine drei oder mehr Geraden haben einen Punkt gemeinsam.
(2) Keine zwei oder mehr Geraden sind parallel.
Man prüft nun leicht nach, dass unter den Voraussetzungen (1), (2) gilt:

Anzahl n der beteiligten Geraden	1	2	3	4	5	6	7
Maximalzahl $A(n)$ der Schnittpunkte	0	1	3	6	10	15	21*

Wie lässt sich die Zahl $A(n)$ bestimmen?
Die „Entstehungsgeschichte“ von $A(n)$ sieht so aus:

$$\begin{aligned} A(1) &= 0 \\ A(2) &= A(1) + 1 \\ A(3) &= A(2) + 2 \\ A(4) &= A(3) + 3 \\ &\vdots \\ A(n-1) &= A(n-2) + n - 2 \end{aligned}$$

Wenn man nun $n-1$ Geraden mit einer n-ten Geraden schneidet, dann entstehen $n-1$ neue Schnittpunkte. Somit gilt:

$$A(n) = A(n-1) + n - 1.$$

Diese n Gleichungen addiere man. Dann ist

$$\begin{aligned} &A(1) + A(2) + A(3) + \cdots + A(n-1) + A(n) = \\ &\qquad = A(1) + A(2) + A(3) + \cdots + A(n-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1. \end{aligned}$$

Streicht man in dieser Gleichung links und rechts gleiche Summanden weg, dann ergibt sich mit $0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)n$:
(3) Die Maximalzahl $A(n)$ von Schnittpunkten bei n Geraden, $n \geq 1$, ist $\frac{1}{2}(n-1)n$.

*Die Zahlen der Folge $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ heißen seit der Zeit der Griechen „Dreieckszahlen“.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Hans Magnus Enzensberger: Der Zahlenteufel

Für Robert, den Held des Buches, besteht Mathematik zunächst nur aus Aufgaben der Art: „Wenn zwei Bäcker in sechs Stunden 444 Brezeln backen, wie lange brauchen dann fünf Bäcker, um 88 Brezeln zu backen?" Solche Aufgaben bereiten ihm verständlicherweise Albträume. Eines nachts begegnet ihm in einem Traum ein ziemlich alter, ziemlich kleiner Herr, ungefähr so groß wie eine Heuschrecke, der ihn mit glimmrigen Augen ansieht und sich als „der Zahlenteufel" vorstellt. Zunächst ist Robert alles andere als begeistert, als ihm der Zahlenteufel vorschlägt, sich mit ihm über Mathematik zu unterhalten, zumal der Junge sich nicht vorstellen kann, dass man sich über Mathematik genauso unterhalten kann wie über Filme oder Fahrräder. Nachdem der Zahlenteufel mit Robert einige spannende Ausflüge in verschiedene Bereiche der Mathematik unternommen hat, kann dieser es jedoch abends kaum erwarten einzuschlafen, um den Zahlenteufel wiederzutreffen. In zwölf Nächten erleben die beiden spannende Abenteuer, über die an dieser Stelle allerdings nicht mehr verraten werden soll, damit es für euch beim Lesen spannend bleibt...

Ergänzend noch zwei Sätze aus der Beurteilung durch einen Schüler: „Das Buch hat den Untertitel wirklich verdient. Es zeigt wie einfach und leicht verständlich Mathematik sein kann, wenn diese anschaulich und ansprechend erklärt wird."

Fazit: „Der Zahlenteufel" von Hans Magnus Enzensberger ist seit seinem Erscheinen im Jahre 1997 längst zu einem mathematischen Kinder- und Jugendbuchklassiker geworden, der auch von Erwachsenen gerne gelesen wird.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Hans Magnus **Enzensberger**: Der Zahlenteufel – Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben. Hanser 1997, ISBN 3-446-18900-9, 255 Seiten, 19,90 € (als Taschenbuch: dtv 2003, ISBN 3-42362015-3, 263 Seiten, 11 €)

Art des Buches:	Mathematisches Kinder- und Jugendbuch
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 10 Jahren

Martin Mattheis

Lösungen der **2004**-Aufgaben von Seite 5:

- Jede Potenz 6^n und 4^{2n}, $n = 1, 2, 3, \dots$ hat die Einzerziffer 6. Damit haben $6^n + 2004$ sowie $4^{2n} + 2004$ die Einerziffer 0 und sind daher durch 10 teilbar.

- Aus $m - 1 + 2004 + m + 1 = 3m$ erhält man $m = 2004$; also ist $m - 1 = 2003$ und $m + 1 = 2005$; die magische Summe ist $3m = 6012$. Damit erhält man mit ein wenig Probieren z.B. neben stehendes magisches Quadrat.

2003	2008	2001
2002	2004	2006
2007	2000	2005

Bundeswettbewerb Mathematik 2004

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1
Zu Beginn eines Spiels stehen an der Tafel die Zahlen $1, 2, \dots, 2004$. Ein Spielzug besteht daraus, dass man

- eine beliebige Anzahl der Zahlen an der Tafel auswählt,
- den Elferrest der Summe dieser Zahlen berechnet und an die Tafel schreibt,
- die ausgewählten Zahlen löscht.

Bei einem solchen Spiel standen irgendwann noch zwei Zahlen an der Tafel. Eine davon war 1000; man bestimme die andere Zahl.
Hinweis: Zur vollständigen Lösung gehört nicht nur die Angabe der Zahl, sondern auch der Nachweis, dass diese zweite an der Tafel stehende Zahl keine andere als die angegebene sein kann.

Lösung
Da alle Zahlen, die im Laufe des Spiels ausgewählt werden, durch einen Elferrest, das heißt eine natürliche Zahl zwischen 0 und 10, ersetzt werden, steht zu allen Zeitpunkten des Spiels mindestens eine Zahl zwischen 0 und 10 an der Tafel. Die gesuchte zweite Zahl a liegt also zwischen 0 und 10, denn die Zahl 1000 erfüllt diese Bedingung nicht.
Die Lösung folgt aus der Beobachtung, dass sich während des Spiels der Elferrest der Summe der Zahlen, die an der Tafel stehen, durch keinen der Spielzüge ändert: Denn seien $a_1, \dots, a_n$ die Zahlen, die vor einem beliebigen Spielzug an der Tafel stehen. Im Spielzug werden nun m Zahlen, $m \leq n$, ausgewählt. Indem wir eventuell umnummerieren, können wir annehmen, dass es sich hierbei um die Zahlen $a_1, \dots, a_m$ handelt. Mit r bezeichnen wir den Elferrest der Summe $a_1 + \dots + a_m$: Er wird gemäß der Spielregeln an die Tafel geschrieben, und die Zahlen $a_1, \dots, a_m$ werden gelöscht. Damit beträgt die Summe aller Zahlen, die an der Tafel stehen, vor dem Spielzug $S := a_1 + \dots + a_n$, nach dem Zug $T := r + a_{m+1} + \dots + a_n$. Die Differenz der Summen, $S - T = a_1 + \dots + a_m - r$, ist nach Konstruktion von r durch 11 teilbar, das heißt S und T haben denselben Elferrest.
Also haben in dem Spiel, das in der Aufgabenstellung beschrieben wird, $1 + \dots + 2004 = 2009010 = 11 \cdot 182637 + 3$ und $1000 + a = 11 \cdot 90 + 10 + a$ denselben Elferrest. Weil $0 \leq a \leq 10$ gilt, muss $a = 4$ sein. □

Aufgabe 2
Die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks seien ganzzahlig, ferner sei eine Höhe des Dreiecks gleich der Summe seiner beiden anderen Höhen.
Man beweise, dass dann $a^2 + b^2 + c^2$ eine Quadratzahl ist.

Lösung
Die Eckpunkte des Dreiecks mögen A, B, C, die Höhen auf die Seiten a, b, c mögen h_a, h_b, h_c heißen. Für den Flächeninhalt $|\triangle ABC|$ gilt

$$2 \cdot |\triangle ABC| = h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c \quad . \tag{2.1}$$

Ohne Einschränkung können wir auf Grund der Symmetrie der Aufgabenstellung annehmen, dass $h_a = h_b + h_c$. Dies ist auf Grund von (2.1) äquivalent zu

$$h_a = h_b + h_c \iff \frac{2 \cdot |\triangle ABC|}{a} = 2 \cdot |\triangle ABC| \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \iff bc = a(b+c) \ .$$

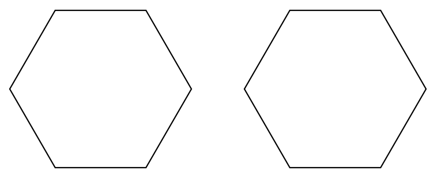
Hieraus folgt sofort, dass

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+c)^2 - 2bc = a^2 + (b+c)^2 - 2a(b+c) = (b+c-a)^2 \ ,$$

also ist, auf Grund der Ganzzahligkeit von a, b und c, $a^2 + b^2 + c^2$ eine Quadratzahl. □

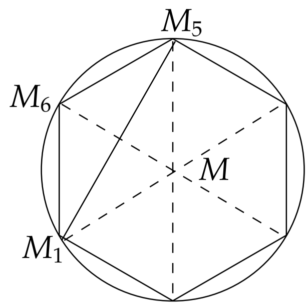
Aufgabe 3

Man beweise, dass die beiden abgebildeten kongruenten regelmäßigen Sechsecke so in insgesamt sechs Teile zerschnitten werden können, dass diese Teile sich lückenlos und überschneidungsfrei zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen lassen.



Lösung

Wir betrachten zunächst ein regelmäßiges Sechseck mit Ecken $M_1, \dots, M_5, M_6$ und Umkreismittelpunkt M; siehe Skizze. Dann ist nach Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks $\measuredangle M_6MM_1 = 360°/6 = 60° = \measuredangle M_5MM_6$. Aus dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel folgt, dass $\measuredangle M_6M_5M_1 = \frac{1}{2} \cdot \measuredangle M_6MM_1 = 30°$ und analog $\measuredangle M_5M_1M_6 = 30°$. Demnach gilt für den Scheitelwinkel im gleichschenkligen Sehnendreieck $\triangle M_1M_5M_6$, dass $\measuredangle M_1M_6M_5 = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$.



Die beiden kongruenten regelmäßigen Sechsecke zerschneiden wir entlang der in Abbildung 3.1 durchgehend eingezeichneten Sehnen in jeweils drei Teile. Hierbei sind die Teile (2), (2'), (3) und (3') kongruente gleichschenklige Dreiecke mit Basiswinkeln von $30°$ und einem Scheitelwinkel von $120°$. Ohne Einschränkung nehmen wir im Folgenden an, dass die Basen dieser vier kongruenten Dreiecke jeweils die Länge 1 haben. Anhand der unterbrochen gezeichneten Sehnen stellen wir fest: Die Vierecke (1) und (1') bestehen jeweils aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1, an dessen eine Seite ein zu Teil (2) kongruentes Dreieck angefügt wird.

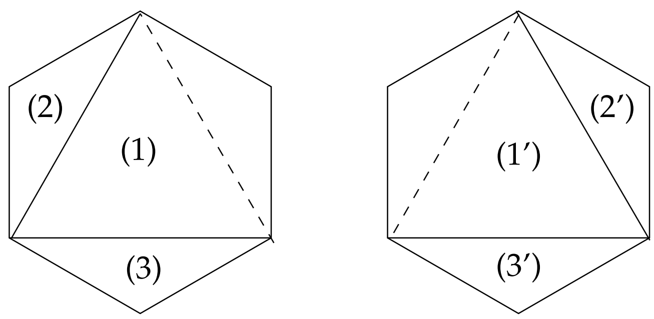


Abbildung 3.1: Sechsecke zerschneiden ...

Wir behaupten, dass sich aus den sechs Teilen ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2 lückenlos und überschneidungsfrei zusammensetzen lässt. Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir eine Zerlegung eines solchen Dreiecks in sechs Stücke finden,

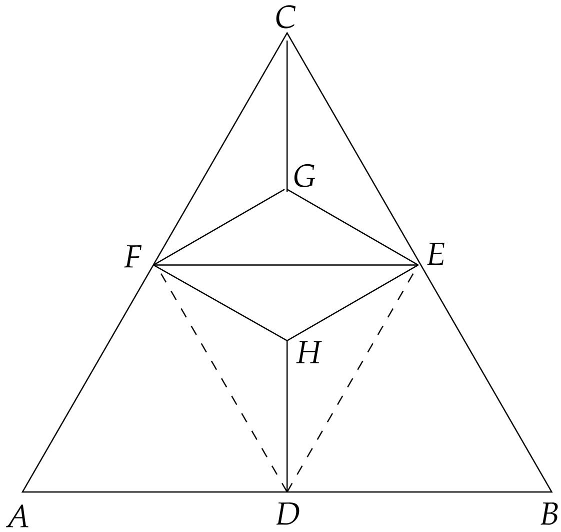


Abbildung 3.2: … und Dreieck zusammensetzen

die wir eineindeutig einem dazu kongruenten Teil aus den Teilen (1), (1'), (2), (2'), (3) oder (3') zuordnen können.
Hierzu seien wie in Abbildung 3.2 die Seitenmitten eines solchen Dreiecks $\triangle ABC$ mit D, E, F bezeichnet. Aus der Umkehrung des ersten Strahlensatzes und dem zweiten Strahlensatz folgt $(FE) \| (AB)$, $(DF) \| (BC)$ und $(DE) \| (AC)$ sowie $\overline{FE} = \overline{DF} = \overline{DE} = 1$. Die vier Dreiecke $\triangle ADF$, $\triangle DBE$, $\triangle EFD$ und $\triangle FEC$ sind also gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1. In den Dreiecken $\triangle FEC$ bzw. $\triangle EFD$ bezeichnen wir den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit G bzw. H. Wir zerlegen das Dreieck $\triangle ABC$ in die vier Dreiecke $\triangle FEG$, $\triangle ECG$, $\triangle CFG$, $\triangle EFH$ sowie die beiden Vierecke $\square ADHF$ und $\square DBEH$.
Die Dreiecke $\triangle FEG$, $\triangle ECG$, $\triangle CFG$, $\triangle EFH$ sowie $\triangle FDH$ und $\triangle DEH$ haben nach Konstruktion eine Basis der Länge 1 und zwei Basiswinkel von $\frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$; sie sind (auf Grund des Kongruenzsatzes WSW) damit kongruent zu Teil (2) aus den zerschnittenen Sechsecken. Die vier im vorigen Satz zuerst genannten Dreiecke sind daher kongruent zu den Teilen (2), (2'), (3) und (3'). Aus den Überlegungen in diesem und dem vorigen Abschnitt folgt zudem, dass sich die Vierecke $\square ADHF$ und $\square DBEH$ jeweils aus einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 und einem zu Teil (2) kongruenten Dreieck zusammensetzen lassen; auf Grund unserer Beobachtung an Skizze 3.1 sind sie daher kongruent zu den Teilen (1) und (1'). $\square$

Aufgabe 4
Ein Würfel sei so in endlich viele Quader zerlegt, dass der Rauminhalt der Umkugel des Würfels so groß ist wie die Summe der Rauminhalte der Umkugeln aller Quader der Zerlegung.
Man beweise, dass dann alle diese Quader Würfel sind.

