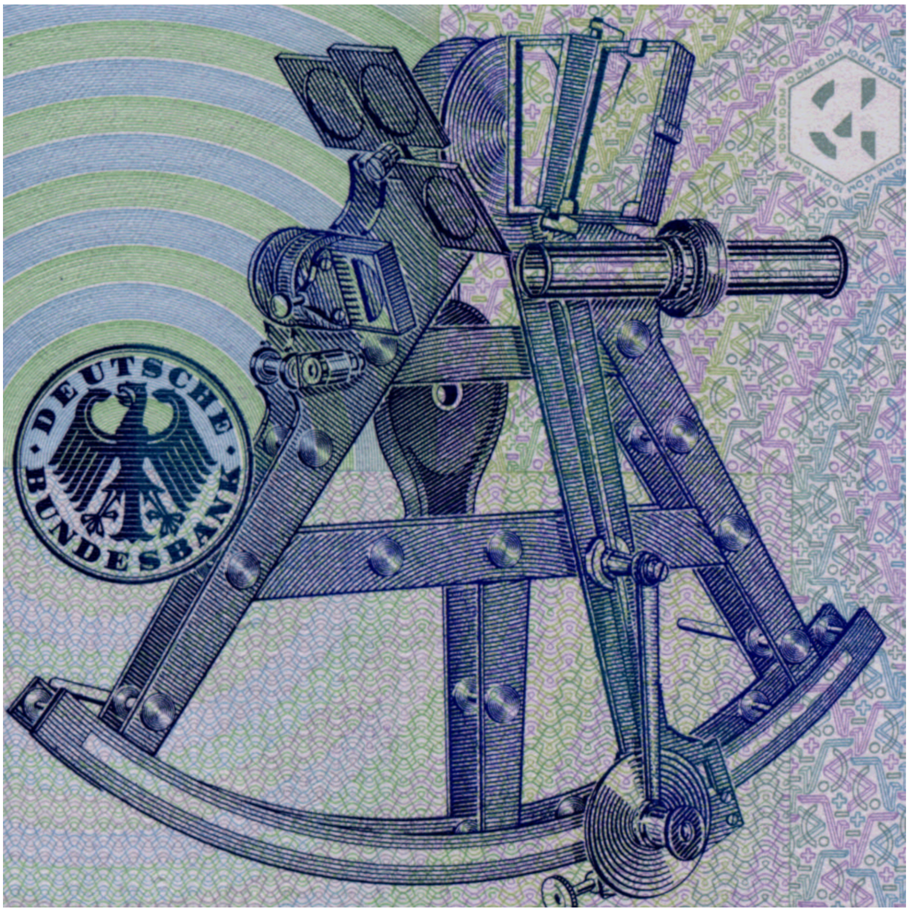
Jahrgang 25 Heft 81 März 2005

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.05.2005.**

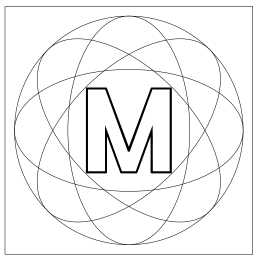
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**



Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

25 Jahre MONOID

1981 – 2005

Mit dem vorliegenden MONOID-Heft Nr. 81 beginnt der 25. MONOID-Jahrgang - 20 Jahrgänge hat von 1981 an bis Ende 2000 der MONOID-Begründer **Martin Mettler** herausgegeben, 4 Jahrgänge seither der Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz. Auch der Jubiläumsjahrgang wird wieder 4 Hefte umfassen (Versand im März, Juni, September und Dezember). Dazu soll es ein Sonderheft mit vielen Knobelaufgaben geben. Die feierliche Preisverleihung wird in diesem Jahr am Ort der Entstehung von MONOID, nämlich am Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, statt finden. Wir hoffen sehr, dass Herr Mettler, der 1981 aus einem schulinternen Mathematikwettbewerb „das Mathematikblatt für Mitdenker" entwickelte und der leider zur Zeit schwer erkrankt ist, bis zum Jubiläumsfest am 26. November 2005 wieder so weit hergestellt ist, dass er an der MONOID-Feier teilnehmen kann. Wir wünschen ihm eine baldige Genesung!

Infolge seiner Erkrankung konnte Herr Mettler nicht mehr wie in den vielen vergangenen Jahren die Korrektur der eingesandten Lösungen zu den Heften 79 und 80 selbst durchführen. Im Januar haben wir die an ihn gesandten Lösungen zu Heft 79 innerhalb der Redaktion aufgeteilt; die neue Rubrik der Löser(innen) findet ihr am Ende dieses Heftes und auch wieder im Internet. Mit den Lösungen zu Heft 80 werden wir ebenso verfahren. **Bitte schickt künftig Eure Lösungen zu den „Mathespielereien" und den „Neuen Aufgaben" an die Uni Mainz und zwar mit folgender Adresse:**

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Ab 1. April 2005 bilden die bisherigen Fachbereiche 17 (Mathematik und Informatik) und 18 (Physik) einen neuen Fachbereich 08 (Physik, Mathematik und Informatik) mit fünf Instituten, darunter das Institut für Mathematik, in dem die MONOID-Redaktion angesiedelt ist.

Das Jahr 2005 ist in mehrfacher Hinsicht ein Gedenkjahr: Am 23. Februar jährte sich der Todestag von **CARL FRIEDRICH GAUSS** zum 150. Mal; am 18. April ist die 50. Wiederkehr des Todestages von **ALBERT EINSTEIN**, der vor 100 Jahren die Relativitätstheorie begründete, und vor 200 Jahren starb am 9. Mai **FRIEDRICH SCHILLER**. An den großen Mathematiker, Astronomen und Naturwissenschaftler Gauß erinnert **David E. Rowe**, Ph.D., Professor für Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften am Institut für Mathematik in Mainz, in seinem Beitrag „Bilder, die an C. F. Gauß erinnern". Die Hauptwirkungsstätte von Gauß war die Universitätsstadt Göttingen, an deren Universität jetzt der ehemalige MONOIDaner Dr. **Valentin Blomer** als Juniorprofessor forscht und lehrt. In diesem Heft geht er in seinem zweiten Beitragsteil der Frage nach: „Wie groß ist eigentlich unendlich?"

Dr. **Volker Priebe**, schon seit vielen Jahren freier Mitarbeiter an MONOID, und Dr. **Stefan Kermer**, Mathematiker bei der Allianz Leben in Stuttgart, beide ebenfalls ehemalige MONOIDaner, haben in **Silvia Binder**, Lehrerin für Mathematik und Französisch am Rechberg-Gymnasium in Donzdorf bei Göppingen, Unterstützung bei der Zusammenstellung von Lösungsvorschlägen zu den Aufgaben der ersten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2005 gefunden.

Christina Flörsch (15) aus der MSS 11 am Max-Slevogt-Gymnasium in Landau belegte 2004 mit ihrer Arbeit „Verwandte der pythagoreischen Tripel" den 2. Platz beim Wettbewerb „Schüler experimentieren" auf Landesebene. Pythagoreische Zahlentripel waren schon oft Gegenstand von MONOID-Beiträgen und -Aufgaben; nun lernen wir durch Christina deren Verwandte kennen.

Ich wünsche viele Anregungen bei der Lektüre der Beiträge dieses Heftes und viel Spaß beim Knobeln!

Ekkehard Kroll

$*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$

Wie groß ist eigentlich unendlich? (II)

von Valentin Blomer

Das letzte Mal haben wir versucht, uns eine präzise Vorstellung davon zu machen, wann zwei beliebige Mengen gleichgroß sind. Sicherlich sind die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 3, 4\}$ gleichgroß, aber sind es zum Beispiel auch die Menge aller Primzahlen und die Menge aller Quadratzahlen? Wir haben uns auf die Definition geeinigt, dass wir zwei Mengen A, B genau dann gleichgroß oder *gleichmächtig* nennen wollen, wenn es eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung $f\colon A \to B$ gibt. Dabei heißt umkehrbar eindeutig, dass jedes $b \in B$ *genau ein* Urbild $a \in A$ besitzt, das ihm unter der Abbildung f zugeordnet wird. Diese Definition kann gleichermaßen für endliche und unendliche Mengen angewendet werden. Wir wollen außerdem eine Menge *abzählbar* nennen, wenn sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist. Wir hatten bereits gesehen, dass sowohl echte Teilmengen als auch echte Obermengen von $\mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sein können. Das ist eine besondere Eigenschaft unendlicher Mengen, an die man sich erst ein wenig gewöhnen muss. Zum Beispiel sind die Menge $\mathbb{N}_0$, die Menge aller geraden natürlichen Zahlen und die Menge aller Primzahlen allesamt abzählbar, wie wir letztes Mal festgestellt haben. Eine schöne Geschichte, bekannt als Hilberts Hotel, macht dies besonders anschaulich.

In einem etwas abgelegenen Feriengebiet an einer Küste mit feinstem Sandstrand und strahlendem Sonnenschein während der gesamten Sommermonate steht ein großes Hotel. Die Küche ist ausgezeichnet, die Zimmer sind gemütlich und das Personal ist freundlich, wenn auch manchmal etwas geistesabwesend. Sie sind nämlich alle, vom Portier bis zum Barpianisten, Mathematiker, und der Hotelmanager ist niemand anders als der große Göttinger Mathematiker David Hilbert selbst. Das Hotel ist wirklich sehr groß, es hat nämlich unendlich viele Zimmer, genau genommen abzählbar unendlich viele Zimmer, durchnummeriert mit $1, 2, 3, \ldots$ Da die Gegend als Urlaubsgebiet ausgesprochen reizvoll ist, ist das Hotel häufig im Sommer ausgebucht. Eines Abends, das Hotel war bis zum letzten Zimmer belegt, kam ein Gast vorbei, der auch gerne noch ein Zimmer gehabt hätte. Kein Problem in Hilberts Hotel. Der Portier lächelte freundlich und bat den Gast aus Zimmer 1, in Zimmer 2 zu wechseln, den Gast aus Zimmer 2, ausnahmsweise in Zimmer 3 zu übernachten und so fort. Jeder wechselte in das Nachbarzimmer, und der eben angekommene Gast bekam das Zimmer mit der Nummer 1.

Etwas später kamen 5 weitere Gäste. Der Portier zögerte nicht eine Sekunde und bat jeden Gast, 5 Zimmer weiterzuziehen, schließlich seien alle Zimmer gleichschön, und so konnte er in seinem ausgebuchten Hotel die Ankömmlinge noch unterbringen. Kurz vor Mitternacht fuhr ein unendlich großer Bus auf dem Parkplatz vor mit abzählbar unendlich vielen Gästen, die alle gerne in Hilberts Hotel übernachten wollten. Auch dies bereitete unserem unschlagbaren Portier keine Schwierigkeiten. Was er wohl tat? Er bat den Gast aus Zimmer n, ins Zimmer $2n$ umzuziehen. Auf diese Weise wurden unendlich viele Zimmer frei, nämlich alle mit ungerader Nummer, in denen die Businsassen übernachten konnten. Es wäre übrigens auch möglich gewesen, abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gästen unterzubringen, aber das sei nur am Rande bemerkt.

Gibt es eigentlich überhaupt unendliche Mengen, wird man sich vielleicht nach so viel Abzählbarkeit fragen, die man *nicht* abzählen kann? Solche Mengen müssten nach obiger Definition so beschaffen sein, dass es keine umkehrbar eindeutige Abbildung von ihnen auf $\mathbb{N}$ existiert; gewissermaßen müssen sogenannte *überabzählbare* Mengen so viele Elemente enthalten, dass man ihre Elemente nicht durchnummerieren kann, weil man – ganz gleich, wie man es anstellt – nie alle Elemente erreicht. Schwer vorstellbar. Cantor hat gezeigt, dass die reellen Zahlen im Intervall $[0, 1)$ eine solche überabzählbare Menge bilden. Dazu ist er folgendermaßen vorgegangen: Wir nehmen an, es gäbe doch eine umkehrbar eindeutige Abbildung $f\colon \mathbb{R} \cap [0, 1) \to \mathbb{N}$. Wir schreiben die reellen Zahlen aus $[0, 1)$ nun nach ihrem Bild geordnet in Dezimaldarstellung untereinander:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\ldots & \mapsto & 1 \\ x_2 = 0, x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}\ldots & \mapsto & 2 \\ x_3 = 0, x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}\ldots & \mapsto & 3 \\ \qquad\quad \ldots & & \end{array}$$

Dabei ist x_{ij} die j-te Nachkommastelle der Zahl x_i, die auf i abgebildet wird. Sollten zufälligerweise reelle Zahlen auftauchen, deren Dezimaldarstellung abbricht wie etwa $0,325$, so hängen wir einfach unendlich viele Nullen hinten an. Nun betrachten wir eine reelle Zahl $y = 0, y_1y_2y_3\ldots$, von deren Ziffern wir nur voraussetzen, dass y_j für alle j eine *andere* Ziffer als x_{jj} ist. Welche Ziffer genau, ist uns egal, sie muss nur anders als x_{jj} sein. Nun kommt die entscheidende Überlegung: Die Zahl y kommt in unserer Abzählung nicht vor! Warum? Kann es nicht zum Beispiel die Zahl x_3 sein, die auf die 3 abgebildet wird? Nein, denn die dritte Nachkommastelle von x_3 ist x_{33}, aber die dritte Nachkommastelle von y ist y_3, und wir haben ja extra y_3 von x_{33} *verschieden* gewählt. Kann y vielleicht die Zahl x_9 sein? Nein, denn die neunte Nachkommastelle von x_9 ist x_{99}, und die ist verschieden von y_9, der neunten Nachkommastelle von y. Allgemein unterscheidet sich y von x_i mindestens in der i-ten Nachkommastelle, und zwar für jedes beliebige i, also taucht y in obiger Abzählung tatsächlich nicht auf. Insbesondere ist f überhaupt keine Abbildung von $\mathbb{R} \cap [0, 1)$ nach $\mathbb{N}$, denn unserer Zahl y wird ja gar kein Bild zugeordnet. Unsere Annahme, es gäbe eine umkehrbar eindeutige Abbildung, ist also zu einem Widerspruch geführt. Die reellen Zahlen im Intervall $[0, 1)$ und erst recht alle reellen Zahlen sind also überabzählbar. Ganz schön trickreich.

Nur so am Rande: Es gibt eine ganze Menge Leute, die Cantors Trick nicht verstanden haben, und immer wieder aufs Neue „beweisen“, die reellen Zahlen wären doch abzählbar. Solche Post landet zuhauf bei Universitäten, betitelt als neuer Durchbruch in der Mengenlehre, und man weiß dann nie so recht, was man damit machen soll. . .

Hättest Du es gewusst?

Welcher mathematische Satz wurde „Die Eselsbrücke“ genannt?

Von Hartwig Fuchs

Euklid

Von Euklid (um 300 v.Chr.), dem Mathematiker mit der größten Langzeitwirkung, ist uns über viele Generationen von Kopisten sein wichtigstes Werk, die 13 Bücher „Elemente“, überliefert. Diese „Elemente“ nehmen eine Sonderstellung in der mathematischen Literatur ein. Sie sind die einflussreichste mathematische Schrift, die jemals geschrieben wurde: Mindestens 2000 Jahre lang bildeten sie das Standardlehrbuch der Geometrie – zunächst für die Griechen und Römer, dann für die Araber und schließlich vom frühen Mittelalter bis weit in die Neuzeit hinein für die Europäer – und auch heute noch beruhen viele geometrischen Schulbücher indirekt darauf.

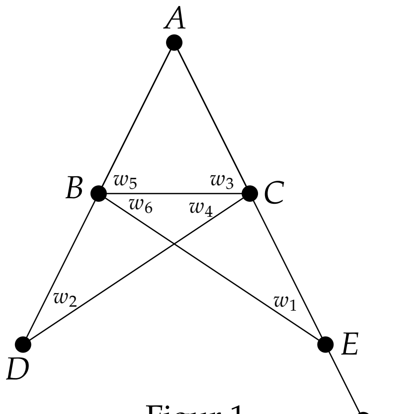
Die 13 Bücher der „Elemente“ haben kein Vorwort, keine Einleitung; es werden keine Ziele und auch keine Methoden zur Erreichung dieser Ziele genannt; kein Kommentar erleichtert das Verständnis der behandelten Materie.

Das Buch I etwa beginnt abrupt mit 23 Definitionen; unmittelbar daran schließen sich 10 Axiome oder Postulate an. Und dann geht’s los: Es folgt ein Stakkato von 48 Sätzen samt ihren Beweisen.
Und der Satz 5 ist

Die Eselsbrücke

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Beweis (in Grundzügen dem des Euklid nachgebildet – vgl. Figur 1)



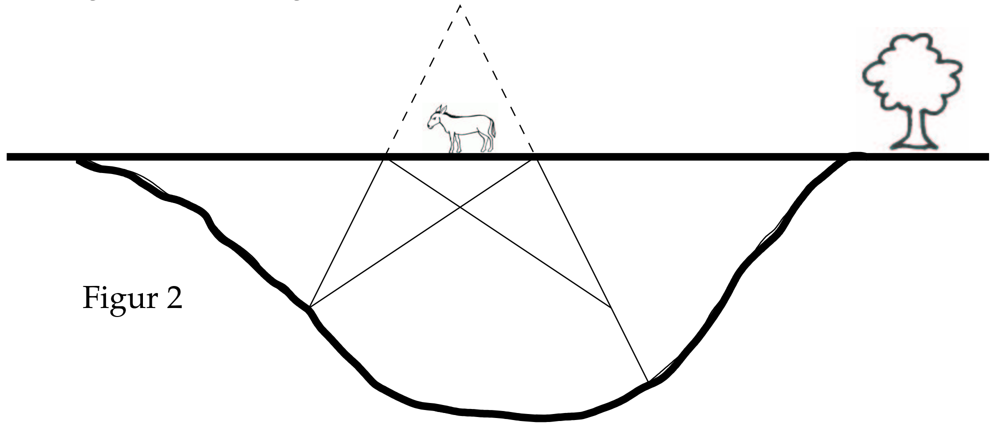
Figur 1

1. ABC sei ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |AC|$.
2. Man verlängere AB nach D und AC nach F, wobei $|CF| > |BD|$ sei.
3. Auf CF trage man von C aus die Strecke CE mit $|CE| = |BD|$ ab.
4. Man zeichne DC und BE.
5. Die Dreiecke ABE und ADC sind kongruent (SWS).
6. $\measuredangle w_1 = \measuredangle w_2$, $|BE| = |CD|$.
7. Die Dreiecke BEC und BDC sind kongruent (SWS).
8. $\measuredangle w_3 + \measuredangle w_4 = \measuredangle w_5 + \measuredangle w_6$, $\measuredangle w_4 = \measuredangle w_6$.
9. $\measuredangle w_3 = \measuredangle w_5$.
10. Im Dreieck ABC sind die Basiswinkel gleich groß.