Lösung
Unsere Lösung verwendet den folgenden **Hilfssatz**, den wir weiter unten beweisen:
Für einen Quader Q bezeichne $|Q|$ den Rauminhalt des Quaders und $|U(Q)|$ den Rauminhalt der Umkugel $U(Q)$ des Quaders. Dann gilt

$$|U(Q)| \geq \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \cdot |Q| \quad \textit{und} \tag{4.1}$$

$$|U(Q)| = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \cdot |Q| \quad \textit{genau dann, wenn } Q \textit{ ein Würfel ist.} \tag{4.2}$$

Beweis der Aufgabe: Sei also der in der Aufgabenstellung gegebene Würfel W zerlegt in die endlich vielen Quader $Q_1, \ldots, Q_n$, $n \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Voraussetzung der Aufgabenstellung erfüllt ist, jedoch einer der Quader kein Würfel ist (ohne Einschränkung sei dies Q_1). Aus diesen Annahmen folgt die Gültigkeit der Ungleichungskette

$$\begin{aligned}|U(Q_1)| + \cdots + |U(Q_n)| = |U(W)| &= \tfrac{\sqrt{3}\pi}{2} \cdot |W| \\ &= \tfrac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(|Q_1| + \cdots + |Q_n|\right) \\ &< |U(Q_1)| + \cdots + |U(Q_n)| \quad ,\end{aligned}$$

wobei sich die erste Gleichung aus der Aufgabenstellung, die zweite Gleichung aus (4.2) und die letzte Ungleichung der Kette aus beiden Aussagen des Hilfssatzes ergibt, weil $|U(Q_1)| > \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \cdot |Q_1|$ und $|U(Q_i)| \geq \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \cdot |Q_i|$ für $2 \leq i \leq n$. Weil aber erster und letzter Term der Ungleichungskette gleich sind, ist die strikte Ungleichung ein Widerspruch. Die Aufgabe ist damit bewiesen.

Beweis des Hilfssatzes: Die Kantenlängen des Quaders Q bezeichnen wir mit a, b, c. Wir setzen als bekannt voraus: Der Mittelpunkt der Umkugel $U(Q)$ des Quaders liegt im Schnittpunkt der Raumdiagonalen von Q, und der Durchmesser der Umkugel ist demnach $d(Q) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Nachzuweisen ist also (wenn wir beide Seiten der Ungleichungen im Hilfssatz mit $6/\pi$ multiplizieren), dass

$$\frac{6}{\pi} \cdot |U(Q)| = d(Q)^3 \geq \sqrt{27} \cdot |Q| \quad , \quad \text{was äquivalent zu} \tag{4.3}$$

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{3/2} \geq \sqrt{27} \cdot abc \quad \text{ist, und} \tag{4.4}$$

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{3/2} = \sqrt{27} \cdot abc \quad \text{genau dann, wenn } a = b = c \text{ ist.} \tag{4.5}$$

Hierbei ist sofort zu sehen, dass $a = b = c$ hinreichend für die Gültigkeit der Gleichung in (4.5) ist, denn beide Seiten der Gleichung sind dann gleich $\sqrt{27} \cdot a^3$. Es ist also

$$\frac{6}{\pi} \cdot |U(W)| = \sqrt{27} \cdot |W| \quad \text{für einen Würfel } W. \tag{4.6}$$

Wir geben eine geometrische Motivation der Beweisstrategie, die wir verfolgen: Für den gegebenen Quader Q mit den Kantenlängen a, b, c betrachten wir zusätzlich den Quader P mit den Kantenlängen $p = \sqrt{ab}, p, c$ und den Würfel V mit der Kantenlänge $v = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{p^2c}$. Nach Definition gilt für die Umkugeldurchmesser von P bzw. V, dass $d(P) = \sqrt{2p^2 + c^2}$ bzw. $d(V) = \sqrt{3}v$. Nach Konstruktion sind die Rauminhalte aller dieser Körper gleich, denn

$$abc = |Q| = |P| = |V| \quad .$$

Auf Grund von (4.6) gilt

$$\frac{6}{\pi} \cdot |U(V)| = \sqrt{27} \cdot |V| \quad ,$$

und die Ungleichung (4.3) folgt zusammen mit den beiden vorigen Gleichungsketten, wenn wir im Folgenden den Nachweis führen, dass

$$|U(Q)| \geq |U(P)| \geq |U(V)| \tag{4.7}$$

gilt. Weil $d(Q)$ und $d(P)$ beide positiv sind, ist die Ungleichung $|U(Q)| \geq |U(P)|$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} d(Q)^3 \geq d(P)^3 &\iff d(Q)^2 \geq d(P)^2 \\ &\iff a^2+b^2+c^2 \geq 2ab+c^2 \\ &\iff (a-b)^2 \geq 0 \ , \end{aligned}$$

und die Aussage in der letzten Zeile ist wahr. Aus den Äquivalenzumformungen ist außerdem ersichtlich, dass $|U(Q)| = |U(P)|$ genau dann gilt, wenn $a = b$. Die Ungleichung $|U(P)| \geq |U(V)|$ ist, weil $d(P)$ und $d(V)$ positiv sind, äquivalent zu

$$\begin{aligned} d(P)^3 \geq d(V)^3 &\iff d(P)^6 \geq d(V)^6 \\ &\iff \left(2p^2+c^2\right)^3 \geq 27v^6 = 27p^4c^2 \\ &\iff \left(2p^2+c^2\right)^3 - 27p^4c^2 \geq 0 \\ &\iff (p-c)^2 \cdot (p+c)^2 \cdot (8p^2+c^2) \geq 0 \ , \end{aligned}$$

und die Aussage in der letzten Zeile ist wahr. Aus den Äquivalenzumformungen ist außerdem ersichtlich, dass $|U(P)| = |U(V)|$ genau dann gilt, wenn $p = \sqrt{ab} = c$ (weil $p, c > 0$).

Damit haben wir (4.7) bewiesen, und es gilt Gleichheit in (4.7) genau dann, wenn $a = b$ und $\sqrt{ab} = c$, also genau dann, wenn $a = b = c$. Damit sind alle Aussagen des Hilfssatzes bewiesen. □

Bemerkung: Die Aussagen des Hilfssatzes sind ein Spezialfall der sogenannten *Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel*: Für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ werden $A(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 + \cdots + x_n)/n$ als das *arithmetische Mittel* und $G(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}$ als das *geometrische Mittel* bezeichnet. Es gilt dann, dass stets $G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$ und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $x_1 = \cdots = x_n$. Das kann über vollständige Induktion bewiesen werden: Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Für den Induktionsschluss ($n-1 \to n$, $n \geq 2$) beobachten wir zunächst: Indem wir $y_i := x_i/(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ setzen, ist die obige Aussage äquivalent zum Nachweis, dass

$$y_1 + \cdots + y_n \geq n$$

für $y_1, \ldots, y_n > 0$ mit $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$ und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $y_1 = \cdots = y_n = 1$. Im Fall $y_1 = \cdots = y_n = 1$ ist klar, dass die Ungleichung mit Gleichheit gelten muss. Also bleibt der Fall zu untersuchen, dass nicht alle y_i gleich 1 sind. Weil das Produkt der n Zahlen gleich 1 ist, ist dann mindestens eine der Zahlen größer als 1 und mindestens eine der Zahlen kleiner als 1. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $y_1 > 1$ und $y_2 < 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt für die $n-1$ positiven reellen Zahlen $(y_1y_2), y_3, \ldots, y_n$, die $(y_1y_2) \cdot y_3 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$ erfüllen, dass

$$y_1y_2 + y_3 + \cdots + y_n \geq n-1 \ .$$

Da aber nach Konstruktion $y_1 + y_2 - y_1y_2 = (y_1-1)(1-y_2) + 1 > 1$, folgt durch Addition der beiden Ungleichungen

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n > n - 1 + 1 = n \ .$$

Die Aussagen (4.4) und (4.5) ergeben sich (nach kurzer Umformung), weil $A(a^2, b^2, c^2) \geq G(a^2, b^2, c^2)$ und weil Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b = c > 0$.

Die Seite für den Computer-Fan

Wahr oder falsch?

Die Berechnung der Zweierpotenzen $2^7, 2^{17}, 2^{27}, 2^{37}, 2^{47}$ liefert Zahlen, die stets mit der Ziffer 1 beginnen. Diese Beobachtung lässt vermuten:

Jede Potenz $2^{n \cdot 10+7}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, beginnt mit einer 1 als erster Ziffer.

Stimmt diese Vermutung? (H.F.)

Ein Primzahl-Rennen

Jede Primzahl ≥ 5 ist von der Form $4n+1$ oder $4n+3$, $n \geq 1$ (denn $4n+0, 4n+2, 4n+4$ sind sicher keine Primzahlen). Wir schreiben nun für $n = 1, 2, 3 \dots$ die Primzahlen in eine Tabelle, getrennt nach ihrer Form $4n+1$ oder $4n+3$. Mit V_n („Vorsprung“) geben wir an, wie viele Primzahlen $4n+3$ es bis zur Stelle n mehr sind als Primzahlen $4n+1$. Das Ganze nennen wir ein Primzahl-Rennen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
Primzahl $4n+1$	5		13	17			29		37	41			53		61			73			...
Primzahl $4n+3$	7	11		19	23		31			43	47			59		67	71		79	83	...
V_n	0	1	0	0	1		1		0	0	1		0	1	0	1	2	1	2	3	...

Wenn man dieses Primzahl-Rennen weiter verfolgt, z.B. bis $n = 1000$, dann findet man für $n = 1, 2, \dots, 1000$ stets: Der Vorsprung V_n der $(4n+3)$-Primzahlen ist ≥ 0.

Stimmt diese Aussage auch für **alle** natürlichen Zahlen n? (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 75

$$\pi = 3,14159265358979323846\dots$$

Von dem neben stehenden schlichten Programm behaupten wir, dass es recht wirkungsvoll ist: Bei jedem Durchlauf der Schleife wird die Anzahl bereits vorhandener exakter Stellen, grob angenähert, verdoppelt.

Wie viele exakte Stellen hat man nach 10 Durchläufen? (H.F.)

Startwerte:	
$A = E = 1$	$D := A$
$B = 1 : \sqrt{2}$	$A := \frac{A+B}{2}$
$C = 1 : 4$	$B := \sqrt{BD}$
	$C := C - E \bullet (A - D)^2$
	$E := 2 \bullet E$
	Print $\frac{(A+B)^2}{4 \bullet C}$

Lösung:

Stephan Holzer vom Schloss-Gymnasium in Mainz hat ein Programm entwickelt, bei dem – entsprechend der Aufgabenstellung – der Benutzer die Anzahl von Schleifendurchläufen eingibt und das dann die davon abhängige Anzahl von exakten Nachkommastellen der Zahl π ausgibt. Sein Ergebnis lautet:

Die Anzahl exakter Nachkommastellen der Zahl π nach 10 Durchläufen beträgt $\mathbf{2789}$.

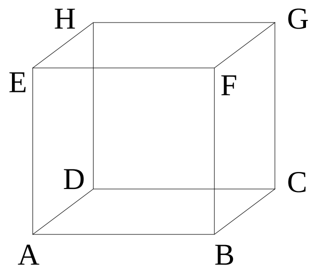
Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).

Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 76

Vier Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Nummerierung von Würfelecken



Ersetze jeden Buchstaben durch eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots, 7$, so dass keine Zahl übrig bleibt und die Summe der beiden Zahlen an den Endpunkten einer Würfelkante jeweils eine Primzahl ist. (H.F.)

Lösung:
$A = 6$, $B = 5$, $C = 0$, $D = 7$, $E = 1$, $F = 2$, $G = 3$, $H = 4$.

Verpackungen
$6\,000$ Streichholzschachteln sollen in Pakete mit jeweils gleicher Anzahl von Schachteln verpackt werden.
Gib an, auf wie viele Arten man das machen kann. (H.F.)

Lösung:
Es sei s die Anzahl der Streichholzschachteln in einem Paket und p sei die Anzahl der Pakete. Dann gilt die Gleichung $s \cdot p = 6\,000$. Daraus folgt: s ist ein Teiler von $6\,000$ und p ist der zugehörige Komplementärteiler; s und p können demnach nur folgende Werte annehmen:

s	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	16	20
p	6000	3000	2000	1500	1200	1000	750	600	520	400	375	300

s	24	25	30	40	48	50	60	75	80	100	120	125	…	6000
p	250	240	200	150	125	120	100	80	75	60	50	48	…	1

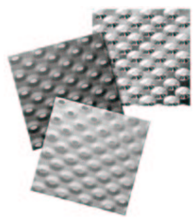
Man kann die $6\,000$ Streichholzschachteln auf 40 Arten in Pakete gleicher Schachtelanzahl verpacken.

Platten
Für das Auslegen einer Fläche stehen $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ große Platten zur Verfügung.

1) Wie viele Platten bilden bei einer quadratischen Fläche von $64\,\mathrm{m}^2$ den Rand?

2) Wie viele Platten bilden bei einer quadratischen Fläche von n^2 Quadratmeter den Rand?

3) Eine rechteckige Fläche von $64\,\mathrm{m}^2$ soll mit diesen Platten belegt werden. Die lange Seite ist dabei um $12\,\mathrm{m}$ länger als die kurze. Wie viele Platten liegen hier am Rand? Begründe deine Antwort!



(Judith Reinhardt, Geschwister- Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:

1) Es entsteht ein Quadrat von 8 mal 8 Metern. Es liegen $(8-1) \cdot 4 = 28$ Platten am Rand.

2) $(n-1) \cdot 4$ oder $n \cdot 4 - 4$, weil die Ecken nicht doppelt gezählt werden dürfen.