Die Mathematiker des Mittelalters nannten diesen Satz 5 aus Euklids „Elementen“, Buch I, samt Beweis und zugehöriger Figur 1 „Die Eselsbrücke“ – in ihrer lateinischen Gelehrtensprache „pons asinorum“.

Vielleicht rührt diese Benennung daher, dass sie in der Figur 1 eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Brücke sahen – vgl. Figur 2 – und sie verglichen die Lage eines Scholaren mit der eines Esels:
So wie ein Esel lernen muss, dass er nur über die zerbrechlich wirkende Holzkonstruktion auf die andere Seite der Schlucht gelangen kann, so soll der Scholar am Beweis

des Satzes 5 exemplarisch erfahren, dass das euklidische Vorgehen – mag es noch so undurchsichtig und schwierig erscheinen – letztlich doch zum Ziel führt.



Figur 2

Es gibt eine andere Erklärung für die „Eselsbrücke“, die wir sogar vorziehen.

Der grundlegende logische Lehrstoff an den mittelalterlichen Universitäten war die von Aristoteles (384-322 v.Chr.) herrührende „Syllogistik“, eine Theorie des logischen Schließens, die man so charakterisieren kann: Aus zwei quantifizierten Aussagen als Voraussetzung wird nach bestimmten Regeln eine dritte quantifizierte Aussage als Folgerung hergeleitet.

Beispiel: Einige Burgen sind Ruinen.
Alle Ruinen sind interessant. $\Longrightarrow$ Einige Burgen sind interessant.

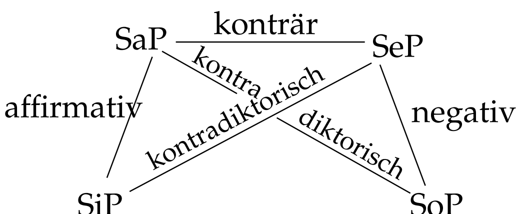
Die mittelalterlichen Syllogistiker unterschieden vier Formen quantifizierter Aussagen:

	affirmativ (bejahend)	negativ (verneinend)
universal (umfassend)	**alle** S sind P (SaP) Bsp.: Alle **S**chafe sind **P**flanzenfresser.	**kein** S ist P (SeP) Bsp.: Kein **S**chaf ist ein **P**inguin.
partikular (vereinzelnd)	**einige** S sind P (SiP) Bsp.: Einige **S**eefahrer sind **P**iraten.	**einige** S sind **nicht** P (SoP) Bsp.: Einige **S**tadträte sind nicht **p**opulär.

Wenn man sich die vier Typen quantifizierter Aussagen paarweise anschaut, dann erkennt man:

SaP und SoP sowie SiP und SeP stehen in **kontradiktorischem Gegensatz** zueinander: Genau eine Aussage eines Paares ist wahr, die andere ist falsch. SaP und SeP bilden ebenfalls einen Gegensatz, der aber nur **konträr** ist: Die Aussagen können nicht beide wahr, wohl aber beide falsch sein.

Man kann diese Zusammenhänge übersichtlich so darstellen:



Figur 3

– und da ist sie wieder, die „Eselsbrücke“ aus Figur 1. Man weiß, welche Rolle die Figur in der mittelalterlichen Logik spielte: Sie galt als unentbehrliche Gedächtnisstütze (pons asinorum = Brücke der Esel) für die Scholaren.

Daher liegt es nahe, dass man auch die Figur 1 als eine Gedächtnishilfe („Eselsbrücke“) für den Beweis von Euklids Satz 5 betrachtete. Wieso aber hatte der Satz 5 (samt Beweis und Figur 1) in der mittelalterlichen Geometrie einen so hohen Stellenwert, dass man ihn als einzigen von den 48 Sätzen aus Euklids 1. Buch der „Elemente“ mit dem einprägsamen Etikett „Die Eselsbrücke“ versah? Ist es denkbar, dass er für die Geometrie eine ähnlich wichtige Rolle als Lernhilfe spielte wie die Figur 3 in der Logik?

Die Bedeutung des Satzes 5 und seine Hervorhebung als „Die Eselsbrücke“ rühren wahrscheinlich daher, dass der für Satz 5 gegebene Beweis das Grundmuster für Euklids Verfahren enthält, nach welchem er durchgängig die Sätze der „Elemente“ – dem wichtigsten Geometrie(lehr)buch des Mittelalters – herleitet. Die damaligen Mathematiker waren daher wohl der Meinung: Wenn ein Scholar über „Die Eselsbrücke“ gehen kann (d.h. wenn er den Beweis von Satz 5 vollkommen versteht), dann wird er auch die übrigen Beweise in den „Elementen“ nachvollziehen können. Denn Euklids Beweise sind im wesentlichen alle nach dem gleichen, einem sogenannten **synthetischen** Grundmuster, „gestrickt“:
Einzelne geometrische Elemente werden so zu einer logischen Sequenz (Herleitungskette) zusammengefügt, dass diese in dem zu beweisenden Satz endet.
Bei jedem synthetischen Beweis sind vorweg zwei entscheidende Fragen zu klären – und das macht die Sache problematisch – nämlich: Welche mathematischen Bausteine benötigt man? Und nach welchem Bauplan setzt man sie zusammen zu einem gültigen Beweis? Bevor man die Antworten findet, wird man viele Irrwege gegangen und in Sackgassen gelandet sein.

Das Gegenstück des synthetischen ist der **analytische** Beweis, der heute in den meisten Schulbüchern gelehrt wird: Er vereinfacht oder zerlegt den zu beweisenden Satz in Aussagen, die dem Satz logisch vorausgehen und die leichter zu beweisen oder sogar bereits bewiesen sind. Analytische Beweise wird man daher meist eher finden als synthetische.
Wir veranschaulichen die beiden Beweistypen an der gleichen Behauptung

(0) $\quad 7 < \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} < 8.$

Synthetischer Beweis:
– bei jedem Schritt sollte man fragen: Wie kommt er darauf?

Es gilt

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \sqrt{9} < \sqrt{15} & < \sqrt{16} & \iff \\ (2) & \sqrt{9}+4 < \sqrt{15}+4 & < \sqrt{16}+4 & \iff \\ (3) & 7 < \sqrt{15}+4 & < 8 & \end{array}$$

Nun folgen zwei typische synthetische Schritte

(4) $\sqrt{15}+4 = \frac{1}{2}(8+2\sqrt{15}) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

und

(5) $2 = (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

Aus (4) und (5) folgt für (3):

(6) $7 < \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} < 8.$

Kürzt man in (6) mit $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, so folgt die Behauptung (0).

Analytischer Beweis:
– die beiden ersten Schritte (1) und (3) stellen eine Vereinfachung von (0) dar.

Es gilt

(1) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}$

An Stelle von (0) ist also zu zeigen:

(2) $7 < 4+\sqrt{15} < 8$, also

(3) $3 < \sqrt{15} < 4$.

Wegen $3 = \sqrt{9}$, $4 = \sqrt{16}$ ist (3) die bekannte Tatsache

(4) $\sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}$.

Damit ist (0) auf (4) zurückgeführt, und (0) ist bewiesen, weil (4) wahr ist.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Malba Tahan: „Beremis, der Zahlenkünstler“

Der Bagdali Hank-Tade-Maiah trifft in der Wüste am Wegesrand auf Beremis und nimmt ihn mit nach Bagdad. Unterwegs entpuppt sich Beremis als ein Rechengenie. Zusätzlich verfügt er über eine umfassende mathematische Bildung und wird ein ums andere Mal in Anspruch genommen, um reale mathematische Probleme, wie Erbteilungen oder Schuldberechnungen durchzuführen. In Bagdad wird Beremis – immer begleitet von seinem neuen Freund – dann nicht nur angetragen, der Tochter des Scheichs Iezid-Abdul-Hamid Mathematikunterricht zu erteilen, sondern er entgeht nur knapp einem Mordanschlag und wird außerdem zu einem Wettstreit mit Mathematikgelehrten am Hofe des Kalifen herausgefordert.

Beim Lesen der Geschichte von „Beremis, der Zahlenkünstler“ fühlt man sich so, als ob man mit Kara Ben Nemsi durchs wilde Kurdistan reitet, oder Scheherezade bei einer Geschichte aus 1001 Nacht zuhört.

Geschrieben wurde das Buch von dem Professor für Architektur Malba Tahan, der an der Universidade do Brasil höhere Mathematik lehrte. Er ergänzte die Geschichte um einen kurzen Abriss über die arabische Mathematik des Mittelalters, Erläuterungen zu den Rechenaufgaben sowie ein Glossar verwendeter Begriffe und biographische Anmerkungen zu genannten historischen Personen.

Moritz Maurer, Schüler der 8. Klasse des Eleonoren-Gymnasiums in Worms, der auch die Besprechung anregte, beurteilte das Buch folgendermaßen: „Erzählt wird die Geschichte von Beremis, der mit seinen mathematischen Kenntnissen nicht nur schwierige Aufgaben löst, sondern auch interessante Geschichten erzählt und zeigt, wie schön Mathematik ist. Ein lehrreiches, aber auch vergnügliches und interessantes Buch.“

Fazit: Durch die sehr ansprechende Rahmenhandlung ist „Beremis, der Zahlenkünstler“ ein überaus ansprechendes Buch, in welchem man gerne schmökert. Sowohl die in die Geschichte eingebauten mathematischen Problemstellungen als auch deren Lösungen sind leicht nachzuvollziehen und machen jeweils Appetit auf mehr.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Malba Tahan: Beremis, der Zahlenkünstler.
Patmos 2003, ISBN 3-49169066-8, 304 Seiten, 9,95 €.

Art des Buches:	Mathematisches Jugendbuch
Mathematisches Niveau:	(leicht) verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Martin Mattheis

Verwandte der pythagoreischen Tripel

von Christina Flörsch

I. Einleitung

In der mathematischen Literatur findet man vieles über die pythagoreischen Tripel. Das sind natürliche Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Diese Zahlen lassen sich den Seiten von rechtwinkligen Dreiecken zuordnen, man spricht dann von „pythagoreischen Dreiecken". Seit dem Altertum (Euklid, Diophant) gibt es Formeln für die Erzeugung pythagoreischer Tripel (a, b, c):

$$a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2, \qquad m, n \in \mathbb{N},\ m > n.$$

Sie sind „primitiv" (haben keine gemeinsamen Teiler), wenn m, n selbst teilerfremd und nicht beide ungerade sind. Man erhält auf diese Weise *alle* primitiven Tripel. Hat man die primitiven Tripel, so hat man auch alle anderen.

Im Laufe der Jahrhunderte wurden zahlreiche Eigenschaften und Besonderheiten der pythagoreischen Tripel gefunden. Einen Überblick findet man in [Lit.1]. Ich nenne einige:

- Wenn m und n zwei aufeinander folgende Zahlen sind, dann sind auch a und c zwei aufeinander folgende Zahlen.
- Wenn wir a und b für m und n nehmen, so ergibt sich für das neue c eine Quadratzahl.
- Wählt man für m und n zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen, so erhält man für a immer eine Kubikzahl.
- Eine Seitenlänge eines pythagoreischen Dreiecks ist immer durch 3, eine durch 4 und eine durch 5 teilbar.
- Das Produkt der Längen beider Katheten ist immer durch 12 teilbar.
- Das Produkt aller Seitenlängen ist immer durch 60 teilbar.
- Der Radius des Inkreises ist ganzzahlig.

Man kann die Frage stellen, ob es außer den pythagoreischen noch andere Dreiecke gibt, deren Seitenlängen ganzzahlig sind und bei denen ein Winkel eine ganze Gradzahl hat. Diese Frage ist längst beantwortet: Mein Lehrer wies mich auf zwei Zeitschriftenartikel hin, in denen Formeln für „$120°$-Tripel" und „$60°$-Tripel" (a, b, c) hergeleitet sind; a, b, c sind hier natürliche Zahlen, denen die Seitenlängen von Dreiecken ABC mit $\gamma = 120°$ bzw. $\gamma = 60°$ zugeordnet werden.

Man erhält alle primitiven $120°$-Tripel in der Gestalt ($2mn + n^2$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2 + mn$), wenn die Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ ($m > n$) teilerfremd sind und $m - n$ nicht durch 3 teilbar ist.

Man erhält alle primitiven $60°$-Tripel in den Gestalten (1, 1, 1), ($2mn - n^2$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2 - mn$) und ($m^2 - 2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2 - mn$), wenn die Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, $m > \frac{n}{2}$, teilerfremd sind und $m + n$ nicht durch 3 teilbar ist [Lit. 2 und 3].

Außer den pythagoreischen Dreiecken und diesen $120°$- und $60°$-Dreiecken gibt es keine anderen, welche die oben genannte Bedingung erfüllen. Das lässt sich mit dem Kosinussatz begründen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Für $120°$ und $60°$ ist der Kosinus rational ($-\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{2}$). $90°$, $60°$ und $120°$ sind die einzigen rationalen Winkel zwischen $0°$ und $180°$ für die $2ab\cos\gamma$ eine ganze Zahl ergibt. Nur in diesen Fällen kann mit

a und b auch c eine natürliche Zahl sein. Außer den Formeln ist über die $120°$-Tripel und $60°$-Tripel kaum etwas bekannt. Das Ziel meiner Arbeit ist, für diese Tripel ähnliche Eigenschaften zu finden wie sie für die pythagoreischen Tripel bekannt sind; dabei sollen Gemeinsamkeiten wie auch gegensätzliches Verhalten herausgestellt werden.

II. Die Eigenschaften der $120°$- und $60°$-Dreiecke

1. Tabellen

Zunächst habe ich mir über BASIC-Programme Listen für primitive pythagoreische Tripel, für primitive $120°$- und für primitive $60°$- Tripel erzeugt. Um die Zahlen m, n mit $\text{ggT} > 1$ auszuschließen, habe ich im Programm den euklidischen Algorithmus verwendet. In den folgenden Tabellen sind jeweils zwanzig $90°$-, $120°$- und $60°$-Tripel aufgeführt.

$90° -$ Tripel				
m	n	$a = 2mn$	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
7	6	84	13	85
8	1	16	63	65
8	3	48	55	73
8	5	80	39	89
8	7	112	15	113
9	2	36	77	85
9	4	72	65	97
9	8	144	17	145
10	1	20	99	101
10	3	60	91	109

$120° -$ Tripel				
m	n	$a = 2mn + n^2$	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2 + mn$
2	1	5	3	7
3	1	7	8	13
3	2	16	5	19
4	3	33	7	37
5	1	11	24	31
5	3	39	16	49
5	4	56	9	61
6	1	13	35	43
6	5	85	11	91
7	2	32	45	67
7	3	51	40	79
7	5	95	24	109
7	6	120	13	127
8	1	17	63	73
8	3	57	55	97
8	7	161	15	169
9	1	19	80	91
9	2	40	77	103
9	4	88	65	133
9	5	115	56	151

$60° -$ Tripel					
m	n	Fall 1: $a = 2mn - n^2$	Fall 2: $a = m^2 - 2mn$	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2 - mn$
3	1	5	3	8	7
4	1	7	8	15	13
5	2	16	5	21	19
6	1	11	24	35	31
7	1	13	35	48	43
7	3	33	7	40	37
8	3	39	16	55	49
9	1	17	63	80	73
9	2	32	45	77	67
9	4	56	9	65	61

2. Besondere Teiler der Zahlen a, b, c

Wenn ich von „Seitenlängen“ rede, meine ich immer nur die Maßzahl. Wenn ich von $120°$- und $60°$-Dreiecken rede, meine ich immer nur solche mit ganzzahligen Seitenlängen.

Man sieht gleich, dass sich am Anfang viele Primzahlen für c ergeben. Bei den $120°$-Dreiecken wie auch bei den $60°$-Dreiecken sind die Seitenlängen c immer ungerade, dies ergibt sich aus den jeweiligen Formeln ($c = m^2 + n^2 + mn$ bzw. $c = m^2 + n^2 - mn$; dabei können m und n nicht beide gerade sein). Ich zeige jetzt, dass c bei einem $120°$-Tripel nie durch 3 teilbar ist. Dazu sehe ich mir an, welche Dreier-Reste die Zahl $c = m^2 + n^2 \pm mn$ bei allen möglichen Formen von m und n hat; m und n können die Formen $3l$, $3l \pm 1$ (mit $l \in \mathbb{N}_0$) haben, wobei sie aber nicht 0 sein dürfen.

1. Fall: $m = 3k$ und $n = 3l \pm 1$ $(k, l \in \mathbb{N}_0)$

$c = (3k)^2 + (3l \pm 1)^2 + 3k(3l \pm 1) = 9k^2 + 9l^2 \pm 6l + 1 + 9kl \pm 3k$
$\quad = 3(3k^2 \pm k + 3l^2 \pm 2l + 3kl) + 1$

2. Fall: $m = 3k \pm 1$ und $n = 3l$ $(k, l \in \mathbb{N}_0)$

Für c ergibt sich die gleiche Form wie im 1. Fall.

3. Fall: $m = 3k + 1$ und $n = 3l + 1$ $(k, l \in \mathbb{N}_0)$ oder $m = 3k - 1$ und $n = 3l - 1$ $(k, l \in \mathbb{N})$

Das kann nicht vorkommen, denn $m - n$ wäre durch 3 teilbar.

4. Fall: $m = 3k + 1$ und $n = 3l - 1$ $(k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N})$

Eine Rechnung wie im 1. Fall führt zum Ergebnis
$c = 3(3k^2 + 2k + 3l^2 - 2l + 3kl - k + l) + 1$.

Weil c bei der Division durch 3 immer den Rest 1 hat, ist $c - 1$ durch 3 teilbar. $c - 1$ beschreibt immer eine gerade Zahl und ist daher immer durch 6 teilbar.

Als Nächstes beweise ich, dass c auch nie durch 5 teilbar ist (für das $120°$-Tripel).

$m = 5k$ und $n = 5l \pm 1$ $(k, l \in \mathbb{N}_0)$
$c = (5k)^2 + (5l \pm 1)^2 + 5k(5l \pm 1) = 25^k + 25l^2 \pm 10l + 1 + 25kl \pm 5k$
$\quad = 5(5k^2 + 5l^2 \pm 2l + 5kl \pm k) + 1$

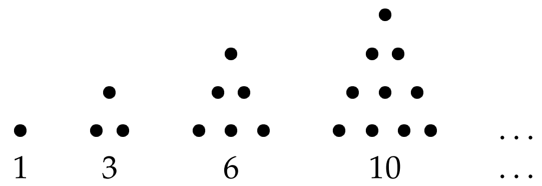
Diese Rechnung habe ich auch für $m = 5k$, $n = 5l \pm 2$ und $m = 5k \pm 1$, $n = 5l \pm 2$ gemacht und habe nie den Rest 0 erhalten. Auf dieselbe Art habe ich gezeigt, dass c bei den $60°$-Tripeln auch nie durch 3 oder 5 teilbar ist und bei der Division durch 6 immer den Rest 1 lässt. Weil c nie durch 2, 3, 5 teilbar ist, ist c vor allem für kleinere Zahlen oft eine Primzahl.

Setze ich $m = 2k + 1$ und $n = 2l$ $(k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N})$, ist also m ungerade und n gerade, dann erhalte ich für a immer eine durch 8 teilbare Zahl (bei den $60°$-Tripeln nur bei der Form $2mn - n^2$). Wenn ich $m = 2k + 1$ und $2l + 1$ $(k, l \in \mathbb{N}_0)$ setze (m und n beide ungerade), dann erhalte ich für b immer eine durch 8 teilbare Zahl.

3. Bei welchen Tripeln (a, b, c) ist b eine Kubikzahl?

Bei einem Blick auf die Listen der $60°$- und $120°$-Dreiecke fällt auf, dass b manchmal eine Kubikzahl ist (z.B. $(7, 8, 13)$ und $(3, 8, 7)$). Man findet jedoch keine bei den Seitenlängen a oder c. Wenn man sich m und n genauer anschaut, sieht man, dass es sich bei ihnen um zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen handelt.

Dreieckszahlen entstehen aus Dreiecksmustern:



Die k-te Dreieckszahl d_k ist die Summe der ersten k natürlichen Zahlen; es gilt die Formel $d_k = \frac{k(k+1)}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Satz: Wenn m und n aufeinander folgende Dreieckszahlen sind, dann erhält man für b immer eine Kubikzahl.

Beweis: Es soll gelten: $m = \frac{k(k+1)}{2}$ und $n = \frac{(k-1)k}{2}$. Dann gilt für die $60°$- und die $120°$-Tripel

$$b = m^2 - n^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 = \frac{(k^2+k)^2}{4} - \frac{(k^2-k)^2}{4} = \frac{k^4+2k^3+k^2-(k^4-2k^3+k^2)}{4}$$
$$= \frac{4k^3}{4} = k^3$$

q.e.d.

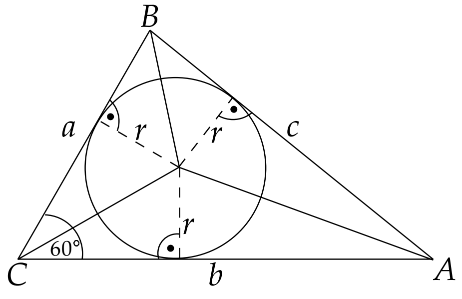
Sind m und n aufeinander folgende Dreieckszahlen, dann ist b immer eine Kubikzahl. Das Umgekehrte stimmt nicht. Z.B. ist $(533, 3^3, 547)$ ein $120°$-Tripel, aber das zugehörige m ist gleich 14, und n ist gleich 13.
Auch für die pythagoreischen Tripel ist $b = m^2 - n^2$; deshalb gilt der Satz auch für pythagoreische Tripel (siehe Einleitung).

4. Können $60°$- und $120°$-Dreiecke ganzzahlige Flächeninhalte haben?

Für den Flächeninhalt des pythagoreischen Dreiecks gilt $A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 2mn(m^2 - n^2) = mn(m^2 - n^2)$, und A ist damit ganzzahlig. Dagegen ist der Flächeninhalt der $60°$- und $120°$-Dreiecke irrational, wie ich jetzt zeigen will:
Die allgemeine Formel für den Flächeninhalt von Dreiecken lautet $F = \frac{1}{2} \cdot$ Seite $\cdot$ Seite $\cdot$ Sinus des eingeschlossenen Winkels, z.B. $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Weil $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, kann der Flächeninhalt eines $120°$- oder eines $60°$-Dreiecks nie ganzzahlig sein.

5. Der Inkreis von $60°$- und $120°$-Dreiecken

Der Radius des Inkreises bei pythagoreischen Dreiecken ist ganzzahlig (siehe Einleitung). Wie ist das bei $60°$- und $120°$-Dreiecken?
(Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt des Inkreises.)



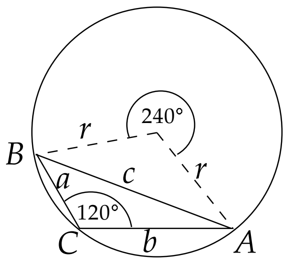
Der Flächeninhalt eines $60°$-Dreiecks lässt sich durch $F = \frac{1}{2}ab\sin 60° = \frac{1}{2}ab\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}ab\sqrt{3}$ oder $F = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar$ darstellen (siehe links: Zerlegung in Teildreiecke, r sei der Radius des Inkreises). Es gilt also:

$$F = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar = \frac{1}{4}ab\sqrt{3} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{4}ab\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{ab\sqrt{3}}{2(a+b+c)}$$

Der Inkreisradius eines $60°$-Dreiecks ist deshalb immmer irrational. Da $\sin 60° = \sin 120°$ gilt, ist der Inkreisradius auch bei einem $120°$-Dreieck stets irrational. Hier habe ich die Rechnung für pythagoreische Tripel aus [Lit.4, S.58f.] auf $120°$- und $60°$-Dreiecke übertragen.

6. Der Umkreis von $60°$- und $120°$-Dreiecken

Der Umkreisradius eines pythagoreischen Dreiecks ist rational ($r = \frac{1}{2}c$).
(Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten ist der Mittelpunkt des Umkreises und liegt beim pythagoreischen Dreieck in der Mitte von AB.)
Wie ist das bei $120°$- und $60°$-Dreiecken?



Ich benutze den Satz vom Umfangswinkel:

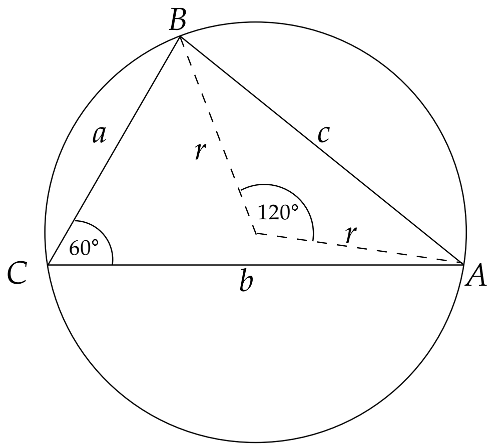
Jeder Umfangswinkel eines Kreises ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel über dem gleichen Kreisbogen.

Der Kosinus-Satz liefert

$c^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 120° = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = r^2 + r^2 + r^2 = 3r^2$, also $r = \frac{c}{3}\sqrt{3}$

Der Umkreisradius eines $120°$-Dreiecks ist deshalb immer irrational.

Jetzt mache ich dasselbe für das $60°$-Dreieck:



Auch hier gilt $c^2 = 3r^2$, also ist der Umkreisradius wieder irrational: $r = \frac{c}{3}\sqrt{3}$.

7. Generationen von $60°$- und $120°$-Tripeln

Die Kathetenlängen a und b eines $60°$- und $120°$-Dreiecks sollen selbst als Erzeugende m und n eines neuen $60°$- bzw. $120°$-Dreiecks dienen. Ist z.B. $(5, 3, 7)$ ein $120°$-Tripel, dann erhält man ein neues mit $m = 5$ und $n = 3$.

Für ein $120°$-Tripel gilt:

$$a_{\text{neu}} = 2ab + b^2, \ \ b_{\text{neu}} = |a^2 - b^2|, \ \ c_{\text{neu}} = a^2 + b^2 + ab$$

$$\begin{aligned} a_{\text{neu}} &= 2(m^2 - n^2) \cdot (2mn + n^2) + (m^2 - n^2)^2 \\ &= 4m^3n + 2m^2n^2 - 4mn^3 - 2n^4 + m^2 - 2m^2n^2 + n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{\text{neu}} &= |(2mn + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2| \\ &= |4m^2n^2 + 4mn^3 + n^4 - (m^4 - 2m^2n^2 + n^4)| \\ &= |-m^4 + 6m^2n^2 + 4mn^3| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_{\text{neu}} &= (2mn+n^2)^2 + (m^2-n^2)^2 + (2mn+n^2)(m^2-n^2)\\
&= 4m^2n^2 + 4mn^3 + n^4 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 2m^3n - 2mn^3 + n^2m^2 - n^4\\
&= 3m^2n^2 + 2mn^3 + n^4 + m^4 + 2m^3n\\
&= (m^2+n^2+mn)^2
\end{aligned}
$$

Für das $60°$-Dreieck habe ich dieselbe Rechnung durchgeführt und habe das gleiche Ergebnis erhalten. Wie bei den pythagoreischen Tripeln (s. Kap. I.) ist die neue Hypotenuse eine Quadratzahl (das alte c^2). Durch wiederholte Anwendung erhält man für c besondere Potenzen. Beispiel für ein $60°$-Tripel:

m	n	$a = 2mn - n^2$	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2 - mn$
3	1	4	8	7
8	5	55	39	49
55	39	2769	1504	2401

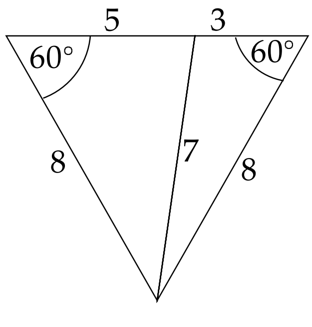
Die Seitenlänge c hat in diesem Beispiel immer die Form 7^{2^n} ($n \in \mathbb{N}$).

8. Gibt es gleichschenklige $60°$- und $120°$-Dreiecke?

Es gibt keine pythagoreischen Dreiecke, die gleichschenklig sind ($a^2 + a^2 = 2a^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}a$). Gibt es $120°$- und $60°$-Dreiecke, die gleichschenklig sind? Ich beantworte die Frage zuerst für $60°$-Dreiecke:
$c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handeln soll, muss $a = b$ gelten, also $c^2 = a^2 + a^2 - a^2 = a^2$, $c = a$, d.h. das Dreieck ist gleichseitig. Das einzige gleichschenklige $60°$-Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen ist also das gleichseitige Dreieck.

Jetzt beantworte ich die Frage für die $120°$-Dreiecke:
$c^2 = a^2 + b^2 + ab$. Auch hier soll es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handeln, deshalb muss $a = b$ gelten: $c^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$, $c = \sqrt{3}a$. Die Seitenlänge c wäre irrational wie bei den pythagoreischen Dreiecken. Daher gibt es auch keine gleichschenkligen $120°$-Dreiecke.

9. Zwei $60°$-Dreiecke können zu einem gleichseitigen Dreieck zusammengesetzt werden



Für das $60°$-Dreieck gibt es zwei Formeln zur Erzeugung der Seitenlänge a: $a_1 = m^2 - 2mn$ und $a_2 = 2mn - n^2$. Daher können $60°$-Dreiecke entstehen, deren Seitenlängen sich zwar in a unterscheiden, bei denen b und c jedoch vollkommen gleich sind. Addiert man a_1 zu a_2, so entsteht b ($a_1 + a_2 = m^2 - 2mn + 2mn - n^2 = m^2 - n^2 = b$). Wenn man die zwei $60°$-Dreiecke nun an den Seiten c zusammenlegt, ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck.

Für ein $120°$-Dreieck ist so etwas nicht möglich, da es keine $120°$-Dreiecke gibt, bei denen zweimal zwei Seiten gleich lang sind.

10. Fast-gleichschenklige $120°$-Dreiecke

Es gibt wie schon in Kap.8 erwähnt keine gleichschenkligen pythagoreischen Dreiecke. Für die Pythagoreer war dies unangenehm. Sie suchten daher nach rechtwinkligen

Dreiecken, die „fast gleichschenklig“ sind. Dabei sollten sich die Katheten nur um die Länge 1 unterscheiden. Wenn diese Dreiecke sehr groß wären, könnte man sie kaum von gleichschenkligen unterscheiden.

Für die Katheten a, b soll gelten $b - a = 1$. Für a, b setze ich jetzt die Formeln für die $90°$-Tripel ein:

$b - 1 = \pm 1$

$m^2 - n^2 - 2mn = \pm 1$

$(m-n)^2 - 2n^2 = \pm 1$

$x^2 - 2y^2 = \pm 1$ (Rechnung aus [Lit.1, S.256])

$x^2 - 2y^2 = \pm 1$ mit $x = m - n$, $y = n$.

Diese „Pellsche Gleichung“ $x^2 - 2y^2 = 1$ hat unendlich viele Lösungen in $\mathbb{N}$ [Lit.1, S.122]. Daraus resultieren unendlich viele fast-gleichschenklige pythagoreische Dreiecke. Allgemein haben Pellsche Gleichungen die Form $x^2 - Dy^2 = 1$ ($D \in \mathbb{N}$, D darf kein vollständiges Quadrat sein).

Weil es auch keine gleichschenkligen $120°$-Dreiecke gibt, habe ich versucht, auf ähnliche Weise fast-gleichschenklige $120°$-Dreiecke zu gewinnen.

$b - 1 = a$

$m^2 - n^2 - (2mn + n^2) = 1$

$m^2 - n^2 - 2mn - n^2 = 1$

$m^2 - 2n^2 - 2mn = 1$

$(m-n)^2 - 3n^2 = 1$

$x^2 - 3y^2 = 1$ mit $x = m - n$, $y = n$.

Dies ist eine Pellsche Gleichung mit $D = 3$. Um ganzzahlige Lösungen zu erhalten, übernehme ich das Verfahren, das in [Lit.5, S.163] für den Fall $D = 2$ beschrieben ist:

$x^2 - 3x^2 = 1$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 1$

$(x^2 + 3y^2 - \sqrt{3} \cdot 2xy)(x^2 + 3y^2 + \sqrt{3} \cdot 2xy) = 1$

$(x^2 + 3y^2)^2 - 3 \cdot (2xy)^2 = 1$

Mit Hilfe eines Excelprogramms habe ich noch weitere Lösungen ermittelt.

11. Zusammenhang zwischen den Formeln für $60°$-, $120°$- und $90°$-Tripel

Bildet man jeweils das arithmetische Mittel von $a_{120} = 2mn + n^2$ und $a_{60} = 2mn - n^2$, von $b_{120} = m^2 - n^2$ und $b_{60} = m^2 - n^2$, von $c_{120} = m^2 + n^2 + mn$ und $c_{60} = m^2 + n^2 - mn$, so erhält man

$$\bar{a} = \frac{2mn + n^2 + 2mn - n^2}{2} = 2mn,$$
$$\bar{b} = \frac{m^2 - n^2 + m^2 - n^2}{2} = m^2 - n^2,$$
$$\bar{c} = \frac{m^2 + n^2 + mn + m^2 + n^2 - mn}{2} = m^2 + n^2,$$

also die pythagoreischen Tripel für dasselbe Paar m, n. Auch wenn man das arithmetische Mittel von $120°$ und $60°$ bildet, erhält man $90°$.

III. Zusammenfassung und Vergleich

	Pythagoreische Tripel	$120°$-Tripel	$60°$-Tripel
Besondere Teiler	Eine Seitenlänge ist immer durch 3, eine durch 4 und eine durch 5 teilbar; das Produkt der Längen beider Katheten ist immer durch 12 teilbar; das Produkt aller Seitenlängen ist immer durch 60 teilbar.	c ist nie durch 2, 3 und 5 teilbar; $c-1$ ist immer durch 6 teilbar; bei ungeradem m und geradem n ist a (1. Form) immer durch 8 teilbar; bei ungeraden m, n ist b immer durch 8 teilbar.	c ist nie durch 2, 3 und 5 teilbar; $c-1$ ist immer durch 6 teilbar; bei ungeradem m und geradem n ist a (1. Form) immer durch 8 teilbar; bei ungeraden m, n ist b immer durch 8 teilbar.
b ist eine Kubikzahl, wenn ...	m und n zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen sind.	m und n zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen sind.	m und n zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen sind.
Flächeninhalt	immer ganzzahlig	immer irrational	immer irrational
Inkreis	Der Radius ist immer ganzzahlig.	Der Radius ist immer irrational.	Der Radius ist immer irrational.
Umkreis	Der Radius ist immer rational.	Der Radius ist immer irrational.	Der Radius ist immer irrational.
Generationen	Die neue Hypotenuse ist immer das alte c^2.	Die neue Hypotenuse ist immer das alte c^2.	Die neue Hypotenuse ist immer das alte c^2.
Gleichschenklige Dreiecke	Es gibt keine gleichschenkligen pythagoreischen Dreiecke.	Es gibt keine gleichschenkligen $120°$-Dreiecke.	Es gibt gleichschenklige $60°$-Dreiecke nur in Form gleichseitiger Dreiecke.

Zwei $60°$-Dreiecke der selben m und n können zu einem gleichseitigen Dreieck zusammengesetzt werden.
Das arithmetische Mittel der Seiten a (b, c) eines $120°$-Dreiecks und eines $60°$-Dreiecks ergibt die Seiten a (b, c) eines pythagoreischen Dreiecks, wenn man dieselben m und n verwendet – so wie $90°$ das arithmetische Mittel von $60°$ und $120°$ ist.

Literaturverzeichnis

1) A. H. Beiler: Recreations in the theory of numbers. Dover Publications, New York 1964.

2) H. Hasse: Ein Analogon zu den ganzzahligen pythagoreischen Dreiecken. Elemente der Mathematik 32 (1977), 1-6.

3) H. Böttcher: Analoga zu den pythagoreischen Dreiecken. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jg. 19, No. 7 (1913), 132f.

4) C. S. Ogilvy, J. T. Anderson: Zahlentheorie. Goldmann, München 1970, 56-59.

5) J. Cofman: Einblicke in die Geschichte der Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin 2001, 163f.

Die Seite für den Computer-Fan

169 als Quadratsumme

Untersuche mit Deinem Computer, für welche natürlichen Zahlen n die Zahl 169 als Summe von n Quadratzahlen darstellbar ist, wobei diese nicht verschieden zu sein brauchen; tritt eine Quadratzahl in der Summe mehrfach auf, wird sie auch entsprechend mehrfach gezählt.

(Noch ein Hinweis: Auch 1 gehört wegen $1 = 1^2$ zu den Quadratzahlen.)

Beispiele: Für $n = 1, 2, 3$ und 4 ist $169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2$. (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 79

Die Smith-Zahlen

Definition: Es sei n eine natürliche Zahl, die die Primfaktorzerlegung $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ besitze, wobei die Primfaktoren nicht verschieden sein müssen und $k \geq 2$ ist. Ferner sei $Q(n)$ die Quersumme von n. Dann heißt n eine *Smith-Zahl*, wenn gilt: $Q(n) = Q(p_1) + Q(p_2) + \ldots + Q(p_k)$.