3) Ist die kurze Seite x Meter lang, so weist die lange Seite $x + 12$ Meter auf. Aus $x(x+12) = 64$ folgt $x^2 + 12x + 36 = 100$, also $x + 6 = 10$ und daher $x = 4\,\mathrm{m}$. Daher liegen am Rand $2 \cdot 3 + 2 \cdot 15 = 36$ Platten.

Leichtgewicht

Die Schüler Alf, Bert und Chris aus einer 8. Klasse bestimmen ihr Gewicht, indem sich jeweils zwei Jungen gleichzeitig auf die Waage stellen:
Alf und Bert wiegen $72\,\mathrm{kg}$, Bert und Chris $118\,\mathrm{kg}$, Chris und Alf $80\,\mathrm{kg}$.
Können diese Gewichte stimmen?

(H.F.)

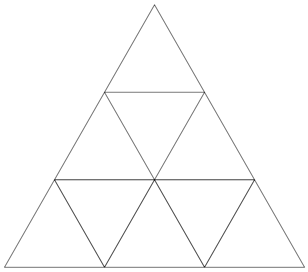
Lösung: Die Gewichte von Alf, Bert und Chris seien mit a, b, c bezeichnet.
Damit gilt:

$$a + b = 72; \qquad b + c = 118; \qquad c + a = 80.$$

Addiert man die drei Gewichte, so gilt: $2 \cdot (a + b + c) = 270$.
Daraus folgt wegen $b = 72 - a$ und $c = 80 - a$, dass $a = 17$, $b = 55$ und $c = 63$ ist.
Bert und/oder Chris müssen beim Wiegen geschummelt haben, um Alf als Leichtgewicht verspotten zu können.
Ein Schüler der Klasse 8 wird nämlich kaum nur 17 kg wiegen.

Gleichseitige Dreiecke

In einem gleichseitigen Dreieck wird jede der drei Seiten in drei gleichlange Teilstrecken geteilt. Durch Verbindung der Teilungspunkte erhält man kleinere gleichseitige Dreiecke – vgl. Figur.



a) Wie viele gleichseitige Dreiecke sind in der Figur zu sehen?

b) Beantworte a) für den Fall, dass jede der Seiten im Ausgangsdreieck in 4 (in 5, in 6) gleichlange Teilstrecken zerlegt wird.

c) Jede Seite des Ausgangsdreiecks sei nun in 100 gleichlange Teilstrecken zerlegt. Wie viele gleichseitige Dreiecke sind dann ungefähr zu sehen: $2\,500, 25\,000$ oder gar $250\,000$?

   Tipp: Am Besten wäre es, wenn du eine Anzahl-Formel für $n = 3, 4, 5, \ldots, 100, \ldots$ angeben könntest.

(H.F.)

Lösung:
$A(n)$ sei die Anzahl der gleichseitigen Dreiecke bei n Teilstrecken auf jeder Seite des Ausgangsdreiecks.

a) Mit dem „richtigen" Blick ist zu erkennen: $A(3) = 13$.

b) Auch in den Fällen $n = 4$ bzw. 5 bzw. 6 kann man an der entsprechenden Figur durch Abzählen die Lösung finden:

$$A(4) = 27; \quad A(5) = 48; \quad A(6) = 78.$$

c) Vielleicht habt ihr bei den zu untersuchenden Fällen in b) schon eine Strategie entwickelt für das Abzählen und könnt nun $A(100)$ abschätzen: Wer auf $A(100) \sim 250\,000$ tippte, lag richtig. Wer es gar schaffte, auf eine Formel zu kommen, konnte $A(100)$ sogar genau bestimmen. Es gilt nämlich allgemein:

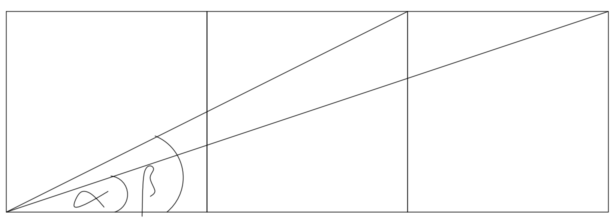
$$A(n) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2n^3 + 5n^2 + 2n) & \text{für gerades } n \geq 2, \\ \frac{1}{8}(2n^3 + 5n^2 + 2n - 1) & \text{für ungerades } n \geq 1 \end{cases}$$

Somit ist $A(100) = 256\,275 \sim 250\,000$. Wie eine solche Formel entwickelt werden kann, erfahrt ihr im nächsten Heft.

Auf dem Trödelmarkt
Fritz feilscht hartnäckig um ein altes Grammophon. Beim Preis von 270 Euro will er schließlich kaufen. Als er nun bezahlen will, stellt er fest, dass er lediglich viele 20 Euro-Scheine dabei hat. Der Verkäufer sagt: „50 Euro-Scheine habe ich einige, aber keine anderen Scheine und auch keine Münzen. Ich kann Ihnen also nicht rausgeben."
Nach einer kurzen Überlegung findet Fritz doch eine Lösung.
Wie hat er das gemacht? (MM)

Lösung: (durch Probieren)
Fritz kann folgende Beträge geben: 20, 40, 60, $\ldots$ Euro.
Der Verkäufer kann folgende Beträge herausgeben: 50, 100, 150, $\ldots$ Euro.
Offenbar klappt die Zahlung, wenn Fritz einen Betrag erreicht, der um 50 größer als 270 ist.
$270 + 50 = 320$. Diesen Betrag kann Fritz erreichen, weil $320 : 20 = 16$ ist.
Also gibt Fritz 16 Zwanziger und bekommt einen Fünfziger zurück.

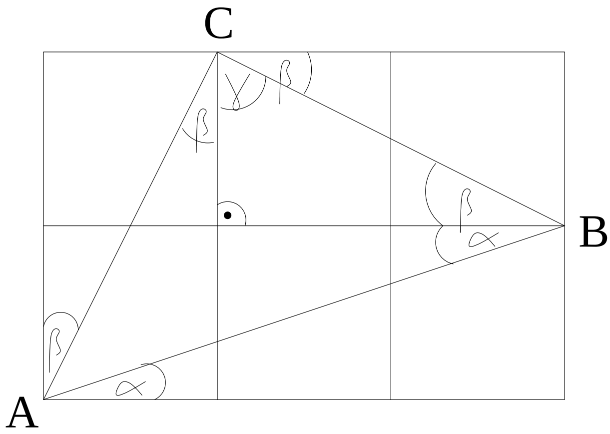
Geometrie im Rechteck
Wir fügen drei kongruente (= deckungsgleiche) Quadrate zu einem Rechteck:



Zeige: $\alpha + \beta = 45°$.

(Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:
Betrachte folgende Figur, in der die Winkel α und β an den eingezeichneten Stellen wieder auftauchen (Wechselwinkel und Winkel in kongruenten Dreiecken).



Nun ist zu zeigen, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.
$\triangle ABC$ ist gleichschenklig: Die beiden Schenkel AC und BC sind Diagonalen in gleichen Rechtecken.

$\triangle ABC$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C:
$\measuredangle ACB = \beta + \gamma$. Mit $\gamma = 90° - \beta$ gilt:
$\measuredangle ACB = \beta + 90° - \beta$
$\measuredangle ACB = 90°$.

Da das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, gilt: $\measuredangle ABC = \alpha + \beta = 45°$.

* * * * * * *

Wo steckt der Fehler?

Anna bekommt von ihrer Oma ein ungwöhnliches Geburtstaggeschenk: Die Oma bezahlt im Tante-Emma-Laden 40 Portionen Eis im voraus. Anna kann sich je nach Bedarf mehr oder weniger Portionen holen – bis die Anzahl von 40 erreicht ist.

Gleich am Anfang holt Anna 20 Portionen für ihre Freundinnen und Bekannten. Anna und Tante Emma führen getrennt je eine Liste, die jedes Mal aktualisiert wird. Beim zweiten Mal nimmt Anna 9 Portionen Eis mit. Sie notiert in ihrer Liste 9, Tante Emma 11 (so viele sind bereits bezahlt). Die zwei Listen sehen am Ende so aus:

Anna	Tante Emma
20	20
9	11
6	5
3	2
1	1
1	0

Die Null in Tante Emmas Liste bedeutet, dass Anna kein Eis mehr „umsonst“ bekommen kann.

Sicherheitshalber machen sie die Probe, indem sie die Zahlen in den einzelnen Spalten addieren. In Annas Spalte ergibt die Summe 40, in Tante Emmas Spalte aber nur 39; Widerspruch!

Wo steckt der Fehler? (Entnommen aus A. Furdek, Fehler-Beschwörer)

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Wochentag

Welcher Wochentag ist am 20. Juni, wenn in diesem Monat an drei ungeradzahligen Tagen Donnerstag ist? (MM)

Bestsellerliste

Auf der Bestsellerliste einer bekannten Zeitschrift stehen die acht besten Kinofilme einer Woche und deren Platzierung der Vorwoche.

Hinweise

1. „Überleben! - Alive“ ist diese Woche nicht auf Platz 8.
2. Der Film auf Platz 7 stand auch in der Vorwoche dort, der Spitzenreiter der Vorwoche konnte sich aber in dieser Woche nicht mehr an erster Stelle halten.
3. „Und täglich grüßt das Murmeltier“ steht auf Platz 2 der Bestsellerliste.
4. In der Vorwoche lag „Forever young“ zwei Plätze hinter dem Film „Armee der Finsternis“.
5. „Aus der Mitte entspringt ein Fluss“ (Vorwoche Platz 6) liegt wie schon in der Vorwoche einige Platzierungen hinter dem Kinofilm „Sommersby“, der sich in der Vorwoche unter den ersten drei Plätzen befand.
6. Um einen Platz verbessern konnte sich der Film, der in der Vorwoche auf Platz 4 stand; Platz 5 dagegen lag in der Vorwoche eine Platzierung weiter vorn.
7. „Gewagtes Spiel“ hat eine ungerade Platznummer auf der Bestsellerliste bekommen.
8. Der Film „Armee der Finsternis“ auf Platz 8 war in der Vorwoche um fünf Plätze vor dem Film „Dschungelbuch“, der diese Woche nicht Platz 1 belegt.
9. Der Kinofilm, der eine Woche zuvor Platz 5 erreichte, steht nun zwei Plätze hinter dem Film, der in der Vorwoche auf Platz 6 stand.

Fragen

1. Welche Filme stehen jeweils auf den Plätzen 3, 4 und 6 der Bestsellerliste?
2. Welche Filme standen in der Vorwoche auf den Plätzen 2, 3 und 7 der Bestsellerliste?

(gefunden von Vanessa Nagel, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

Zahlenrätsel

Von welcher Zahl ist das Dreifache um 7 größer als das Zehnfache?

(Adriana Spawisz, Geschwister–Scholl–Gymnasium Ludwigshafen)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Der Strich

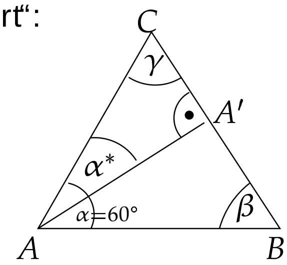
Wer kann durch Einfügen eines einzigen Strichs aus der offensichtlich falschen Aussage

$$126 - 3 = 894$$

eine richtige Aussage machen? (Felix Liebrich, Karolinen-Gymnasium Frankenthal)

Dreiecke und Prozentrechnung

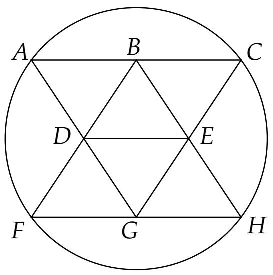
Julia, eine der ganz cleveren Mathematikerinnen in der 7b, trifft am Schuljahresende ihren ehemaligen Mathe-Lehrer, der sie (natürlich) nach ihren mathematischen Errungenschaften im letzten Schuljahr ausfragen will. Na ja, Julia berichtet ziemlich ausweichend von einigen Themen. Aber schon ist ihr alter Lehrer „in Fahrt“:



„Prozentrechnung und Dreieckslehre habt Ihr gerade behandelt. Das ist ja schön. Da habe ich immer am Jahresende die Schüler noch mal richtig getestet. So ’ne schöne kleine Aufgabe, in der der ganze Stoff der 7. Klasse drin ist! Na schau sie Dir mal an.“ Hat der Mensch doch tatsächlich sogar dafür eine Aufgabe dabei! Also, die Aufgabe lautet:

„In einem Dreieck ABC ist $\alpha = 60°$, und der Winkel β ist 92% von γ. Welchen Winkel α^* bildet die Höhe AA' mit der Seite AC?“

Figur nachzeichnen



Wie kann man diese Figur, ohne abzusetzen und ohne irgend eine Linie doppelt zu zeichnen, nachzeichnen?
(Christoph Karg, Geschwister Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Der Zahlenfloh macht Sprünge

Auf dem Zahlenstrahl seien alle natürlichen Zahlen und die Null markiert. Ein Zahlenfloh, der zu Beginn auf der Marke 0 sitzt, kann nach rechts nur Sprünge der Länge 9 und nach links nur der Länge 7 machen.

a) Kann er die Marke 1 erreichen?
b) Gibt es eine Marke, die er von 0 aus nicht erreichen kann?
c) Welches ist die Minimalzahl von Sprüngen, mit der er zur Marke 2003 gelangt?
d) Gibt es eine Marke m, die er mit genau m Sprüngen erreicht?

(H.F.)

Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 824. Klaras Kiesel

Klara findet zwei Kieselsteine. Ihre Freundin Sybille behauptet, dass man eine geschlossene Kurve finden kann, die bei beiden Kieseln auf der Oberfläche vorkommt. *Hat Sybille recht?* (WJB)

Aufgabe 825. Eine geometrische Knobelei

Kannst Du in der Ebene 8 Geraden so zeichnen, dass gilt:

a) Die 8 Geraden schneiden sich in genau 9 Punkten?

b) Sie schneiden sich genau in 10 Punkten?

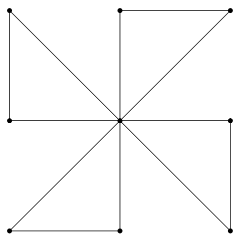
c) Sie schneiden sich in genau 11 Punkten?

Kannst Du die Fragen b) und c) auch für 9 Geraden beantworten?
(Eine korrekte Zeichnung genügt als Lösung.) (H.F.)

Aufgabe 826. Kürzbare Brüche

Gibt es Brüche $\frac{a}{b}$, $a \neq b$, so dass gilt: Die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \frac{a+3}{b+3}, \ldots, \frac{a+10}{b+10}$ sind allesamt kürzbar? (Begründung und Beispiel) (H.F.)