Aufgabe: Bestimme die Anzahl aller Smith-Zahlen unterhalb 10000. (H.F.)

Lösung:
Es gibt **376** Smith-Zahlen unterhalb 10000.

Dies haben mit entsprechenden Programmen bestätigt: Sergej Betcher (C++ 5.2), der die Aufgabe von seiner Schwester Olga aus dem Speyer-Kolleg bekommen hat; Bernhard Saumweber (Delphi 7), 10. Klasse des Gisela-Gymnasiums in München; Stefanie Tiemann (Visual Basic), 10. Klasse des Gymnasiums Marienberg in Neuss.

Hinweis: Die Aufgaben für den Computer-Fan sind meist ohne Bezug auf einen speziellen Rechner oder ein spezielles Programm oder eine spezielle Programmiersprache gestellt. Ihr könnt selbst entscheiden, für welche Teile es sich lohnt, z.B. einen Taschenrechner oder ein Computeralgebra-System (z.B. DERIVE) einzusetzen oder ein eigenes kleines Programm (z.B. in Pascal) zu schreiben.
Ihr könnt Eure Lösungen auch einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auch Teile eingesandter Lösungen veröffentlichen können.

Erratum

Leider sind im Heft 80 die Lebensdaten des polnischen Mathematikers Waclaw Sierpiński nicht korrekt wiedergegeben worden; richtig ist: 1882-1969.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 80

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Zahlenrätsel

	4		
			2
2			
		4	

In jedes der leeren Felder ist jeweils eine der Zahlen $1, 2, 3, 4$ so einzusetzen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte alle vier Zahlen verschieden, aber in jeder Diagonalen die Zahlen gleich sind. (H.F.)

Lösung:

Es gibt zwei Lösungen, nämlich:

1	4	2	3
4	1	3	2
2	3	1	4
3	2	4	1

und

3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4
1	2	4	3

.

Der Würfelturm

Fünf normale Würfel sind willkürlich übereinander gestapelt. Die oben liegende Seite des obersten Würfels zeigt eine 2. Wie viele Augen sind insgesamt sichtbar?

(Sarah Tröbs, WEG Winnweiler)

Lösung:

Es sind 72 Augen sichtbar: Die gegenüber liegenden Seiten eines normalen Würfels ergeben immer 7. Bei fünf Würfeln, die aufeinander gestapelt sind, ergeben die zehn gegenüber liegenden Seiten zusammen 70. Mit den 2 Augen des obersten Würfels ergibt sich 72.

Fünfer-Produkt

Das Produkt von 5 unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer ein Vielfaches von 120. (H.F.)

Lösung:

Unter fünf aufeinander folgenden Zahlen sind mindestens zwei ein Vielfaches von 2, eine davon sogar ein Vielfaches von 4, mindestens eine ein Vielfaches von 3 und eine ein Vielfaches von 5. Also ist ihr Produkt mindestens ein Vielfaches von $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Quersumme

Wie groß ist die Quersumme von $7 \cdot 10^{222} - 1$? (H.F.)

Lösung:

$$7 \cdot 10^{222} - 1 = 6 \cdot 10^{222} + 10^{222} - 1 = 6 \cdot 10^{222} + \underbrace{999\ldots9}_{\text{222 Ziffern 9}}$$

Es gilt: Quersumme von $(7 \cdot 10^{222} - 1)$ = Quersumme von $(6 \cdot 10^{222} + 999\ldots9) = 6 + 222 \cdot 9 = \mathbf{2004}$.

Der Bücherwurm

Constanzes Mutter hat in ihrem Bücherregal eine vierbändige Ausgabe von Schillers Werken. Jeder Band hat genau 600 Seiten. Das einzelne Blatt hat eine Dicke von $0,14$ mm, der Einband eine Stärke von $2,5$ mm. Ein Bücherwurm frisst sich von Seite 1 des ersten Bandes durch bis zur Seite 600 von Band 4 mit einer Geschwindigkeit von 3 mm pro Stunde.
Wie lange braucht er?

Lösung:

Da Seite 1 rechts und Seite 600 ganz links steht, muss der Bücherwurm von Band 1 nur den vorderen Einband, von Band vier nur den hinteren Einband durchfressen. Insgesammt also 6 Einbanddeckel (15 mm) und 600 Blätter Papier (84 mm), d.h. 99 mm. Dafür braucht er 33 Stunden. Beachte dabei, dass jedes *Blatt* Papier zwei *Seiten* hat.

Marktfrau Maria

Marktfrau Maria verkauft Melonen.
Der erste Käufer braucht eine größere Menge für ein Hotel. Maria verkauft ihm eine halbe Melone weniger als drei Viertel ihres Vorrats. Anschließend kauft der Wirt eines Restaurants eine halbe Melone weniger als drei Viertel des Restbestands. Auch dem dritten und vierten Käufer verkauft Maria jeweils eine halbe Melone weniger als drei Viertel ihres verbliebenen Vorrats. Danach hat sie noch eine Melone übrig.
Wie viele Melonen hatte sie am Anfang? (WJB)

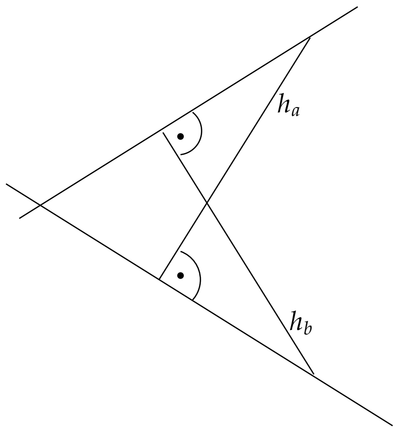
Lösung:

Hat Maria **vor** einem Verkauf V Melonen, so bleiben ihr **nach** dem Verkauf $N = V - \left(\frac{3V}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{V}{4} + \frac{1}{2}$, und damit $V = 4N - 2$.

Nach dem letzten Verkauf ist $N = 1$. Also:
vor dem 4. (nach dem 3.) Verkauf: $V = 4 \cdot 1 - 2 = 2$,
vor dem 3. (nach dem 2.) Verkauf: $V = 4 \cdot 2 - 2 = 6$,
vor dem 2. (nach dem 1.) Verkauf: $V = 4 \cdot 6 - 2 = 22$,
vor dem 1. Verkauf (am Anfang): $V = 4 \cdot 22 - 2 = 86$.

Alles gleichschenklige Dreiecke, oder?

Martin hat wild auf ein Blatt Papier zwei gleich lange Strecken gezeichnet, dann hat er versucht, diese Strecken zu Höhen eines Dreiecks zu machen, und siehe da: Egal wie er sich anstellte, es wurden immer gleichschenklige Dreiecke.

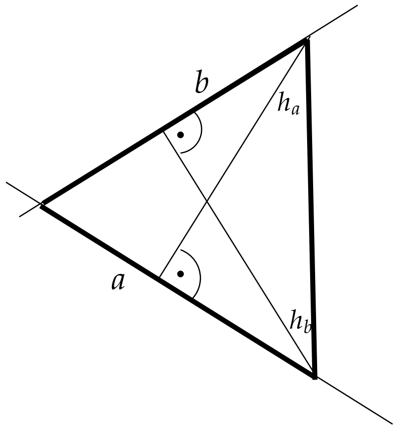


a) Zeichne zwei Strecken, mache sie zu Höhen eines Dreiecks (Lotgeraden!) und teste, ob ein gleichschenkliges Dreieck entsteht!

b) Untersuche, ob ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, immer gleichschenklig ist!
Tipp: Erinnere Dich, dass die Höhen bei der Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks eine Rolle spielen.

Lösung:

a) Durch wiederholtes Zeichnen beziehungsweise durch Drehen oder Schieben der gleich langen Strecken, bis sie sich schneiden, lässt sich folgende Zeichnung erreichen:



b) Wir gehen davon aus, dass h_a und h_b die gleich langen Höhen des Dreiecks sind. Jetzt benutzen wir den Tipp: Für den Flächeninhalt F jedes Dreiecks gilt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b.$$

Für $h_a = h_b$ folgt $\frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot b$ und damit $a = b$. Dies bedeutet aber gerade, dass jedes Dreieck mit zwei gleich langen Höhen gleichschenklig ist.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

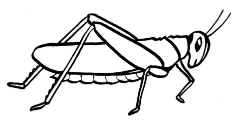
Knobelaufgabe

Die vier Kinder Clara, Sophie, Mark und Lars haben (in anderer Reihenfolge!) die Nachnamen Wagenknecht, Stowesand, Fischer und Jacobi. Von ihnen ist folgendes bekannt:

1. Die drei Kinder Sophie, Mark und das Kind mit dem Nachnamen Stowesand sind zusammen auf einem Erinnerungsfoto zu sehen.
2. Lars heißt nicht Stowesand und nicht Jacobi.
3. Mark, Lars und das Kind mit Nachnamen Fischer waren zusammen im Ferienlager.

Wie heißen die Kinder mit vollständigem Namen?
(gefunden von der Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“, Grietje Gelück, Catherine Jacobi, Malte Stumpf, in „mathematik lehren“, Heft 115)

Heuschreckensprung



Eine Heuschrecke springt an einem Stab entlang. Sie startet an dessen einem Ende. Bei jedem Sprung schafft sie die Hälfte der übrig gebliebenen Strecke. Nach drei Sprüngen ist sie $70\,\mathrm{cm}$ weit gekommen. Wie lang ist der Stab?
(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“)

Busplätze

In einem Bus ist ein Drittel der Plätze mit Kindern besetzt, 6 Plätze mehr werden durch Erwachsene belegt. 9 Plätze bleiben frei. Wie viele Plätze hat der Bus?
(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Rennmäuse

Der Futtervorrat für die 12 Rennmäuse der Zoohandlung Tierlieb reicht noch für 62 Tage. Nach 9 Tagen werden 6 der Mäuse verkauft und nach wiederum 26 Tagen werden 14 neue Rennmäuse geliefert. Wie lange reicht der Futtervorrat insgesamt?

(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“)

Konstruktionsregel für ein magisches 3×3-Quadrat

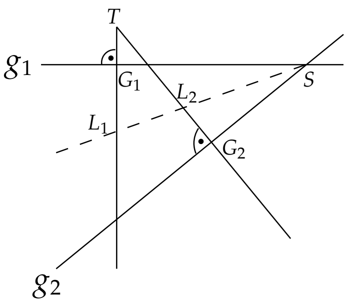
Immer wieder stellen Mathis die Frage, ob man magische Quadrate nicht nur durch Probieren finden, sondern auch nach Regeln konstruieren kann.
Hier kannst du nun selbst eine solche Regel für ein 3×3-Quadrat entwickeln, indem du die leeren Felder durch geeignete Terme ausfüllst.

$a-b$	$a+b-c$	
	a	
		$a+b$

$a \neq b \neq c,\ c \neq 2b$

Konstruiere mit deiner Regel ein magisches 3×3-Quadrat, bei dem das zentrale Feld mit der Zahl 2005 besetzt ist. (H.F.)

Martin zeichnet wieder



Martin zeichnet zwei Geraden g_1 und g_2, die sich im Punkt S schneiden. Dann wählt er auf jeder Geraden einen Punkt und errichtet dort das Lot auf der Geraden. Die Lote schneiden sich im Punkt T. Dann schneidet Martin die Lote mit der Winkelhalbierenden von g_1 und g_2 in den Punkten L_1 und L_2. Das Dreieck L_1TL_2 sieht gleichschenklig aus.

a) Prüfe an Hand einer Zeichnung, ob an dieser Vermutung etwas dran sein könnte.
b) Suche gegebenenfalls nach einem Beweis.

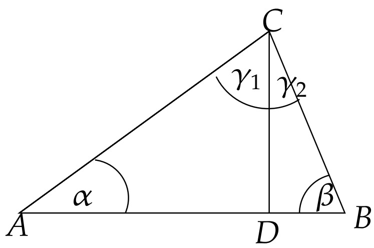
(nach WJB)

Die Winkel des Dreiecks

In einem Dreieck ist $\alpha = 36°$ bekannt. Außerdem bildet die Höhe CD mit einer der Dreiecksseiten einen Winkel von $22°$.

Bestimme alle Winkelgrößen im Dreieck, wenn

a) das Dreieck spitzwinklig ist,
b) das Dreieck stumpfwinklig ist mit $\beta > 90°$,
c) das Dreieck stumpfwinklig ist mit $\gamma > 90°$.



Der Lexikonartikel

In einem vielbändigen Lexikon sind die Seiten fortlaufend durch alle Bände hindurch von 1 bis $15\,607$ nummeriert.
Marilyn liest einen dreiseitigen Artikel. Sie bemerkt: „Wenn ich zum Produkt der drei Seitenzahlen 7 addiere, dann ergibt sich die Gesamtseitenzahl des Lexikons.“
Auf welchen Seiten steht der Artikel? (H.F.)

Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 848.Die defekte Waschmaschine

Familie Schneckenfuß wandert $12\,\mathrm{km}$ auf einem Rundweg und plant dafür vier Stunden ein, da sie zwei kleine Kinder hat. Sie startet um 14 Uhr. Eine Stunde später tropft es bei Herrn Mufflig durch die Decke. Die Waschmaschine von Familie Schneckenfuß ist defekt! Herr Mufflig folgt aufgebracht der Familie Schneckenfuß mit $5\,\mathrm{km/h}$.

Wann und wo wird er sie vielleicht treffen? Würdest du auch hinterher laufen?

(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben")

Aufgabe 849. Rote und blaue Strecken

In der Ebene sind fünf verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_5$ gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Jeweils zwei Punkte sind durch eine rote oder eine blaue Strecke verbunden und zwar so, dass gilt:

(1) keine drei Strecken bilden ein rotes oder ein blaues Dreieck.

Man beweise die Behauptung:

B: Von jedem der fünf Punkte gehen zwei rote und zwei blaue Strecken aus.

Um langwieriges Probieren zu vermeiden, kann man versuchen herauszukriegen, was der Fall ist, wenn man die Gegenbehauptung $\neg B$ als wahr voraussetzt:
$\neg B$: von einem der fünf Punkte gehen drei rote Strecken aus.

Bemerkung: Da man in der Aufgabenstellung die Wörter „rot" und „blau" vertauschen darf, ohne am Problem etwas zu ändern, genügt es, $\neg B$ nur für rote Strecken zu betrachten. (gefunden: H.F.)

Aufgabe 850. Nochmal zu den Sekundzahlen

Eine MONOID-Leserin hat die Mathespielerei „Eine wahre Geschichte" aus Heft 79 auf folgende Art gelöst: Zahlen, die durch genau 3 Zahlen (sich selbst, die 1 und eine weitere) teilbar sind, sind die mit 2 multiplizierten Primzahlen. Diese Lösung ist leider falsch, denn solche Zahlen $2p$ sind durch 1, 2, p und $2p$ teilbar, also durch vier Zahlen, wenn $p \neq 2$ ist.

a) Gibt es weitere Zahlen, die durch genau vier Zahlen teilbar sind, wenn ja, welche?

b) Welche Zahlen sind durch genau 5 Zahlen teilbar?

c) Welche durch genau 6 ?

d) Gibt es eine systematische Methode, um die Zahlen zu finden, die genau t Teiler besitzen? (WJB)

Aufgabe 851. Ein schwieriger Fall?
Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $a < b < c$ und T sei der Term

(1) $$T = \frac{(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}.$$

Zeige, dass man T so nach oben und nach unten abschätzen kann:

(2) $$8a^2b < T < 8bc^2$$ (Zdravko F. Starc)

Hinweis:
Da man (2) nur mühselig durch direktes Nachrechnen beweisen kann, geben wir einen Tipp, wie man schneller zum Ziel gelangt. Zeige, dass gilt:

(3) Wenn $x+y+z=0$ ist, dann folgt $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Aufgabe 852.
Ein rechtwinkliges Dreieck besitze ganzzahlige Seitenlängen.
Zeige: Der Inkreisradius ist ebenfalls ganzzahlig. (H.F.)

Aufgabe 853. Pyramidenschnitt $\ast$
Auf einem Tisch stehen drei Pyramiden mit Grundflächen G_1, G_2, G_3 und Höhen $H_1 < H_2 < H_3$. Eine Ebene soll parallel zur Tischfläche so gelegt werden, dass die Summe der Schnittflächen mit den Pyramiden gleich dem Mittelwert $M = \frac{G_1+G_2+G_3}{3}$ ihrer Grundflächen ist. (WJB)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 80

Kl. 8-13

Aufgabe 842.
Eine Menge $\mathbb{M}$ bestehe aus aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, für die gelten soll:
Jeweils 3 verschiedene Elemente haben ein Produkt > 2004 und eine Summe < 2004.
Bestimme die Menge $\mathbb{M}$, die möglichst viele Zahlen enthält. (H.F.)

Lösung:
Wir schreiben $\mathbb{M} = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$.

Wenn für die größte Zahl z in $\mathbb{M}$ gilt: $z \geq 669$, dann sind die nächstkleineren Zahlen y mit $y \geq 668$ und x mit $x \geq 667$. Für sie ist $z+y+x \geq 669+668+667 = 2004$, was aber nach Voraussetzung nicht erlaubt ist. Aber $z \leq 668$, $y \leq 667$ und $x \leq 666$ erfüllen bereits die angegebene Summen-Bedingung: $x+y+z \leq 668+667+666 = 2001$.

Wenn für die kleinste Zahl a aus $\mathbb{M}$ gilt: $a \leq 11$, dann sind $b \leq 12$ und $c \leq 13$ sowie $a \cdot b \cdot c \leq 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716$, was nach Voraussetzung nicht möglich sein soll.

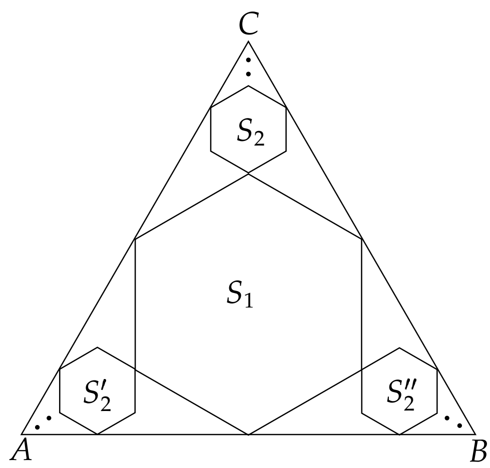
Wenn aber $a \geq 12$, also $b \leq 13$ und $c \geq 14$ ist, dann gilt:

$a \cdot b \cdot c \geq 12 \cdot 13 \cdot 14 = 2184$, so dass die Produkt-Bedingung erfüllt ist.

Somit gilt: $a \geq 12$ und $z \leq 668$. Da die Menge $\mathbb{M}$ möglichst viele Elemente enthalten soll, ist $\mathbb{M} = \{12, 13, 14, \dots, 666, 667, 668\}$ zu wählen.

Aufgabe 843. Sechsecke im Dreieck

In ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Höhe h sei ein regelmäßiges Sechseck S_1 so einbeschrieben, dass auf jeder Dreiecksseite ein Eckpunkt von S_1 liegt. In die freien Dreiecksflächen bei A, B und C zeichne man drei regelmäßige Sechsecke S_2, S_2', S_2'', die alle eine Ecke mit S_1 gemeinsam haben und von denen jeweils zwei Eckpunkte auf den Dreiecksseiten liegen. In die freien Flächen bei A, B, C konstruiere man auf die gleich Weise drei weitere regelmäßige Sechsecke S_3, S_3', S_3'', usw. ohne Ende. So entsteht eine 3-fach symmetrische Figur, von der nebenstehendes Bild eine Vorstellung vermittelt.



Wie groß ist die Summe der Umfänge aller Sechsecke im Dreieck? (H.F.)

Lösung:

Wir bezeichnen den Druchmesser des regelmäßigen Sechsecks S_n mit d_n, $n \geq 1$. Aus Symmetriegründen sind dann die Durchmesser von S_n' und S_n'', $n \geq 2$, ebenfalls d_n.
Die Seitenlänge eines jeden n-ten Sechsecks ist dann $r_n = \frac{1}{2}d_n$ und für seinen Umfang U_n gilt: $U_n = 6 \cdot r_n = 3d_n$.
Für die Summe U aller Sechsecksumfänge ergibt sich somit:
(1) $U = 3 \cdot (3d_1 + 3d_2 + 3d_3 + \ldots) - 2 \cdot 3d_1$
(im Term $3 \cdot (3d_1 + 3d_2 + \ldots)$ ist der Umfang $U_1 = 3d_1$ von S_1 drei Mal berücksichtigt).
Nun gilt auf Grund der Konstruktion der Sechsecke: $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots =$ Höhe des Dreiecks $ABC = h$. Verwendet man dies in (1), so folgt:
(2) $U = 9h - 3d_1$.
Wie groß ist d_1 ? Im gleichseitigen Dreieck ABC ist wegen seiner Symmetrie der Mittelpunkt M von S_1 zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Der Schwerpunkt M teilt nun die Schwerelinie – die hier zugleich die Höhe im Dreieck ABC ist – im Verhältnis $2:1$. Also ist $d_1 = \frac{2}{3}h$. Folglich gilt:
(3) $U = 5h$.
Die Summe der Umfänge aller regelmäßigen Sechsecke im regelmäßigen Dreieck ist damit bestimmt.

Aufgabe 844. Pythagoreische Zahlentripel

Die natürlichen Zahlen x, y und z erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Dann gilt:

a) Mindestens eine der Zahlen x, y oder z ist durch 3 teilbar.
b) Mindestens eine der Zahlen x, y oder z ist durch 4 teilbar.
c) Mindestens eine der Zahlen x, y oder z ist durch 5 teilbar.

(Stefanie Tiemann, Gymnasium Marienberg, Neuss)

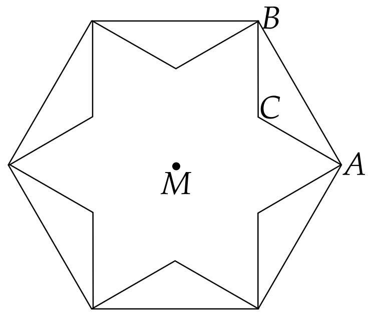
Lösung:

a) Wir rechnen modulo 3 und beachten, dass $n^2 \equiv 0, 1$ für jede ganze Zahl n gilt. Daher ist die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ modulo 3 nur erfüllbar, wenn x^2 oder y^2 Null modulo 3 ist. Das heißt aber, dass x^2 oder y^2 durch 3 teilbar ist und dann auch x bzw. y.

b) Hier müssen wir modulo 8 rechnen und beachten, dass $n^2 \equiv 0, 1, 4$ für jede ganze Zahl n gilt. Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ist dann modulo 8 nur gültig, wenn x^2 bzw. y^2 durch 8 teilbar ist oder $x^2 \equiv y^2 \equiv 4$ gilt, also z^2 durch 8 teilbar ist. In jedem Fall ist eine der drei Zahlen x^2, y^2, z^2 durch 8 teilbar und daher auch eine der Zahlen x, y, z durch 4.

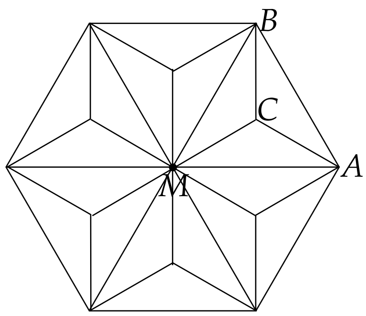
c) Modulo 5 ist $n^2 \equiv 0, 1, 4$ für jede natürliche Zahl n. Mit demselben Argument wie in b) folgt auch hier, dass eine der drei Zahlen x^2, y^2, z^2 durch 5 teilbar sein muss, also auch eine der Zahlen x, y, z.

Aufgabe 845. Stern im Sechseck



In ein regelmäßiges Sechseck der Seitenlänge r sei ein Stern wie in der Figur konstruiert.
Um wieviel ist die Fläche des Sechsecks größer als die des Sterns? (H.F.)

Lösung:
Die Höhe h des gleichseitiges Dreiecks MAB ist $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}r$ wegen $h^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}r^2$. Das regelmäßige Sechseck hat demnach die Fläche $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}r \cdot r = \frac{3}{2}\sqrt{3}r^2$. Die Höhen im Dreieck MAB sind Verlängerungen der Strecken MC, AC und BC. Wegen der Gleichseitigkeit des Dreiecks MAB ist der Höhenschnittpunkt C zugleich der Schwerpunkt von MAB. Dieser teilt jede Höhe im Verhältnis $2:1$ vom zugehörigen Eckpunkt aus gerechnet. Also ist die Höhe im Dreieck $CAB = \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}\sqrt{3}r$ und somit ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3}r \cdot r = \frac{1}{12}\sqrt{3}r^2$ die Fläche des Dreiecks CAB.
Mithin ist aus Symmetriegründen:
Fläche des Sterns = Fläche des Sechsecks$-6\cdot$ Fläche des Dreiecks $CAB = r^2\sqrt{3}$. Das Sechseck ist $\frac{3}{2}$-mal so groß wie der Stern.



Diese Lösung erhalten wir auch, wenn wir sechs Hilfsstrecken einzeichnen, so dass nebenstehendes Bild entsteht. Das Sechseck besteht dann aus 18 Dreiecken, der Stern aus 12. Da alle diese Dreiecke flächengleich sind, ist das Sechseck also $\frac{3}{2}$-mal so groß wie der Stern.

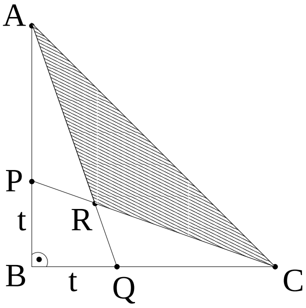
Aufgabe 846. Gemeinsame Nullstellen
Kann man a so wählen, dass die Nullstellenmengen der beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 + 13x - 30, \qquad g(x) = ax^3 - (13a - 3a^2)x^2 - 69ax + 90a^2$$

übereinstimmen? (WJB)

Lösung:
f hat die Nullstellen 2 und -15 (z.B. mit p-q-Formel). Polynomdivision liefert $g(x) : f(x) = ax - 3a^2 = a(x - 3a)$. g hat also die „zusätzliche" Nullstelle $3a$. Dies kann man auch so zeigen: Das Produkt der Nullstellen von $\frac{g(x)}{a}$ ist $90a$; die „dritte" Nullstelle muss also $3a$ sein. Diese ist gleich einer der Nullstellen von f, wenn $a = \frac{2}{3}$ oder $a = -5$.

Aufgabe 847.



Das rechtwinklige Dreieck ABC sei gleichschenklig mit $|AB| = |BC| = s$. Die Punkte P und Q seien so gewählt, dass $|PB| = |QB| = t$, t eine gegebene Zahl, ist.
Bestimme die Fläche des Dreiecks ARC in Abhängigkeit von s und t. (H.F.)

Lösung:
Zeichne in der Figur die Strecke BR. Die Dreiecke ABQ und AQC haben die Basis BQ bzw. QC und die gleiche Höhe AB. Daraus folgt:

$\frac{\text{Fläche } (ABQ)}{\text{Fläche } (AQC)} = \frac{|BQ|}{|QC|}$ oder Fläche $(ABQ) = \frac{t}{s-t} \cdot$ Fläche (AQC).

Analog ergibt sich: Fläche $(BQR) = \frac{t}{s-t} \cdot$ Fläche (CRQ).

Damit ist (Subtraktion!): Fläche $(ABR) = \frac{t}{s-t} \cdot$ Fläche (ARC).

Wegen der Symmetrie der Figur ist ferner: Fläche $(BCR) = \frac{t}{s-t} \cdot$ Fläche (ARC).
Nun gilt: Fläche $(ARC) +$ Fläche $(ABR) +$ Fläche $(BCR) =$ Fläche $(ABC) = \frac{s^2}{2}$.
Also ist Fläche $(ARC) + \left(\frac{t}{s-t} \cdot \text{Fläche } (ARC)\right) \cdot 2 = \frac{s^2}{2}$ oder
Fläche $(ARC) = \frac{s^2}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2t}{s-t}} = \frac{s^2}{2} \cdot \frac{s-t}{s+t}$.

Niccolò Paganini und die befreundeten Zahlen

von Hartwig Fuchs

Es waren die alten Griechen – wer sonst? –, die als erste die mathematischen Eigenschaften natürlicher Zahlen erforschten, und sie stießen dabei auf so Exotisches wie die Perfektheit:

> Eine natürliche Zahl heißt **perfekt**, wenn sie mit der Summe ihrer echten Teiler übereinstimmt.

6 ist perfekt wegen $6 = 1 + 2 + 3$ und ebenso 28, denn $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Bei ihrer Suche nach weiteren perfekten Zahlen werden sie wohl auch das Paar 220; 284 sogenannter befreundeter Zahlen entdeckt haben:

> Zwei natürliche Zahlen m und n heißen **befreundet**, wenn n die Summe der echten Teiler von m und wenn m die Summe der echten Teiler von n ist.

220 und 284 sind danach befreundet, denn $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ hat die echten Teiler $1, 2, 4, 5, 10, 20, 22, 44$, deren Summe 284 ist, und $284 = 2^2 \cdot 71$ hat die echten Teiler $1, 2, 4, 71, 142$, deren Summe 220 ist.

Jamblichus (um 285 - um 330 n. Chr.) berichtet, dass bereits Pythagoras das befreundete Paar 220; 284 gekannt hat, dass aber seither keine weiteren Paare gefunden wurden.

Erst ein halbes Jahrtausend nach Jamblichus befassten sich Gelehrte aus dem arabischen Kulturkreis wieder mit befreundeten Zahlen. Besonders erfolgreich war dabei der Arzt, Astronom und Mathematiker Thabit bin Qurra (um 835 - 901), der sogar ein „Buch über die Bestimmung befreundeter Zahlen“ veröffentlichte. Darin findet sich folgende

Regel von Thabit

Bestimme eine natürliche Zahl $x > 1$ so, dass die drei Terme

(1) $r = 3 \cdot 2^x - 1,\ s = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$ und $t = 9 \cdot 2^{2x-1}$ Primzahlen sind. Dann gilt:

(2) $m = rs \cdot 2^x$ und $n = t \cdot 2^x$ sind ein Paar befreundeter Zahlen.

Eine (halbe) Begründung von Thabits Regel:
Wegen $3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x-1} = 3 \cdot 2^{x-1}(2+1) = 9 \cdot 2^{x-1}$ gilt zunächst

(3) $$\begin{aligned} r \cdot s &= (3 \cdot 2^x - 1)(3 \cdot 2^{x-1} - 1) = 9 \cdot 2^{2x-1} - (3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x-1}) + 1 \\ &= 9 \cdot 2^{2x-1} - 9 \cdot 2^{x-1} + 1 \end{aligned}$$

Folglich ist mit (2)

(4) $m = 9 \cdot 2^{3x-1} - 9 \cdot 2^{2x-1} + 2^x$

Die echten Teiler von n sind – vgl. (2): $1,\ 2,\ 2^2,\ \dots,\ 2^x,\ t,\ 2t,\ 2^2 t,\ \dots,\ 2^{x-1}t$ und ihre Summe ist
$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^x + t(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{x-1}) = (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{x-1})(1 + t) + 2^x$.
Weil nun $2^x - 1 = (2-1)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{x-1})$ ist – nachprüfbar durch Ausmultiplizieren der Klammern! –, gilt für die Teilersumme weiter mit (3), (4): Sie ist gleich $(2^x - 1)(1 + t) + 2^x = 2^x \cdot 9 \cdot 2^{2x-1} - 9 \cdot 2^{2x-1} + 2^x = 9 \cdot 2^{3x-1} - 9 \cdot 2^{2x-1} + 2^x = m$, d.h. die Summe der echten Teiler von n ist m.
Entsprechend zeigt man, dass n die Summe der echten Teiler von m ist.
Dann aber gilt (2).
Thabits Regel liefert für $x = 2$ das bekannte Paar 220; 284.

Mit Thabits Regel sind nur wenige Paare befreundeter Zahlen gefunden worden. Das hat seinen Grund darin, dass es nach Computerberechnungen z.B. für $x < 20\,000$ nur drei x-Werte gibt, nämlich $x = 2$, 4 und 7, die Paare befreundeter Zahlen liefern.
Thabit selbst hat mit seiner Regel kein neues Paar angeben können. Das gelang erst sehr viel später dem arabischen Mathematiker Ibn al-Banna (1256 - um 1320): Er fand für $x = 4$ das Paar $17\,296$; $18\,416$. Und R. Descartes (1596-1650) entdeckte das dritte Paar $9\,363\,584$; $9\,437\,056$, das sich aus Thabits Regel für $x = 7$ ergibt. Aber dann „warf“ sich L. Euler (1707-1783), der wandelnde Computer, auf das Problem der befreundeten Zahlen: Er bestimmte mehr als 60 Paare befreundeter Zahlen, wobei er mit Methoden arbeitete, die weit effizienter als Thabits Regel waren (und sind) und die auch heute noch die Ausgangsbasis für die computer-gestützte Suche nach befreundeten Zahlen bilden. Bis jetzt hat man so mindestens $50\,000$ Paare befreundeter Zahlen bestimmt.

Man hat über $2\,000$ Jahre nach befreundeten Zahlen gefahndet und daran waren die brillantesten Zahlentheoretiker und Zahlenjongleure beteiligt; sie alle aber haben das nach 220; 284 nächst größere Paar übersehen! Das fand im Jahre 1866 – also 100 Jahre nach Eulers entscheidenden Beiträgen – ein erst sechszehnjähriger Schüler: Niccolò Paganini*: Es ist das Paar 1184; 1210 und es heißt deshalb heute **das paganinische Paar** befreundeter Zahlen.

*Es handelt sich nicht um den im frühen 19. Jahrhundert berühmten Geiger gleichen Namens – der starb bereits 1840.

Wer ist schon vollkommen? (…unter den natürlichen Zahlen)

Herr Dr. Wolfgang Moldenhauer aus Erfurt sandte zu dem Beitrag „Vorsicht vor zu schnellen Verallgemeinerungen“ von Hartwig Fuchs in MONOID 79, S. 36-38, an die MONOID-Redaktion folgende Bemerkungen zu den „Perfekten Zahlen im Mittelalter“:

Bereits Euklid wusste, dass die ersten vier p-Zahlen von der Form $2^{n-1}(2^n-1)$ sind. Es ist
Für $n=2$: $2^1(2^2-1)=6=1+2+3$.
Für $n=3$: $2^2(2^3-1)=28=1+2+4+7+14$.
Für $n=5$: $2^4(2^5-1)=496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$.
Für $n=7$: $2^6(2^7-1)=8128=\dots$

A0) Euklid bewies, dass diese Formel eine vollkommene Zahl liefert, wenn 2^n-1 Primzahl ist. Der Beweis ist durch Abzählen aller Teiler möglich, oder man benutzt die Tatsache, dass die Zahl $h=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$ in kanonischer Darstellung genau $d(h)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_l+1)$ Teiler hat. Hier ist $h=2^{n-1}(2^n-1)$, wobei 2^n-1 Primzahl ist. Die Zahl h hat dann genau $d(h)=2n$ Teiler ($\alpha_1=n-1$, $\alpha_2=1$). Diese lauten $1,2,2^2,\dots,2^{n-1}$ und $1\cdot(2^n-1),2\cdot(2^n-1),2^2\cdot(2^n-1),\dots,2^{n-1}\cdot(2^n-1)$. Die Summe dieser Teiler ist
$1+2+\ldots+2^{n-1}+1\cdot(2^n-1)+2\cdot(2^n-1)+\ldots+2^{n-1}(2^n-1)$
$=\frac{2^n-1}{2-1}+(2^n-1)(1+2+\ldots+2^{n-1})$ (Summenformel einer geometrischen Reihe)
$=2^n-1+(2^n-1)\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1+(2^n-1)(2^n-1)$
$=(2^n-1)(1+2^n-1)=2^n(2^n-1)=2\cdot2^{n-1}(2^n-1)=2h$.
Also ist $2^{n-1}(2^n-1)$ p-Zahl, wenn 2^n-1 Primzahl ist.

Zur weiteren Suche nach p-Zahlen ist folgendes hilfreich:
A1) Wenn 2^n-1 Primzahl ist, dann ist n auch eine Primzahl.
Hierfür kenne ich zwei Beweise.
1. Annahme: $n=pq$ sei zusammengesetzt. Dann ist
$2^n-1=2^{pq}-1=(2^p-1)(2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\ldots+2^p+1)$ ebenfalls zusammengesetzt, also keine Primzahl. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme erhalten. n ist also Primzahl.

2. Annahme: $n=pq$ sei zusammengesetzt. Dann ist

$$2^p-1\equiv 0 \bmod (2^p-1),\quad 2^p\equiv 1 \bmod (2^p-1),\quad (2^p)^q\equiv 1^q \bmod (2^p-1),$$
$$2^{pq}\equiv 1 \bmod (2^p-1) \text{ und schließlich } 2^n-1=2^{pq}-1\equiv 0 \bmod (2^p-1).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Die Umkehrung von A1 gilt nicht. Für $n=11$ ist $2^{11}-1=2047=23\cdot89$ keine Primzahl. Für $n=13$ ist aber $2^{13}-1=8191$ eine Primzahl, so dass sich die fünfte p-Zahl zu $2^{12}(2^{13}-1)=4096\cdot8191=33\,550\,336$ ergibt. Und die sechste p-Zahl erhält man für $n=17$ zu $2^{16}(2^{17}-1)=8\,589\,869\,056$.

A2) Fast 2000 Jahre später zeigt Leonhard Euler, dass durch A0) *alle geraden p-Zahlen* erzeugt werden.
Zum Beweis verwendet man üblicherweise die Funktion $\sigma(n)$.

Definition: Die Sigma-Funktion $\sigma(n)$ einer positiven ganzen Zahl n ist die Summe der positiven Teiler von n.
Beispiele: $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$, $\sigma(6) = 12$.
Offenbar gilt: Für eine Primzahl p ist $\sigma(p) = p + 1$.
Ferner: Für eine Primzahl p und eine positive ganze Zahl n gilt $\sigma(p^n) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$. Und schließlich ist σ noch eine multiplikative Funktion. (Beides lässt sich elementar beweisen.)
Beispiel: $\sigma(1000) = \sigma(2^3 \cdot 5^3) = \sigma(2^3) \cdot \sigma(5^3) = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{5^4-1}{5-1} = 15 \cdot 156 = 2340$.

Beweis von A2:
n sei eine gerade p-Zahl und $2^n - 1$ sei Primzahl. Dann gilt $n = 2^{k-1}m$, wobei m ungerade ist und $k \geq 2$ gilt. Es ist $\sigma(n) = \sigma(2^{k-1}m) = \sigma(2^{k-1})\sigma(m) = (2^k - 1)\sigma(m)$. Weil n eine p-Zahl ist, gilt $\sigma(n) = 2n = 2^k m$ und damit $2^k m = (2^k - 1)\sigma(m)$. $2^k - 1$ teilt also m, so dass $m = (2^k - 1)M$ mit einer ungeraden Zahl M ist. Einsetzen ergibt $2^k M = \sigma(m)$. Nun sind m und M Teiler von m, also ist $2^k M = \sigma(m) \geq m + M = 2^k M$. Damit gilt das Gleichheitszeichen, also $\sigma(m) = m + M$. Dies bedeutet, dass m eine Primzahl ist und ihre einzigen Teiler m und M sind. Daher ist $m = 2^k - 1$ eine Primzahl.

Die Zahlen $2^n - 1$, n Primzahl, heißen Mersennesche Primzahlen. Man kennt derzeit 41 derartige Zahlen. Folglich sind derzeit 41 *gerade* p-Zahlen bekannt.

Zum Schluss beweise ich: Jede *gerade p-Zahl* endet mit der Ziffer 6 oder 8.
Beweis: Für $n = 2$ ist $2^1(2^2 - 1) = 6$. Jede Primzahl $n \geq 3$ ist von der Form $4k + 1$ oder $4k + 3$ ($4k$ und $4k + 2$ sind zusammengesetzt). Dann ist für $n = 4k + 1$

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(2^n - 1) &= 2^{4k}(2^{4k+1} - 1) = (2^4)^k[(2^4)^k \cdot 2 - 1] \\ &\equiv 6^k(6^k \cdot 2 - 1) \equiv 6(6 \cdot 2 - 1) \equiv 6 \bmod 10 \end{aligned}$$

und für $n = 4k + 3$

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(2^n - 1) &= 2^{4k+2}(2^{4k+3} - 1) = (2^4)^k \cdot 2^2 \cdot [(2^4)^k \cdot 2^3 - 1] \\ &\equiv 6^k \cdot 4(6^k \cdot 8 - 1) \equiv 6 \cdot 4(6 \cdot 8 - 1) \equiv 8 \bmod 10 \end{aligned}$$

Es ist *unbekannt*, ob es *ungerade p-Zahlen* gibt. Man weiß nur, dass eine derartige p-Zahl größer als 10^{300} sein und mindestens 8 (bzw. 11, wenn die Zahl nicht durch 3 teilbar ist) verschiedene Primteiler haben müsste.

Bilder, die an C. F. Gauß erinnern

von David E. Rowe

Bis vor kurzem konnten Mathematiker mit einer gewissen Genugtuung auf die Leistungen eines der bedeutendsten Genies ihres Faches verweisen, indem sie einfach einen 10-Mark Schein aus dem Portemonnaie holten, worauf ein inzwischen sehr bekanntes Bild von Carl Friedrich Gauß zu sehen ist. Diese Möglichkeit besteht allerdings seit dem Verschwinden der D-Mark in der Regel nicht mehr, so dass man selbst im Gauß-Jahr 2005, in dem sich am 23. Februar der Todestag von Gauß zum 150. Mal jährte, dem Gesicht des berühmten Mathematikers kaum noch tagtäglich begegnen wird. Wer andererseits den Euro immer noch als eine neue Währung empfindet oder vielleicht sogar eine gewisse Sehnsucht nach der alten D-Mark fühlt, dürfte wohl eine lebendige Erinnerung an den schönen 10-Mark Schein haben, die man dank Google auch leicht wieder beleben kann. Also nehmen wir uns als Untersuchungsgegenstand diesen virtuellen Gauß-Schein, der so vielen Deutschen vertraut ist oder zumindest war.

Auch wenn der Mensch auf der Straße weiß, wer auf diesem Geldschein abgebildet ist, sollten wir uns doch die nahe liegende Frage stellen: Was haben die übrigen dicht neben einander dargestellten Dinge mit Gauß tatsächlich zu tun? Man erkennt ja leicht auf der Vorderseite des Scheines die Normalverteilung, die eigentlich unberechtigterweise nach Gauß benannt wird, aber welche Bedeutung sollte man den zusammengerückten Gebäuden im Hintergrund zumessen? Da sie deutlich architektonische Motive erkennen lassen, geht es ja vermutlich um historische Gegenstände, aber kann es sein, dass alle sechs Gebäude wirklich eine echte Rolle im Leben des *princeps mathematicorum* gespielt haben? Diese Frage ist zwar leicht zu stellen, aber keineswegs so leicht zu beantworten, jedenfalls ohne genaue Kenntnisse der Universitätsstadt Göttingen, wo Gauß als Mathematiker, Astronom und Naturwissenschaftler gewirkt hat. Hier wäre es also wichtig, einige kurze Angaben über das Leben von Gauß zu machen.

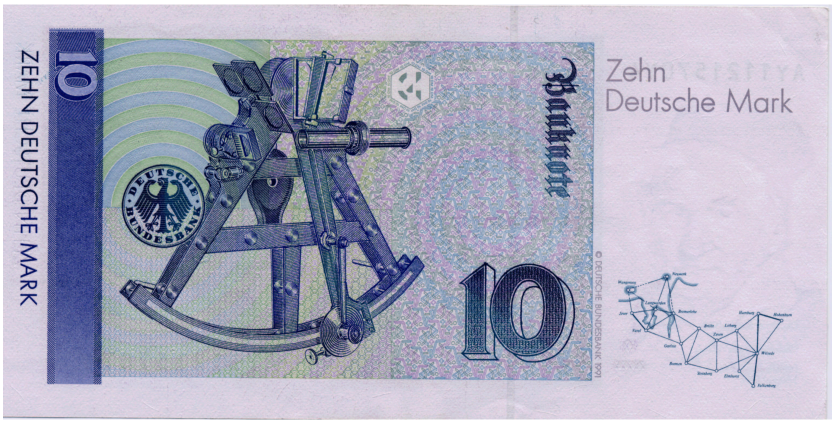
Man sollte zunächst nicht vergessen, dass Carl Friedrich Gauß ursprünglich aus Braunschweig stammte, wo er seine Jugend und seine Schulzeit verbrachte. Dank eines Stipendiums des Herzogs von Braunschweig, der auf sein mathematisches Talent aufmerksam gemacht worden war, ging er im Jahre 1795 als Achtzehnjähriger nach Göttingen, um an der dortigen *„Georgia Augusta“* zu studieren. Dort lernte Gauß den Astronomen Seyffer und den Physiker Lichtenberg zu schätzen, wogegen er von dem Mathematiker Kästner nicht viel hielt. Nach diesem ersten Aufenthalt kehrte er 1798 nach Braunschweig zurück, wo er an seinem berühmten zahlentheoretischen Werk, den *Disquisitiones Arithmeticae*, arbeitete, das zwei Jahre später erschien. Es handelte sich jedoch um ein Buch, das selbst die scharfsinnigsten Zahlentheoretiker wie Dirichlet viel Kopfzerbrechen kostete.

Seinen Ruhm verdankte er also nicht diesem kaum zugänglichen Werk, sondern viel mehr einer merkwürdigen Erscheinung am Himmel und zwar dem Asteroiden Ceres, der nur flüchtig gesehen wurde, bevor er dem Blickfeld der Astronomen entschwand. Die Wiederentdeckung des Ceres im Jahre 1801 kam dadurch zu Stande, dass Gauß trotz der spärlichen Angaben seine Ellipsenbahn relativ genau nachrechnen konnte. Für diese Leistung wurde er mit einem Schlag zu einem der führenden Astronomen Europas. Bald danach bekam er eine Gehaltszulage durch den Herzog von Braunschweig und einen Ruf als Direktor des Observatoriums in St. Petersburg. Als dieser eintraf, begann sein Freund Wilhelm Olbers mit der Universität Göttingen zu verhandeln, um

Gauß auf alle Fälle für Deutschland zu erhalten. Diese Bemühungen gestalteten sich angesichts der französischen Besatzung allerdings schwierig, aber letztendlich erfolgreich. Einer der Hauptgründe, weshalb Gauß den daraus resultierenden, 1807 an ihn ergangenen Ruf nach Göttingen annahm, war die Absicht der hannoverschen Regierung, bald ein neues Observatorium in Göttingen zu errichten und die relativ geringen Verpflichtungen, die er innerhalb der Universität zu übernehmen hatte. Nach der Fertigstellung des neuen Observatoriums im Jahre 1816 zog Gauß als Direktor ein und wohnte dort bis zu seinem Tode im Jahre 1855.

Werfen wir nun einen Blick auf die Gruppe der sechs Gebäude, die den 10-Mark Schein verzieren, dann erkennen wir oben rechts die Rückseite der neuen Göttinger Sternwarte durch ihren Kuppelbau. Neben diesem echten Gauß-Gebäude gibt es auch Abbildungen der Jacobi- und Johanneskirche, die das Stadtbild Göttingens immer noch stark prägen. Jeder Tourist wird auch das alte Rathaus erkennen können, das unterhalb der zwei Kirchen abgebildet ist. Dieses Gebäude befindet sich in unmittelbarer Nähe der Johanneskirche, mitten in der Altstadt. Vor ihm steht seit etwa einem Jahrhundert der Gänseliesel-Brunnen, der heute als echtes Wahrzeichen Göttingens gilt. Vermutlich wurden diese drei letzten Gebäude gewählt, um die Verbindung zwischen Gauß und der ehrwürdigen Stadt Göttingen möglichst deutlich zu veranschaulichen.

Als Gauß 1807 nach Göttingen berufen wurde, musste er sich zunächst mit den Arbeitsbedingungen in der alten Sternwarte zufrieden geben, wo Tobias Mayer früher seine Fernrohre bedient hatte. Dieses Gebäude wurde auf einem Turm der ehemaligen Stadtmauer errichtet; es wurde jedoch nach der Entstehung der neuen Sternwartes nicht mehr benötigt, weswegen es bald danach abgerissen wurde. Aus dieser Zeit blieb allerdings das nicht weit davon entfernten Gaußsche Wohnhaus erhalten, das sich an der Ecke Turmstrasse/Kurze Strasse befindet. Eine Skizze dieses Gebäudes sieht man unterhalb der neuen Sternwarte abgebildet. Hier verbrachte er zwei glückliche Jahre mit seiner ersten Frau Johanna, geb. Osthoff, die im Oktober 1809 plötzlich starb. Im Jahr danach heiratete Gauß Minna Waldeck, die ihm zwar treu beistand, aber keineswegs den Verlust seiner geliebten Hanne ersetzen konnte.



1820 bekam Gauß den Auftrag, die Triangulation des Königreichs Hannover vorzunehmen. Hierfür erfand er ein neues Gerät, das Heliotrop, das auf der Rückseite des

10-Mark Scheins zusammen mit einem Teil seines Dreiecknetzes zur Vermessung des Landes Hannover abgebildet wird. Gauß gewann das Instrument, indem er einen nautischen Sextanten mit Hilfe eines zusätzlichen Planspiegels zum „Richt-Scheinwerfer“ umbauen ließ. Das Heliotrop war für die Vermessung größerer Dreiecke erforderlich. Vom Zielpunkt aus gesehen erscheint am Ort des Sonnenspiegels ein scharfer Lichtpunkt, der genau wie ein Stern bei der üblichen Navigation exakt angepeilt werden konnte. Gauß benutzte solche „künstlichen Sterne“ bei der Triangulation weit entfernter Orte, wie das Dreieck Inselsberg-Brocken-Hoher Hagen, das Dreieck, das er nebenbei für die mögliche Abweichung der Euklidischen Geometrie prüfen wollte. (Das Ergebnis war zu geringfügig, um von einer derartigen Abweichung reden zu können.)

Die heutigen Besucher Göttingens bekommen die Gelegenheit, das fantasievolle Gauß-Weber-Denkmal in den Grünanlagen an der Bürgerstraße näher anzuschauen. Wenn man dasselbe nicht direkt beobachten kann, ist es doch auch auf vielen Ansichtskarten zu sehen, die überall in der Stadt erhältlich sind. Wilhelm Weber war nur 27 Jahre alt, als er 1831 nach Göttingen berufen wurde. Damit begann eine enge Zusammenarbeit mit Gauß, der sich seit langem mit magnetischen Messungen beschäftigte. Zwei Jahre danach entstand der berühmte Gauss-Weber-Telegraph. Weber hatte von seinem Arbeitsplatz ausgehend eine elektrische Doppelleitung über den nördlichen Turm der Johanniskirche (also den rechten Turm der zweitürmigen Kirche auf dem 10-Mark-Schein) und über das Accouchierhaus am Geismartor bis zu Gauss in die Sternwarte verlegt. Mittels eines Paars baugleicher Sender und Empfänger konnten sich die Beiden jetzt per Binärcode Nachrichten mit Lichtgeschwindigkeit über die Dächer Göttingens zuschicken. Diese Leistung wurde 1899 in Göttingen gefeiert durch die Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals, aus welchem Anlass David Hilbert die erste Auflage seiner „Grundlagen der Geometrie“ veröffentlichte.

Es bleibt noch zu klären, was das zu vorderst stehende der sechs abgebildeten Gebäude auf der Banknote mit Gauß zu tun hat. Es handelt sich um die alte Aula der Universität Göttingen, die sich auf dem Wilhelmsplatz gegenüber einer Statue König Wilhelms IV. befindet. Dieses Gebäude wurde 1835-1837 unter der Leitung des Architekten Rohns im klassischen Stil gebaut, um das 100-jährige Bestehen der *„Georgia Augusta“* zu feiern. Leider starb König Wilhelm IV als letzter Vertreter des Hauses Hannover auf dem Thron Englands gerade in diesem Jahr. In Hannover regierte nun König Ernst August, der als erster Staatsakt die Verfassung Hannovers als ungültig erklärte. Das Jahr 1837 war also für viele in Hannover nicht das glücklichste. Die neue politische Linie löste unter den Liberalen Empörung aus, und sieben Göttinger Professoren trugen ihren Protest in einem öffentlichen Schreiben dem König vor. Zu diesen „Göttinger Sieben“ gehörte auch Wilhelm Weber, der etwas gemäßigter seinen Standpunkt vertrat. Dennoch musste er gleich seinen Mitstreitern seine Stelle abgeben, womit mit einem Schlag die Ära Gauß-Weber vorbei war.

Ob die damals neue Aula eine Rolle im Leben des alternden Gauß gespielt hat, ist schwer abzuschätzen. Hier fanden Sitzungen der Göttinger Gesellschaft (später Akademie) der Wissenschaften statt. Ferner ist davon auszugehen, dass Gauß bei feierlichen Anlässen der Universität oft anwesend war. Vermutlich hatte er hier auch 1854 einen Vortrag eines jungen Privatdozenten gehört, der sich mit einer Frage beschäftigt hatte, die Gauß sehr interessierte. Der Titel des Vortrags lautete „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“; der Name des Vortragenden war Bernhard Riemann. Es wurde berichtet, dass nachher Gauß sich außerordentlich positiv über die erbrachte Leistung geäußert habe.

Bruchrechnung modulo m

von Ekkehard Kroll

Die Division einer ganzen Zahl n durch eine natürliche Zahl $m > 1$, den ***Modul***,

$$n = q \cdot m + r \text{ mit } q \in \mathbb{Z},$$

kann immer so eingerichtet werden, dass der auftretende Rest r zwischen 0 und $m-1$ liegt. Sind wir nur an diesem Rest und nicht an dem genauen Wert von q interessiert, schreiben wir $\boldsymbol{n \equiv r}$ **(modulo** $\boldsymbol{m}$**)** oder auch kurz $\boldsymbol{n \equiv r \pmod{m}}$ (lies: „n kongruent r *modulo* m“) und sagen „n wird *modulo* m auf den Rest r reduziert“.

Im MONOID-Heft 80 haben wir uns bereits mit dem „Rechnen *modulo* m“ beschäftigt. Eine besondere Rolle spielten dabei die zu m *teilerfremden* Reste in der Menge $\{1, \ldots, m-1\}$. Multiplizieren wir nämlich diese sämtlich mit einem festen zu m teilerfremden Rest r und reduzieren anschließend *modulo* m, so erhalten wir wieder alle zu m teilerfremden Reste, darunter speziell den Rest 1. Also gibt es einen zu m teilerfremden Rest r_0 mit $r_0 \cdot r \equiv 1 \pmod{m}$, d.h., r_0 ist sozusagen der **Kehrwert** von r, der zudem innerhalb der Menge $\{1, \ldots, m-1\}$ eindeutig bestimmt ist. Daher können wir formal auch $\frac{1}{r}$ statt r_0 schreiben.

Offensichtlich ist der Kehrwert von 1 wieder 1 und der Kehrwert von $m-1$ wieder $m-1$, da $1 \cdot 1 = 1 \equiv 1 \pmod{m}$ und $(m-1) \cdot (m-1) \equiv (-1) \cdot (-1) = 1 \pmod{m}$ ist.

Klar ist auch, dass ein Rest r, der mit dem Modul m einen gemeinsamen Teiler $t \neq \pm 1$ besitzt, keinen Kehrwert *modulo* m haben kann; denn aus $r_0 \cdot r \equiv 1 \pmod{m}$ folgte $r_0 \cdot r - 1 = q \cdot m$ mit einer ganzen Zahl q, also $1 = r_0 \cdot r - q \cdot m = r_0 \cdot r' \cdot t - q \cdot m' \cdot t = (r_0 \cdot r' - q \cdot m') \cdot t$, so dass t ein Teiler von 1 sein müsste – die einzigen Teiler von 1 sind aber 1 und -1.

Haben wir die **lineare Kongruenz** $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ mit gegebenen Zahlen a und b nach x zu lösen und ist a zu m teilerfremd, so können wir die Kongruenz beidseitig mit $\frac{1}{a}$ multiplizieren und erhalten die *modulo* m eindeutig bestimmte Lösung $x \equiv \frac{1}{a} \cdot b \pmod{m}$; für diese Lösung verwenden wir dann auch die formale (!) Bruchschreibweise $x \equiv \frac{b}{a} \pmod{m}$. Diese den rationalen Zahlen nachgebildete Schreibweise ist nützlich, weil sie unter Einhaltung von noch herzuleitenden **Regeln** das Auflösen von linearen Kongruenzen erleichtert.

Aus der Definition folgt sofort:

Gilt $a \equiv a' \pmod{m}$ und $b \equiv b' \pmod{m}$, so ist auch $\frac{b}{a} \equiv \frac{b'}{a'} \pmod{m}$.

Die Umkehrung ist jedoch nicht richtig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:
Wegen $5 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{9}$ und $7 \cdot 2 \equiv 5 \pmod{9}$ ist $\frac{1}{5} \equiv 2 \equiv \frac{5}{7} \pmod{9}$, aber weder ist $1 \equiv 5 \pmod{9}$, noch $5 \equiv 7 \pmod{9}$.

Weiter gelten mit zu m teilerfremden Nennern a und c folgende Regeln:

$$\frac{b \cdot c}{a \cdot c} \equiv \frac{b}{a}; \qquad \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \equiv \frac{b \cdot d}{a \cdot c}; \qquad \frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} \equiv \frac{b \cdot c \pm a \cdot d}{a \cdot c} \pmod{m}.$$

Setzen wir nämlich z. B. $x \equiv \frac{b \cdot c}{a \cdot c} \pmod{m}$, so heißt dies $a \cdot c \cdot x \equiv b \cdot c \pmod{m}$. Da c und m teilerfremd sind, können wir c „wegkürzen“, so dass wir die Kongruenz $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ erhalten; da a und m teilerfremd sind, folgt $x \equiv \frac{b}{a} \pmod{m}$. Analog lassen sich die beiden anderen Regeln leicht beweisen.

Stellen wir uns als Anwendungsbeispiel die Aufgabe, die Kongruenz $21 \cdot x \equiv 15 \pmod{32}$ zu lösen! Da 21 und 32 teilerfremd sind, folgt mit obigen Regeln:

$$x \equiv \frac{15}{21} \equiv \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} \equiv \frac{5}{7} \equiv \frac{4 \cdot 32 + 5}{7} \equiv \frac{133}{7} \equiv 19 \pmod{32}$$

Tatsächlich ist $21 \cdot 19 - 15 = 384 = 12 \cdot 32$.

Oft wird nur der Kehrwert einer zum Modul m teilerfremden Zahl a gesucht, also die Lösung der Kongruenz $a \cdot x \equiv 1 \pmod{m}$. Beispiel: $21 \cdot x \equiv 1 \pmod{50}$; hier folgt mit obigen Regeln:

$$x \equiv \frac{1}{21} \equiv \frac{51}{21} \equiv \frac{17 \cdot 3}{7 \cdot 3} \equiv \frac{17}{7} \equiv \frac{14+3}{7} \equiv 2 + \frac{3}{7} \equiv 2 + \frac{203}{7} \equiv 2 + 29 \equiv 31 \pmod{50}$$

Diese Methode hat ihre praktische Anwendung beim Lösen **diophantischer Gleichungen**. Die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c ist ganzzahlig nur lösbar, wenn der größte gemeinsame Teiler d von a und b auch c teilt. Ist dies der Fall, kann auf beiden Seiten durch d dividiert werden; wir erhalten die Gleichung $\frac{a}{d} \cdot x + \frac{b}{d} \cdot y = \frac{c}{d}$ mit teilerfremden Koeffizienten $a' := \frac{a}{d}$ und $b' := \frac{b}{d}$. Tatsächlich ist diese Gleichung lösbar; denn der euklidische Algorithmus (fortgesetzte Division mit Rest) liefert nicht nur den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen, sondern auch durch „Heraufrechnen“eine Vielfachsummendarstellung desselben, also im Falle der teilerfremden Zahlen a' und b' auch von 1, also $1 = a' \cdot x' + b' \cdot y'$ mit ganzen Zahlen x' und y'. Multiplikation auf beiden Seiten mit c liefert dann: $c = a' \cdot x' \cdot c + b' \cdot y' \cdot c = a' \cdot d \cdot x' \cdot \frac{c}{d} + b' \cdot d \cdot y' \cdot \frac{c}{d} = a \cdot x + b \cdot y$ mit $x := x' \cdot \frac{c}{d}$ und $y := y' \cdot \frac{c}{d}$.

Den euklidischen Algorithmus, über den hier ja nur berichtet wurde, können wir mit der Bruchrechnung *modulo* a' und b' vermeiden: Aus $a' \cdot x + b' \cdot y = c'$ mit $c' := \frac{c}{d}$ folgt $a' \cdot x \equiv c' \pmod{b'}$ und $b' \cdot y \equiv c' \pmod{a'}$ mit teilerfremden a' und b'. Hieraus können mittels Bruchrechnung *modulo* b' bzw. a' Lösungen x und y gewonnen werden. Hierzu als Beispiel die „Geflügelaufgabe“ (China, ca. 200 n. Chr.):

> Wie viele Hähne, Hennen und Küken erhält man, wenn man mit genau 200 Münzen genau 125 dieser Tiere kaufen will, wenn ein Hahn zehn Münzen, eine Henne sieben Münzen und ein Küken eine Münze kosten?

Mit x, y und z bezeichnen wir die Anzahlen der zu erwerbenden Hähne, Hennen beziehungsweise Küken. Dann gilt $10 \cdot x + 7 \cdot y + z = 200$; wegen $x + y + z = 125$ ergibt sich daraus die diophantische Gleichung $9 \cdot x + 6 \cdot y = 75$, nach Division durch 3 also $3 \cdot x + 2 \cdot y = 25$.

Die Kongruenz $3 \cdot x \equiv 25 \pmod{2}$ hat die Lösung $x \equiv \frac{25}{3} \equiv \frac{1}{1} \equiv 1 \pmod{2}$; also ist $x = 1 + 2 \cdot s$ mit noch zu ermittelndem ganzem s. Die Kongruenz $2 \cdot y \equiv 25 \pmod{3}$ hat die Lösung $y \equiv \frac{25}{2} \equiv \frac{4}{2} \equiv 2 \pmod{3}$; somit ist $y = 2 + 3 \cdot t$ mit geeignet zu wählendem ganzem t. Setzen wir diese x und y in die Gleichung $3 \cdot x + 2 \cdot y = 25$ ein, so folgt $s + t = 3$, also $t = 3 - s$ und folglich $y = 11 - 3 \cdot s$. Wegen $y \geq 0$ ist $s \leq 3$. Wegen $x \geq 0$ ist $s \leq 0$. Die folgende Tabelle enthält sämtliche Möglichkeiten für unseren Geflügelkauf:

s	3	2	1	0
t	0	1	2	3
x (Hähne)	7	5	3	**1**
y (Hennen)	2	5	8	**11**
z (Küken)	116	115	114	**113**

Mit der in der letzten Spalte enthaltenen Kombination lässt sich voraussichtlich eine bald erfolgreiche Geflügelzucht eröffnen.

Bundeswettbewerb Mathematik 2005

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Silvia Binder, Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Im Zentrum eines 2005×2005-Schachbretts liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll. Ein Zug besteht dabei aus folgenden drei Schritten:

- Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,
- schiebt dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Augenzahl nach links und
- schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nach oben oder um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten.

Das erreichte Feld ist das Ausgangsfeld für den nächsten Zug.

Welche Felder lassen sich durch eine endliche Folge derartiger Züge erreichen? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

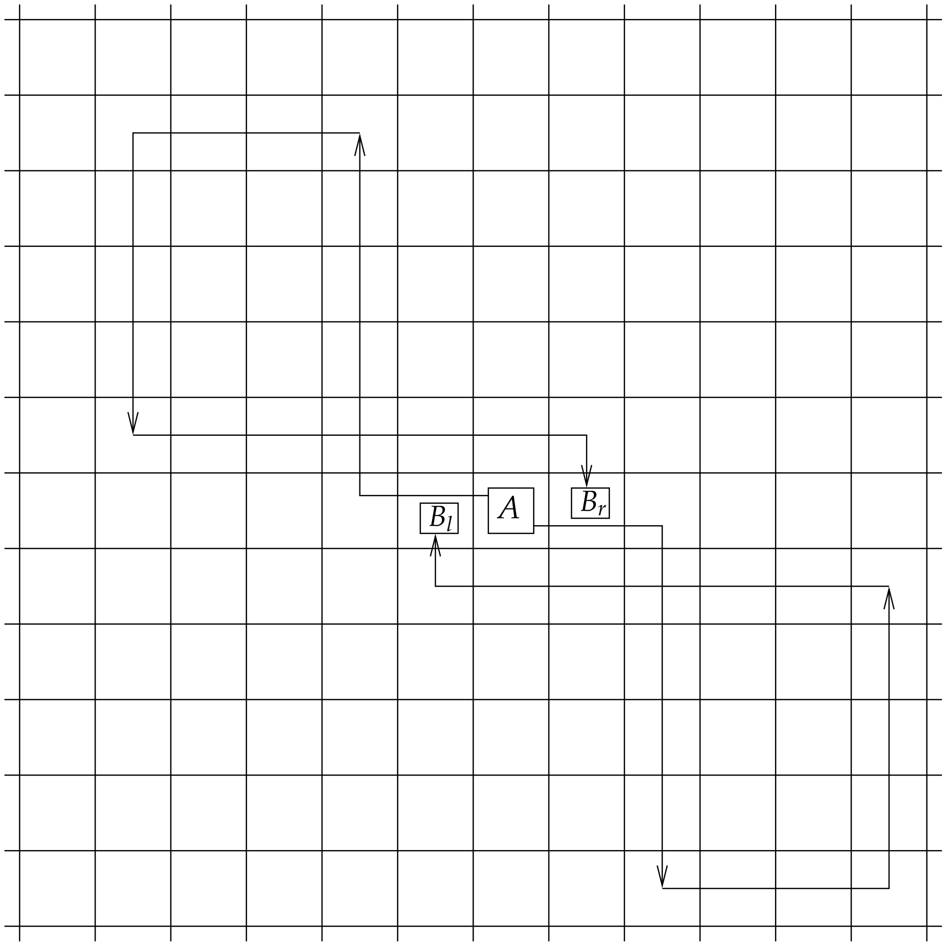
Lösung

Vom Zentrum des Schachbretts aus lassen sich alle Felder des Schachbretts durch eine endliche Folge der in der Aufgabe beschriebenen Spielzüge erreichen.
Auf den Seiten eines Würfels liegen sich die Augenzahlen 1 und 6, 2 und 5 bzw. 3 und 4 gegenüber. Wir kürzen Spielzüge mit der Notation $\binom{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $-6 \leq x, y \leq 6$, ab. Dabei ist $|x|$ die Augenzahl, die auf der Seite des Würfels, die im ersten Schritt des Spielzugs nach oben gedreht wird, angezeigt wird; x ist positiv (negativ), wenn wir den Würfel im zweiten Schritt des Spielzugs nach rechts (links) verschieben. Analog ist $|y| = 7 - |x|$ die verdeckt liegende Augenzahl des Würfels; y ist positiv (negativ), wenn wir den Würfel im dritten Schritt des Spielzugs nach oben (unten) verschieben. Für zwei Felder A, B des Schachbretts soll $A \oplus \binom{x}{y} = B$ bedeuten, dass B von A aus durch den Spielzug $\binom{x}{y}$ erreicht wird. Wir beobachten zunächst, dass von einem Feld A des Schachbretts, das nach links sowie nach oben mindestens fünf Felder vom Rand des Schachbretts entfernt ist, das direkt rechts von A benachbarte Feld B_r des Schachbretts in drei Spielzügen erreicht werden kann. Denn es ist

$$B_r = A \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und die drei Spielzüge nutzen nur Felder des Schachbretts, die in den fünf Spalten links von A sowie in den fünf Zeilen oberhalb von A liegen; siehe Skizze 1.1. Analog ist von einem Feld A des Schachbretts, das nach rechts und nach unten mindestens fünf Felder vom Rand des Schachbretts entfernt ist, das direkt links von A benachbarte Feld B_l in den drei Spielzügen

$$B_l = A \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Skizze 1.1

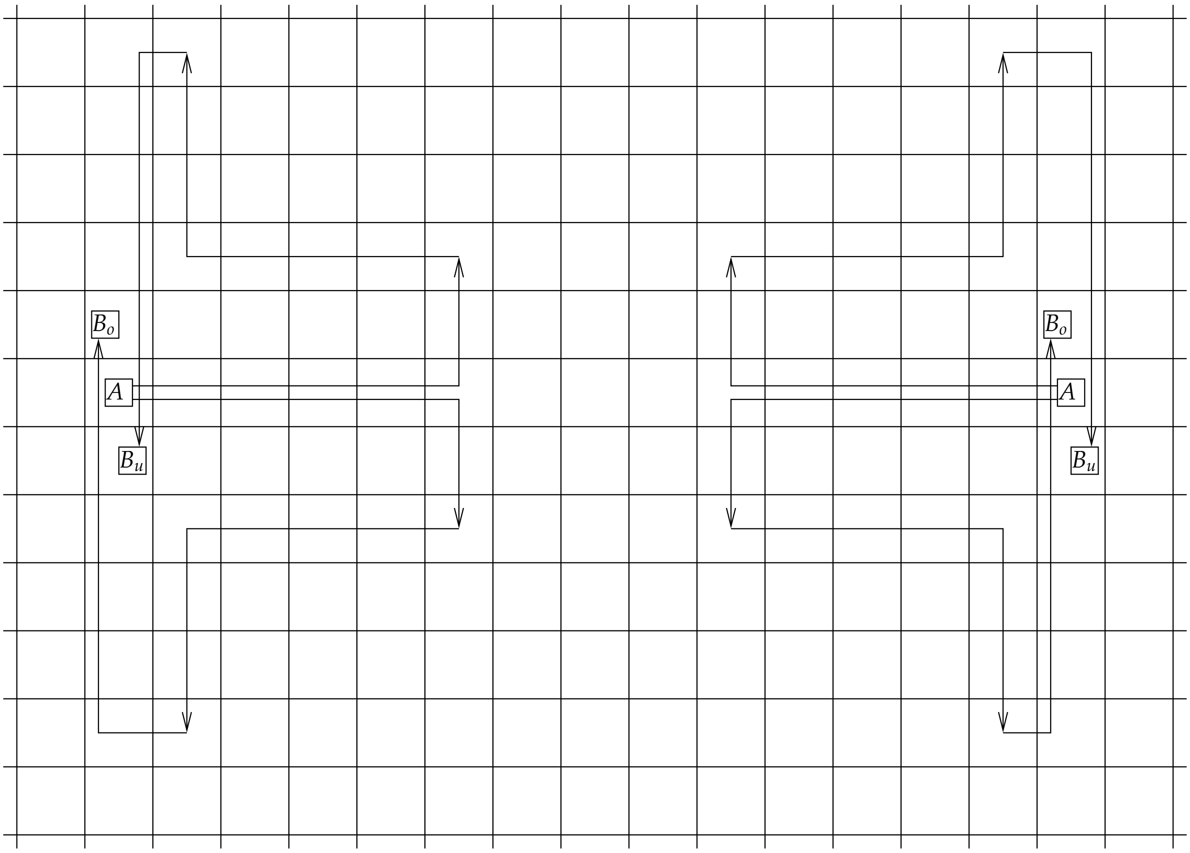
zu erreichen; siehe Skizze 1.1.
Durch eine endliche Folge der oben beschriebenen Spielzüge können wir also insbesondere, ausgehend vom Zentrum Z des 2005×2005-Schachbretts, alle Felder erreichen, die in derselben Zeile des Schachbretts wie Z liegen.

Wir zeigen nun, dass wir, wenn wir vom einem beliebigen dieser Felder ausgehen, in endlich vielen Spielzügen alle Felder erreichen, die in derselben Spalte wie das neue Ausgangsfeld liegen. Denn gehen wir von einem Feld A aus, das rechts von Z in derselben Zeile wie Z liegt, so sind alle Felder in der Spalte von A sicher mindestens fünf Felder vom linken Rand des Schachbretts entfernt. Die folgenden Spielzüge können daher, ausgehend von A, ausgeführt werden, um das direkt oberhalb von A benachbarte Feld B_o zu erreichen:

$$B_o = A \oplus \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix};$$

siehe Skizze 1.2. Da diese Spielzüge, bevor der Würfel B_o erreicht, nur Felder nutzen, die in Zeilen unterhalb der Zeile von B_o liegen, können durch eine endliche Folge dieser Spielzüge von A aus alle Felder erreicht werden, die in derselben Spalte wie A oberhalb von A liegen. Mit analogen Argumenten weist man nach, dass durch eine endliche Folge der Spielzüge $\binom{-5}{2} \oplus \binom{4}{3} \oplus \binom{1}{-6}$ von A aus alle Felder erreicht werden können, die in derselben Spalte wie A unterhalb von A liegen; siehe Skizze 1.2.

Gehen wir von einem Feld A aus, das links von Z in derselben Zeile wie Z liegt, so sind alle Felder in der Spalte von A sicher mindestens fünf Felder vom rechten Rand



Skizze 1.2

des Schachbretts entfernt. Daher können wir den Würfel mit den Spielzügen $\binom{5}{-2} \oplus \binom{-4}{-3} \oplus \binom{-1}{6}$ bzw. $\binom{5}{2} \oplus \binom{-4}{3} \oplus \binom{-1}{-6}$ feldweise in der Spalte von A nach oben bzw. unten bewegen; siehe Skizze 1.2.

Für ein beliebiges Feld B des Schachbretts können wir also den Würfel, ausgehend vom Zentrum Z des Schachbretts, in Gruppen von drei Spielzügen so lange feldweise nach rechts oder links ziehen, bis wir die Spalte von B erreicht haben. Der Würfel kann dann stets in Gruppen von drei Spielzügen feldweise nach oben oder unten gezogen werden, bis das Feld B erreicht wird. $\square$

Aufgabe 2

Die ganze Zahl a habe die Eigenschaft, dass $3a$ in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen Zahlen x, y darstellbar ist.

Man beweise, dass dann auch a in dieser Form darstellbar ist.

Lösung

Gilt für ganze Zahlen a, x, y, dass $3a = x^2 + 2y^2$, so folgt insbesondere, dass $x^2 + 2y^2$ durch 3 teilbar ist:

$$x^2 + 2y^2 \equiv 0 \mod 3.$$

Hieraus folgt, weil 2 und 3 teilerfremd sind, dass x, y die Bedingung

$$x^2 \equiv 0 \mod 3 \iff y^2 \equiv 0 \mod 3$$

erfüllen, die, weil 3 prim ist, äquivalent zu

$$x \equiv 0 \mod 3 \iff y \equiv 0 \mod 3$$

ist. Die Zahlen x, y sind also beide durch 3 teilbar oder beide nicht durch 3 teilbar, und sowohl im Fall $x \bmod 3 \equiv y \bmod 3 \equiv 0$ als auch im Fall $x \bmod 3,\ y \bmod 3 \in \{1, 2\}$ gilt stets eine der Bedingungen

$$x - y \equiv 0 \mod 3 \qquad \text{oder} \tag{2.1}$$
$$x + y \equiv 0 \mod 3. \tag{2.2}$$

Erfüllen x, y (2.1) oder (2.2), so kürzen wir dies mit $x \mp y \equiv 0 \mod 3$ ab. Dann ist auch

$$x \pm 2y = 3x - 2(x \mp y) \equiv 0 \mod 3.$$

Also werden durch

$$u := \frac{x \pm 2y}{3} \qquad \text{und} \qquad v := \frac{x \mp y}{3}$$

ganze Zahlen u, v definiert, für die

$$3(u^2 + 2v^2) = \frac{x^2 \pm 4xy + 4y^2 + 2x^2 \mp 4xy + 2y^2}{3} = x^2 + 2y^2 = 3a.$$

Also hat $a = u^2 + 2v^2$ eine Darstellung gemäß Aufgabenstellung. □

Aufgabe 3

Den Seiten a, b, c eines Dreiecks liegen die Winkel α, β, γ gegenüber. Es sei ferner $3\alpha + 2\beta = 180°$. Man beweise, dass dann $a^2 + bc = c^2$ ist.

Lösung

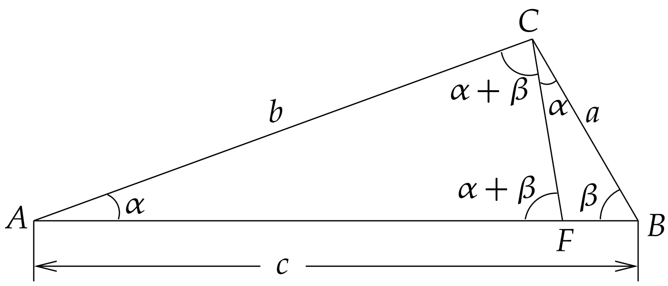
Wie üblich seien im Dreieck $\triangle ABC$ die den Ecken A, B, C gegenüber liegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet; A, B, C sind dann gemäß Aufgabenstellung die Scheitel der Winkel α, β, γ. Nach Aufgabenstellung ist $3\alpha + 2\beta = 180°$, also

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 2\alpha + \beta > \alpha. \tag{3.1}$$

Die **erste Lösung** wird motiviert aus der Gleichung

$$c = b + \frac{a^2}{c}, \tag{3.2}$$

die wegen $c > 0$ äquivalent zur Aufgabenstellung ist. Weil $\gamma > \alpha$, kann F auf AB so gewählt werden, dass $\measuredangle FCB = \alpha$ (siehe rechts). Dann ist das Dreieck $\triangle FCA$ gleichschenklig, denn nach Konstruktion von F und (3.1) ist



$$\measuredangle CFA = 180° - \measuredangle BFC = \measuredangle FCB + \measuredangle CBF = \alpha + \beta = \gamma - \alpha = \measuredangle ACF.$$

Es ist also im Dreieck $\triangle FCA$

$$\overline{AF} = \overline{AC} = b. \tag{3.3}$$

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BCF$ sind ähnlich, weil $\measuredangle BAC = \measuredangle FCB = \alpha$ und $\measuredangle CBA = \measuredangle CBF = \beta$; daher ist

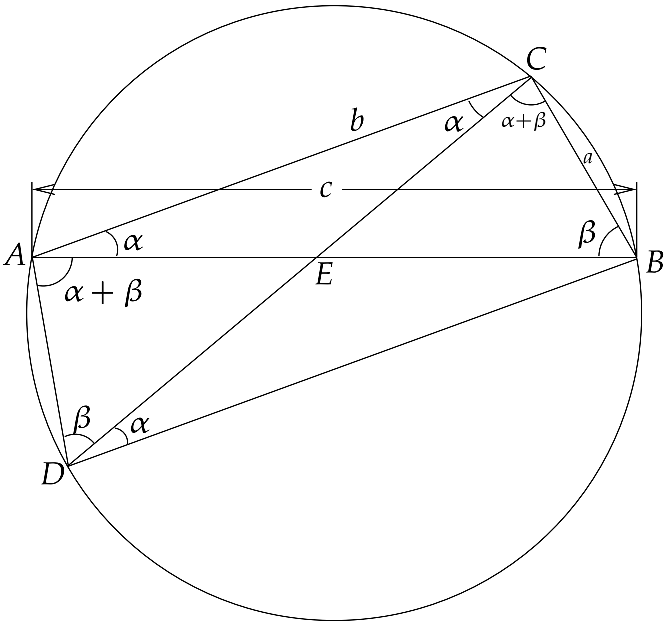
$$\overline{FB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{AB} \iff \overline{FB} = \frac{a^2}{c}. \tag{3.4}$$

Wegen $\overline{AB} = c = \overline{AF} + \overline{FB}$ beweisen (3.3) und (3.4) die Behauptung (3.2) □

Für die **zweite Lösung** wählen wir E auf AB so, dass $\measuredangle ACE = \alpha$, der Punkt D sei der von C verschiedene Schnittpunkt von (CE) mit dem Umkreis von $\triangle ABC$. Im Sehnenviereck $\square ADBC$ gilt der Satz von Ptolemäus:

$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{AC} = \overline{DC} \cdot \overline{AB}; \quad (3.5)$$

vgl. Skizze. Zur Bestimmung der noch unbekannten Größen beobachten wir mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes und (3.1):



$$\measuredangle BDC = \measuredangle BAC = \alpha, \quad (3.6)$$

$$\measuredangle CDA = \measuredangle CBA = \beta, \quad (3.7)$$

$$\measuredangle DAB = \measuredangle DCB = \alpha + \beta. \quad (3.8)$$

Es ist also $\measuredangle DAC = \measuredangle DAB + \measuredangle BAC = 2\alpha + \beta = \gamma$. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DCA$ sind demnach wegen der gemeinsamen Seite AC und *WSW* kongruent:

$$\overline{DA} = \overline{BC} = a \quad \text{und} \quad \overline{DC} = \overline{AB} = c. \quad (3.9)$$

Außerdem ist das Dreieck $\triangle ADB$ gleichschenklig wegen

$$\measuredangle DAB = \alpha + \beta = \measuredangle BDC + \measuredangle CDA = \measuredangle BDA,$$

also

$$\overline{DB} = \overline{AB} = c. \quad (3.10)$$

Der Satz von Ptolemäus (3.5) nimmt also wegen (3.9) und (3.10) im Spezialfall der Aufgabenstellung die Form $a \cdot a + c \cdot b = c \cdot c$ an. $\square$

Aufgabe 4

Für welche positiven ganzen Zahlen n kann man die n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ so in einer Reihe anordnen, dass für je zwei beliebige Zahlen der Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht?
Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Lösung

Eine Anordnung, wie sie in der Aufgabenstellung gefordert wird, kann für alle positiven ganzen Zahlen n konstruiert werden.

Wir beobachten zunächst: Es reicht zum Beweis dieser Aussage aus, eine solche Anordnung für unendlich viele verschiedene positive ganze Zahlen n_k, $k \geq 1$, anzugeben, denn eine Anordnung für eine positive ganze Zahl n ergibt sich aus einer Anordnung für n_k mit $n_k \geq n$, indem wir alle Zahlen m mit $n < m \leq n_k$ aus der Anordnung streichen und die Reihe ansonsten unverändert lassen.

Wir werden im Folgenden die Konstruktion einer Anordnung, wie sie in der Aufgabenstellung gefordert wird, für die positiven ganzen Zahlen $n_k = 2^k$ beschreiben, wobei k alle positiven ganzen Zahlen durchläuft. Auf Grund der obigen Beobachtung ist die Aufgabe damit bewiesen.

Wir führen zunächst die folgende Notation ein: Es sei $A = \langle m_1, \dots, m_i \rangle$ eine Anordnung der Zahlen $m_1, \dots, m_i$. Für Zahlen l und m sei

$$l \cdot A + m := \langle l \cdot m_1 + m, \dots, l \cdot m_i + m \rangle .$$

Außerdem definieren wir die Aneinanderreihung zweier Anordnungen $A = \langle m_1, \dots, m_i \rangle$ und $A' = \langle m'_1, \dots, m'_j \rangle$ als

$$A \circ A' := \langle m_1, \dots, m_i, m'_1, \dots, m'_j \rangle.$$

Eine Anordnung A heiße zulässig, wenn für je zwei beliebige Zahlen in A ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht.

Wir beweisen induktiv: Seien

$$A_1 := \langle 1, 2 \rangle$$

und für $k \geq 1$

$$A_{k+1} := (2A_k - 1) \circ (2A_k).$$

Dann ist für jedes $k \geq 1$ die Reihe A_k eine zulässige Anordnung der positiven ganzen Zahlen $1, 2, \dots, n_k = 2^k$.

Beispiel: Für $n_4 = 16$ ergibt sich die Anordnung

$$A_4 = \langle 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16 \rangle .$$

Beweis: Der Induktionsanfang ($k = 1$) ist klar. Für den Induktionsschluss ($k \to k + 1$) beobachten wir: Nach Induktionsvoraussetzung ist A_k eine zulässige Anordnung der positiven ganzen Zahlen $1, \dots, n_k = 2^k$. Die Anordnung $2A_k$ enthält damit 2^k paarweise verschiedene gerade positive ganze Zahlen, die alle kleiner oder gleich $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ sind. Damit enthält $2A_k$ alle geraden Zahlen aus $\{1, 2, \dots, 2^{k+1}\}$. Die Anordnung $2A_k - 1$ enthält entsprechend alle ungeraden Zahlen in $\{1, 2, \dots, 2^{k+1}\}$. Also ist $A_{k+1} = (2A_k - 1) \circ (2A_k)$ eine Anordnung der positiven ganzen Zahlen $1, 2, \dots, n_{k+1} = 2^{k+1}$. Wir kürzen ab

$$\begin{aligned} A_k &=: \langle m_1, \dots, m_{2^k} \rangle , \\ 2A_k - 1 &=: \langle m'_1, \dots, m'_{2^k} \rangle \qquad \text{mit } m'_i = 2m_i - 1,\ 1 \leq i \leq 2^k, \qquad (4.1) \\ 2A_k &=: \langle m''_1, \dots, m''_{2^k} \rangle \qquad \text{mit } m''_i = 2m_i, \qquad 1 \leq i \leq 2^k. \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Die Anordnung A_{k+1} ist zulässig: Hierzu weisen wir zunächst nach, dass $2A_k - 1$ und $2A_k$ jeweils zulässig sind. Für m'_i und m'_j, $i \neq j$, aus $2A_k - 1$ gilt gemäß (4.1), dass

$$\tfrac{1}{2}(m'_i + m'_j) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(m_i + m_j) - 1 \quad \text{mit } m_i, m_j \in A_k.$$

Nach Konstruktion steht $\frac{1}{2}(m'_i + m'_j)$ genau dann irgendwo zwischen m'_i und m'_j, wenn $\frac{1}{2}(m_i + m_j)$ irgendwo zwischen m_i und m_j steht. Da aber A_k eine zulässige Anordnung ist, muss also auch $2A_k - 1$ eine zulässige Anordnung sein. Analog gilt für $m''_i, m''_j \in 2A_k$, $i \neq j$, dass

$$\tfrac{1}{2}(m''_i + m''_j) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(m_i + m_j) \quad \text{mit } m_i, m_j \in A_k,$$

und da A_k eine zulässige Anordnung ist, muss auch $2A_k$ eine zulässige Anordnung sein.

Falls zwei beliebige Zahlen aus A_{k+1} entweder beide ungerade oder beide gerade sind, so ist damit nachgewiesen, dass ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht. Falls eine der beiden Zahlen gerade und die andere ungerade ist, so ist ihr arithmetisches Mittel nicht ganzzahlig, steht also bestimmt nicht irgendwo in A_{k+1}. Die Anordnung A_{k+1} ist also zulässig. $\square$

Die Autoren danken den Herren Karl Fegert und Prof. Erhard Quaisser für hilfreiche Anmerkungen.

Rubrik der Löser und Löserinnen
(Stand: 18.01.2005)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Teresa Hähn 16, Bula Hauch 6; **Kl. 6:** Martin Achenbach 10, Emma Braininger 8, Luisa Dörrhöfer 4, Annika Flick 7, Eduard Hauck 6, Larissa Hyach 5, Peter Machemer 3, Marina Matchlakowa 10, Alexander Maus 7, Philipp Mayer 17, Ann-Kristin Müller 4, Raphael Wetzel 8;
Kl. 7: Jonathan Peters 20, Lisa Simon 17, Julia Zech 15;
Kl. 9: Patricia Kastner 26;
Kl. 10: Markus Bassermann 8;
Kl. 13: Manuel Ross 7.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 6: Désirée Schalk 21;
Kl. 8: Sivana-Maria Clotan 16, Felix Liebrich 23, Martin Reinhardt 13.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Ossama Bassant 12, Dina Hamdy 8, Ahmed Malak 11, Sherif Nariman 3, Hossam Rana 11, Hossny Salma 5, Hassan Shaimaa 10, Mohamed Youmna 7.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Kl. 9: Christian Behrens 23, Martin Alexander Lange 19.

Bad Homburg: Kl. 10: Laura Biroth 9.

Eltville, Gymnasium (Betreuender Lehrer Markus Dillmann):
Kl. 7: Daniel Mayer 17, Hagen Söngen 17; **Kl. 9:** Ralf Jung 17.

Engen, Widukind-Gymnasium:
Kl. 5: Moritz Aschemeyer 13, Jan-Henrik Brandling 15, Florian Junklewitz 2, Lena Militschke 9, Philipp Rüter 4, Niklas Rutz 4, Erik Saharge 7, Tobias Schlegel 3.

Eutin, Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium: Kl. 13: Lars Imsdahl 14.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 7: Corinna Dinges 16, Hannah Meilinger 16, Tatjana Mendt 4, Andreas Weimer 17, Johannes Weimer 8.

Halberstadt, Martineum: Kl. 8: Robert Hesse 18.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 7: Christoph Tietz 8.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Gerd Weber, Christoph Straub):
Kl. 7: Alia’a Ahmed Doma 16, Karin Emil 19, Marina Morad 21, Sandra Waguih 10;
Kl. 9: Sherine Ali 6, Marina Ashraf 6, Alia el Bolock 7, Mariam Emad 11, Salma Mariam Ismail 19, Nadia Abou Shadi 14, Marwa Talal 14;
Kl. 10: Lauren Emil 4, Nadine Gouda 6, Miriam Morad 5, Iman Tarek 7.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 10: Eduard Bierich 3, Kerstin Bonfica 3, Simone Gockel 3, Irina Herdt 3, Matthias Reis 3, Jonathan Zorner 3.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 10: Maximilian Mühlbacher 17.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 8: Thu Giang Nguyen 5; **Kl. 9:** Katharina Kober 16;
Kl. 11: Claudia Mack 8, Judith Reinhardt 10, Adriana Spalwisz 3.

Magdeburg, Werner-von-Simens-Gymnasium: Kl. 10: Sebastian Schulz 18.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium: Kl. 9: Ilja Fragin 7, Niklaas Baudet von Gersdorff 7, Jennifer Groß 7, Sabrina Groß 7, Cordula Rohde 7.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 4: Dorothea Winkelroß 7.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 9: Maike Bäcker 6, Natalie Geiß 9, Michaela Schuster 5.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 7: Florian Schweiger 30.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 10: Bernhard Saumweber 8.

München, Rupprecht-Gymnasium: Sigurd Vogler 2.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 6: Jenny Elster 3, Katharina Hartmann 13, Marelina Kaules 3, Vivien Kohlhaas 17, Louisa Korbmacher 6, Nora Mollner 14, Felicitas Pünder 6, Hannah Rohmann 6;
Kl. 7: Madeline Kohlhaas 21; **Kl. 9:** Miriam Menzel 24;
Kl. 10: Annika Kohlhaas 18, Stefanie Tiemann 30.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):
Kl. 9: Martin Jöhlinger 9.

Oberusel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Markus Bauch 7, Jan Biersack 4, Veronika Finke 6, Patricia Gierga 5, Romy Kaestner 5, Philipp Krosion 9, Eveline Lipp 10, Gesa Musiol 12, Marie Oster 6;
Kl. 6: Hannah Braun 6, Philipp Kalte 8, Jonas Köhler 14, Sabrina Kopp 5;
Kl. 7: Larissa Habbel 13, Sarah Rosengarten 15, Sophia Waldvogel 13, Valentin Walther 10;
Kl. 8: Annkatrin Weber 14.

Otterberg, Freie Waldorfschule: Kl. 7: Malte Meyn 15.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: David Feiler 14, Jana Klaes 8; **Kl. 8:** Keven Runge 3.

Siegburg, Anno-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hachtel):
Kl. 12: Jan B. Boscheinen 11.

Speyer: Sergej Betcher (Bruder von Olga Betcher, 11. Kl. am Speyer-Kolleg) 8.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 6: Alexander Rettkowski 31.

St. Goarshausen, Wilhelm-Hofmann-Gymnasium: Kl. 8: Julia Koch 12.

Weiterstadt: Kl. 11: Artjom Zern 7.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 5: Emily Linn 15, Lukas Scheid 7; **Kl. 7:** Sophie Schäfer 1, Philipp Thau 5;
Kl. 9: Sarah Tröbs 7; **Kl. 12:** Verena Prägert 9.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium: Kl. 9: Charlotte Capitain 22.

MONOID Jahrgang 25 Heft 81 März 2005

Inhalt

Die Redaktion

Betreuung der Abonnements: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität, Institut für Mathematik/Monoid-Redaktion, D-55099 Mainz; Tel. 06131/39-26107; Fax -24389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`