Aufgabe 827. Eine undurchführbare Nummerierung



Die von jeweils 2 Punkten begrenzten Strecken der Figur sollen so mit den Zahlen 1 bis 12 nummeriert werden, dass die Summe der Zahlen auf den in einem Punkt zusammen stoßenden Strecken bei allen 9 Punkten gleich ist. (H.F.)

Aufgabe 828. Ganze Zahlen am Dreieck

a) Man bestimme das flächenkleinste rechtwinklige Dreieck, bei dem alle Seiten und Höhen ganzzahlige Maßzahlen haben.

b) Löse die gleiche Aufgabe, wenn auch noch der Umkreisradius ganzzahlig sein soll.

(Steffen Biallas, Albert-Einstein-Gymnasium Magdeburg)

Aufgabe 829. Primzahlen in einer Oktave

Unter acht unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen > 2 gibt es höchstens drei Primzahlen. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 76

Kl. 8-13

Aufgabe 818. Verwandle Buchstaben in Zahlen!

$$\begin{array}{lrcl} (1) & A+B & = & C \\ (2) & H-J & = & G \\ (3) & C:D & = & D \\ (4) & B\cdot D & = & E \\ (5) & F:B & = & G \end{array}$$

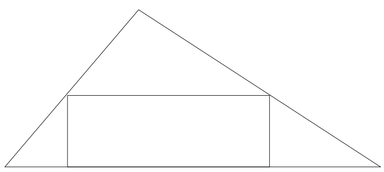
In den Gleichungen bedeutet jeder der 9 Buchstaben eine natürliche Zahl $n, n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9\}$. Verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen.

Wie lauten die Zahlengleichungen? (H.F.)

Lösung:

Aus (3) folgt: $C = D^2$ und damit $C = 4, D = 2$ oder $C = 9, D = 3$.
Annahme: Es sei $C = 4, D = 2$.
Aus (1) folgt dann: $A + B = 4$, also $A = 1, B = 3$ oder $A = 3, B = 1$.
$A = 1, B = 3$ ist nicht möglich, weil mit (5) $F = 9, G = 3$ und daher $G = B$ oder $F = 6, G = 2$ und daher $G = D$ wäre.
$A = 3, B = 1$ ist ebenfalls nicht möglich, weil aus (4) $D = E$ folgte.
Somit gilt: $\mathbf{C = 9, D = 3}$.
Aus (4) folgt: $B \cdot 3 = E$. Wegen $E \leq 9$ ist nur $B = 1$ oder $B = 2$ möglich.
Wäre $B = 1$, so hätte man $E = D$. Folglich ist $\mathbf{B = 2}$ und daher noch $\mathbf{E = 6}$.
Nach (5) ist $F : 2 = G$, also $F \in \{2, 4, 8\}$. Aber nur $\mathbf{F = 8}$ ist möglich.
Dann ist zugleich $\mathbf{G = 4}$.
Aus (1) folgt: $\mathbf{A = 7}$. Somit bleiben für H und J nur die Zahlen 1 und 5.
Aus (2) folgt daher: $\mathbf{H = 5}$ und $\mathbf{J = 1}$.

Aufgabe 819.



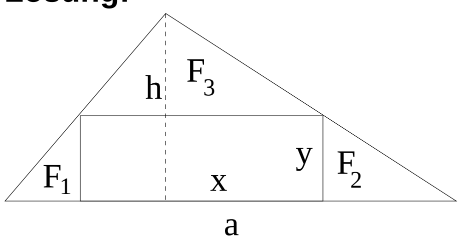
Über eine Seite eines Dreiecks soll ein Rechteck gelegt werden wie in der Zeichnung.

a) Finde das flächengrößte solche Rechteck!

b) Finde das Rechteck mit dem größtem Umfang!

(WJB)

Lösung:



Wir bezeichnen mit x und y die Seitenlängen des Rechtecks. Es gilt dann:

$$\begin{array}{lcl} 2(F_1 + F_2) & = & (a-x)y \\ 2F_3 & = & (h-y)x \end{array}$$

Die doppelte Fläche des gesamten Dreiecks ist also

$$2F = ha = (a-x)y + (h-y)x + 2xy = ay + hx.$$

Nach y aufgelöst ergibt dies $y = h\frac{a-x}{a}$.

zu $a)$:
Die Rechtecksfläche R (als Funktion von x) ist demnach $R(x) = xy = \frac{h}{a}(a-x)x$. Das Maximum finden wir durch Nullsetzen der Ableitung

$$R'(x) = \frac{h}{a}(a-2x) = 0.$$

Wir erhalten $x = \frac{a}{2}$ und $y = \frac{h}{a}\left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{h}{2}$. Die maximale Fläche ist also $\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{F}{2}$, also gleich der halben Dreiecksfläche unabhängig davon, welche Dreiecksseite wir als Grundseite gewählt haben.

Anmerkung: Ohne Differentialrechnung finden wir das Maximum von $R(x) = \frac{h}{a}(a-x)x$, wenn wir durch die Transformation $x \mapsto x + \frac{a}{2}$ die Ordinatenachse verschieben; wir erhalten dann nämlich

$$R\left(x+\frac{a}{2}\right) = \frac{h}{a}\left(a - x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{h}{a}\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{a}{2} + x\right) = \frac{h}{a}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right).$$

Nun ist zu sehen, dass in dem neuen Koordinatensystem das Maximum bei $x = 0$, also im alten Koordinatensystem bei $x = \frac{a}{2}$ liegt.

zu $b)$:
Der Umfang U (als Funktion von x) ist

$$U(x) = 2(x+y) = 2\left(x + h\frac{a-x}{a}\right) = 2\left(h + \left(1 - \frac{h}{a}\right)x\right).$$

Im Bereich $0 \leq x \leq a$ ist dies maximal für $x = a$, wenn $h \leq a$; für $x = h$, wenn $a \leq h$. Das Resultat ist dann ausgeartet (eine Seite gleich 0). Die längste Seite eines Dreiecks ist immer länger als die längste Höhe. Der Umfang U ist also maximal doppelt so lang wie die längste Dreiecksseite.

Aufgabe 820. Billard

Auf einem dreieckigen Billardtisch liegen drei gleichartige Kugeln. Jede der Kugeln enthält eine Münze. Der Tisch wird in eine zufällige Richtung gekippt. Die Kugeln rollen dann in eine der Ecken. Zwei der Ecken haben Taschen, in denen jeweils zwei Kugeln gefangen werden. In die dritte Tasche passt nur eine Kugel. Der Erwartungswert des eingefangenen Betrags ist 140 Cent.

a) Welche Münzen befinden sich in den Kugeln?

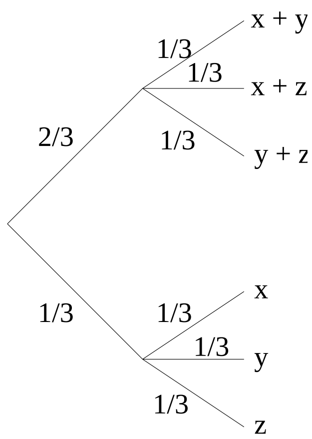
b) Welche anderen ganzzahligen Cent-Beträge kann man erreichen, wenn man andere Münzen verwendet?

(WJB (nach Lewis Carrol))

Lösung:

a) Seien $x, y,$ und z die Werte der Münzen und $s = x + y + z$. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ fangen wir eine Münze ein und erwarten dann $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}s$. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ erwarten wir statt dessen den Mittelwert der Beträge $x+y$, $x+z$, und $y+z$, also $\frac{2}{3}s$. Insgesamt ergibt sich so der Erwartungswert $E = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}s + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}s = \frac{5}{9}s$.

   Im Wahrscheinlichkeitsbaum stellen wir das so dar:



$E = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+y) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+z) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(y+z) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}z = \frac{5}{9}s$

$\frac{5}{9}s = E = 140$ ergibt $s = (\frac{9}{5})140 = 252$. Dieser Betrag lässt sich nur auf eine Art realisieren, nämlich als 2 Euro, 50 Cent und 2 Cent.

b) $s = \frac{9}{5}E$ muss durch 9 teilbar sein. Da für die Werte der Quersummen der Münzwerte nur 1, 2 und 5 vorkommen, müssen zwei dieser Quersummen gleich 2 und eine gleich 5 sein. Damit ergeben sich für s und E die folgenden möglichen Werte:

s	E
$2+2+5=9$	5
$2+20+5=27$	15
$2+200+5=207$	115
$20+20+5=45$	25
$20+200+5=225$	125
$200+200+5=405$	225

Weitere sechs Werte erhält man, indem in der obigen Tabelle die 5 durch die 50 ersetzt wird.

Aufgabe 821. Prost Neujahr!

Ein neues alkoholfreies Getränk KIBI soll auf den Markt kommen. In der Farbe ähnelt es Bier. Wie bei Bier entsteht beim Einschenken Schaum. Dabei verwandelt sich $1\,\%$ des Getränks in Schaum vom 20-fachen Volumen. Die zugehörigen Gläser mit Aufschrift „KIBI – das Kinderbier“ sollen zylindrisch sein mit (Innen-) Durchmesser $5\,\mathrm{cm}$. Der über das Glas hinausragende Teil der Schaumkrone soll eine Halbkugel bilden.

1. Welche Höhe H muss das Glas haben, damit man dies beim Einschenken aus einer $0{,}33\,\mathrm{l}$ – Flasche erreicht?
2. Auf welcher Höhe h beginnt dann der Schaum? (WJB)

Lösung:

Sei $x = \frac{1}{100}$ des Getränks, das sich in Schaum vom $y = 20$-fachen Volumen verwandelt. Dann:

1. Der Volumenbedarf in cm^3 (bzw. ml) ist
   $B = 330 - 330x + 330xy = 330(1 + x(y-1)) = 330 \cdot 1{,}19 = 392{,}7$.

   Das verfügbare Volumen ist $V = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot H \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$.

   Gleichsetzen von B und V und Auflösen nach H ergibt die erforderliche Höhe $H \approx 18{,}33\,\mathrm{cm}$.

2. Das Volumen bis zur Höhe h ist $v = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h$ und muss gleich

   $$b = 330\,(1-x) = 330 \cdot 0,99$$

   sein. Gleichsetzen von b und v und Auflösen nach h liefert $h \approx 16,64\,\mathrm{cm}$.

Aufgabe 822.
Man löse das System zur Grundmenge $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &= 272 \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 &= -68 \end{aligned}$$

(MM)

Lösung:
Durch Addition erhält man: $2x^3 + 2xy^2 = 204 \Longrightarrow x(x^2+y^2) = 102.$ $(*)$
Durch Subtraktion erhält man: $2x^2y + 2y^3 = 340 \Longrightarrow y(x^2+y^2) = 170.$
Durch Division der beiden erhaltenen Gleichungen erhält man:
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{102}{170} = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow y = \dfrac{5}{3}x.$
In $(*)$ eingesetzt folgt $x(x^2 + \frac{25}{9}x^2) = 102 \Longrightarrow x^3 = 27$ mit der einzigen reellen Lösung $x = 3$. Damit folgt $y = 5$.

Aufgabe 823.
Zeige, dass unter allen Dreiecken mit Eckpunkten auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ die gleichseitigen den größten Flächeninhalt haben. (VB)

Lösung:
Wir bezeichnen wie üblich mit a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks, mit α, β, γ die Winkel und mit R den Umkreisradius und mit A die Fläche. In unserem Fall ist $R = 1$. Der Sinussatz besagt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = 2R = 2,$$

also

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}(2\sin\alpha)(2\sin\beta)\sin\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta),$$

denn $\sin\gamma = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha+\beta)$. Ist nun β irgendwie gewählt, wollen wir herausfinden, wie α gewählt werden muss, um den Flächeninhalt zu maximieren. Es gilt

$$A'(\alpha) = 2\big(\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\big).$$

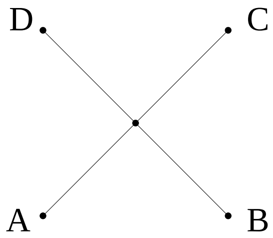
Da vernünftigerweise $\sin\beta \neq 0$, wird dieser Term genau dann 0, wenn

$$\tan\alpha = -\tan(\alpha+\beta) = \tan(180^\circ - \alpha - \beta) = \tan\gamma,$$

wenn also $\alpha = \gamma$. Ebenso finden wir aber auch $\alpha = \beta$. Es kommen also für den maximalen Flächeninhalt nur die gleichseitigen Dreiecke in Frage.

Kurze Wege
Beiträge unserer Löser(innen) zur Aufgabe 815
(zusammengestellt und kommentiert von Martin Mettler)

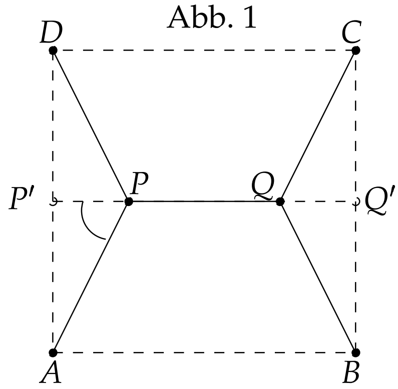
Aufgabe:
Die Punkte A, B, C, D seien Eckpunkte eines Quadrats. Durch die sich kreuzenden Strecken AC und BD ist jeder der Punkte A, B, C, D von jedem anderen Punkt aus erreichbar.
Kannst du ein kürzeres A, B, C, D verbindendes Wegenetz angeben? (H.F.)



Lösung: O.B.d.A. betrachten wir im Folgenden stets ein Quadrat der Seitenlänge 1. Dann hat das Wegnetz aus der Aufgabenstellung das Doppelte der Diagonalenlänge

$$g = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,828.$$

Abb. 1



Zur Lösung der Aufgabe wählt H.F. im Monoid-Heft 76 ein Netz wie in Abb. 1 mit $\measuredangle APQ = 120°$ und zeigt, dass die Länge dieses Netzes $\approx 2,732 < g$ ist.

Im Folgenden will ich zeigen, dass von allen Netzen der Form aus Abb. 1 jenes das kürzeste ist, bei dem $\measuredangle APQ = 120°$ ist.

Sei $\measuredangle APP' = \alpha$. Dann ist $\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{AP}$ und $\tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{P'P}$
$\Rightarrow \; AP = \frac{1}{2\cdot\sin\alpha}$ und $P'P = \frac{1}{2\cdot\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\cdot\sin\alpha}$.

Die Länge des Wegnetzes ist $L(\alpha) = 4 \cdot AP + PQ = \frac{2}{\sin\alpha} + 1 - 2 \cdot P'P$, also

$$L(\alpha) = \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} + 1.$$

Die erste Ableitung von L nach α, nämlich

$$L'(\alpha) = \frac{\sin^2\alpha - (2\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1 - 2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ auf $+$ bei $\alpha = \frac{\pi}{3}\mathrm{Rad} = 60°$. Also liegt ein Minimum vor. Die minimale Netzlänge beträgt

$$L\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 1 \approx 2,732 < g.$$

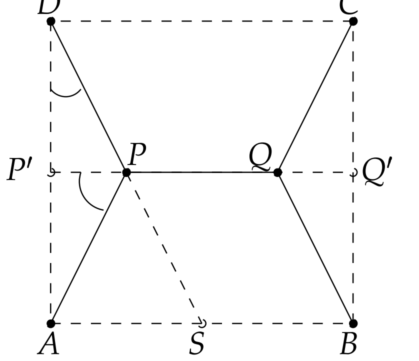
Anmerkung:
In diesem Fall ist $P'P = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ und $PQ = 1 - 2 \cdot P'P = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

Im Folgenden will ich aus den eingeschickten Lösungen einige interessante Schritte und Überlegungen herausgreifen.

Stefan Holzner, Mainz, betrachtet auch das Netz aus Abb. 1 und behauptet:
Ist $\measuredangle APQ = 120°$, so ist die Länge des Wegnetzes

$$L = 2(DP + QB) + PQ = 2 \cdot \sqrt{1 + \tan^2 30°} + 1 - \tan 30° \approx 2{,}732.$$

Abb. 2



Ziemlich telegrafisch, was? Aber er hat Recht, denn aus $\measuredangle APQ = 120°$ (s. Abb. 2) folgt $\measuredangle P'PA = \measuredangle DPP' = 60°$ und somit ist $\measuredangle P'DS = 30°$.
Im rechtwinkligen Dreieck DAS ist $\tan 30° = \frac{AS}{AD} = AS \;\Rightarrow\; PQ = SB = 1 - \tan 30°$.

Lars Imdahl, Eutin, betrachtet das Netz aus Abb. 1 und wählt $PQ = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; PP' = QQ' = d = \frac{1}{4}$ und $AP' = c = \frac{1}{2}$. Ist $AP = x$, so gilt nach Pythagoras $x^2 = d^2 + c^2 = \frac{5}{16}$, also $x = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Damit ergibt sich für die Länge des Wegnetzes

$$L = 4x + \frac{1}{2} = \sqrt{5} + 0{,}5 \approx 2{,}736 < g.$$

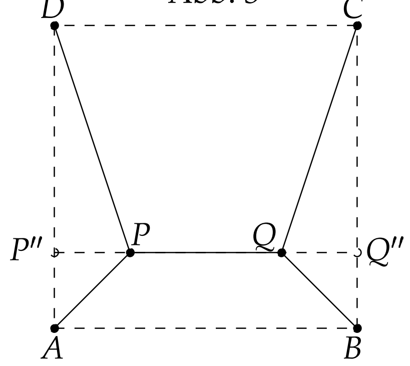
Sebastian Gutknecht, Duderstadt, betrachtet das Netz aus Abb. 1 und wählt $P'P = PQ = QQ' = \frac{1}{3}$. Im Dreieck $AP'P$ gilt nach Pythagoras $AP^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$. Die Länge des Wegnetzes ist dann

$$L = 4 \cdot AP + PQ = \frac{2\sqrt{13}}{3} + \frac{1}{3} \approx 2{,}737 < g.$$

Manuel M. betrachtet den etwas allgemeineren Fall eines nicht ganz symmetrischen Netzes (s. Abb. 3). Er bezeichnet $P''P = QQ'' = x$ und $AP'' = y$. Dann ist $P''D = 1 - y$ und $PQ = 1 - 2x$.
Die Wegnetzlänge ist eine Funktion mit zwei Variablen

$$f(x, y) = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 2 \cdot \sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + (1 - 2x).$$

Abb. 3



Zur Lösung des Extremwertproblems verwendet er nun Kenntnisse der höheren Mathematik, die außerhalb des Lehrplans der Oberstufe liegen.
Daher gebe ich lediglich das Ergebnis seiner Berechnungen an. Er findet das Minimum bei $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Die entsprechende Wegnetzlänge ist

$$L = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + 1 \approx 2{,}732 < g.$$

Anmerkung: Gehen wir zurück zur Abb. 1. Dort ist bereits laut Voraussetzung $y = \frac{1}{2}$.
Die Weglänge ist diesmal eine Funktion von einer Variablen x und zwar

$$L(x) = 4 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + (1 - 2x) = 2 \cdot \sqrt{4x^2 + 1} + 1 - 2x.$$

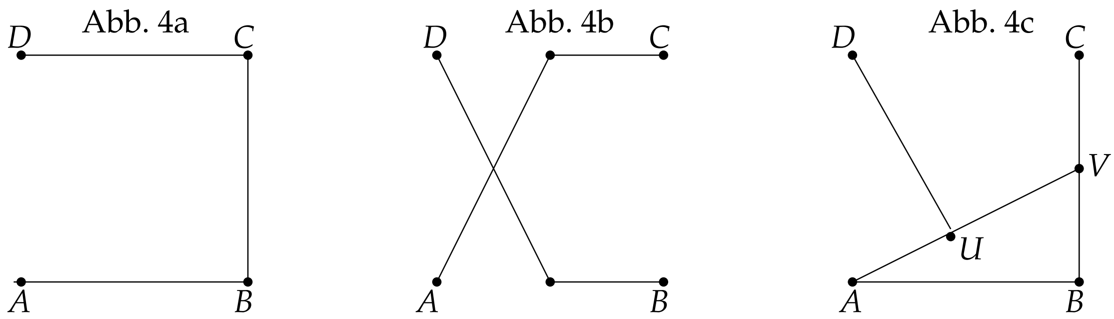
$L'(x) = 2 \cdot \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} - 2 = 0$ ergibt $4x - \sqrt{4x^2 + 1} = 0$, $16x^2 = 4x^2 + 1$, $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Die erste Ableitung hat an der Nullstelle $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ auf $+$; also liegt ein Minimum vor. Die minimale Länge ist

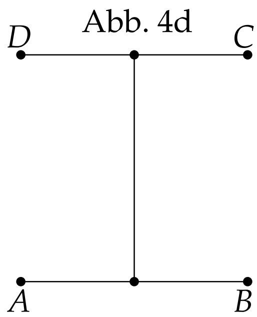
$$L\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{4\cdot 3} + \frac{1}{4}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 \approx 2{,}732 < g.$$

(s. wiederum die Lösung von S. 25 aus M76).

Charlotte Capitain, Wittlich, untersucht folgende Formen des Wegnetzes:



a) $L = 3 > g$



b) $L = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \approx 3{,}236 > g$

c) Es ist $AV^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$,
$DU^2 = DV^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot AV\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot AV^2 = \frac{15}{16}$.
Also ist $L = 1 + \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{15}{16}} \approx 3 > g$.

d) $L = 1 + 1 + 1 = 3 > g$.

Sie folgert nicht richtig, dass es kein kürzeres Netz gibt.

Der Torwächter

Ein Mann will an einem Torwächter vorbei in eine Stadt gelangen. Der Wächter fragt aber jedesmal nach einer Losung. Da der Mann diese nicht weiß, beschließt er, sich auf die Lauer zu legen. Dabei bekommt er Folgendes zu hören: Der Wächter sagt zu einem Passanten: 8. Darauf antwortet der Passant: 4. Zu dem nächsten Passanten sagt der Wächter: 28. Darauf der Passant: 14. Zum nächsten sagt der Wächter: 16. Darauf dieser: 8.

Ach, denkt der Mann, der in die Stadt will und alles mitgehört hat, das ist ja einfach. Daraufhin geht er zum Wächter. Der Wächter sagt: 12. Darauf antwortet der Mann: 6. Prompt wird er festgenommen.

Wie wäre die richtige Losung? (Janina Rau)

Lösung:

Die Lösung wäre 5 gewesen, weil 8 vier Buchstaben hat, 28 hat vierzehn Buchstaben, 16 hat acht Buchstaben und 12 hat fünf Buchstaben.

Wenn Spielen zur Aufgabe wird…

Die Suche nach Invarianten als ein heuristisches Prinzip in der Mathematik

von Manfred Lehn

Wir beginnen gleich mit einem Spiel, dem Einsiedlerspiel. Auf einem kreuzförmigen Spielbrett aus 33 Feldern liegen 32 Spielsteine; das Feld in der Mitte bleibt frei (Abb. 1). Nun darf gezogen oder eher gesprungen werden: bei jedem Zug darf mit einem beliebi-

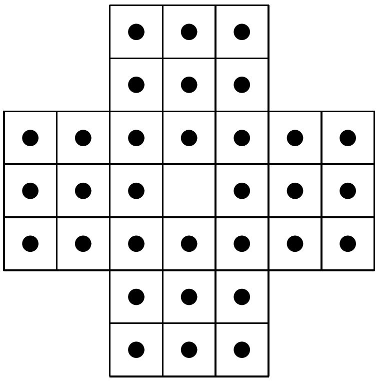


Abb. 1: Grundstellung

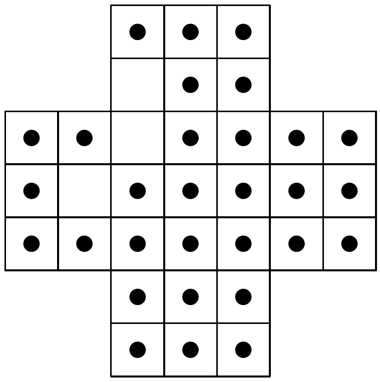


Abb. 2: Nach zwei Zügen

gen Stein parallel zu den Achsen des Spielfeldes über einen Nachbarstein gesprungen werden, wenn das Feld dahinter frei ist. Der übersprungene Stein wird entfernt. Nach zwei Zügen kann das Brett etwa so aussehen wie in Abbildung 2. Am Ende soll nur ein Spielstein übrig bleiben und zwar auf dem Feld genau in der Mitte des Spielbretts. Ich will nun nicht über dieses Geduldspiel schreiben, sondern über die folgende Variante, die von dem englischen Mathematiker John Conway stammt. (John Conway lehrt an der Universität in Princeton und wurde außerhalb der Mathematik besonders als Erfinder des Game of Life berühmt.)

Conway ersetzt zunächst das kreuzförmige Spielbrett durch ein nach allen Seiten unbegrenztes Feld. Als Ausgangsstellung belegen wir alle Felder unterhalb einer gedachten waagerechten Linie mit Spielsteinen (Abb. 3). Wir haben ein Meer von Steinen vor

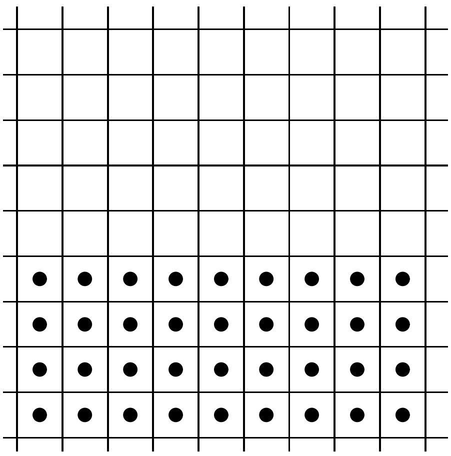


Abb. 3: Grundstellung in Conways Aufgabe…

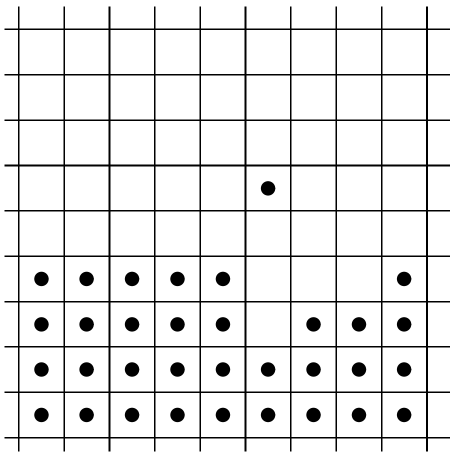


Abb. 4: … und nach drei Zügen.

uns und nennen die oberste Reihe der Kürze wegen den Horizont. Nun spielen wir nach den alten Regeln. Für den ersten Zug haben wir im Wesentlichen, d.h. bis auf die offensichtliche Symmetrie, nur eine Möglichkeit. Nach drei Zügen kann das Feld so aussehen wie in Abbildung 4.
Und das ist Conways Frage:

Wie hoch über den Horizont kann ein Spielstein gelangen?

Ohne einiges Experimentieren ist es schwer, das Ergebnis vorherzusagen. Manche werden angesichts des unendlichen Vorrats an Spielsteinen spontan sagen, man käme beliebig weit. Die Abbildungen 5 bis 8 zeigen, wie es weiter gehen könnte. Dabei wird schnell klar, dass es nicht ganz so einfach ist und dass das Problem darin besteht, die Spielsteine auch zur Baustelle zu bekommen:

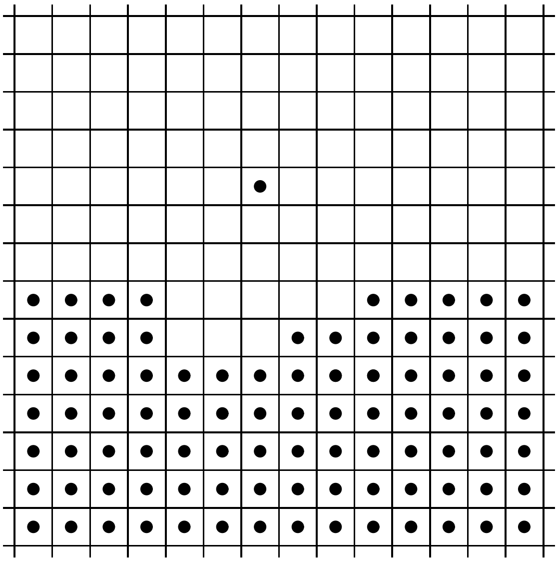


Abb. 5: Nach 7 Zügen

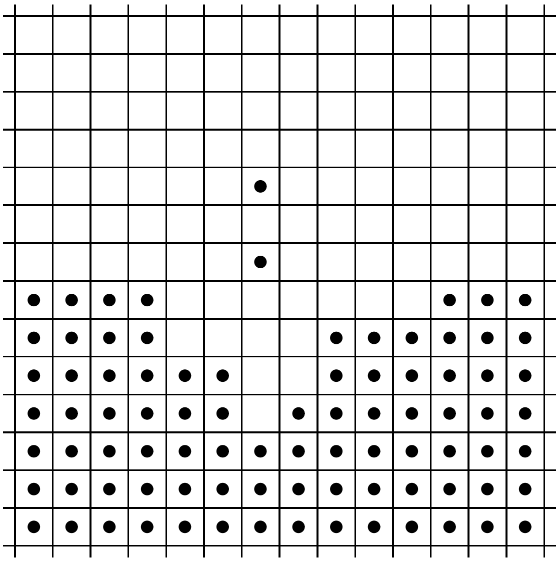


Abb. 6: Nach 12 Zügen

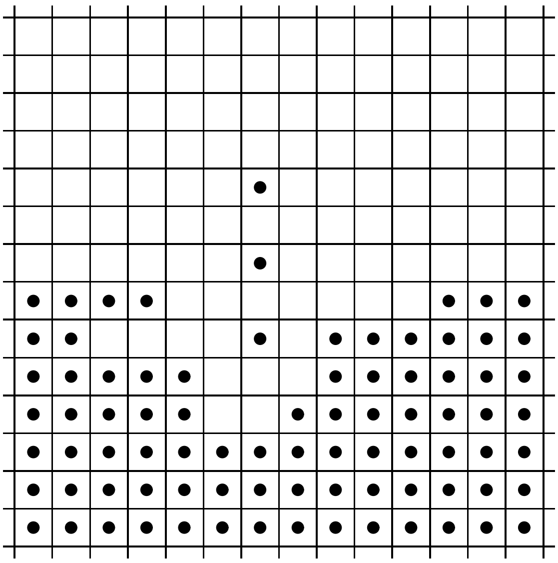


Abb. 7: Nach 15 Zügen

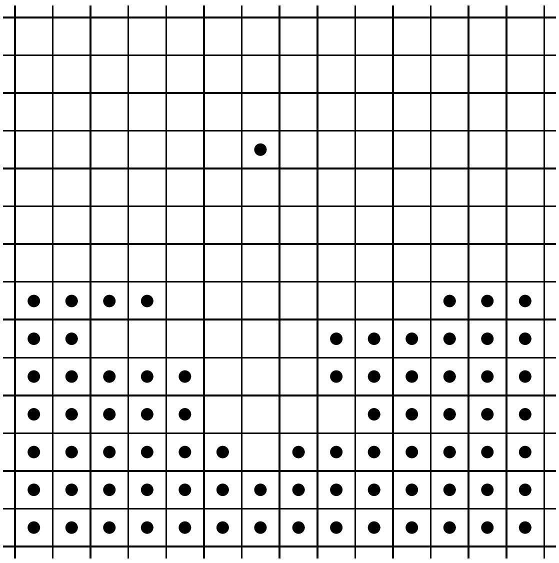


Abb. 8: Nach 20 Zügen

Wenn wir uns nun fragen, welche Spielsituationen überhaupt möglich sind, kommen wir schnell zu der Frage: Gibt es etwas, das bei einem Spielzug unverändert bleibt, also eine sogenannte **Invariante** ist?

In diesem Beitrag möchte ich über ein *heuristisches Prinzip* schreiben, das bei vielen mathematischen Fragestellungen fruchtbar ist: **Die Suche nach Invarianten**. Ich will das Thema mit Beispielen erläutern und hoffe, dass dabei die allgemeinen Prinzipien deutlich werden. Ich habe versucht, die Beispiele möglichst allgemein verständlich zu wählen, ganz konnte ich auf Rechnungen nicht verzichten. Dabei kann ich keine mathematische Definition voranstellen, sondern nur eine umgangssprachliche, die zudem recht vage ausfallen muss, wenn sie auf viele Beispiele anwendbar sein soll. Ich will in der Sprache der Brettspiele reden, die Übertragung in gänzlich andere Gebiete fällt nicht schwer, wenn das Prinzip klar ist.

Ein Spiel bestehe aus einer Ausgangsstellung (von Spielsteinen auf einem Spielbrett) und Spielregeln, die festlegen, welche Veränderungen (Spielzüge) zulässig sind und welche nicht. Eine Invariante einer Stellung ist eine Größe (eine Zahl, ein Vektor, eine Restklasse, ein Polynom etc.), die nur von der jeweiligen Stellung aber nicht vom bisherigen Spielverlauf abhängt und die sich bei zulässigen Zügen nicht ändert.

Aus dieser Festlegung ergibt sich sofort das Folgende: Ist man von einer Stellung A mit regelrechten Zügen zu einer Stellung B gelangt, so haben alle Invarianten in A und B denselben Wert. Im Umkehrschluss heißt das: Hat man eine Invariante gefunden, die in A und B verschiedene Werte annimmt, so ist es unmöglich, mit zulässigen Zügen von A nach B zu gelangen. Wichtig ist dabei, dass es auf den genauen Spielverlauf von A nach B überhaupt nicht ankommt. Zugleich ist die Warnung angebracht, dass die Gleichheit von Invarianten kein hinreichendes Kriterium sein kann. Dazu gibt es logisch keinen Grund und in der Praxis zahlreiche Gegenbeispiele.

Invarianten sind uns übrigens aus den anderen Naturwissenschaften wohl bekannt. Die Erhaltung der Gesamtmasse bei chemischen Vorgängen, die Erhaltung der Energie bei nichtatomaren Vorgängen, die Impulserhaltung, die Ladungserhaltung etc. sind fundamentale Ergebnisse der Chemie und der Physik. Diese Erhaltungssätze sind jeweils auch nur bei Einhaltung gewisser Spielregeln gültig. Bei der Spaltung eines Atoms sind Masse und Energie für sich genommen keineswegs invariant.

Es ist nützlich, bei der Analyse von Aufgaben und in der Konstruktion von Invarianten auf solche Begriffe zurückzugreifen. Ich werde später den Begriff der Energie gebrauchen, und zwar nicht, weil es einen exakten inhaltlichen Zusammenhang geben wird, sondern weil ich die zahlreichen Assoziationen ausnutzen möchte, die sich an diesen Begriff knüpfen.

Beispiel 1. Wir entfernen aus einem Quadrat von 8×8–Feldern zwei einander gegenüberliegende Ecken. Die Aufgabe lautet nun: Kann man das übrig gebliebene Feld mit Dominosteinen der Größe 1×2 lückenlos und überlappungsfrei überdecken (Abb. 9)? Dies stellt sich als ziemlich schwierig heraus. Wir können die Aufgabe variieren und allgemeiner Rechtecke der Kantenlängen m und n betrachten.

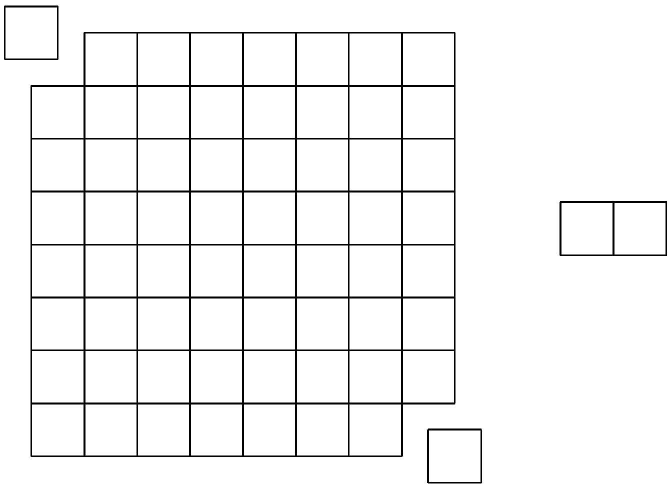


Abbildung 9.

Wenn m und n beide ungerade sind, so ist die Lösung der Aufgabe offenbar unmöglich, weil die Anzahl $m \cdot n - 2$ der übriggebliebenen Felder ungerade ist.(Nebenbei sind wir hier über eine ganz einfache Invariante gestolpert: die Parität (gerade/ungerade) der Felderanzahl ändert sich bei der Belegung durch Dominosteine nicht, weil jeder Stein eine gerade Anzahl von Feldern abdeckt.) Falls andererseits m gerade und n ungerade ist, so kann man ganz systematisch vorgehen und eine Lösung angeben. Aus dem folgenden Bild für den Fall $m = 6$ und $n = 9$ wird der Algorithmus sofort klar:

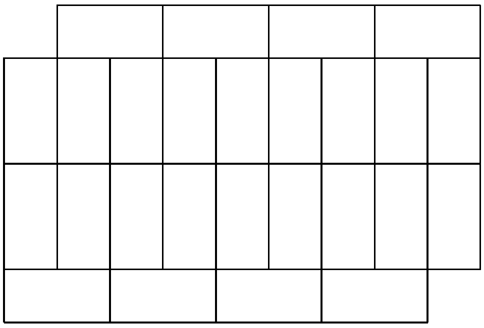


Abbildung 10.

Es bleibt der Fall, dass m und n beide gerade sind. Hätte ich die ursprüngliche Aufgabe etwas anders formuliert, so wäre die Lösung vielleicht sofort klar geworden: Ich habe das Wort Schachbrett, das bei einem 8×8–Feld eigentlich nahegelegen hätte, bewusst vermieden. Also noch einmal dieselbe Aufgabe mit einem Schachbrett:

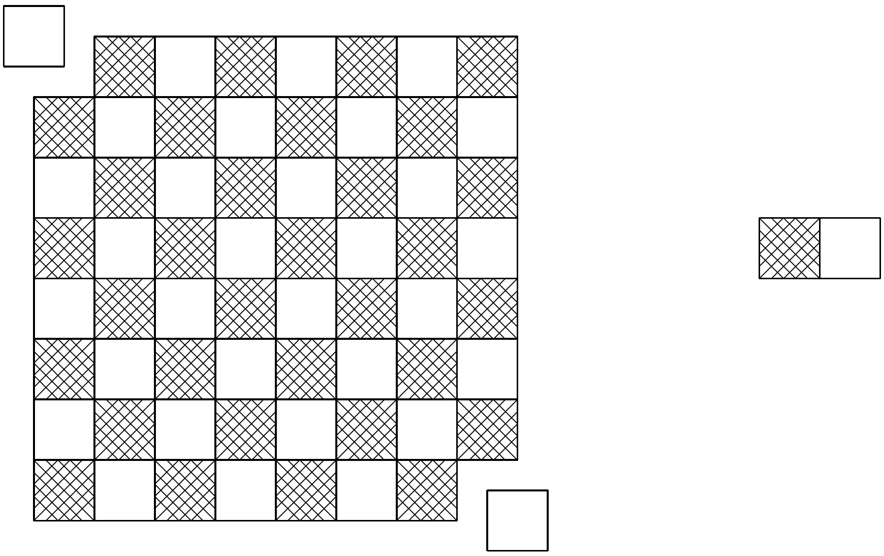


Abbildung 11.

Da wir zwei weiße Ecken entfernt haben, bleiben auf dem Brett 32 schwarze Felder, aber nur 30 weiße Felder übrig: es entsteht ein Überschuss von 2 schwarzen Feldern. Jeder Dominostein wird aber immer genau ein schwarzes und ein weißes Feld abdecken, egal wie wir ihn platzieren, und damit am Überschuss nichts ändern. Eine Überdeckung durch Dominosteine ist also deshalb unmöglich, weil bei vollständiger Überdeckung der Überschuss gleich $0 - 0 = 0$ sein müsste. Dasselbe Argument funktioniert natürlich auch für den allgemeinen Fall von beliebigen geraden Zahlen m und n.

Die Invariante, die hier zur Lösung führt, ist die Differenz

Anzahl der schwarzen Steine – Anzahl der weißen Steine.

Das Verschwinden dieser Invariante ist aber für allgemeinere Flächen als die oben betrachteten ein zwar notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium, wie man sich an einfachen Konstellationen leicht klar macht.

Beispiel 2. Mit dem ersten Beispiel verwandt ist die *Eulersche Polyederformel*: Wenn man die Oberfläche einer Kugel mit einem Netz aus Polygonflächen überzieht, oder etwas allgemeiner ein konvexes Polyeder betrachtet, so gilt bekanntlich für die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen die Formel

$$E - K + F = 2.$$

Die alternierende Summe auf der linken Seite bezeichnet man als die Eulercharakteristik der Sphäre. Die Formel lässt sich wie folgt beweisen: Wir projizieren das Netz der Kanten durch Zentralprojektion von einem Punkt aus, der auf keiner Kante liegt, in die Ebene. Die Projektion eines Würfels sieht etwa so aus:

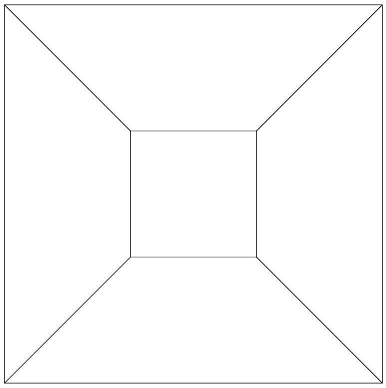


Abbildung 12.

Wir wollen nun die folgenden *Züge* zur Veränderung eines ebenen Graphen zulassen:

1. Die Zusammenziehung einer Kante, die verschiedene Punkte verbindet, zu einem Punkt. Dabei verschwindet eine Kante und ihre beiden Endpunkte verschmelzen zu einem Punkt. Die Bilanz ist somit: $E' = E - 1$, $K' = K - 1$, $F' = F$.

2. Entfernen einer Kante, deren Endpunkte gleich sind. Dabei verschwindet diese Kante, und die beiden bisher durch die Kante getrennten verschiedenen Gebiete verschmelzen. Es ergeben sich also die folgenden Veränderungen: $E' = E$, $K' = K - 1$, $F' = F - 1$.

Entscheidend ist, dass sich bei beiden Zügen die Eulercharakteristik $E - K + F$ nicht ändert, sie ist eine Invariante unter diesen Zügen.
Mit diesen beiden Zügen kann man anfangen, einen gegebenen Graphen zu vereinfachen. Indem man den ersten Zug auf drei der inneren Kanten des Würfelgraphen (Abb. 12) anwendet, erhält man nacheinander die Bilder

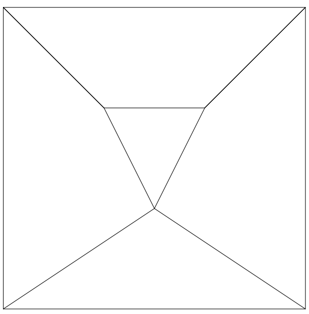


Abbildung 13.

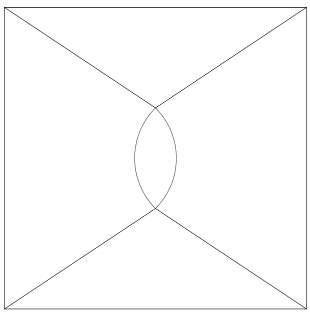


Abbildung 14.

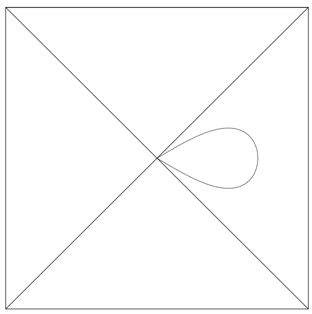


Abbildung 15.

und eine Anwendung des zweiten Zugs auf die geschlossene Kante ergibt

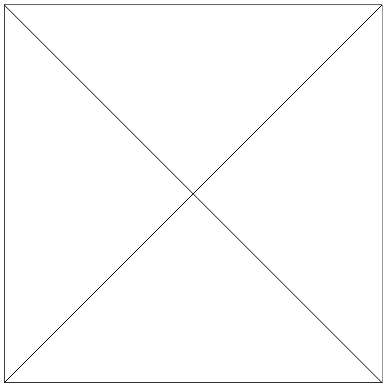


Abbildung 16.

Man kann so weiter machen, bis nur noch ein Punkt übrig bleibt. Offensichtlich kann durch diese Züge jedes zusammenhängende ebene Graphennetz in endlich vielen Zügen auf einen einzelnen, einsamen Punkt reduziert werden. Neben dem Punkt bleibt noch – nicht zu vergessen! – die Ebene darumherum übrig. Die Eulercharakteristik errechnet sich am Ende zu $1 - 0 + 1 = 2$, also war sie von Anfang an gleich 2.

Beispiel 3. Das folgende Spiel stammt von dem russischen Mathematiker und Fields-Medaillen-Träger Maxim Kontsevich vom renommierten IHES in Paris. Wir spielen auf einem Quadranten der Ebene, der nach rechts und nach oben unbegrenzt ist, und den wir in lauter Einheitsquadrate zerlegen. Es gibt nur eine Spielregel: Wenn die bei-

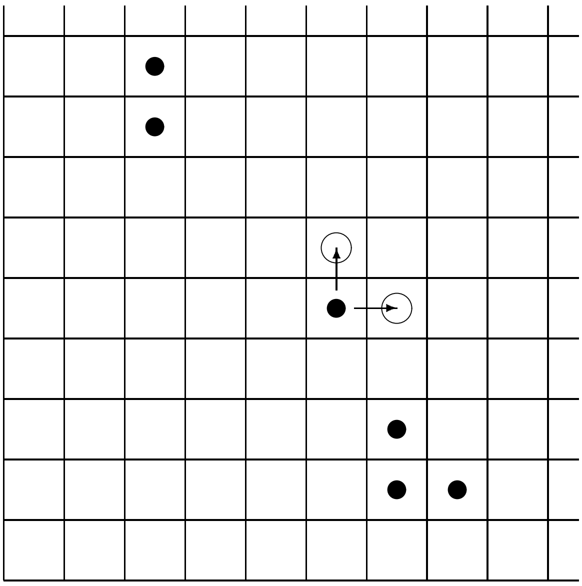


Abbildung 17.

den Plätze rechts und oberhalb eines Steins nicht belegt sind, so kann man den Stein entfernen und auf die beiden bisher freien Felder je einen Stein setzen (Abb. 17). Kontsevichs Aufgabe lautet wie folgt:

Gegeben sei die Anfangsstellung, bei nur ein Stein auf dem Brett sitzt, und zwar in der linken unteren Ecke. Ist es möglich, durch geschickte Züge die sechs Felder, die in der Ecke eine Treppe der Breite und Höhe 3 *bilden, vollständig von Steinen zu befreien?*

Die folgenden Bilder zeigen Zwischenstadien bei einem Versuch dazu:

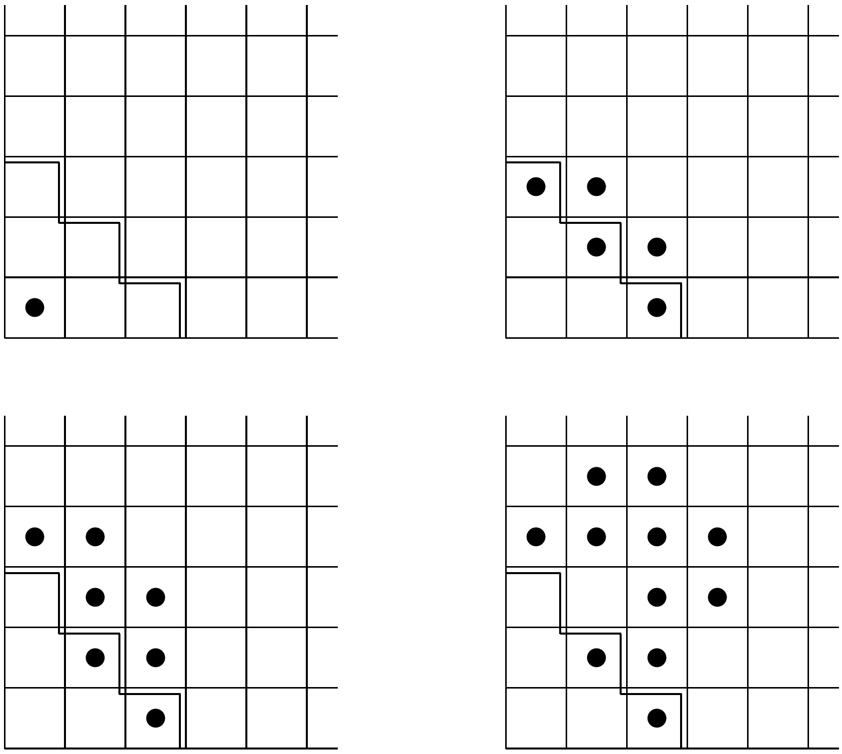


Abbildung 18.

Man ahnt es schon: Kontsevichs Aufgabe lässt sich nicht lösen. Aber wie beweist man das?

Im Sinne unseres Prinzips fragen wir: Gibt es eine Invariante? Können wir jeder Stellung eine Zahl zuordnen, die sich nicht ändert, wenn man Kontsevichs Regeln folgt? Und jetzt komme ich auf den Begriff der Energie zurück: Können wir jedem Stein eine (potentielle) Energie zuordnen, die von seiner Lage abhängt, und zwar so, dass die Energie der beiden Steine, die bei jedem Zug entstehen, zusammengenommen genauso groß ist wie die Energie des Steins, den wir entfernen? Nun ja, das ginge wohl, wenn die Energie jedes neuen Steins halb so groß ist wie die Energie des gegebenen Steins. Machen wir einen Ansatz und geben dem Feld in der linken unteren Ecke den Wert 1. Dann müssen die beiden Felder auf der Diagonalen daneben jeweils den Wert $1/2$ bekommen, und die drei Felder auf der nächsten Diagonalen den Wert $1/4$. Allgemeiner: Wenn wir den Feldern ganzzahlige Koordinaten (x, y) geben, und zwar so, dass das Eckfeld die Koordinaten $(0, 0)$ hat, so bedeutet unser Ansatz, dass ein Stein auf dem Feld (x, y) die Energie $1/2^{x+y}$ bekommt. Die Verteilung der Energiewerte sieht demnach so aus:

$1/16$	$1/32$	$1/64$		
$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$	
$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$
$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$
1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$

Abbildung 19.

Bei Spielbeginn hat die Ausgangstellung die Gesamtenergie 1. Bei allen Zügen ändert sich die Gesamtenergie nie. In diesem Modell gilt also die Energieerhaltung. Jetzt wollen wir annehmen, Kontsevichs Aufgabe ließe sich lösen. Welche Energie kann eine Stellung maximal haben, wenn die kleine Treppe links unten unbesetzt ist? Nun, im bestmöglichen Falle ist das gesamte übrige Spielfeld mit Steinen besetzt. Nur auf den beiden Randstreifen kann jeweils immer nur ein Stein stehen (warum?), und wenn er maximale Energie haben soll, so muss er auf dem vierten Feld sitzen bleiben (Abb. 20). Diese beiden Randsteine haben jeweils die Energie $1/8$, zusammengenommen also $1/4$. Das ist genau die Energie des mittleren Steins auf der zweiten Diagonalen. Es rechnet sich also leichter, wenn wir die Gesamtenergie der Konfiguration in Abb. 21 berechnen:

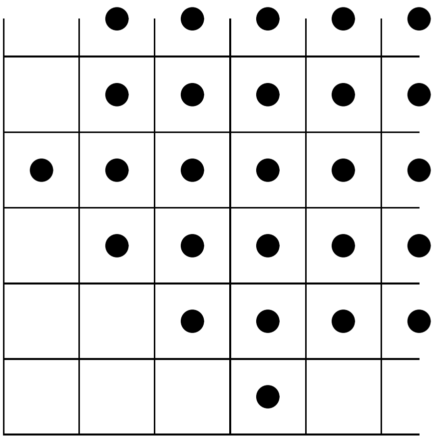


Abbildung 20.

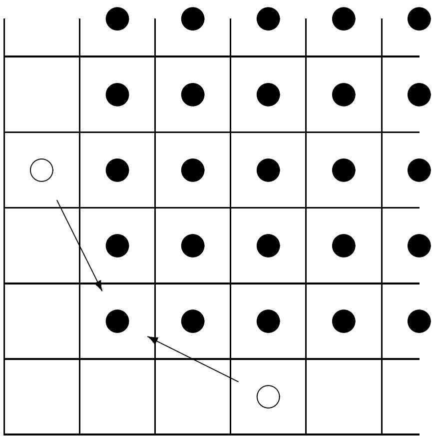


Abbildung 21.

Der Beitrag der ersten Reihe ist

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Für jede weitere Reihe verkleinert sich der Beitrag um den Faktor $\frac{1}{2}$. Der Beitrag aller Reihen zur Gesamtenergie ist also

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1.$$

Das ist genauso viel wie in der Ausgangsstellung! Allerdings haben wir zur Vereinfachung der Rechnung die Annahme gemacht, dass auf dem Feld unendlich viele Steine liegen. Das ist aber bei einer endlichen Anzahl von Zügen gar nicht wahr. Das heißt, die Energie bei jeder zulässigen Stellung, die Kontsevichs Aufgabe lösen würde, wäre streng kleiner als 1. Das kann nicht sein.

Es gab keinerlei inhaltlichen Grund, den Begriff der Energie ins Spiel zu bringen, ich hätte auch abstrakt von einer Funktion F sprechen können, die jeder Belegung des Feldes

$$s\colon \mathbb{N}_0^2 \to \{0,1\}$$

mit $\mathbb{N}_0^2 = \{(m,n) \mid m,n = 0,1,2,\ldots\}$ einen Wert

$$F(s) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{N}_0^2} \frac{s(x,y)}{2^{x+y}}$$

zuordnet. Aber das ist eigentlich eine Überlegung im Nachhinein. Solange ich noch gar nicht weiß, wie ich argumentieren will, wäre es absurd, so etwas Kompliziertes wie die Funktion F hinzuschreiben und damit arbeiten zu wollen.
Indem ich „Energie“ statt „F“ sage, wecke ich bestimmte Vorstellungen und Assoziationen, die mit dem Energiebegriff verbunden sind, etwa dass die Energie von der Lage eines Steins abhängt, so wie die potentielle Energie eines hochgehobenen Steins von der Höhe abhängt, oder dass die Gesamtenergie eines Systems sich additiv aus seinen Teilen zusammensetzt. Wohlgemerkt: wenn wir den Beweis erst einmal gefunden haben, ist der Begriff überflüssig, aber solange wir noch nach einer Lösung suchen, kann uns die richtige Assoziation zur Lösung bringen, die falsche in eine Sackgasse.

Wir müssen noch die Aufgabe von Conway lösen. In der Stellung in Abbildung 8 hat es ein Stein geschafft, auf die vierte Reihe über dem Horizont zu gelangen. Dabei ist ein großes Loch in den Steinevorrat gerissen worden. Jeder Versuch weiterzugehen führt zu immer größeren Löchern, die man gar nicht schnell genug auffüllen kann. Nach einer Weile gibt man auf. Es wird dann Zeit, die Hypothese aufzustellen, dass es gar nicht möglich ist, einen Stein auf die fünfte Reihe zu bekommen. Die eigentliche Frage lautet dann: Wie kann man das beweisen?

Unsere Diskussion der Aufgabe von Kontsevich legt es nahe, jedem belegten Feld eine „Energie“ zuzuordnen, die sich bei Sprüngen nicht ändert. Angenommen, es gäbe eine Stellung, in der ein Stein auf der fünften Reihe sitzt. Wir geben den Feldern ganzzahlige Koordinaten (x, y), und zwar so, dass der Stein auf der fünften Reihe die Koordinaten $(0, 5)$ erhält und die Steine auf der Horizontlinie die Koordinaten $(x, 0)$ haben. Da wir irgendwo einen Anfang machen müssen, geben wir dem Feld $(0, 0)$ die Energie $E(0, 0) = 1$. Ein Sprung nach oben soll die Energie nicht ändern, d.h. wir verlangen

$$E(x, y - 1) + E(x, y) = E(x, y + 1).$$

Damit ist die Funktion E noch lange nicht festgelegt. Erst wenn wir für $\alpha := E(0, -1)$ einen beliebigen Wert wählen, liegt die Funktion E zumindest für alle Felder $(0, y)$ fest. Wie wir α zu wählen haben, ist zunächst nicht klar. Nun kann man sich entweder daran erinnern, dass bei einer Rekursion $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ mit beliebigen positiven Startwerten das Verhältnis u_{n+1}/u_n gegen den Goldenen Schnitt konvergiert. Oder man verlangt aus Instinkt oder aus ästhetischen Gründen, dass sich bei Verschiebung des gesamten Spielfeldes um eine Reihe nach oben oder nach unten alle Energiewerte nur um denselben ganzzahligen Faktor ändern. Beide Ansätze führen dazu, den Goldenen Schnitt

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618\ldots$$

zu wählen, der die Relation $1 + \alpha = \alpha^{-1}$ erfüllt. Das ergibt $E(0, y) = \alpha^{-y}$. Wir springen aber auch von rechts nach links. Das führt uns auf den Ansatz $E(x, y) = \alpha^{x-y}$. Spätestens jetzt haben wir aber ein Problem: Sprünge nach oben oder nach links erhalten die Energie, aber bei Sprüngen nach unten oder nach rechts sinkt die Energie! Nun, Sprünge nach unten sind, so sagt die Spielerfahrung, sowieso ungünstig. Aber bei Sprüngen zur Seite entscheidet nicht die Richtung, ob sie brauchbar sind oder nicht, sondern die Frage, ob sie zur Mitte hin ausgeführt werden, oder nach außen. Der neue Ansatz $E(x, y) := \alpha^{|x|-y}$ trägt dem Rechnung. Die Belegung des Feldes mit Energiewerten sieht so aus:

1	α^{-1}	α^{-2}	α^{-1}	1
α	1	α^{-1}	1	α
α^2	α	1	α	α^2
α^3	α^2	α	α^2	α^3
α^4	α^3	α^2	α^3	α^4

Abbildung 22.

Daraus ergibt sich leicht die Gesamtenergie der Ausgangsstellung: Die Energie aller Felder auf der Halbgeraden unterhalb des Ursprungs ist

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2},$$

die Energie aller Felder also

$$\alpha^{-2} \cdot (1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3 + \ldots) = 2\alpha^{-4} - \alpha^{-2} = \alpha^{-5}.$$

Das ist gerade die Energie des Feldes $(0, 5)$. Wir argumentieren nun so: Die Energie der Anfangsstellung beträgt α^{-5}. Bei jedem Zug bleibt die Energie erhalten oder sinkt. Da stets noch unendlich viele Steine mit positiver Energie übrigbleiben, kann kein Stein die gesamte Energie α^{-5} für sich allein haben. Insbesondere kann niemals ein Stein auf dem Feld $(0, 5)$ sitzen.
In diesem Beispiel waren wir gezwungen, die ursprüngliche Idee der Invarianten aufzugeben: Die von uns definierte Energie blieb bei ungünstigen Zügen nicht erhalten. Eine passendere Metapher wäre, wenn wir bei physikalischen Begriffen bleiben wollten, die Entropie gewesen, und ich hätte eigentlich eher von einer „Subinvarianten“ sprechen müssen als von einer Invarianten. Aber heuristische Prinzipien sind eben nur solange brauchbar, wie sie zum Erfolg führen. Ich fasse zusammen:

Die Suche nach Invarianten, d.h. nach Größen, die bei Spielzügen, bei Symmetrieoperationen oder bei dynamischen Veränderungen unveränderlich bleiben, kann wesentlich zur Analyse eines Problems und zum Auffinden seiner Lösung beitragen. Bei der Konstruktion einer Invarianten kann es hilfreich sein, sich von außermathematischen Begriffen und den damit verbundenen Erfahrungen und Assoziationen leiten zu lassen, wie zum Beispiel den physikalischen Größen Ladung, Energie oder Entropie. Wie bei jeder Heuristik wird eine Idee durch den Erfolg gerechtfertigt; die Zensurschere, die mathematisch ungesicherte Annahmen sofort verbietet, darf erst ganz zum Schluss ansetzen: Zunächst ist alles erlaubt.

Literaturhinweis: Arthur Engel, Problem-Solving Strategies (Problem Books in Mathematics). Springer Verlag 1998, ISBN 0387982191.

Dieser Beitrag ist die leicht gekürzte Fassung eines Vortrages im Rahmen der Fortbildungstagung „Leitlinien im Mathematikunterricht“ am 29. und 30. September 2003 in Mainz. Teile daraus wurden als Festvortrag auf der MONOID-Feier am 29. November 2003 im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey vorgetragen.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Erfreut registriert die MONOID-Redaktion, dass der Freundeskreis von MONOID beständig wächst. Mit Beginn des neuen Schul- bzw. Kalenderjahres sind viele Preisträger(innen) aus Mathematik-Wettbewerben (auf Landes- und Schulebene, aber auch aus Olympiaden) in die Runde der Abonnentinnen und Abonnenten eingezogen, so von der Fürther Mathematik-Olympiade, vom Schulwettbewerb des Maria-von-Linden-Gymnasium Calw, Olmypiade-Teilnehmer(innen) vom Gnadenthal-Gymnasium Ingolstadt und allein 260 Preisträger(innen) des Landeswettbewerbes Mathematik in Bayern! Redaktion und Herausgeber von MONOID begüßen die neuen MONOIDaner auf das Herzlichste und wünschen ihnen, aber auch allen anderen treuen „Mitdenkern" viel Spaß bei der Lektüre der Artikel und einen durchschlagenden Erfolg beim Lösen der Aufgaben, damit möglichst viele von ihnen am **27. November 2004** bei der Preisvergabe-Feier in der **Universität Mainz** dabei sind!

2. Nicht nur, dass aus allen Himmelsrichtungen immer mehr MONOID-Freunde zu uns kommen, umgekehrt schwärmen ehemalige MONOIDaner in aller Herren Länder aus, so der mehrfache MONOID- und Wettbewerbspreisträger **Valentin Blomer**, inzwischen promoviert und zur Zeit an der University of Toronto (Kanada); bei einem Vortrag an der University of Michigan hat er zufällig wiederum einen ehemaligen MONOIDaner, Tobias Berger, getroffen. Dr. Blomer, ehemals Student in Mainz, dann Doktorand in Stuttgart und weiterhin Mitglied der MONOID-Redaktion, ist auf eine Juniorprofessur nach Göttingen berufen worden, dessen mathematischer Fachbereich großes Ansehen genießt, so dass es Valentin Blomer, der auf dem Gebiet der Zahlentheorie arbeitet, es „schon sehr ehrenhaft" empfindet, „an der Stätte (sogar wirklich in genau den Räumen) zu unterrichten, an der einstmals Gauß, Riemann, Landau und Siegel gewirkt haben".

3. Zum Jahreswechsel gab es auch einen Wechsel in der MONOID-Redaktion: **Katrin Elter**, die zwei Jahre lang die Hefte zusammenstellte und für ein ansprechendes Layout sorgte, hat gerade ihr erstes Staatsexamen mit Erfolg ablegt. Dazu gratulieren wir ihr und sagen auch an dieser Stelle nochmals herzlichen Dank für ihre umsichtige Mitarbeit! **Jens Mandavid** hat inzwischen ihre Aufgabe in der MONOID-Redaktion übernommen und bereits dieses Heft „komponiert" (Tel.: 06131-3926107).

4. Dieses Heft bringt einen Artikel von Dr. **Manfred Lehn**, Professor für Geometrie und Topologie in unserem Fachbereich (`lehn@mathematik.uni-mainz.de`). Dieser Beitrag ist aus einem Vortrag für Lehrer(innen) im September 2003 und einer etwas geküzten Fassung aus der MONOID-Feier Ende November 2003 hervorgegangen.

5. Auch eröffnen wir in diesem Heft die neue Rubrik **„Mathematische Lese-Ecke"** mit Lesetipps zur Mathematik; als ersten Tipp weist **Martin Mattheis**, Lehrer am Frauenlob-Gymnasium in Mainz, auf H. M. Enzensbergers *„Zahlenteufel"* hin.

6. Wie beim MONOID-Heft 76 (Dezember 2003) legen wir diesem Heft und auch den künftigen Heften kein Löserblatt mehr bei, sondern verweisen auf die aktuelle Rubrik im Internet unter `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`. Nach wie vor erscheint aber im Folgeheft die komplette Liste vom vorausgegangen Vierteljahr, so in diesem Heft die Löserliste vom 15.12.2003.

7. Der **Bundesverband Selbsthilfe Körperbehinderter e.V.** sucht auch in diesem Jahr Künstler und Freizeitmaler(innen), die den farbigen Kunstkalender „Kleine Galerie 2005" mitgestalten (Einsendeschluss: 16.04.2004). Infos: `http://www.bsk-ev.de`

Ekkehard Kroll

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 15.12.2003)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Ramona Friedrich 9, Alexander Heiss 12, Philipp Mayer 9, Daniel Schwind 16;
Kl. 6: Patrick Marx 13, Jaqueline Mechsner 7, Jonathan Peters 17, Arne Siefkes 6, Lisa Simon 20, Ozan Yilmaz 5;
Kl. 7: Janina Braun 6, Dorothee Fister 6, Claudia Heiss 16, Johanna Mees 12, Vanessa Nagel 6, Sabine Oßwalt 6;
Kl. 8: Patricia Kastner 26, Johannes Merz 13;
Kl. 9: Markus Bassermann 18;
Kl. 12: Manuel Ross 13.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 5: Laura Mettler 14, Désirée Schalk 15;
Kl. 7: Felix Liebrich 19, Lisa Mettler 20, Richard Nixdorf 12, Nina Rein 10, Konstantin Wüst 20, Rebecca Zimmer 15;
Kl. 9: Marc Rein 14.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 7: Thomas Geiß 23; **Kl. 10:** Stefan Tran 25.

Jens Senger 18;

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 7: Christian Behrens 20.

Bad Homburg: Kl. 9: Laura Biroth 22.

Bingen, Hildegardis-Gymnasium: Kl. 5: Katharina Kirsch 23.

Bingen, Stefan-George-Gymnasium: Kl. 7: Johann Kirsch 24.

Calw-Stammheim,Maria von Linden-Gymnasium: Michael Nothacker 3.

Duderstadt, Eichsfeld-Gymnasium: Kl. 12: Sebastian Gutknecht 17, Manuel M. 24.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 7: Anne Gutberlet 10; **Kl. 8:** Christian Münkel 10.

Eutin, Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium: Kl. 12 Lars Imsdahl 16.

Gensheim, IGS: Kl. 7 Jennifer Saul 10.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Anastasia Popova 1, Lea Schmitz 3;
Kl. 6: Corinna Dinges 9, Laura Herborn 4, Carolin Klein 15, Hannah Meilinger 9, Tatjana Mendt 9, Katharina Schmidt 5, Andreas Weimer 12, Johannes Weimer 12;
Kl. 7: Theresa Becker 2, Marina Bernikowa 2, Sarah Bieser 3, Jonathan Bös 2, Vanessa Faber 2, Jonas Fischer 6, Andreas Foltyn 3, Josephine Jordan 5, Alessandra Kremer 1, Cathrin Reusch 3, Andre Schardt 4, Adrian Schmidt 1, Lara Schneider 5, Simon Theis 1, Christian Wappler 2;
Kl. 9: Lena Bertram 3, Carina Czarnrtzki 2, Marcus Weidenfeller 5.

Halberstadt: Kl. 7: Robert Hesse 16.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Gerd Weber, Christoph Straub):
Kl. 6: Karin Emil 18, Marina Morand 17;
Kl. 8: Alia el Bolock 13, Nadia Shadi 5;
Kl. 9: Lauren Emil 18, Nadine Issa 13, Mariette Michael 10, Miriam Morad 16, Iman Tarek 10.

Kelkheim/Taunus, Eichendorffschule (Betreuende Lehrer Herr Marsen, Herr Ackermann): Kl. 8: Isabell Peyman 21, Sonja Sauckel-Plock 9, Viola Sommer 4.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium: Kl. 6: Marius Rackwitz 3.

Landau, Max-Sievogt-Gymnasium: Kl. 10: Christina Flörsch 8.

Ludwigshafen: Claudia Mack 8.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 8: Katharina Kober 14;
Kl. 9: Christoph Karg 15;
Kl. 10: Judith Reinhardt 20, Jonas Weber 7.

Magdeburg, Werner-von-Siemens-Gymnasium: Kl. 9: Sebastian Schulz 15.

Mainz, Schlossgymnasium: Kl. 13: Stephan Holzer 29.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Maike Bäcker 8, Natalie Geiß 9, Michaela Schuster 9, Helena Schweizer 9.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 5: Vivien Kohlhaas 8; **Kl. 6:** Madeline Kohlhaas 16;
Kl. 8: Annika Kohlhaas 20;
Kl. 9: Anika Sonnenberg 11, Stefanie Tiemann 31.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger): Kl. 8: Martin Jöhlinger 12.

Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):
Kl. 6: Sarah Rosengarten 4, Sophia Waldvogel 2;
Kl. 7: Annkatrin Weber 19; **Kl. 10:** Simon Bats 9.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: Philip Dahnen 8, Jan Radermacher 4;
Kl. 6: Michael Monschau 2, Felix Schmitt 6.

Siegburg, Anno-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hachtel):
Kl. 8: Franziska Groß 4; **Kl. 10:** Jan B. Boscheinen 12.

Weisenheim am Berg, Regionale Schule: Kl. 7: Marc Andre Biehl 7.

Weiterstadt: Kl. 3: Alexandra Einicke 9.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 6: Geraldine Arning 6, Sarah Breunich 8, Lisa Engel 12, Julia Krebs 9, Louisa Linn 6, Lisa Schwarz 3, Philipp Thau 10;
Kl. 7: Kurosch Habibi 13;
Kl. 8: Julia Jung 13, Sarah Tröbs 14;
Kl.11: Verena Prägert 19.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium: Charlotte Capitain 19.

Gymnasium Wolfen-Stadt: Kl. 13: Martin Radloff 13.

MONOID Jahrgang 24 Heft 77 März 2004

Inhalt

Martin Mettler: Monat. Woche. Tag. Wochentag. 3
Ekkehard Kroll: Hättest Du es gewusst? Was das Schaltjahr 2004 mit Kettenbrüchen zu tun hat. 4
Hartwig Fuchs: Einige Probleme der Bruchrechnung, die in der Mathematik der Pharaonenzeit ungelöst blieben 6
Hartwig Fuchs: Wie viele Schnittpunkte können n Geraden höchstens haben? 9
Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik 10
Bundeswettbewerb Mathematik 2004, Runde 1. 11
Die Seite für den Computer-Fan 16
Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 76 17
Neue Mathespielereien 21
Neue Aufgaben 23
Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 76 24
Martin Mettler: Kurze Wege. Beiträge unserer Löser(innen) zur Aufgabe 815. 28
Manfred Lehn: Wenn Spielen zur Aufgabe wird... 31
Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion 41
Rubrik der Löser(innen)/ Stand 15.12.2003 42

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Dr. Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Dr.Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Ehrenmitglied: Martin Mettler
Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Meike Fluhr, Armin Holschbach, Felix Liebrich, Isabelle Merker, Manuel Ross und Rebecca Zimmer
Korrekturen und Layout: Jens Mandavid **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339 oder -26107; Fax -24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid