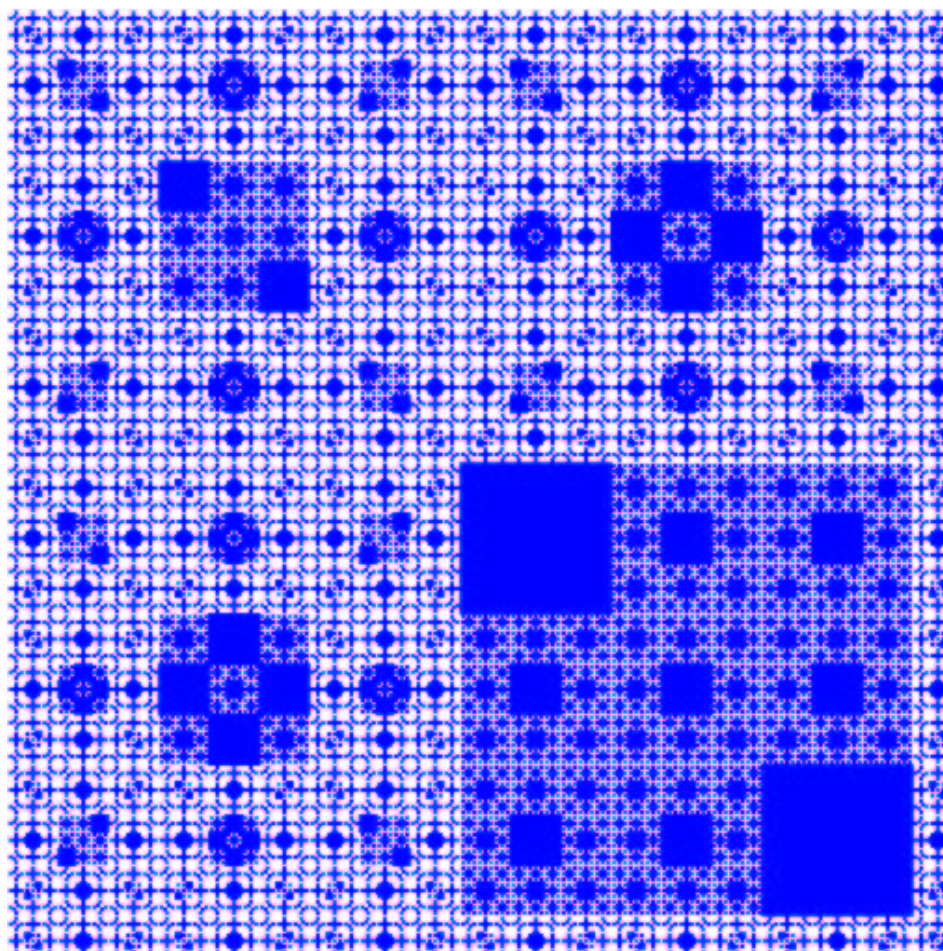

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen

1980 begründet von Martin Mettler;

gegenwärtig herausgegeben vom

Institut für Mathematik an der

Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein





Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer *nur eine oder Teile einzelner Aufgaben* lösen kann, sollte teilnehmen; **der Gewinn eines Preises** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (**mit Lösungsweg!**) zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.09.2005.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107

Fax: 06131/3924389

e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.

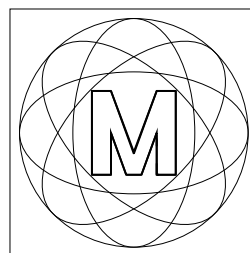
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:

Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.



Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Von regelmäßigen Vielecken, Kreuzen und Sternen

von Hartwig Fuchs

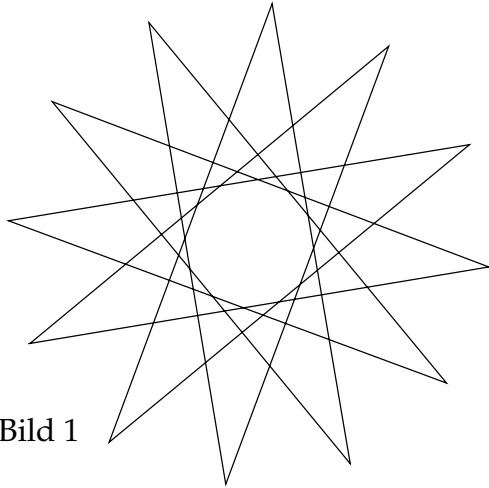


Bild 1

Den 12-zackigen Stern in Bild 1 kann man in einem Zug ohne abzusetzen mit einem Bleistift nachzeichnen.

Wie konstruiert man solche Figuren und überhaupt regelmäßige Vielecke, Kreuze und Sterne?

Diesen Fragen werden wir im Folgenden nachgehen.

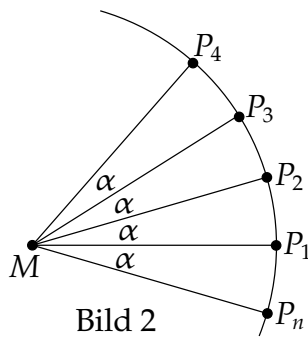


Bild 2

Vorweg

Wir zerlegen einen beliebigen Kreis um einen Punkt M in $n \geq 2$ kongruente (= gleich große) Sektoren MP_1P_2 , MP_2P_3 , $\dots$, MP_nP_1 mit dem Zentrumswinkel $\alpha = \frac{1}{n} \cdot 360^\circ$ – vgl. Bild 2.

Die Menge der Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ bildet einen **Kranz**, den wir K_n nennen – die Punktfolgen K_n werden die Basis der nachfolgenden Konstruktionen bilden. Die Spitzen des Sterns in Bild 1 stellen z. B. einen Kranz K_{12} dar.

In einem Kranz K_n , $n \geq 2$, heißt ein Punkt $Q \in K_n$ der i -te *Nachbar* eines Punktes $P \in K_n$, falls Q in K_n als i -ter Punkt auf P folgt, wenn man längs der Kreislinie in mathematisch positivem Sinne (also „gegen die Uhr“) zählt.

So ist z. B. der erste Nachbar von $P \in K_n$ der – im mathematisch positiven Sinne gerechnet – am nächsten bei P liegende Punkt $Q \in K_n$. Und in Bild 1 ist z. B. jeder Spitzenpunkt mit seinem 5. Nachbar durch eine Strecke verbunden.

Weil der n -te Nachbar eines Punktes $P \in K_n$ wieder P selbst wäre, wollen wir i -te Nachbarn nur für Nummern i mit $1 \leq i < n$ zulassen.

Die beabsichtigten Konstruktionen von Vielecken, Kreuzen und Sternen werden alle nach dem gleichen Muster ablaufen:

(R_i) Gegeben sei ein Kranz K_n aus n Punkten, $n \geq 2$; und i sei eine natürliche Zahl mit $1 \leq i < n$.

Man verbinde dann jeden Punkt aus K_n mit seinem i -ten Nachbarn in K_n durch eine Strecke.

Schauen wir uns nun an, welche Figuren wir aus Kränzen K_n mit den Konstruktionsregeln R_i konstruieren können.

▲ Die mit R_1 aus K_n , $n \geq 2$, erzeugbaren Figuren

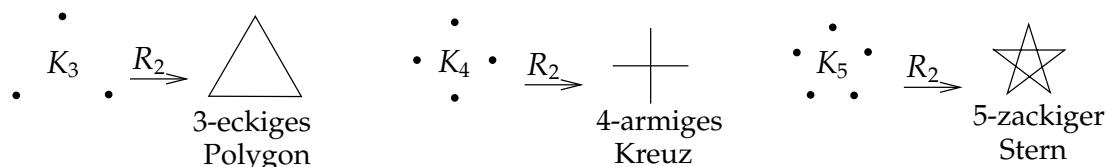
Bei Konstruktionen mit der Regel R_1 wird jeder Punkt eines Kranzes K_n , $n \geq 2$, mit seinem jeweiligen ersten Nachbarn durch eine Strecke verbunden.

Da in K_2 jeder der beiden Punkte der erste Nachbar der anderen ist, ergibt sich mit R_1 aus K_2 eine Strecke. Aus K_3 erhält man mit R_1 ein regelmäßiges Dreieck, aus K_4 ein Quadrat usw. Insgesamt gilt:

- (1) Mit der Regel R_1 kann man aus einem Kranz K_n für jedes $n \geq 3$ ein regelmäßiges n -Eck konstruieren ($n = 2$ bildet einen Sonderfall, siehe unten (2)).

▲ Die mit R_2 aus K_n , $n \geq 3$, erzeugbaren Figuren

Gemäß R_2 verbindet man jeden Punkt eines Kranzes K_n mit seinem zweiten Nachbarn. So ergeben sich als erste mit R_2 erzeugte Figuren – siehe auch die Tabelle:



▲ Die Konstruktionen mit $R_3, R_4, R_5, \dots$ überlassen wir unseren Lesern. Einige Ergebnisse haben wir in der folgenden Tabelle angegeben:

$R_i \setminus K_n$	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	$\dots$
R_1								$\dots$
R_2								$\dots$
R_3								$\dots$
R_4								$\dots$
R_5								$\dots$
R_6								$\dots$
R_7								$\dots$

Wenn man sich etwas mit dieser Tabelle beschäftigt, dann werden einem einige (vermutliche) Gesetzmäßigkeiten auffallen – z.B. diese:

- (2) Wenn in einem Kranz K_{2n} , $n = 1, 2, 3, \dots$, Nachbarpunkte gemäß der Regel R_n verbunden werden, dann ergibt sich ein $2n$ -armiges Kreuz.
- (3) Die aus einem Kranz K_n , $n \geq 3$, mit R_i und mit R_{n-i} , $1 \leq i < n$, erzeugten Figuren stimmen überein.

Schließlich noch zwei Probleme für unsere „Tüftler“:

Welche Figuren sind (wie z.B. die beiden 7-zackigen Sterne) in einem Zug zeichnbar?

Manche Figuren setzen sich aus regelmäßigen n -Ecken zusammen wie z.B. der 6-zackige Stern aus zwei gleichseitigen Dreiecken. Für welche Figuren gilt das?

(Mitteilung von Ergebnissen an die Redaktion erbeten!)

Hättest Du es gewusst?

Was ist der Algorithmus von Jamblichos?

Von Hartwig Fuchs

Iterative Verfahren sind von fundamentaler Bedeutung in der Angewandten Mathematik (Numerik, Informatik usw.).

Solche Prozesse sind jedoch nicht neu – sie wurden bereits in der klassischen Mathematik der Griechen untersucht.

Ein nicht allgemein bekanntes arithmetisches Verfahren hat **Jamblichos** (gestorben um 330 n. Chr.) – ein vielseitiger Denker, Philosoph und Mathematiker aus Chalkis – im 4. Buch seines (unvollständig) überlieferten 10-bändigen Hauptwerks „Sammlung pythagoreischer Lehren“ beschrieben. Es funktioniert so:

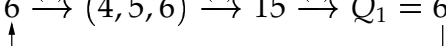
- (1) Wähle eine natürliche Zahl Q_0 als Startzahl.
- (2) Bestimme zwei natürliche Zahlen R_0 und S_0 , so dass Q_0, R_0, S_0 in der Zahlenreihe unmittelbar aufeinander folgen und die größte von ihnen ein Vielfaches von 3 ist.
- (3) Berechne $T_0 := Q_0 + R_0 + S_0$.
- (4) Bilde die Quersumme* Q_1 von T_0 .
- (5) Falls $Q_1 = 6$ ist, endet hiermit der Prozess.
Falls $Q_1 \neq 6$ ist, wiederhole (iteriere) die Schritte (1) bis (5) mit Q_1 als Startzahl; usw.

Beispiele:

a) $Q_0 = 20$ sei Startzahl; dann sind $R_0 = 19, S_0 = 21$ nach (2) und $Q_0 + R_0 + S_0 = 60$ mit der Quersumme $Q_1 = 6$ – damit endet das Verfahren.

b) Diagramm-Darstellung des iterierten Prozesses:

$Q_0 = 202 \xrightarrow{(2)} (202, 203, 204) \xrightarrow{(3)} 609 \xrightarrow{(4)} Q_1 = 15 \xrightarrow{(2)} (13, 14, 15) \xrightarrow{(3)} 42 \xrightarrow{(4)} Q_2 = 6.$

c) Interpretation der Halte-Vorschrift in (5) $Q_0 = 6 \xrightarrow{(2)} (4, 5, 6) \xrightarrow{(3)} 15 \xrightarrow{(4)} Q_1 = 6$


Wenn in einem Jamblichos-Prozess oder in einer seiner Iterationen die Zahl 6 als Quersumme auftritt, dann läuft er von da ab in die Schleife $6 \rightarrow 6$.

Jamblichos hat nun behauptet:

- (6) Für jede natürliche Startzahl Q_0 führt der (iterierte) Prozess (1) – (5) stets in die Zahl 6.

Der Jamblichos-Algorithmus hat keine besondere mathematische Bedeutung. Jedoch gestattet der Beweis von (6), auf einen wesentlichen Aspekt iterativer Prozesse mit ganz elementaren Überlegungen einzugehen.

*Zu des Jamblichos Zeiten war das dezimale Stellensystem sehr wohl bekannt – und zwar vom Umgang mit den damals üblichen Rechenbrettern; Ziffern zur Bezeichnung der Anzahl von Einheiten auf den einzelnen Stellen und die damit mögliche heutige Zifferndarstellung einer Zahl wurden allerdings erst viel später (Fibonacci 1202) benutzt. Um so erstaunlicher ist es, dass Jamblichos den nach ihm benannten Prozess erfinden konnte.

Wir zeigen zunächst, dass gilt: Die Quersumme Q_1 einer n -ziffrigen Zahl Q_0 ist

- Es sei $Q_0 = a_n 10^{n-1} + \dots + a_2 10^1 + a_1$. Dann ist $Q_1 = a_n + \dots + a_2 + a_1 \leq n \cdot 9$.

falls $n = 12, 13, \dots, 111$ ist, dann folgt: $Q_1 \leq 111 \cdot 9$; also gilt (8); usw.

Falls nun Q_0 eine n -ziffrige Zahl mit $n \geq 3$ ist, dann kann deshalb $Q_0 + R_0 + S_0$ höchstens $(n+1)$ -ziffrig sein, $n+1 \geq 4$, und die Quersumme Q_1 von $Q_0 + R_0 + S_0$ ist wegen (7), (8), (9) usw. höchstens $(n-1)$ -ziffrig. Und das bedeutet:

- Wenn Q_1 selbst wieder ≥ 100 ist, dann gilt für die im Jamblichos-Prozess auf Q_1 folgende Quersumme Q_2 wegen (10) – dort Q_0, Q_1 durch Q_1, Q_2 ersetzt – die Ungleichung $Q_1 > Q_2$. So fortfahrend ergeben die Wiederholungen des Jamblichos-Prozesses eine absteigende Kette $Q_0 > Q_1 > Q_2 > \dots$ von Quersummen, die irgendwann mit einer Quersumme $Q_r, r \geq 1$, die Schranke 100 unterschreitet – also: $Q_0 > Q_1 > \dots > Q_{r-1} > 100 > Q_r$. Das bedeutet:

Der Jamblichos-Prozess führt für jede Startzahl $Q_0 \geq 100$ zwangsläufig zu einer 1- oder 2-ziffrigen Quersumme $Q_r, r \geq 1$. Damit ist die Behauptung (6) des Jamblichos-Prozesses nur noch für Startzahlen < 100 zu überprüfen.

Insgesamt gilt also (6).

Immer wieder faszinierend: Die Kreiszahl $\pi = 3,1415926535897932384\dots$

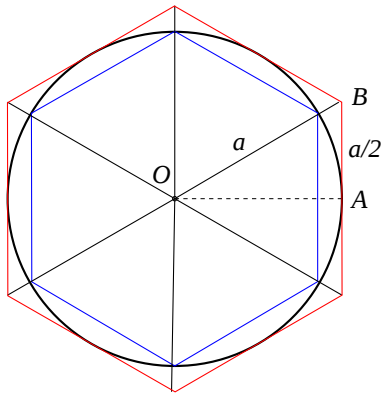
Ein Weltrekord und dennoch ein Nichts: 30 Stunden lang wurde die unendliche Zahl Pi im Mathematikum in Gießen hörbar gemacht. 300 Teilnehmer lasen je 300 Nachkomma-Stellen der Kreiszahl vor. Damit ist ein Weltrekord geschafft. Noch nie wurden 108 000 Ziffern der Kreiszahl – nach dem Komma hinter der Drei – ohne Unterbrechung mit menschlicher Stimme vorgetragen. Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher, Leiter des mathematischen Mitmach-Museums, zeigte sich beeindruckt: „Angesichts der Unendlichkeit von Pi ist es ein Nichts, was wir vorgelesen haben.“ Als Beweismittel wurden die 30 Stunden auf MP3 aufgenommen. Ziel ist es, mit dem Pi-Vorleseweltrekord ins Guinness Buch der Rekorde eingetragen zu werden.

6

Archimedes und π

von Theo de Jong

Sie kennen natürlich alle die Kreiszahl π : Sie ist definiert als die Hälfte des Umfangs des Einheitskreises. In diesem Beitrag besprechen wir eine klassische Methode, um Näherungswerte der Kreiszahl π zu bekommen. Diese Methode geht auf Archimedes (ca. 287-212 vor Christus) zurück.

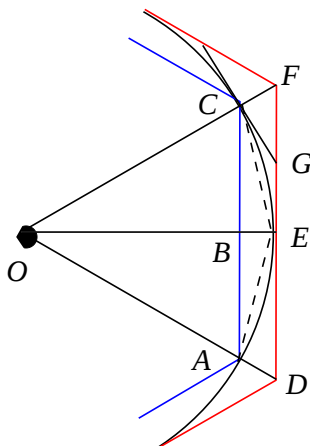


Wir betrachten nebenstehende Figur. Sie sehen den Einheitskreis, innerhalb des Kreises ein eingeschriebenes Sechseck, außerhalb des Kreises ein umschriebenes Sechseck. Den halben Umfang des eingeschriebenen Sechsecks bezeichnen wir mit p_6 , den des umschriebenen Sechsecks mit q_6 . Die Dreiecke sind gleichseitige Dreiecke. Eine Seite des eingeschriebenen Dreiecks ist damit gleich 1, und es folgt $p_6 = 3$. Ist a eine Seite des umschriebenen Dreiecks, so folgt durch Betrachtung des Dreiecks OAB und Pythagoras: $a^2 = 1 + (a/2)^2$, so dass $a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Es folgt $q_6 = 2\sqrt{3}$. Damit ist $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

Es ist nicht besonders schwierig, Näherungswerte von $\sqrt{3}$ zu finden. Archimedes selbst benutzte

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Sei $n > 6$. Selbstverständlich bekommt man bessere Näherungswerte von π durch Betrachten des halben Umfangs p_n eines eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks und des halben Umfangs q_n des umschriebenen regelmäßigen n -Ecks. Dies war natürlich schon vor Archimedes bekannt.



Es war die geniale Entdeckung von Archimedes, dass es Beziehungen gibt zwischen p_n , q_n , p_{2n} und q_{2n} . Um diese zu finden, betrachten wir folgende Figur, wobei ein Teil des regelmäßigen n -Ecks gezeichnet ist. Sind A und C Eckpunkte des eingeschriebenen n -Ecks sowie D und F Eckpunkte des umschriebenen n -Ecks und ist G ein Eckpunkt des umschriebenen $2n$ -Ecks, so gelten folgende Identitäten:

$$|AC| = \frac{2p_n}{n}; |BC| = \frac{p_n}{n}; |EF| = \frac{q_n}{n};$$

$$|CG| = |EG| = \frac{q_{2n}}{2n}; |FG| = |EF| - |EG| = \frac{q_n}{n} - \frac{q_{2n}}{2n};$$

$$|AE| = |EC| = \frac{p_{2n}}{n}.$$

Die Gerade durch C und G hat, als Tangente an den Kreis, einen rechten Winkel mit der Geraden durch O und F . Damit haben die Dreiecke EFO und CFG zwei Winkel gemein, sind damit ähnlich. Es folgt $|OE| : |OF| = |CG| : |FG|$. Mit dem Strahlensatz folgt

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{p_n}{n}}{\frac{q_n}{n}} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|OC|}{|OF|} = \frac{|OE|}{|OF|} = \frac{|CG|}{|FG|} = \frac{\frac{q_{2n}}{2n}}{\frac{q_n}{n} - \frac{q_{2n}}{2n}} = \frac{q_{2n}}{2q_n - q_{2n}}.$$

Wir können nach q_{2n} auflösen und bekommen

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}. \quad (1)$$

Nun möchten wir noch p_{2n} berechnen. Dazu bemerken wir, dass die gleichschenkligen Dreiecke AEC und EGC ähnlich sind. Dazu muss man nur einsehen, dass $\angle CEG = \angle ACE$ (Wechselwinkel wegen $AC \parallel EG$). Damit ist

$$\frac{p_{2n}}{2p_n} = \frac{\frac{p_{2n}}{n}}{\frac{2p_n}{n}} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|EG|}{|EC|} = \frac{\frac{q_{2n}}{2n}}{\frac{p_{2n}}{n}} = \frac{q_{2n}}{2p_{2n}},$$

woraus

$$p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}} \quad (2)$$

folgt. Kennen wir also p_n und q_n , so können wir mit Gleichung (1) den Wert q_{2n} berechnen. Danach können wir mit Gleichung (2) p_{2n} bestimmen. Da p_6 und q_6 bekannt sind, können wir $q_{12}, p_{12}, q_{24}, p_{24}$, usw. bestimmen. Archimedes konnte mit diesen Ideen zeigen, dass

$$3\frac{10}{71} < p_{96} < \pi < q_{96} < 3\frac{1}{7}.$$

In Dezimalschreibweise:

$$3,1408\dots < \pi < 3,1428\dots$$

Bis ins 17. Jahrhundert hinein war die oben genannte Methode die wichtigste, um Näherungswerte von π zu bestimmen. Der Deutsche Ludolph van Ceulen (1540-1610, erster Mathematikprofessor in den Niederlanden) fand Näherungswerte von $p_{3 \cdot 2^{60}}$ und $q_{3 \cdot 2^{60}}$ und konnte damit 35 Dezimalen von π bestimmen, natürlich alles mit der Hand. In Deutschland wird π darum auch oft LUDOLPHSche Zahl genannt. Diese 35 Dezimalen von π wurden auf seinem Grabstein eingraviert. Im 19. Jahrhundert ist dieser Grabstein leider spurlos verschwunden.

Heutzutage gibt es viel bessere Methoden, um Näherungswerte von π zu finden. Dazu berichten wir vielleicht in einem nächsten Beitrag. Trotzdem können mit einem modernen Rechner und der Methode von Archimedes ohne Probleme viele Dezimalen von π gefunden werden. Hier kommt ein kleines MAPLE-Programm, das dies leistet:

```
Digits:=1000;
a:=3;
b:=evalf(2*sqrt(3));
for i from 1 to 1000 do
  b:=2*a*b/(a+b);
  a:=sqrt(a*b);
od;
a;
```

Dieses Programm liefert in wenigen Sekunden 600 Dezimalstellen von π .

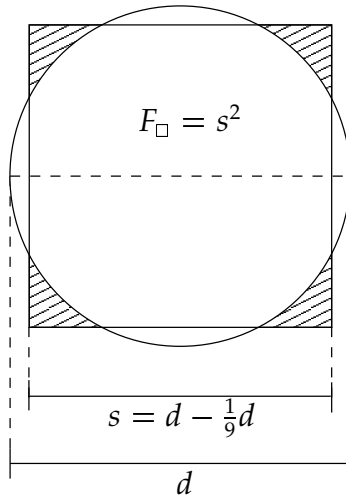
Zwei Näherungsformeln für die Kreisfläche aus pharaonischer Zeit

von Hartwig Fuchs

Eines der frühesten mathematischen Probleme stellt die Berechnung der Fläche eines Kreises dar – schon in ägyptischer, altchinesischer und babylonischer Zeit befassten sich Gelehrte mit dieser Frage.

Und so verwundert es auch nicht, dass Ahmes der Ägypter (um 1700 v. Chr.) – von dem uns im sogenannten Papyrus Rhind eines der ältesten Lehrbücher der Mathematik überliefert ist – in seinem Werk auf die Frage der Kreisberechnung eingeht und gleich zwei „ägyptische“ Lösungen anbietet, eingekleidet in die Aufgabe 50 des Papyrus Rhind.

Text der Aufgabe 50: Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom Durchmesser 9 Chet*.



Lösung des Ahmes:

Nimm $\frac{1}{9}$ vom Durchmesser weg. Der Rest (vom Durchmesser) ist 8. Rechne 8 mal 8. Sie (die Kreisfläche) ist 64.

Kommentar:

Aus der Figur hat Ahmes vielleicht durch Messung herausgefunden, dass ein Kreis vom Durchmesser d die „gleiche“ Fläche F wie ein Quadrat der Seitenlänge $s = d - \frac{1}{9}d$ hat. Jedenfalls zeigt die Lösung von Aufgabe 50, dass die Ägypter der Pharaonenzeit eine Kreisfläche so berechnen konnten:

$$(1) F = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

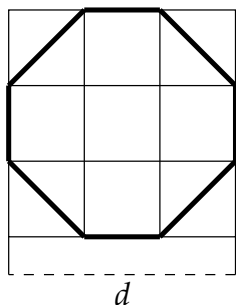
Keine schlechte Näherungslösung! Denn aus $\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{\pi}{4}d^2$ (die exakte Kreisfläche) ergibt sich:

$$(2) \pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \approx 3,1605.$$

Für die $\frac{1}{9}$ benachbarten Stammbrüche $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{10}$ erhält man dagegen schlechtere Approximationen. Aus den Ansätzen $s = d - \frac{1}{8}d = \frac{7}{8}d$ und $s = d - \frac{1}{10}d = \frac{9}{10}d$ folgen zunächst die Kreisformeln $F = \left(\frac{7}{8}d\right)^2$ und $F = \left(\frac{9}{10}d\right)^2$, aus denen sich nach Gleichsetzung mit $\frac{\pi}{4}d^2$ ergibt: $\pi = 4 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{196}{64} = 3,0625$ und $\pi = 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 3,24$.

Im Papyrus Rhind findet sich noch eine andere Figur, aus der sich eine zweite „ägyptische“ Lösung für das Problem der Kreisflächenberechnung ablesen lässt.

*altägyptisches Längenmaß, 1 Chet entspricht ungefähr 52,5 cm.



Kommentar:

Ein Quadrat der Seitenlänge d wird in 9 gleiche Teilquadrate zerlegt. Nach Abschneiden der Ecken längs der Diagonalen der Eckenquadrate entsteht ein semireguläres Achteck. Da Ahmes vermutlich die Fläche des Achtecks als eine gute Näherung für die Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser d ansah, konnte er neben (1) eine zweite Möglichkeit zur Berechnung von F aus der Figur unmittelbar ablesen:

$$(3) \quad F = \frac{7}{9}d^2.$$

Tatsächlich liefert die Gleichsetzung $\frac{7}{9}d^2 = \frac{\pi}{4}d^2$ die Näherung $\pi = \frac{28}{9} \approx 3,1111$.

Aus dem Papyrus Rhind geht hervor, dass Ahmes sowohl die in (1) als auch in (3) enthaltene Berechnungsmethode für Kreisflächen gelten ließ. Als Begründung mag ihm $\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} \approx \frac{63}{81} = \frac{7}{9}$ gedient haben.

Übrigens wurde erst etwa 1500 Jahre später der von Ahmes gefundene Näherungswert (2) für π , nämlich $\pi \approx 3,1605$, von Archimedes auf $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,1429$ verbessert.

* * * * *

C. F. Gauß und die regelmäßigen n -Ecke

von Hartwig Fuchs

Vorgeschichte

Am 30. März 1796 notierte C. F. Gauß – damals ein 18-jähriger Student – mit berechtigtem Stolz in seinem Tagebuch, dass er am Vortage ein bereits über 2000 Jahre schwelendes offenes Problem der Geometrie vollständig gelöst habe.

Jeder Schüler lernt, wie man ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat, ein regelmäßiges Sechseck konstruiert und dass man dabei mit zwei Zeichengeräten, dem Zirkel und dem Lineal, auskommt.

Seit der Antike wusste man das und auch, dass es einige weitere regelmäßige n -Ecke gibt – z. B. für $n = 5, 8, 10, 12, 15$ –, die man allein *mit Zirkel und Lineal* konstruieren kann (wir sagen dafür kurz: Die n -Ecke sind *ZL-konstruierbar*). Aber bereits für regelmäßige 7-Ecke, 9-Ecke, 11-Ecke waren keine derartigen Konstruktionen bekannt.

Dem jungen Gauß nun war es gelungen – wonach viele Mathematikergenerationen vor ihm vergeblich gesucht hatten – alle diejenigen Zahlen n zu bestimmen, für die die zugehörigen regelmäßigen n -Ecke ZL-konstruierbar sind. Das war für die damalige mathematische Welt eine Sensation, und sie brachte Gauß weithin Anerkennung, wenn nicht gar frühen Ruhm.

Der Satz von Gauß

- (1) Ein regelmäßiges n -Eck ungerader Eckenzahl ist genau dann ZL-konstruierbar, wenn n eine Fermat-Primzahl $F_m = 2^{2^m} + 1$ oder wenn n ein Produkt von paarweise verschiedenen Fermat-Primzahlen F_i ist.

- (2) Ein regelmäßiges n -Eck gerader Eckenzahl ist genau dann ZL-konstruierbar, wenn n eine Zweierpotenz 2^t , $t = 2, 3, \dots$, oder ein Produkt aus einer solchen Zweierpotenz, $t \geq 1$, mit einer Fermat-Primzahl oder mehreren paarweise verschiedenen Fermat-Primzahlen ist.

Überraschender Weise ist somit nach (1) ein regelmäßiges 17-Eck ZL-konstruierbar, weil $17 = 2^{2^2} + 1 = F_2$ eine Fermat-Primzahl ist; dagegen sind wegen (1) z. B. regelmäßige 7-, 9- und 11-Ecke nicht ZL-konstruierbar.

Gauß kannte nur die fünf Fermat-Primzahlen F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 – und bis heute sind keine weiteren hinzu gekommen*. Deshalb ist es eine leichte Aufgabe, mit (1) alle verschiedenen regelmäßigen ZL-konstruierbaren n -Ecke ungerader Eckenzahl aufzulisten. Dabei wollen wir n -Ecke nur dann als verschieden betrachten, wenn sie nicht die gleiche Eckenzahl n besitzen. Aus (1) ergibt sich die folgende Liste der Anzahlen von Eckpunkten, die ZL-konstruierbare Vielecke haben können, falls nur $F_0, \dots, F_4$ prim sind:

$F_0 = 3$					
$F_0 F_1$	$F_0 F_2$	$F_0 F_3$	$F_0 F_4$		
$F_0 F_1 F_2$	$F_0 F_1 F_3$	$F_0 F_1 F_4$	$F_0 F_2 F_3$	$F_0 F_2 F_4$	$F_0 F_3 F_4$
$F_0 F_1 F_2 F_3$	$F_0 F_1 F_2 F_4$	$F_0 F_1 F_3 F_4$	$F_0 F_2 F_3 F_4$		
$F_0 F_1 F_2 F_3 F_4$					
$F_1 = 5$			$F_2 = 17$		
$F_1 F_2$	$F_1 F_3$	$F_1 F_4$	$F_2 F_3$	$F_2 F_4$	
$F_1 F_2 F_3$	$F_1 F_2 F_4$	$F_1 F_3 F_4$	$F_2 F_3 F_4$		
$F_1 F_2 F_3 F_4$					
$F_3 = 257$			$F_4 = 65537$		
$F_3 F_4$					

Zählt man die Einträge in der Liste, dann ergibt sich:

- (3) Falls nur die fünf Fermat-Primzahlen F_i , $0 \leq i \leq 4$, existieren, dann gibt es genau 31 verschiedene ZL-konstruierbare regelmäßige n -Ecke ungerader Eckenzahl $n = f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 \geq 3$, wo f_i für eine Fermat-Zahl F_i , $0 \leq i \leq 4$, oder für 1 steht. Mit (2) folgt: Die ZL-konstruierbaren regelmäßigen n -Ecke gerader Eckenzahl erhält man für $n = 2^t f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 \geq 4$, $t = 1, 2, 3, \dots$

Sollten in der Zukunft einmal r weitere Fermat-Primzahlen F_m , $m \geq 5$, gefunden werden, dann wird die obige Liste auf genau $2^{5+r} - 1$ Einträge zu erweitern sein, und entsprechend wird man (3) abändern müssen.

Alle nicht durch (3) erfassten n -Ecke sind also nach Gauß nicht ZL-konstruierbar – und das ist die überwiegende Mehrheit der regelmäßigen n -Ecke.

Beispiel:

Von den 100 verschiedenen regelmäßigen n -Ecken, $n = 3, 4, 5, \dots, 102$, sind nur 25% ZL-konstruierbar, nämlich die n -Ecke mit $n = 3, 6, 12, 24, 48, 96; 4, 8, 16, 32, 64; 5, 10, 20, 40, 80; 17, 34, 68; 3 \cdot 5 = 15, 30, 60; 3 \cdot 17 = 51, 102; 5 \cdot 17 = 85$.

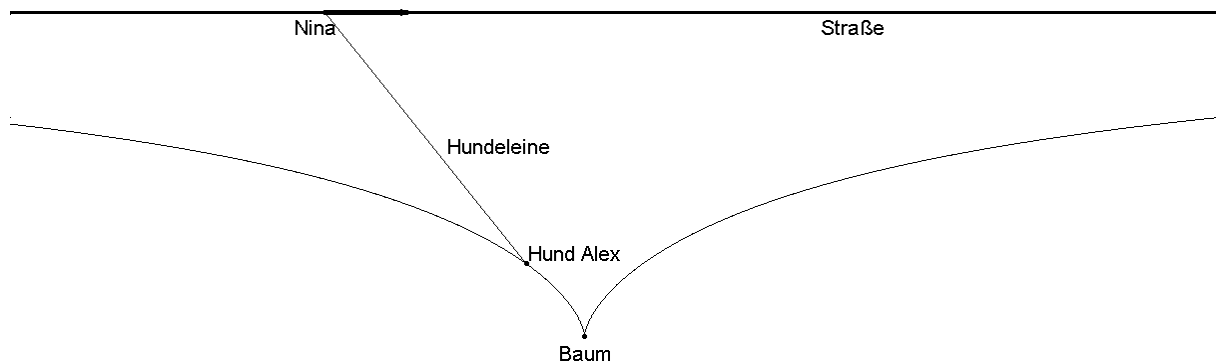
* Man weiß, dass alle Fermat-Zahlen F_m für $5 \leq m \leq 32$ und für viele m -Werte > 32 keine Primzahlen sind; bei F_{33} ist unbekannt, ob sie eine Primzahl ist oder nicht – die Entscheidung darüber ist selbst mit einem Computer keineswegs einfach, weil Fermat-Zahlen sehr schnell ungeheuer groß werden: So hat z. B. F_7 schon 39 Ziffern, aber F_{10} bereits 309 Ziffern und F_{33} sogar 2 585 827 973 Ziffern!

Mit dynamischer Geometrie-Software von der „Hundekurve“ zur „Muschelkurve“ Die Konchoide des Nikomedes

von Ekkehard Kroll

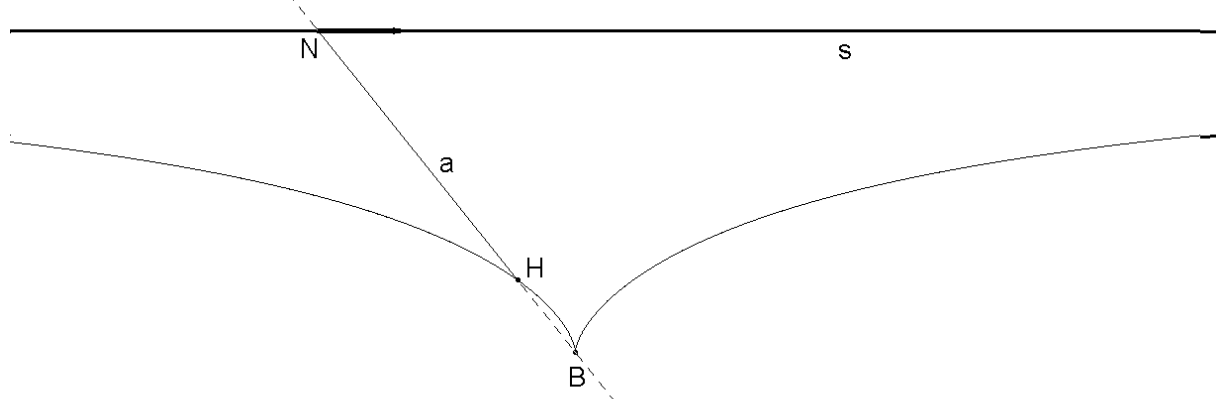
Nina geht mit ihrem Hund, einem Rüden namens Alex, spazieren. Die Straße ist schur-gerade und an den Rändern nur mit Gras und ein paar Wildkräutern bestanden. In der Ferne taucht auf der rechten Seite ein Baum, ein paar Meter im Feld stehend, auf. Alex strebt ihm aus wohl bekannten Gründen zu, die Hundeleine strafft sich, bis sie ganz ausgerollt ist. Während Nina unbeirrt die Straße entlang geht, hechelt Alex über die Felder dem Baum entgegen. Sein Weg ist allerdings nicht geradlinig wie der von Nina, sondern krummlinig mit einer Spitze am Baum und wird – weil Nina Alex nach dem Vorbeimarsch hinter sich herzieht – im Weggang symmetrisch zum Annäherungsweg an den Baum:

Ninas Spaziergang mit Hund Alex



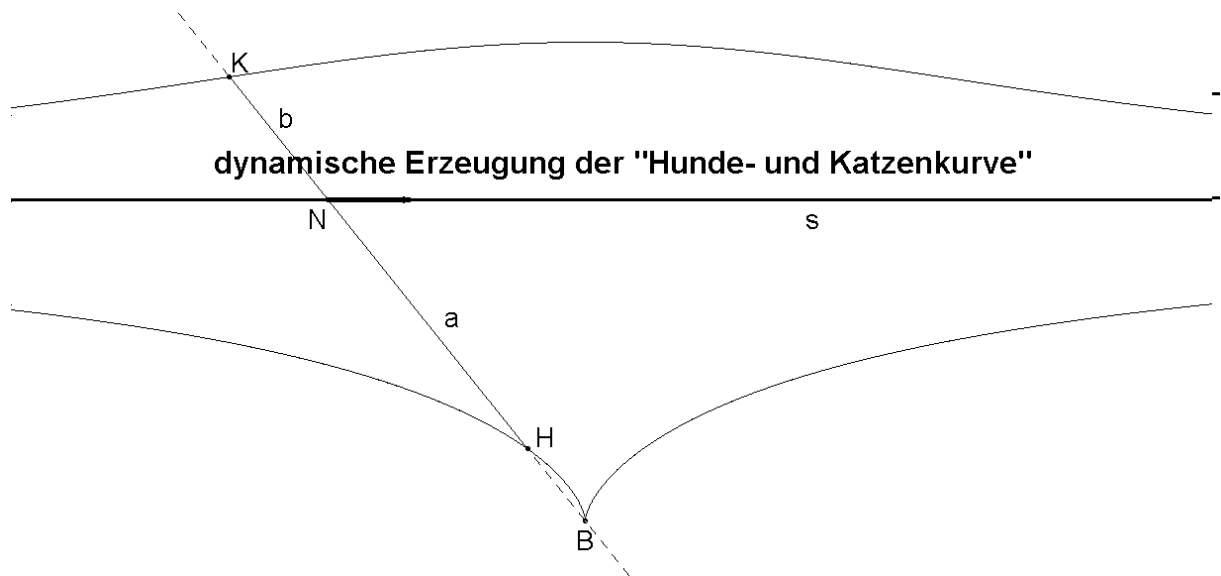
Mit einem System der dynamischen Geometrie (DGS) wie *EUKLID DynaGeo* oder *Ca-bri Géomètre* lässt sich diese Kurve gut erzeugen: Nach Vorgabe einer Geraden s ($\equiv$ Straße) und eines Punktes B ($\equiv$ Baum) außerhalb s wird ein Punkt N ($\equiv$ Nina) auf s gewählt und durch eine Gerade mit B verbunden. Auf dieser Geraden wird von N aus eine Strecke ($\equiv$ Hundeleine) fester Länge a abgetragen; der Endpunkt H ($\equiv$ Hund Alex) erzeugt dann die „Hundekurve“ (im Spurmodus oder als Ortskurve), wenn N auf s bewegt wird.

dynamische Erzeugung der "Hundekurve"

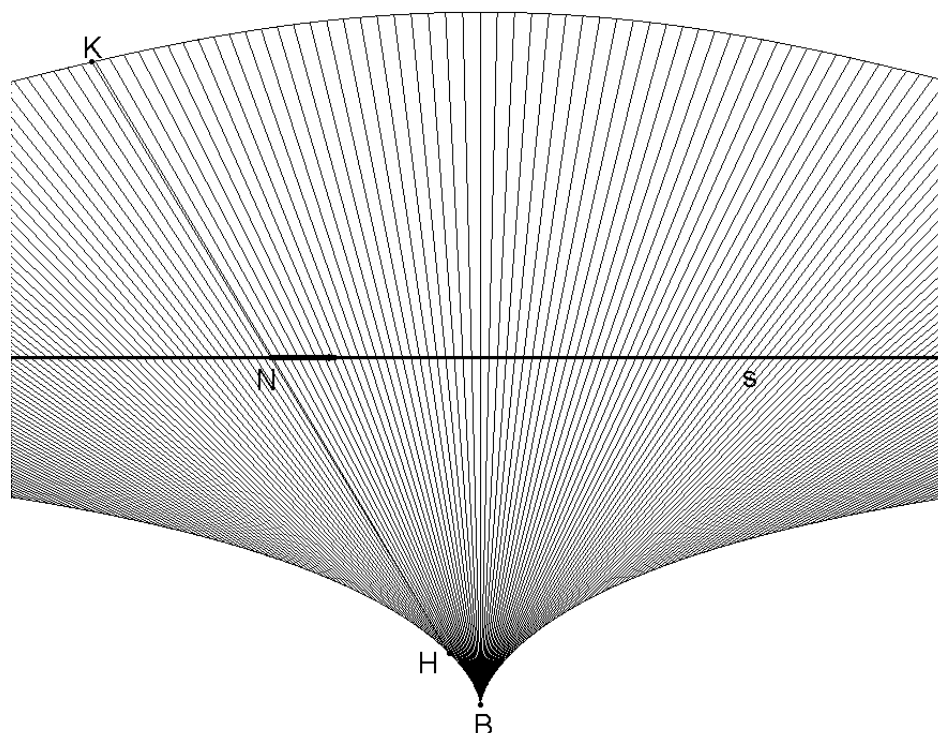
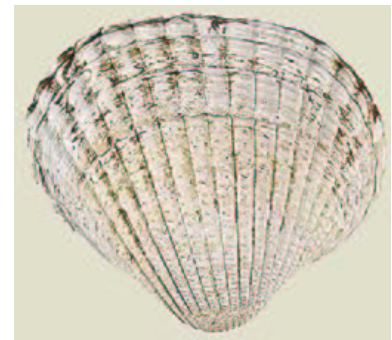


Nehmen wir einmal an, Nina besitzt auch ein Katze ($\equiv$ K), die sie ebenfalls an der Leine (von der Länge b) ausführt, die aber auf Alex nicht gut zu sprechen ist und da-

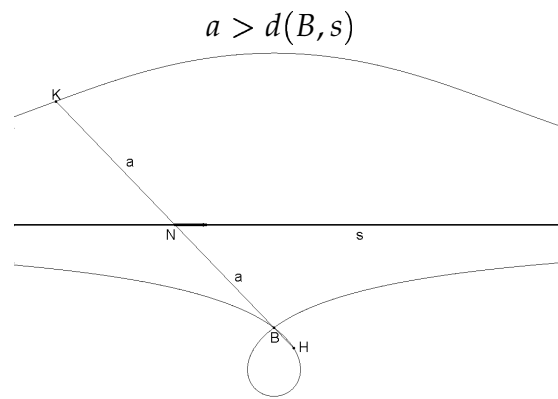
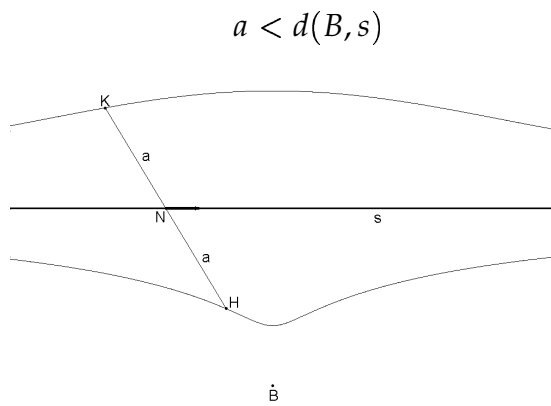
her genau entgegengesetzt an der Leine zieht, dann bekommen wir eine zweite, also sozusagen eine Katzenkurve auf der anderen Straßenseite:



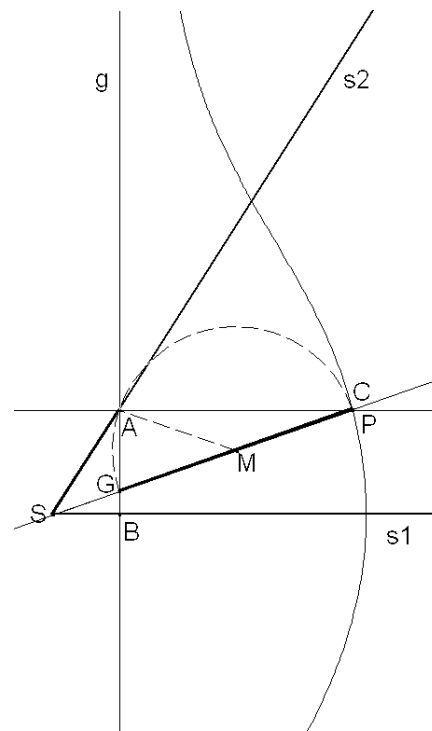
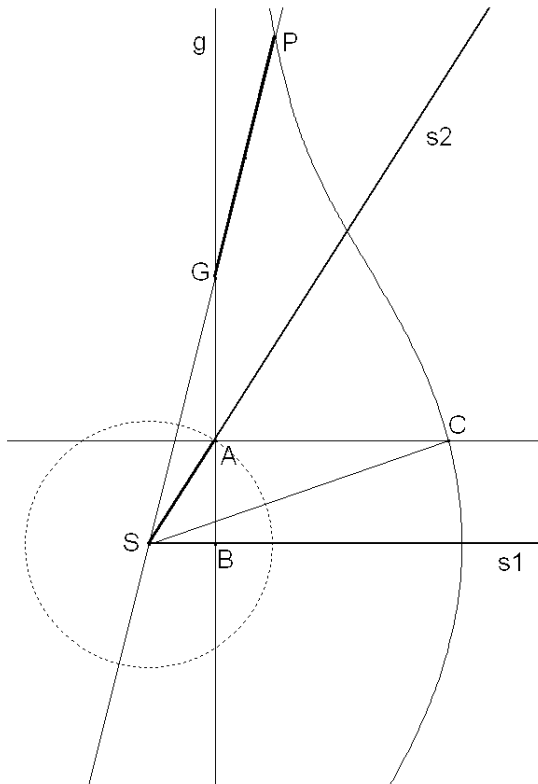
Im Fall von $a = b$ erhalten wir die aus zwei Ästen bestehende **Konchoide** des griechischen Mathematikers Nikomedes (etwa 200 v. Chr.); ihr Name leitet sich von $\kappa\omicron\gamma\chi\eta$ (= Muschel) ab, weil ihre Gestalt an die Form einer Herzmuschel erinnert, was besonders deutlich wird, wenn verschiedene Lagen der erzeugenden Strecke eingetragen werden:



Hierbei ist a gleich dem Abstand $d(B, s)$ des Punktes B von der Geraden s (Alex sollte den Baum ja erreichen können!). Die Gestalt der Konchoide ändert sich, wenn a kleiner oder größer $d(B, s)$ wird:



Nikomedes benutzte die Konchoide zur Würfelverdopplung („Delisches Problem“) und zur Winkeldreiteilung, zwei der klassischen Probleme des Altertums (das dritte ist die Quadratur des Kreises). Diese sind allein unter Verwendung von Zirkel und Lineal nicht lösbar. Wird aber durch eine entsprechende mechanische Vorrichtung eine Konchoide erzeugt (es genügt der obere Kurvenzweig), so kann ein beliebig vorgegebener Winkel damit in drei gleiche Teile geteilt werden. Mit einem DGS (wie z. B. *Cabri Géomètre II Plus*), das Ortskurven mit Geraden schneiden kann, lässt sich die Winkeldreiteilung folgendermaßen vornehmen:



Winkeldreiteilung mit der Konchoide

Links: die Konstruktion

Rechts: der Beweis

Bei vorgegebenem (o.B.d.A. spitzem) Winkel mit Scheitel S und Schenkeln s_1 und s_2 schneiden wir mit einem Kreis um S mit festem Radius einen Punkt A auf s_2 aus, von dem wir anschließend das Lot g auf s_1 fällen; der Lotfußpunkt werde mit B bezeichnet. Von einem beliebigen Punkt G auf der Lotgeraden g tragen wir auf der Verbindungsgeraden von G und S von G aus auf der S abgewandten Seite von g die Streckenlänge $2 \cdot |AS|$ ab. Der so erhaltende Endpunkt P erzeugt bei der Wanderung von G auf g einen Ast der Konchoiden. Diesen schneiden wir mit dem Lot in A auf g im Punkt C . Die Verbindungsstrecke CS drittelt dann den vorgegeben Winkel ASB .

Beweis: Denken wir uns P durch Drehen der Geraden GS bis in die Lage von C gewandert (also $P \equiv C$). Dann liegt A auf dem Thaleskreis um M über PG , und es gilt $|AM| = |PM| = |PG|/2 = |AS|$. Also sind die Dreiecke SMA und ACM gleichschenkelig. Für ihre Basiswinkel gilt daher: $\angle ASM = \angle AMS = 180^\circ - \angle AMC = 2 \cdot \angle ACM = 2 \cdot \angle CSB$ („Wechselwinkel“). Daraus folgt: $\angle ASB = \angle ASM + \angle CSB = 3 \cdot \angle CSB$.

Maier-Leibnitz-Preis für Valentin Blomer

Wie die Mainzer Allgemeine Zeitung in einer Meldung „Zur Person“ am 7. Juni 2005 berichtete, erhielt in diesen Tagen Dr. Valentin Blomer den Heinz Maier-Leibnitz-Preis, die höchste Auszeichnung für die besten deutschen Nachwuchsforscher.

Valentin Blomer, einst selbst MONOID-Preisträger, aber auch Mitgestalter vieler MONOID-Feiern durch seine musikalischen Beiträge am Klavier, war Schüler des Rabanus-Maurus-Gymnasiums Mainz (Abitur-Jahrgang 1996) und hat an der Universität Mainz Mathematik und Informatik studiert. Sein Diplomstudium schloss er bereits nach sieben Fachsemestern 2001 mit einer Arbeit aus der Zahlentheorie „*Thin bases and related topics in additive number theory*“ bei Prof. Dr. G. Hofmeister mit Auszeichnung ab. Der Zahlentheorie blieb Blomer treu, als er an der Universität Stuttgart mit einer Arbeit über quadratvolle Zahlen promovierte.

Eine natürliche Zahl n heißt „quadratvoll“, wenn jeder Primteiler p von n mindestens quadratisch auftritt (z. B. $72 = 2^3 \cdot 3^2$; dagegen ist $24 = 2^3 \cdot 3$ nicht quadratvoll); insbesondere ist jede Quadratzahl quadratvoll. Interessant ist nun die Frage, wie sich diese durch eine multiplikative Eigenschaft definierten Zahlen additiv verhalten, insbesondere wie viele Zahlen in einem Intervall $[1, x]$ sich als Summe zweier quadratvoller Zahlen darstellen lassen. Es ist bekannt, dass es für sehr große x etwa

$$(*) \quad \frac{c \cdot x}{\sqrt{\log(x)}}$$

Summen von zwei Quadratzahlen gibt (mit einer gewissen Konstanten c) und dass es etwa doppelt so viele quadratvolle Zahlen wie Quadratzahlen gibt. Der ungarische Mathematiker Paul Erdős (1913-1996) vermutete, dass deshalb $(*)$ mit einer anderen geeigneten Konstanten auch die Anzahl der Summen zweier quadratvoller Zahlen approximiert. Diese Vermutung hat Blomer in seiner Dissertation widerlegt, indem er zeigte, dass die richtige Größenordnung ungefähr

$$\frac{x}{(\log(x))^a} \quad \text{mit } a = 1 - 2^{-1/3} = 0.206 \dots$$

ist gegenüber dem Exponenten 0.5 in $(*)$, was bedeutet, dass es wesentlich mehr Summen zweier quadratvoller Zahlen gibt als vermutet. Der Beweis beruht auf der Untersuchung so genannter binärer quadratischer Formen und der Anwendung von Methoden der reellen und komplexen Analysis.

Auch die weiteren Arbeiten von Valentin Blomer beschäftigen sich mit Problemen der analytischen Zahlentheorie (s. <http://www.uni-math.gwdg.de/blomer/>); er ist zur Zeit Juniorprofessor an der Georg-August-Universität Göttingen, wo einst Carl Friedrich Gauß lehrte (vgl. MONOID Nr. 81, S. 30-33). Zum 1. August 2005 erhält Dr. Blomer eine Professur für Mathematik an der Universität Toronto / Kanada, die für die Gebiete Algebra, Zahlentheorie und Kryptographie ausgeschrieben war. Die MONOID-Redaktion gratuliert Valentin Blomer auf das Herzlichste, wünscht ihm in seinem neuen Wirkungskreis viel Erfolg und hofft natürlich, dass er weiterhin MONOID verbunden bleibt und – wie bisher – hin und wieder einen Artikel beisteuert. E.K.

Die Seite für den Computer-Fan

Eine Variante der Catalán-Vermutung

Der belgische Mathematiker Eugène Charles Catalán (1814-1894) stellte 1844 die Vermutung auf, dass die Gleichung $a^m - b^n = 1$ mit natürlichen Zahlen a, b, m, n , wobei $a > b \geq 2$ und $m, n \geq 2$ sein sollen, die einzige Lösung $a = n = 3, b = m = 2$ besitzt. Diese Vermutung wurde erst im Jahre 2002 von dem rumänischen Mathematiker Preda Mihailescu bewiesen. (In MONOID Nr. 71, S. 15, berichteten wir darüber.)

Untersuche mit Deinem Computer, für welche natürlichen Zahlen d sich Lösungen der Gleichung $a^m - b^n = d$ mit natürlichen Zahlen a, b, m, n (alle ≥ 2) finden lassen.

Beispiele: $3^2 - 2^3 = 1$; $3^3 - 5^2 = 2$; $2^7 - 5^3 = 3$; $2^3 - 2^2 = 5^3 - 11^2 = 6^2 - 2^5 = 4$; ...
(H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 80

Die dritte Wieferich-Primzahl

Nach einem Satz, den Pierre de Fermat bewies, gilt für jede ungerade Primzahl p :

(1) p ist ein Teiler von $2^{p-1} - 1$.

Der deutsche Mathematiker Arthur Wieferich (1884-1954) untersuchte 1909 ein mit (1) verwandtes Problem, nämlich die Frage: Gibt es Primzahlen p , für die gilt:

(2) Auch p^2 ist ein Teiler von $2^{p-1} - 1$?

Solche Primzahlen wollen wir *Wieferich-Primzahlen* nennen.

So weit Wieferich auch rechnete, er fand nur Primzahlen p mit der Eigenschaft

(3) p^2 ist kein Teiler von $2^{p-1} - 1$.

Nun zur **Aufgabenstellung**:

a) Es gibt genau zwei Wieferich-Primzahlen $p < 3600$. Bestimme sie!

b) Kannst Du eine dritte Wieferich-Primzahl angeben? (H.F.)

Lösung:

Es sind bislang nur zwei Wieferich-Primzahlen bekannt, nämlich **1093** (gefunden 1913) und **3511** (gefunden 1922). Untersuchungen mit Computereinsatz haben bislang gezeigt, dass es unterhalb $1,25 \cdot 10^{15}$ keine weiteren Wieferich-Primzahlen gibt.

Die bekannten Wieferich-Primzahlen haben gefunden: Stefanie Tiemann (Visual Basic) und Sebastian Eckart (Visual C++); einen Versuch – allerdings ohne Ergebnis – hat Claudia Mack mit DERIVE gestartet.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: monoid@mathematik.uni-mainz.de).

Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 81

Fünf Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Knobelaufgabe

Die vier Kinder Clara, Sophie, Mark und Lars haben (in anderer Reihenfolge!) die Nachnamen Wagenknecht, Stowesand, Fischer und Jacobi. Von ihnen ist folgendes bekannt:

1. Die drei Kinder Sophie, Mark und das Kind mit dem Nachnamen Stowesand sind zusammen auf einem Erinnerungsfoto zu sehen.
2. Lars heißt nicht Stowesand und nicht Jacobi.
3. Mark, Lars und das Kind mit Nachnamen Fischer waren zusammen im Ferienlager.

Wie heißen die Kinder mit vollständigem Namen?

(gefunden von der Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“, Grietje Gelück, Catherine Jacobi, Malte Stumpf, in „mathematik lehren“, Heft 115)

Lösung:

Man kann diese Aufgabe durch Ausprobieren lösen, indem man einen Namen festsetzt und anschließend probiert, ob die Vorgaben zu dieser Festsetzung passen würden. Dabei geht man dann nach dem Ausschlussverfahren vor, indem man weitere Namen beliebig zuordnet und anschließend prüft, ob dies möglich ist.

Beispiel: Man setzt Lars Fischer fest. Beachtet man Vorgabe 3, so ist dieser Ansatz falsch. Weiter setzt man dann Lars Wagenknecht fest und sieht, dass dies eine mögliche Lösung ist.

Anschließend setzt man einen weiteren Namen für ein Kind fest und prüft, ob dies möglich ist, usw. ...

Oder man fertigt eine Tabelle an, indem man die Vornamen gegen die Nachnamen aufrägt und mögliche Paarungen anhand der Vorgaben findet:

	Wagenknecht	Stowesand	Fischer	Jacobi
Clara	-	+	-	-
Sophie	-	-	+	-
Mark	-	-	-	+
Lars	+	-	-	-

Aus der Tabelle kann man die richtigen Lösungen ablesen: Clara Stowesand, Sophie Fischer, Mark Jacobi und Lars Wagenknecht.

Heuschreckensprung

Eine Heuschrecke springt an einem Stab entlang. Sie startet an dessen einem Ende. Bei jedem Sprung schafft sie die Hälfte der übrig gebliebenen Strecke. Nach drei Sprüngen ist sie 70 cm weit gekommen. Wie lang ist der Stab?

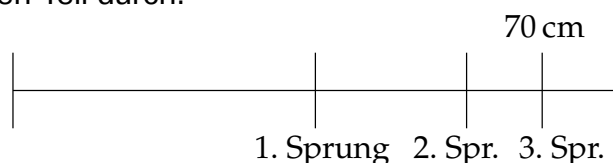
(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“)

Lösung:

Auch hier kann durch Ausprobieren mit einer Tabelle die Lösung einfach gefunden werden:

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch
Angenommene Stablänge	60 cm	100 cm	80 cm
1. Sprung	30 cm	50 cm	40 cm
2. Sprung	15 cm	25 cm	20 cm
3. Sprung	7,5 cm	12,5 cm	10 cm
Gesamt?	52,5 cm	87,5 cm	70 cm
Stimmt's?	Zu wenig!	Zu viel!	STIMMT!

Oder man gibt einen beliebig langen Strich vor. Für den ersten Heuschreckensprung teilt man die Länge der Strecke zur Hälfte. Dieses Verfahren führt man noch zwei Mal für den jeweils rechten Teil durch.



Aus dieser Figur kann nun abgelesen werden, dass es sich bei der Gesamtlänge des Stabes um 80 cm handeln muss.

Am elegantesten kann die Aufgabe durch Aufstellen einer Gleichung gelöst werden. Dabei bezeichnet x die Gesamtlänge des Stabes:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot x = 70 \text{ cm}, \quad \frac{7}{8}x = 70 \text{ cm}, \quad x = 80 \text{ cm}.$$

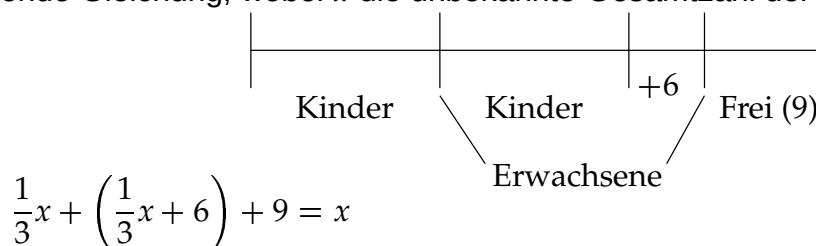
Busplätze

In einem Bus ist ein Drittel der Plätze mit Kindern besetzt, 6 Plätze mehr werden durch Erwachsene belegt. 9 Plätze bleiben frei. Wie viele Plätze hat der Bus?

(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“)

Lösung:

Nach Veranschaulichung der Situation durch eine Zeichnung findet man schnell die passende Gleichung, wobei x die unbekannte Gesamtzahl der Busplätze bezeichnet:



$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}x + 6\right) + 9 = x$$

Nach Weglassen der Klammern und Zusammenfassen hat man: $\frac{2}{3}x + 15 = x$. Also ist $15 = \frac{1}{3}x$ und somit $x = 45$.

Rennmäuse

Der Futtermvorrat für die 12 Rennmäuse der Zoohandlung Tierlieb reicht noch für 62 Tage. Nach 9 Tagen werden 6 der Mäuse verkauft und nach wiederum 26 Tagen werden 14 neue Rennmäuse geliefert. Wie lange reicht der Futtermvorrat insgesamt?

(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“)

Lösung:

Wenn 12 Rennmäuse noch für 62 Tage Futter haben, so sind also noch $12 \cdot 62 = 744$ Futtereinheiten vorhanden (1 Futtereinheit = Futter für eine Maus pro Tag). Bezeichnen wir mit x die gesuchten Tage, die die 20 Mäuse noch mit dem Futtervorrat auskommen würden, so können wir den Aufgabentext in folgende Gleichung umsetzen:

$$12 \cdot 9 + 6 \cdot 26 + 20 \cdot x = 744$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen liefert $264 + 20 \cdot x = 744$, also $20 \cdot x = 480$. Damit ist $x = \frac{480}{20} = 24$.

Um zur Gesamtzahl der Tage zu kommen, müssen wir noch 9 und 26 hinzu addieren, so dass als Ergebnis 59 herauskommt.

Wer statt mit einer Gleichung lieber mit einer Tabelle arbeitet, muss auch hierbei zuvor berechnen, wie viel Einheiten Futter überhaupt vorrätig sind (= 744 Einheiten):

Anzahl Rennmäuse	Tage	Futterverbrauch
12	9	108 Einheiten
6	26	156 Einheiten
20	???	$744 - (108 + 156) = 480$

Die 480 Einheiten reichen bei 20 Mäusen 24 Tage. Addiert man 9 und 26 Tage dazu, so erhält man auch hier das Ergebnis von 59 Tagen insgesamt.

Konstruktionsregel für ein magisches 3×3 -Quadrat

Immer wieder stellen Mathis die Frage, ob man magische Quadrate nicht nur durch Probieren finden, sondern auch nach Regeln konstruieren kann.

Hier kannst du nun selbst eine solche Regel für ein 3×3 -Quadrat entwickeln, indem du die leeren Felder durch geeignete Terme ausfüllst.

$a - b$	$a + b - c$	
	a	
		$a + b$

$$a \neq b \neq c, c \neq 2b$$

Konstruiere mit deiner Regel ein magisches 3×3 -Quadrat, bei dem das zentrale Feld mit der Zahl 2005 besetzt ist. (H.F.)

Lösung:

Die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen haben bei einem magischen Quadrat alle den gleichen Wert m .

Aus der Summe $(a - b) + a + (a + b)$ der Diagonalelemente folgt: $m = 3a$. Dann ist die erste Zeile durch $a + c$ zu ergänzen, damit $(a - b) + (a + b - c) + (a + c) = m$ folgt. Entsprechend ist in der dritten Spalte $a - b - c$ einzufügen, damit $(a + c) + (a - b - c) + (a + b) = m$ ist; usw.

Eine Konstruktionsregel für magische 3×3 -Quadrate lautet dann:

$a - b$	$a + b - c$	$a + c$
$a + b + c$	a	$a - b - c$
$a - c$	$a - b + c$	$a + b$

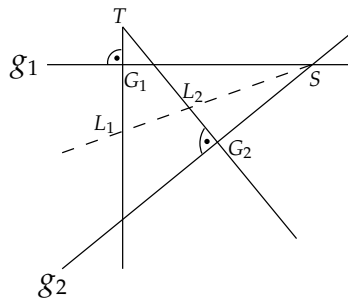
Dabei sind a, b, c beliebig, aber $a \neq b \neq c$ und $c \neq 2b$.

Für $a = 2005$ und z.B. $b = 1, c = 3$ erhält man

2004	2003	2008
2009	2005	2001
2002	2007	2006

Martin zeichnet wieder

Martin zeichnet zwei Geraden g_1 und g_2 , die sich im Punkt S schneiden. Dann wählt er auf jeder Geraden einen Punkt und errichtet dort das Lot auf der Geraden. Die Lote schneiden sich im Punkt T . Dann schneidet Martin die Lote mit der Winkelhalbierenden von g_1 und g_2 in den Punkten L_1 und L_2 . Das Dreieck L_1TL_2 sieht gleichschenkelig aus.



- Prüfe an Hand einer Zeichnung, ob an dieser Vermutung etwas dran sein könnte.
- Suche gegebenenfalls nach einem Beweis.

(nach WJB)

Lösung:

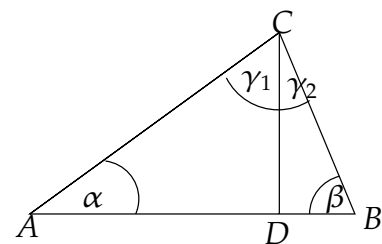
Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich, also $\angle G_1SG_2 = \angle L_1TL_2$. Daher steht die Winkelhalbierende von $\angle L_1TL_2$ senkrecht auf der Winkelhalbierenden von $\angle G_1SG_2$, ist also Mittellot der Strecke L_1L_2 . Daher sind TL_1 und TL_2 gleich lang.

Die Winkel des Dreiecks

In einem Dreieck ist $\alpha = 36^\circ$ bekannt. Außerdem bildet die Höhe CD mit einer der Dreiecksseiten einen Winkel von 22° .

Bestimme alle Winkelgrößen im Dreieck, wenn

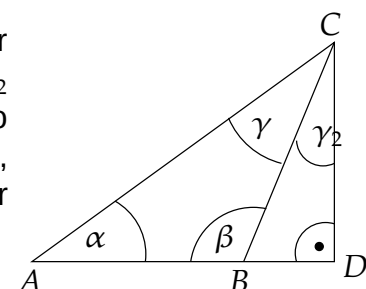
- das Dreieck spitzwinklig ist,
- das Dreieck stumpfwinklig ist mit $\beta > 90^\circ$,
- das Dreieck stumpfwinklig ist mit $\gamma > 90^\circ$.



Lösung

- Wenn $\alpha = 36^\circ$ gilt und der Winkel bei D 90° ist, kann wegen der Winkelsumme im Teildreieck ADC der Winkel γ_1 nicht 22° sein, also muss $\gamma_2 = 22^\circ$ gelten. Wegen der Winkelsumme im Teildreieck DBC muss $\beta = 180^\circ - 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$ sein. Also ist $\gamma = 180^\circ - 36^\circ - 68^\circ = 76^\circ$.

- Die Situation sieht in diesem Fall etwa so wie in der Abbildung rechts aus. Wieder kann nur der Winkel γ_2 22° groß sein. Betrachten wir das Dreieck BDC , so muss dort der Nebenwinkel von β $180^\circ - 90^\circ - 22^\circ$, also 68° sein. Folglich ist $\beta = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$. Für γ gilt also $\gamma = 180^\circ - 36^\circ - 112^\circ = 32^\circ$.



- c) In diesem Fall können wir uns die obige Abbildung als Hilfsfigur nehmen. Wie in a) und b) muss wieder $\gamma_2 = 22^\circ$ gelten. Aus dem Teildreieck ADC errechnet sich aber $\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$. Somit müsste $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 54^\circ + 22^\circ = 76^\circ$ sein, was der Bedingung, dass $\gamma > 90^\circ$ sein soll, widerspricht. Also gibt es für diese Teilaufgabe keine Lösung.

Der Lexikonartikel

In einem vielbändigen Lexikon sind die Seiten fortlaufend durch alle Bände hindurch von 1 bis 15 607 nummeriert.

Marilyn liest einen dreiseitigen Artikel. Sie bemerkt: „Wenn ich zum Produkt der drei Seitenzahlen 7 addiere, dann ergibt sich die Gesamtseitenzahl des Lexikons.“

Auf welchen Seiten steht der Artikel?

(H.F.)

Lösung:

$x, x+1, x+2$ seien die Seitenzahlen derjenigen Seiten, auf denen der Artikel zu finden ist. Dann gilt $x(x+1)(x+2) + 7 = 15\,607$ oder $x(x+1)(x+2) = 15\,600$. Eine grobe Schätzung ergibt: $20 < x < 30$, denn $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8\,000$ und $30 \cdot 30 \cdot 30 = 27\,000$.

Eine der Zahlen $x, x+1, x+2$ muss $= 25$ sein, weil $x(x+1)(x+2)$ ein Vielfaches von 100 ist.

Nun probiert man:

$$x = 23 \rightarrow 23 \cdot 24 \cdot 25 \neq 15\,600$$

$$x = 24 \rightarrow 24 \cdot 25 \cdot 26 = 15\,600$$

$$x = 25 \rightarrow 25 \cdot 26 \cdot 27 \neq 15\,600$$

Also ist $x = 24$, und der Artikel findet sich auf den Seiten 24, 25 und 26.

Neue Mathespielereien

Eine halbe Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Streichholzaufgabe

Lege Streichhölzer so aneinander, dass

- a) 10 Streichhölzer 2 Quadrate,
- b) 11 Streichhölzer 3 Quadrate und
- c) 12 Streichhölzer 5 Quadrate ergeben.

(H.F.)

Aufzugs-Problem

Im Erdgeschoss eines Wolkenkratzers steigen 12 Personen in den Aufzug nach oben. In jedem Stockwerk hält der Aufzug. Dabei steigt mindestens ein Viertel, aber höchstens ein Drittel aller mitfahrenden Personen aus; zugleich steigen so viele Personen ein, wie die Nummer des Stockwerks angibt. (Ausnahme: das Erdgeschoss = Stockwerk 0)

Gibt es ein Stockwerk, bei dem

- a) möglicher Weise genau so viele Personen aussteigen wie einsteigen?
- b) mit Sicherheit sich erstmals mehr Leute im Lift befinden als im Erdgeschoss eingestiegen sind?

(H.F.)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Logelei: Das Diebestrio



Die drei Diebe A, B, C werden nach einem Einbruch beim Verteilen der Beute gefasst. Es ist bekannt, dass genau einer von ihnen der Tresorknacker, ein anderer der Aufpasser und der dritte der Fahrer des Fluchtautos ist. Beim Verhör sagen sie nun *übereinstimmend* aus:

- (1) A ist der Fahrer.
- (2) B ist nicht der Fahrer.
- (3) C ist nicht der Tresorknacker.
- (4) Leider ist nur eine einzige dieser drei Aussagen wahr.

Wer hat also bei dem Einbruch was getan?

(H.F.)

Ricardas Rechner

Ricarda hat einen Rechner, auf dem die vier Grundrechenarten (und sonst nichts) vorkommen. Alle vier Tasten sind nur mit einem $*$ versehen. Ricarda rechnet $a * a * a * a * a$. Gibt es Zahlen a , für die das Ergebnis immer gleich a ist, egal in welcher Reihenfolge die vier Rechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ gedrückt werden? (gefunden WJB)

9 Punkte und 9 Strecken

9 Punkte und 9 Strecken sollen so in die Ebene gezeichnet werden, dass gilt: Jeder Punkt liegt auf drei dieser Strecken, und jede Strecke verläuft durch 3 dieser Punkte.

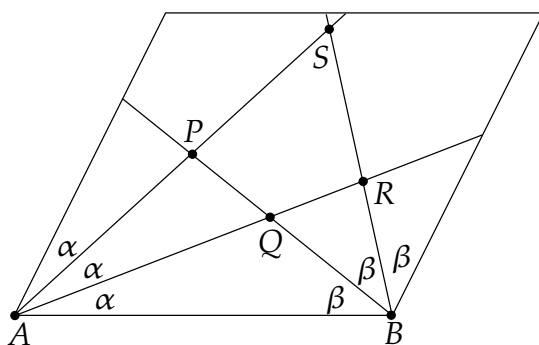
Fertige eine Zeichnung an, in der diese Bedingungen erfüllt sind.

(H.F.)

Divisionsrest einer Quadratzahl

Wenn man das Quadrat einer natürlichen Zahl, die kein Vielfaches von 3 ist, durch 3 dividiert, dann ergibt sich stets der Rest 1. (H.F.)

Winkel im Parallelogramm



In einem beliebigen Parallelogramm seien die Innenwinkel bei A und bei B in drei gleiche Teilwinkel zerlegt.

Berechne den Winkel PQR und zeige, dass er doppelt so groß ist wie der Winkel ASB . (H.F.)

Bereits auf Seite 21 findet ihr zwei Mathespielereien!

Neue Aufgaben

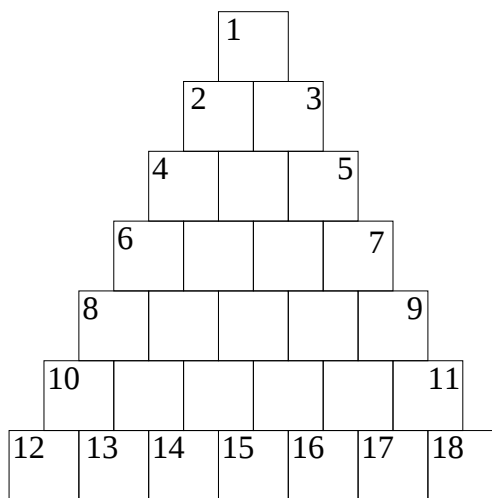
Kl. 8-13

Aufgabe 854. Wägaufgabe

Von 12 gleich aussehenden Kugeln ist eine leichter oder schwerer als die übrigen 11 Kugeln.

Finde durch dreimaliges Wiegen mit einer Balkenwaage heraus, welches die Kugel mit anderem Gewicht ist, und sage, ob sie leichter oder schwerer ist als die anderen Kugeln.
(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 855. Zahlenrätsel



Ersetze in den Angaben unten verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen. Trage danach horizontal sowie schräg von rechts oben nach links unten Zahlen ein, die so festgelegt sind:

Horizontal:

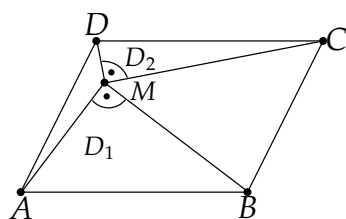
$$\begin{aligned} 2/3 & - s \cdot (t^t)^t + v \\ 4/5 & - s \cdot v^t \cdot w \\ 6/7 & - u \cdot (v^4 - v^2 - v^0) \\ 8/9 & - t^u \cdot (t^{t^s} - t^t - t) + s \\ 10/11 & - r \cdot s \cdot t \cdot u^s \cdot w \\ 12/18 & - (\text{Zeile } 6/7) \cdot s^{s+1} \cdot t \cdot v \end{aligned}$$

Vertikal:

$$\begin{aligned} 1/12 & - s^w \\ 3/13 & - w^v \\ 5/14 & - s^{t \cdot v} \\ 7/15 & - v^v - s \cdot u \cdot v + s \cdot t \\ 9/16 & - \text{Spiegelzahl, bestehend aus} \\ & \text{den Ziffern } s, s^2, s \\ 11/17 & - \text{erste Primzahl } > s \cdot t \cdot u \end{aligned}$$

Hinweis: Die den Buchstaben r, s, t, u, v, w entsprechenden Zahlen sind (in anderer Reihenfolge) unmittelbar aufeinander folgende Primzahlen.
(H.F.)

Aufgabe 856. Parallelogramm-Zerlegung



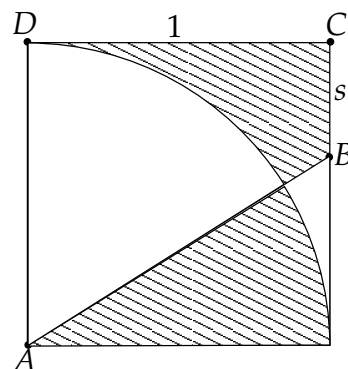
In einem Parallelogramm seien zwei rechtwinklige Dreiecke D_1 und D_2 wie in der Figur links konstruiert.

Begründe, dass eine solche Konstruktion stets möglich ist, und zeige:

Die Flächen von D_1 und D_2 sind zusammen halb so groß wie die Parallelogrammfläche.
(H.F.)

Aufgabe 857. Ein Flächenproblem

Im Einheitsquadrat mit Kreisbogen (siehe nebenstehende Figur) bestimme man die Länge s so, dass die beiden schraffierten Flächenstücke gleichen Inhalt haben. (gefunden Christoph Sievert, Bornheim)



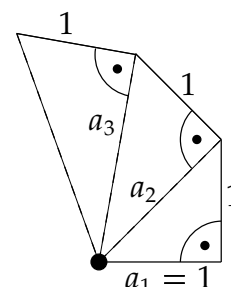
Aufgabe 858. Die Klassensprecherwahl

Eine Klasse besteht aus w Mädchen und m Jungen. Die Klassenstärke $n = w + m$ liegt zwischen 20 und 30.

- Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, Klassensprecher/in und Stellvertreter/in zu wählen?
- Bei wie vielen dieser Möglichkeiten sind Beide männlich bzw. Beide weiblich?
- Wenn wir wissen, dass es gleich viele Möglichkeiten gibt, bei denen die beiden Gewählten das gleiche Geschlecht haben wie Möglichkeiten mit ungleichem Geschlecht, wie viele Kinder sind dann in der Klasse? (WJB)

Aufgabe 859. Streckeniteration

- An das Ende einer Strecke der Länge $a_1 = 1$ wird senkrecht eine Strecke der Länge 1 angelegt. Ihr Ende wird mit dem Ausgangspunkt verbunden und an das Ende dieser Verbindungsstrecke wieder senkrecht eine Strecke der Länge 1 angelegt. Dieses Verfahren wird wiederholt. Wie lang ist die n -te Verbindung zum Ausgangspunkt?
- Ersetzt man den rechten Winkel durch einen kleineren Winkel α , so hat a_n einen Grenzwert a . Wie groß ist dieser? (WJB)



Aufgabe 860. Abstandsuntersuchung *

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$ seien n voneinander verschiedene reelle Zahlen. Betrachte die Summe ihrer Abstände von x , d.h.

$$A(x) = |a_1 - x| + |a_2 - x| + \dots + |a_n - x|$$

und die Summe der quadrierten Abstände

$$Q(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a_n - x)^2$$

- Stelle für $n = 2, 3$ fest, für welche Werte von x die Funktion $A(x)$ ihren kleinsten Wert annimmt.
- n sei ungerade, $n = 2m + 1$. Für welches x ist $A(x)$ minimal?
- n sei gerade, $n = 2m$. Für welche x ist $A(x)$ minimal?
- Für welches x hat $Q(x)$ sein Minimum? (WJB)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 81

Kl. 8-13

Aufgabe 848. Die defekte Waschmaschine

Familie Schneckenfuß wandert 12 km auf einem Rundweg und plant dafür vier Stunden ein, da sie zwei kleine Kinder hat. Sie startet um 14 Uhr. Eine Stunde später tropft es bei Herrn Mufflig durch die Decke. Die Waschmaschine von Familie Schneckenfuß ist defekt! Herr Mufflig folgt aufgebracht der Familie Schneckenfuß mit 5 km/h.

Wann und wo wird er sie vielleicht treffen? Würdest du auch hinterher laufen?

(gefunden Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“)

Lösung:

Wir lösen ein lineares Gleichungssystem. Dabei ist x die Zeit und y der zurückgelegte Weg:

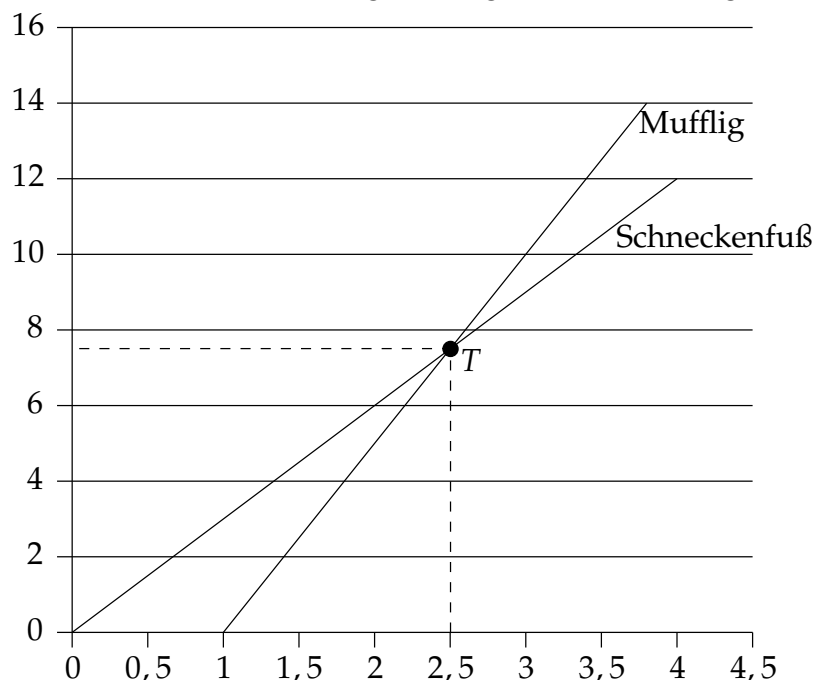
Gleichung für Familie Schneckenfuß: $y = 3x$

Gleichung für Herrn Mufflig: $y = 5(x - 1)$

Gleichsetzen ergibt nacheinander: $3x = 5x - 5$, $5 = 2x$, $x = 2,5$

Herr Mufflig erreicht die Familie nach 2,5 Stunden und (durch Einsetzen von x in die erste Gleichung) 7,5 km.

Veranschaulicht man die beiden Geradengleichungen in einem Weg-Zeit-Diagramm:



so ist der Treffpunkt T (Ort und Zeit) leicht ablesbar: Familie Schneckenfuß und Herr Mufflig treffen sich nach 2,5 Stunden bei Kilometer 7,5.

Aufgabe 849. Rote und blaue Strecken

In der Ebene sind fünf verschiedene Punkte $P_1, P_2, \dots, P_5$ gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Jeweils zwei Punkte sind durch eine rote oder eine blaue Strecke verbunden und zwar so, dass gilt:

(1) keine drei Strecken bilden ein rotes oder ein blaues Dreieck.

Man beweise die Behauptung:

B : Von jedem der fünf Punkte gehen zwei rote und zwei blaue Strecken aus.

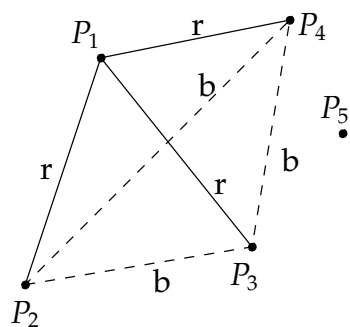
Um langwieriges Probieren zu vermeiden, kann man versuchen herauszukriegen, was der Fall ist, wenn man die Gegenbehauptung $\neg B$ als wahr voraussetzt:

$\neg B$: von einem der fünf Punkte gehen drei rote Strecken aus.

Bemerkung: Da man in der Aufgabenstellung die Wörter „rot“ und „blau“ vertauschen darf, ohne am Problem etwas zu ändern, genügt es, $\neg B$ nur für rote Strecken zu betrachten. gefunden: H.F.

Lösung:

Es sei P_1 der Punkt, bei dem gemäß $\neg B$ mindestens drei der von ihm ausgehenden Strecken rot seien, etwa P_1P_2 , P_1P_3 und P_1P_4 .



Dann müssen die Strecken P_2P_3 , P_2P_4 und P_3P_4 blau sein, weil sonst die Dreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4$ und $P_1P_3P_4$ rot wären, was nach (1) ausgeschlossen ist.

Wenn aber P_2P_3 , P_2P_4 und P_3P_4 blau sind, dann ist auch das Dreieck $P_2P_3P_4$ blau – und das widerspricht der Voraussetzung (1). Dieser Widerspruch hat zur Folge, dass $\neg B$ nicht wahr sein kann.

Also gilt: von jedem Punkt gehen höchstens zwei rote Strecken (und auch höchstens zwei blaue Strecken – vgl. Bemerkung) aus – und weil in jedem Punkt vier Strecken beginnen – bedeutet dies, dass die Behauptung B wahr ist.

Aufgabe 850. Nochmal zu den Sekundzahlen

Eine MONOID-Leserin hat die Mathespielerei „Eine wahre Geschichte“ aus Heft 79 auf folgende Art gelöst: Zahlen, die durch genau 3 Zahlen (sich selbst, die 1 und eine weitere) teilbar sind, sind die mit 2 multiplizierten Primzahlen. Diese Lösung ist leider falsch, denn solche Zahlen $2p$ sind durch 1, 2, p und $2p$ teilbar, also durch vier Zahlen, wenn $p \neq 2$ ist.

- Gibt es weitere Zahlen, die durch genau vier Zahlen teilbar sind, wenn ja, welche?
- Welche Zahlen sind durch genau 5 Zahlen teilbar?
- Welche durch genau 6 ?
- Gibt es eine systematische Methode, um die Zahlen zu finden, die genau t Teiler besitzen? (WJB)

Lösung:

Die Antworten lauten:

- a) Ja, die dritten Potenzen p^3 von Primzahlen p und die Produkte pq von zwei verschiedenen Primzahlen p, q ;
- b) die vierten Potenzen p^4 von Primzahlen p ;
- c) die fünften Potenzen p^5 von Primzahlen p und Produkte p^2q von zwei verschiedenen Primzahlen p, q .
- d) Ist $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ die Primfaktorzerlegung von n ($p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, $\alpha_i \geq 1$), so hat n genau $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1) \stackrel{!}{=} t$ Teiler. Also müssen die möglichen Zerlegungen von t untersucht werden.

Aufgabe 851. Ein schwieriger Fall?

Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $a < b < c$ und T sei der Term

$$(1) \quad T = \frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3}.$$

Zeige, dass man T so nach oben und nach unten abschätzen kann:

$$(2) \quad 8a^2b < T < 8bc^2 \quad (\text{Zdravko F. Starc})$$

Hinweis:

Da man (2) nur mühselig durch direktes Nachrechnen beweisen kann, geben wir einen Tipp, wie man schneller zum Ziel gelangt. Zeige, dass gilt:

$$(3) \quad \text{Wenn } x + y + z = 0 \text{ ist, dann folgt } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Lösung:**1. Nachweis von (3)**

Aus $x + y + z = 0$ folgt $(x + y + z)^3 = 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 &= x^3 + 3x^2(y + z) + 3x(y + z)^2 + (y + z)^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = 0 \end{aligned}$$

Mit $x^3 = 3x^2 \cdot x - 2x^3$, $y^3 = 3y^2 \cdot y - 2y^3$ und $z^3 = 3z^2 \cdot z - 2z^3$ ist weiter $(x + y + z)^3 = 3x^2(x + y + z) + 3y^2(x + y + z) + 3z^2(x + y + z) - 2(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz = 0$, und damit folgt schließlich $-2(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz = 0$, woraus sich (3) ergibt.

2. Nachweis von (2)

Setze im Zähler von T : $a^2 - b^2 = x$, $b^2 - c^2 = y$, $c^2 - a^2 = z$. Dann ist zunächst $x + y + z = 0$ und es gilt (3). So sieht man, dass $(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 = 3(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$ gilt. Wenn man danach im Nenner von T setzt: $a - b = x$, $b - c = y$, $c - a = z$, dann ist auch hier $x + y + z = 0$, und es gilt (3); so sieht man, dass für den Nenner von T gilt: $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$. Damit ist

$$(4) \quad T = \frac{3(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{3(a - b)(b - c)(c - a)} = (a + b)(b + c)(c + a).$$

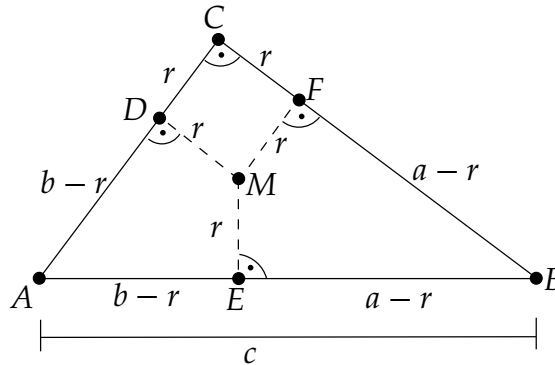
Wegen $a < b < c$ ist $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$ sowie $b < \frac{1}{2}(b + c) < c$ und $a < \frac{1}{2}(c + a) < c$. Aus (4) erhält man damit die Behauptung (2), nämlich $a^2b < \frac{1}{8}(a + b)(b + c)(c + a) < bc^2$.

Aufgabe 852.

Ein rechtwinkliges Dreieck besitze ganzzahlige Seitenlängen.

Zeige: Der Inkreisradius ist ebenfalls ganzzahlig.

(H.F.)

Lösung:

Aus der Zeichnung liest man ab: Das Viereck $MFC D$ ist ein Quadrat der Seitenlänge r , wobei r der Radius des Inkreises sei. Die Vierecke $MDAE$ und $MEBF$ sind symmetrisch bzgl. der Achse AM bzw. BM . Damit ist $|AB| = c = a + b - 2r$, also $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Es ist zu zeigen, dass $a + b - c$ geradzahlig ist, wenn a, b, c ganzzahlig sind. Es gilt im rechtwinkligen Dreieck ABC : $a^2 + b^2 = c^2$. Daraus folgt: Falls c gerade ist, dann sind entweder a und b beide gerade oder a und b sind beide ungerade – beide Male ist $a + b - c$ gerade; falls c ungerade ist, dann ist eine der Zahlen a, b gerade, die andere ungerade und wieder ist beide Male $a + b - c$ gerade.

Aufgabe 853. Pyramidenschnitt *

Auf einem Tisch stehen drei Pyramiden mit Grundflächen G_1, G_2, G_3 und Höhen $H_1 < H_2 < H_3$. Eine Ebene soll parallel zur Tischfläche so gelegt werden, dass die Summe der Schnittflächen mit den Pyramiden gleich dem Mittelwert $M = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{3}$ ihrer Grundflächen ist. (WJB)

Lösung:

Wird eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe H von einer Ebene in der Höhe x mit $0 < x < H$ geschnitten, so verhalten sich die Abmessungen der Schnittfläche zu denen der Grundfläche wie $H - x$ zu H . Die Fläche verhält sich also zu G wie $(H - x)^2$ zu H^2 . Daraus ergibt sich für die Summe der Schnittflächen

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = G_1 \left(1 - \frac{x}{H_1}\right)^2 + G_2 \left(1 - \frac{x}{H_2}\right)^2 + G_3 \left(1 - \frac{x}{H_3}\right)^2 & x \leq H_1 \\ S_2(x) = G_2 \left(1 - \frac{x}{H_2}\right)^2 + G_3 \left(1 - \frac{x}{H_3}\right)^2 & H_1 \leq x \leq H_2 \\ S_3(x) = G_3 \left(1 - \frac{x}{H_3}\right)^2 & H_2 \leq x \leq H_3 \\ 0 & H_3 \leq x \end{cases}$$

Offensichtlich ist S eine fallende Funktion von x und $S(0) > M > S(H_3)$. Somit ist die Aufgabe eindeutig lösbar. Dazu schreiben wir $S_j(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$ und lösen

zunächst die einfachsten der Gleichungen, also $a_3x^2 + b_3x + c_3 - M = 0$, d.h.

$$x = -\frac{b_3}{2a_3} \pm \sqrt{\frac{b_3^2}{4a_3^2} - \frac{c_3 - M}{a_3}} \quad \text{mit } a_3 = \frac{G_3}{H_3^2}, \quad b_3 = -2\frac{G_3}{H_3}, \quad c_3 = G_3.$$

Da $S(x) = M$ eine eindeutige Lösung besitzt, können nicht beide Lösungen der Gleichung zwischen H_2 und H_3 liegen. Liegt eine der Lösungen dort, so ist sie die Lösung des Problems. Liegt keine der beiden Lösungen zwischen H_2 und H_3 , so suchen wir die Lösungen der Gleichung $a_2x^2 + b_2x + c_2 - M = 0$ mit $a_2 = \frac{G_3}{H_3^2} + \frac{G_2}{H_2^2}$, $b_2 = -2\left(\frac{G_3}{H_3} + \frac{G_2}{H_2}\right)$, $c_2 = G_2 + G_3$. Wieder liegt höchstens eine der beiden Lösungen der Gleichung zwischen H_1 und H_2 . Falls ja, so ist diese die Lösung des Problems, falls nicht, müssen wir auch noch die erste der drei Gleichungen lösen.

Bemerkung: In welcher Reihenfolge man die drei Gleichungen $S_j(x) - M = 0$, $j = 1, 2, 3$, löst, ist unwichtig. Sobald man eine Lösung im richtigen Intervall gefunden hat, ist man fertig.

Erratum zu Heft 80 bzw. 81

In der Aufgabe 846 „Gemeinsame Nullstellen“ wurde die Funktion $g(x)$ falsch angegeben. Sie sollte eigentlich

$$g(x) = ax^3 + (13a - 3a^2)x^2 - (39a^2 + 30a)x + 90a^2$$

heißen. Auf diese Funktion passt dann auch die in Heft 81 wiedergegebene Lösung.

Dagegen lautet die Lösung für die Aufgabe, wie sie in Heft 80 gestellt und in Heft 81 wiederholt wurde:

Die Funktion f hat die Nullstellen 2 und -15 (z.B. mit p - q -Formel). Setzen wir 2 in $g(x)$ ein und bestimmen a aus $g(2) = 0$, so ergibt sich $a = 0$ oder $a = 91/51$. Für $a = 0$ ist g das Nullpolynom, das ganz $\mathbb{R}$ als Nullstellenmenge hat und sicher nicht in Betracht kommt. Für $a = 91/51$ ist jedoch $g(-15) = -118300/17$ und somit nicht 0. Man kann also a **nicht** so wählen, dass die Nullstellenmengen von f und g übereinstimmen.

Erratum zu Heft 81

Auf S. 25, Lösung zu Aufgabe 843, Formel (2) muss es heißen:

$$(2) \quad U = 9h - 2 \cdot 3d_1.$$

Logisch oder doch nicht?

Man kann Aussagen formulieren, so dass die Aussage und ihre Verneinung zugleich wahr sind.

Wenn du meinst, so etwas gibt es nicht, versuch's trotzdem einmal! (H.F.)

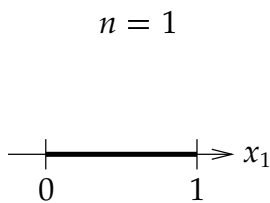
Lösung:

Aussage A: Dieser Satz, den du soeben liest, besteht aus zehn Wörtern.
Verneinung von A: Dieser Satz, den du soeben liest, besteht nicht aus zehn Wörtern.

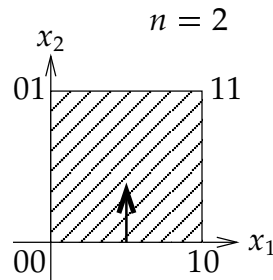
Aufstieg in höhere Dimensionen

von Helmut Rössler, Speyer

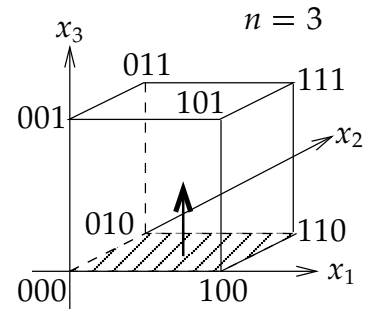
Die Maßgebilde Einheits-Strecke, -Quadrat, -Würfel der ersten drei Dimensionen sind dir wohl bekannt; messen wir doch Längen, Flächen- und Rauminhalte mit m , m^2 bzw. m^3 . Wie der Übergang zur nächsten Dimension vor sich gehen kann, soll nun anhand der drei vorliegenden Maßgebilde untersucht und dann auf beliebige höhere Dimensionen ausgedehnt werden.



Figur 1



Figur 2

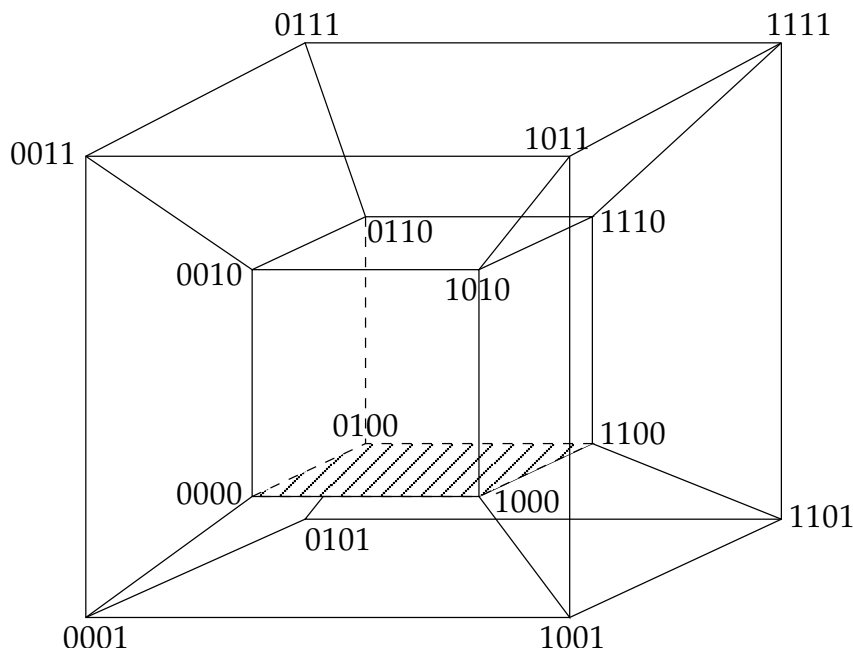


Figur 3

Wir überblicken die Dimensionen 1 bis 3 und stellen fest:

1. Es gibt n Achsen, die ab $n = 2$ den Nullpunkt 0 gemeinsam haben und dort paarweise aufeinander senkrecht stehen.
2. Bei den n Koordinaten der Ecken des Maßgebildes kommen nur 0 und 1 vor.
3. Von jeder seiner Ecken gehen n Kanten der Länge 1 aus, die ab $n = 2$ paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Wie erfolgt nun der Übergang zur nächsthöheren Dimension? Stets wie bei den Dimensionen 1 bis 3 ! Das alte Maßgebilde bleibt. Eine Kopie von ihm schieben wir in Richtung der neuen Achse um die Einheitsstrecke in die neue Dimension hinein. An die alten Ecken kommt rechts noch eine Koordinate 0, an die neuen Ecken noch eine 1. Die „Verschiebungs-Spuren“ der verschobenen Ecken sind ebenfalls neue Kanten. Da sich jeweils die Eckenzahl verdoppelt und es zwei Ecken für $n = 1$ gibt, erhalten wir für die Eckenzahl des n -dimensionalen Maßgebildes: $e_n = 2^n$.



Figur 4:
Das 4-dimensionale
Maßgebilde

Jetzt steigen wir nach diesem Plan in den 4-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^{(4)}$ ein. Wir verschieben den Einheits-Würfel um die Einheitsstrecke in Richtung der neuen 4. Achse und erhalten dann ein 4-dimensionales Gebilde mit $8 + 8 = 16$ Ecken und $12 + 12 + 8 = 32$ Kanten, dessen zweidimensionales Schrägbild so aussieht (Figur 4). Unsere Vorstellungskraft wird dabei ganz schön strapaziert! Haben doch alle Strecken die Länge 1; ferner bilden an jeder Ecke je zwei Kanten, die von ihr ausgehen, einen 90° -Winkel. Siehst du auch alle Quadrate und Würfel der Figur? Letztere erscheinen – vom alten und verschobenen Würfel abgesehen – als quadratische Pyramidenstümpfe, deren Seitenflächen in Wirklichkeit Quadrate sind. Bei etwas Konzentration findest du $2 + 6 = 8$ Würfel, sowie $6 + 6 + 12 = 24$ Quadrate. Insgesamt also 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadrate und 8 Würfel.

Wir tragen die bisherigen Ergebnisse in die folgende Tabelle ein:

Dimension n	1	2	3	4	...
Eckenzahl e_n	2	4	8	16	...
Kantenzahl k_n	1	4	12	32	...
Quadratzahl q_n	-	1	6	24	...
Würfelzahl w_n	-	-	1	8	...
Zellenzahl z_n	-	-	-	1	...

In den Spalten der Tabelle entdeckst du noch etwas. Die *Summe der Zahlen in jeder Spalte* ist nämlich 3^n , also eine *Dreierpotenz* (3, 9, 27, 81). Das ist natürlich kein Zufall. Die Begründung dafür finden wir, wenn wir jetzt die *allgemeinen Formeln* für e_n , k_n , q_n und w_n aufstellen. Wir haben bereits $e_n = 2^n$ (1. Zeile). Nun zu k_n : Von jeder Ecke gehen n Kanten aus; 2^n Ecken gibt es, also zunächst $n \cdot 2^n$ Kanten. Aber weil so jede Kante doppelt erfasst wird (von jedem der beiden Eckpunkte aus), muss noch durch 2 dividiert werden. Somit ist $k_n = n \cdot 2^{n-1}$.

Entsprechend bei q_n : Je zwei von einer Ecke ausgehende Kanten bestimmen ein Quadrat. Das wären zunächst $\binom{n}{2} \cdot 2^n$ Quadrate. Weil so aber jedes Quadrat 4-fach erfasst wird (von jeder seiner Ecken aus), ist noch durch $4 = 2^2$ zu dividieren. Also $q_n = \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$. Und weiter so: $w_n = \binom{n}{3} \cdot 2^{n-3}$ usw. bis $\binom{n}{n} \cdot 2^{n-n} = 1$.

Ergebnis: Beim n -dimensionalen Maßgebilde ist die Summe der Anzahlen aller bei ihm vorkommenden Elemente (Ecken, Kanten, Quadrate, ...)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} = 2^n + n \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot 2^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot 2^1 + 1 = (2 + 1)^n = 3^n$$

Ecken, Kanten, Quadrate, Würfel, ... (Binomischer Lehrsatz!)

Noch eine kleine **Aufgabe**: Für welche n kommen in der zugehörigen Spalte der Tabelle zwei untereinander stehende gleich große Anzahlen vor (wie z.B. bei $n = 2$) ?

Lösung:

Das 5-dimensionale Maßgebilde beispielsweise hat 80 Kanten und 80 Quadrate.
 der Folge 2, 5, 8, 11, ...
 n ist demnach ein Element der arithmetischen Folge $(3i + 2)_{i=0,1,2,\dots}$, also ein Element
 wir $(i + 1) \cdot 2 = n - i$, also $n = 3i + 2$, wobei $i = 0, 1, 2, \dots$
 wir beide Seiten mit $(i + 1) \cdot i!$ und dividieren dann durch $i! \cdot 2^{n-i-1}$, so erhalten
 Multiplizieren $\frac{(i+1) \cdot i!}{i! \cdot 2^{n-i-1}} = \frac{(i+1) \cdot i!}{i! \cdot 2^{n-i-1}} = \frac{(i+1) \cdot i!}{i! \cdot 2^{n-i-1}}$ gelten. Dies bedeutet
 Wenn in der n -ten Spalte in den Zeilen i und $i + 1$ dieselbe Anzahl stehen soll, muss

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Douglas Adams: „Per Anhalter durch die Galaxis“

Passend zum Kinostart der Verfilmung von Douglas Adams „Per Anhalter durch die Galaxis“ soll hier das zugrundeliegende Buch vorgestellt werden. Es handelt sich dabei um den ersten Band einer insgesamt fünfbändigen Trilogie, womit bereits alles über die Ernsthaftigkeit des Werkes ausgedrückt ist. Falls man schon immer wissen wollte, warum viele Mathematiker anfangen zu kichern, falls sie bei der Berechnung einer Aufgabe das Ergebnis „42“ erhalten, ist man beim richtigen Buch angelangt.

Die Science-Fiction-Parodie „Per Anhalter durch die Galaxis“ erzählt die Geschichte des Erdenbewohners und Hausbesitzers Arthur Dent, dessen Haus und Heimatplanet jeweils einer Umgehungsstraße weichen müssen. Arthur Dent wird jedoch durch seinen Freund Ford Prefect gerettet, der von einem kleinen Planeten in der Nähe der Beteigeuze stammt. Ford ist auf einer Recherchetour für den durch und durch bemerkenswerten, bei den großen Verlagen von Ursa Minor erscheinenden Reiseführer „Per Anhalter durch die Galaxis“, der populärer ist als „Der Himmlische Heimschützer-Almanach“ und sich besser verkauft als die „Encyclopaedia Galactica“. Nach einigen Unannehmlichkeiten gelangen die beiden in das nagelneue mit dem Unendlichen Unwahrscheinlichkeitsdrive ausgestattete Raumschiff „Herz aus Gold“, wo sie auf Zaphod Beeblebrox, die von der Erde stammende, in Mathematik und Astrophysik promovierte Tricia McMillan (Trillian) und den depressiven Roboter Marvin treffen. Gemeinsam erleben die fünf einige Abenteuer und erhalten die Antwort auf die Große Frage nach dem Leben, dem Universum und allem. . .

Eine Schülerbeurteilung des Buches kommt zu dem folgenden Ergebnis: „Wer schon immer mal wissen wollte, wie ein Pangalaktischer Donnergurgler wirkt oder wer sich über den Sinn des Lebens und des Universums den Kopf zerbricht, sollte das Buch auf jeden Fall lesen.“

Fazit: „Per Anhalter durch die Galaxis“ hat zwar nicht sehr viel mit wirklicher Mathematik zu tun, ist aber unter Mathematikern und Physikern sehr populär. Beginnt man die Science-Fiction-Parodie zu lesen, so gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder verschlingt man begeistert alle fünf Bände oder man wirft das Buch spätestens, wenn man auf Seite 42 angelangt ist, entgeistert in die Ecke.

Der Rezensent hat sich für die erste Variante entschieden und kommt damit zur

Gesamtbeurteilung: sehr gut 😊😊😊

Angaben zum Buch:

Douglas Adams: Per Anhalter durch die Galaxis.

Heyne 1998, ISBN 3-45314697-2, TB 204 Seiten, 6,95 €.

Art des Buches: Science Fiction Parodie

Mathematisches Niveau: leicht verständlich

Altersempfehlung: ab 14 Jahren

Martin Mattheis

Delannoy-Zahlen und fraktale Zahlenteppiche

Ein Beitrag zu Jugend Forscht 2005

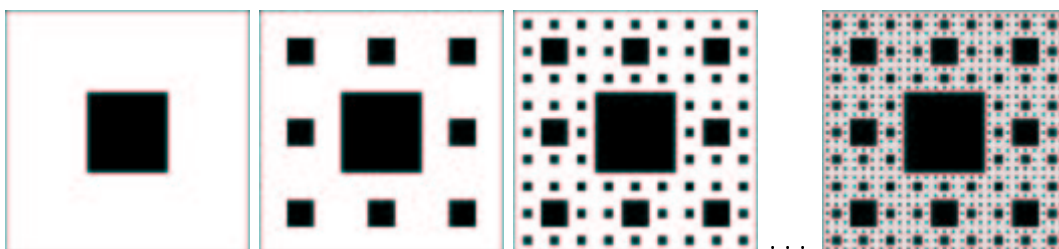
von Stefan Müller-Stach

Der Bundeswettbewerb *Jugend forscht* fand 2005 zum vierzigsten Mal statt. Am 29. Mai wurden die Bundessieger in Dortmund ausgezeichnet. Im Bereich Mathematik/Informatik gab es 5 Preise:

- 1. Preis: Jewgeni Strekalowski (Thüringen): **Dreiecksfolgen und ihre Grenzpunkte**
- 2. Preis: Thomas Bünger und Tobias Grelle (Berlin): **Rekonstruktion von 3D-Objekten aus Videofilmen**
- 3. Preis: Philipp Hülsdunk (Hessen): **Punkte und Figuren**
- 4. Preis: Jeremias Epperlein (Sachsen): **Kompressionsalgorithmen für die Burrows-Wheeler Transformation**
- 5. Preis: Alexandra Julier und Christina Flörsch (Rheinland-Pfalz): **Delannoy-Zahlen und fraktale Strukturen – Motten auf dem Zahlenteppich**

Wir gratulieren alle Siegern herzlich! An dieser Liste fällt besonders auf, dass die Mathematik sehr stark vertreten ist. Wenn man sich die Arbeiten auf der Webseite des Wettbewerbs (<http://www.jugend-forscht.de>) genauer ansieht, erkennt man auch die mathematische Stärke dieser preisgekrönten Arbeiten. Es freut mich besonders, dass diesmal eine Arbeit aus der Zahlentheorie mit dem 5. Preis geehrt wurde, zumal es sich bei einer der beiden Preisträgerinnen (Christina Flörsch) auch um eine Monoidautorin handelt, die in Heft 81 bereits über pythagoräische Tripel im Rahmen einer anderen Wettbewerbsarbeit berichtete. Diese Präsenz der Mathematik freut uns alle sehr, und ich hoffe, dass diese Erfolge viele andere Schüler zum Mitmachen anregen. Eine Teilnahme bei *Jugend forscht* bietet vor allem die Freiheit, sich ein Forschungsthema selbst suchen zu können. Alle, die dieses Heft lesen, rege ich an, den weiteren Erfolg zu fördern. In diesem Essay möchte ich über die Arbeit von Alexandra Julier und Christina Flörsch vom Max-Slevogt Gymnasium in Landau berichten. Sie wurden von Dr. Albrecht Schulz betreut.

Der Sierpiński-Teppich wurde von Waclaw Sierpiński (1882–1969) erfunden: Aus einem Quadrat mit weißem Hintergrund wird das mittlere Neuntel entfernt und durch ein schwarzes Quadrat ersetzt. Auf den verbleibenden 8 quadratischen Feldern wird der gleiche Prozess fortgesetzt. Setzt man den Prozess bis ins Unendliche fort, so ergibt sich ein sogenanntes Fraktal [vgl. MONOID Nr. 80, S. 33-35]:



Diese Methode überfordert das Auge schnell, da man die Grafik nicht mehr auflösen kann. Vergrößert man jedoch einen Ausschnitt, so kann man weiter in das Bild hineinsehen. Durch kontinuierliches Hineinzoomen ergibt sich sogar eine visuelle Fahrt ins Unendliche. Diese Eigenschaft der Selbstähnlichkeit ist charakteristisch für Fraktale, deshalb werden sie auch zur Beschreibung von komplizierten Objekten wie z.B. Küstenlinien herangezogen. Die Delannoy-Zahlen liefern ebenfalls eine Konstruktion eines selbstähnlichen Teppichs, wobei diesmal der Teppich ins Unendliche wächst, d.h. man geht den umgekehrten Weg wie bei Sierpiński. Henri Auguste Delannoy (1833–1915) war ein französischer Offizier, der an der École Polytechnique ausgebildet wurde und eine Reihe von interessanten mathematischen Arbeiten verfasste, siehe [BS]. Die von ihm erfundenen Delannoy-Zahlen sind nach dem Bildungsgesetz

$$d_{a,b} = d_{a-1,b} + d_{a,b-1} + d_{a-1,b-1}$$

mit $d_{0,0} = 1$ und $d_{0,b} = d_{a,0} = 1$ rekursiv definiert, d.h. jede Zahl ist die Summe der nord-, west- und nordwestlich stehenden Zahl, wenn man diese Zahlen im zweiten Quadranten wie folgt einträgt:

1	1	1	1	1
1	3	5	7	9
1	5	13	25	41
1	7	25	63	129
1	9	41	129	321

Die Theorie der Delannoy-Zahlen wird bereits 1891 in einem Buch von Lucas [L] behandelt. Er zeigt darin, dass Delannoy-Zahlen die Symmetrie $d_{a,b} = d_{b,a}$ erfüllen und durch die Formel

$$d_{a,b} = \sum_{\ell=0}^b \binom{a+b-\ell}{b} \binom{b}{\ell}$$

beschrieben werden. Die Symmetrie folgt einfach aus dem Baugesetz und die Formel ist leicht mit Hilfe der Rechenregeln für Binomialkoeffizienten zu zeigen. Alle $d_{a,b}$ sind ungerade, da immer drei ungerade Zahlen addiert werden. Die frappierendste Eigenschaft der Zahlen $d_{a,b}$ aber ist die Tatsache, dass sie die Anzahl aller Wege vom Ausgangspunkt $(0,0)$ in der linken oberen Ecke zum Platz (a,b) der Zahl $d_{a,b}$ angeben, wobei die Wege nur in südlicher, östlicher oder südöstlicher Richtung einfach durchlaufen werden dürfen. Dies folgt leicht, da der Platz (a,b) genau von den Plätzen $(a-1,b)$, $(a,b-1)$ und $(a-1,b-1)$ in jeweils einem Schritt erreicht werden kann. Ist $a = b$, so nennt man die Zahl $d_{a,a}$ aus offensichtlichen Gründen die Anzahl der Königswege der Länge a .

Diese letzte Eigenschaft teilen die Delannoy-Zahlen mit den Zahlen im Pascalschen Dreieck, denn $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Wege von der Spitze 1 zu $\binom{n}{k}$ durch das Pascalsche Dreieck, wenn man nur abwärts geht, entweder rechts oder links abzweigend:

				1																				
					1																			
						1	2	1																
							1	3	3	1														
								1	4	6	4	1												
									1	5	10	10	5	1										
										1	6	15	20	15	6	1								
											1	7	21	35	35	21	7	1						
												1	8	28	56	70	56	28	8	1				
													1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
														1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Es gibt eine sehr elegante Identität für die Delannoy-Zahlen:

$$\sum_{a,b=0}^{\infty} d_{a,b} x^a y^b = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

Entwickelt man nämlich die rechte Seite mit Hilfe der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x-y-xy} &= 1 + (x+y+xy) + (x+y+xy)^2 + (x+y+xy)^3 + \dots \\ &= 1 + x + y + x^2 + 3xy + y^2 + \dots, \end{aligned}$$

so sammelt das Monom $x^a y^b$ gerade so viele Koeffizienten an, wie man Wege von $(0,0)$ nach (a,b) hat. Hierbei entspricht x bzw. y einem achsenparallelen und xy einem diagonalen Wegstück.

Was hat dies alles mit Sierpiński–Teppichen zu tun? Ich zitiere aus der Einleitung der Arbeit von Julier/Flörsch [JF]:

Die Delannoy-Zahlen tauchen am Ende des 19. Jahrhunderts in einem Buch des französischen Mathematikers Édouard Lucas auf, das es heute wieder in Reprint-Form gibt [L]. Ähnlich wie die Zahlen des Pascalschen Dreiecks ergeben sich die Delannoy-Zahlen aus zwei unendlichen Einserreihen und einer bestimmten Additionsregel. ... Die Delannoy-Zahlen werden dann interessant, wenn man statt ihrer die Reste bezüglich einer festen Primzahl aufschreibt. Bei Färbung bestimmter Reste ergeben sich fraktale Muster. ...

In [JF] werden auch die Zeilensummen im Pascalschen Dreieck mit den Diagonalsummen bei den Delannoy-Zahlen verglichen. Insgesamt ergibt sich eine tolle aber elementare Analogie zum Pascalschen Dreieck. Der nicht so elementare Teil der Arbeit [JF] beschäftigt sich mit der fraktalen Struktur der Delannoy-Zahlen, wenn man die Felder bei fest vorgegebener Primzahl $p \geq 3$ einfärbt, sobald die Zahl $d_{a,b}$ durch p teilbar ist. Konkret bedeutet dies, dass man den gesamten Zahlenteppich $d_{a,b}$ modulo p berechnet und alle Felder färbt, die kongruent zu 0 modulo p sind. Man bezeichnet als Urzelle das Quadrat aller $d_{a,b}$ mit $0 \leq a, b \leq p-1$, eine $p \times p$ -Matrix. Die Sierpiński–Eigenschaft ergibt sich dann mittels folgendem Satz:

Satz 1 (Julier/Flörsch) *Die Urzellen und ihre Vielfachen der Größe $p^m \times p^m$ haben die Eigenschaft, dass sie sich in südlicher und östlicher Richtung stets wiederholen.*

Die wesentliche Idee dabei ist, dass man größere Einheiten im Zahlenteppich wieder durch Matrizen darstellen kann und diese wiederum das gleiche Muster ergeben. Hier ist A eine Urzelle bzw. eine größere Wiederholung und die Koeffizienten sind wieder die Delannoy-Zahlen:

A	A	A	A	A
A	3A	5A	7A	9A
A	5A	13A	25A	41A
A	7A	25A	63A	129A
A	9A	41A	129A	321A

Der Beweis in [JF] ist eine geschickte Kombination aus Symmetrieargumenten und Summenformeln. Ein Beispiel mit $p = 3$ ist

1	1	1	1	1	1
1	0	2	1	0	2
1	2	1	1	2	1
1	1	1	0	0	0
1	0	2	0	0	0
1	2	1	0	0	0

mit der Urzelle A :

1	1	1
1	0	2
1	2	1

Soweit die mathematische Theorie. Es beginnt wirklich Spaß zu machen, wenn man nun die Zahlen-Teppiche einfärbt. Ist für ein Feld (a, b) die Zahl $d_{a,b}$ durch p teilbar, so färbt man es in einer Farbe oder schwarz ein, die restlichen Felder belassen wir weiß. Auf diese Weise entsteht gemäß unseren bisherigen Betrachtungen ein fraktaler Teppich. Julier/Flörsch haben dies mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms verwirklicht. Ich habe stattdessen ein kleines Python-Programm geschrieben, welches ein Gif-Bild `out.gif` erzeugt:

Delannoy-Zahlen modulo p in Python (<http://www.python.org>):

```
import Image
import ImageDrawmod=13

size=169im = Image.new("P", (size, size), 0)

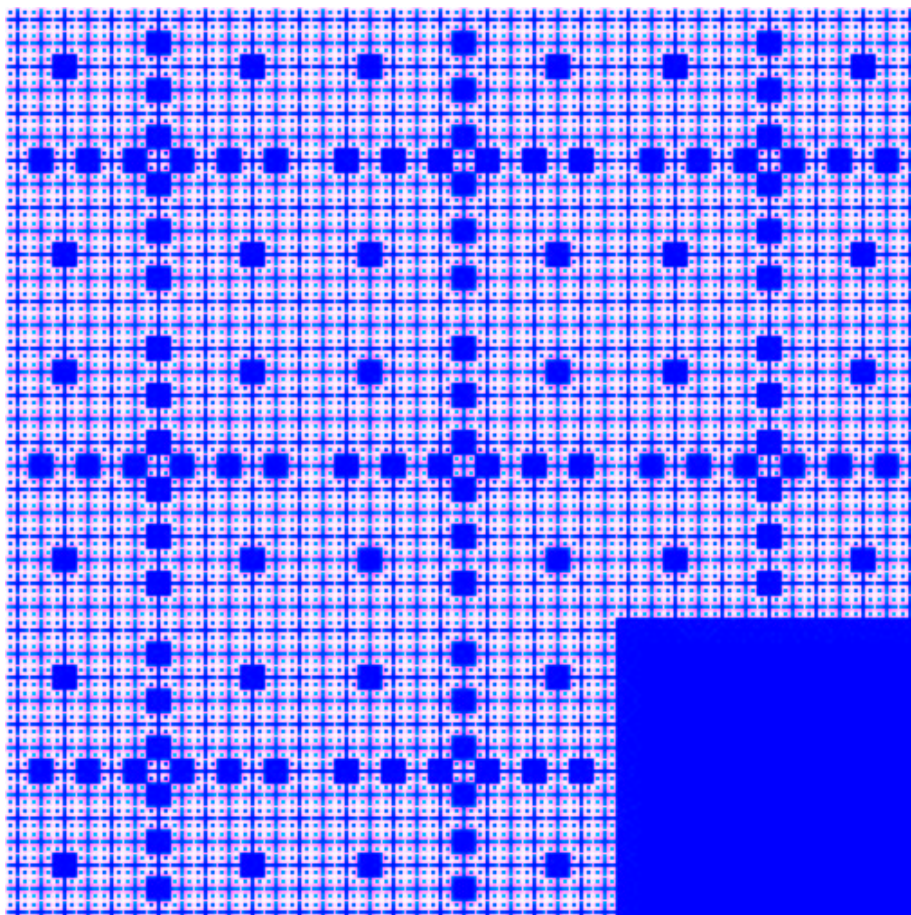
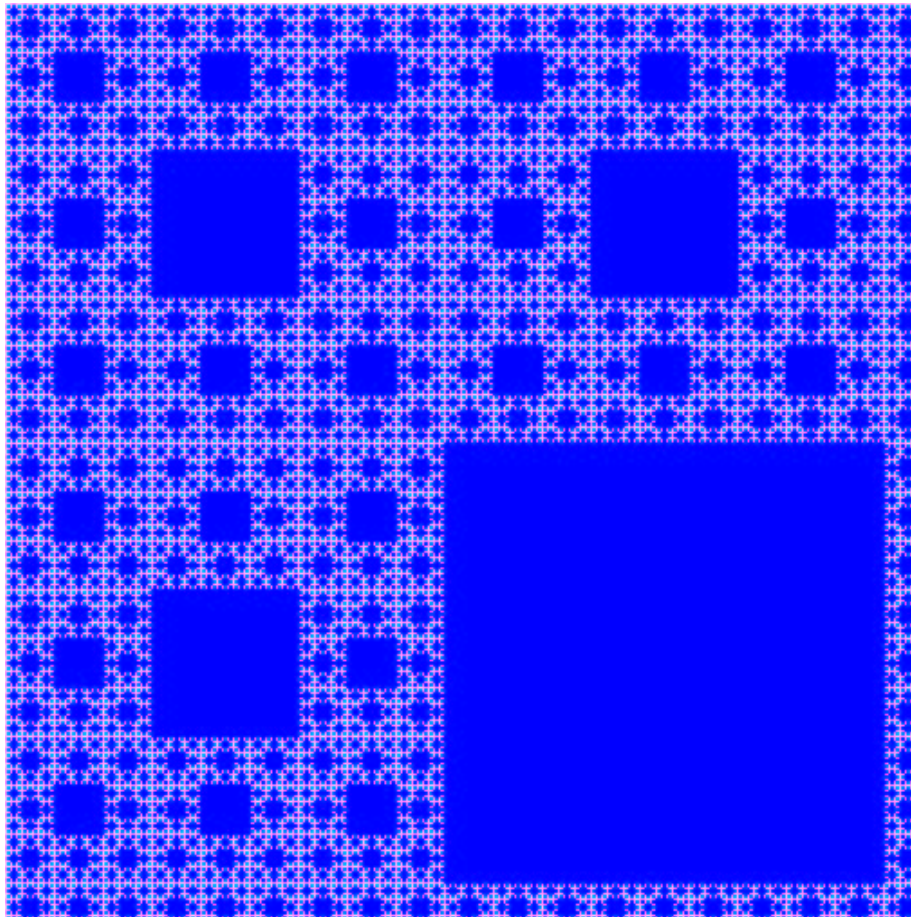
im.putpalette([
    255, 255, 255, # black background
    255, 0, 0, # index 1 is red
    255, 255, 0, # index 2 is yellow
    255, 153, 0, # index 3 is orange
])d = ImageDraw.ImageDraw(im)

d.setfill(1)
d.setink(1) list_old=[1]

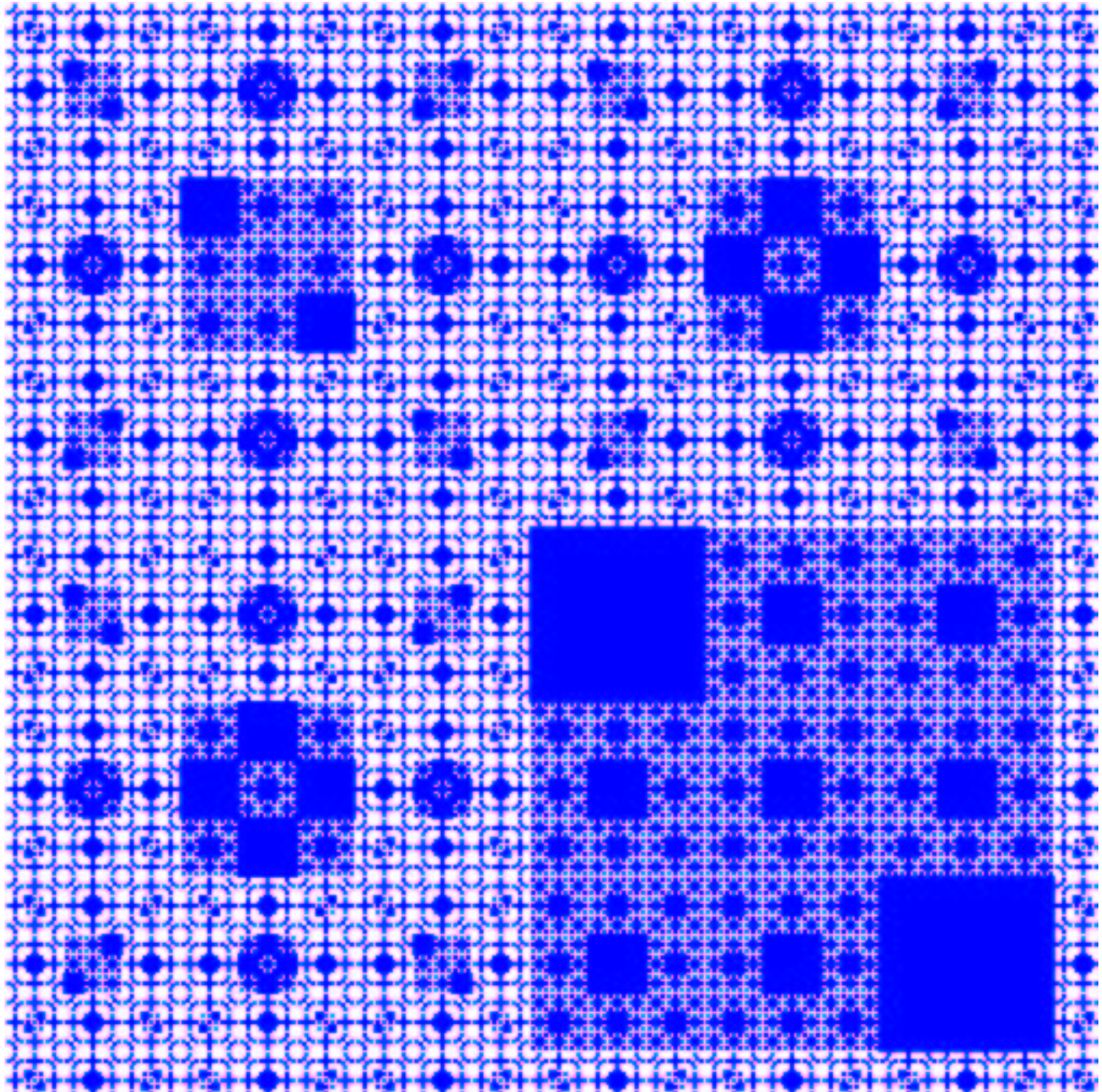
for k in range (1,size+1):
    list_old.append(1)
list_new=[1]
for a in range (1,size+1):
    for b in range (1,size+1):
        z=(list_old[b-1]%mod+list_old[b]%mod+list_new[b-1]%mod)%mod
        list_new.append(z)
        if z==0:
            d.rectangle((a,b,a+1,b+1))
    list_old=list_new
list_new=[1] im.save("out.gif")
```

Das Programm erfordert die Python-Imaging Library (siehe Links auf www.python.org).

Hier sind einige Kostproben für $p = 3$ und $p = 29$:



Man kann natürlich auch den Fall untersuchen, dass p eine zusammengesetzte Zahl ist, siehe [JF]. Dann treten Symmetriebrüche auf, die aber die Bilder noch viel interessanter machen. Hier ist ein Beispiel für $p = 9$:



Literaturverzeichnis

- [BS] C. BANDERIER UND S. SCHWER: *Why Delannoy Numbers?*,
siehe <http://www-lipn.univ-paris13.fr/~banderier/#Articles>.
- [JF] A. JULIER UND CH. FLÖRSCH:
Delannoy-Zahlen und fraktale Strukturen: Motten auf dem Zahlenteppich,
E-Mail: alexandra@kkk-moerlheim.de und christina.floersch@web.de.
- [L] É. LUCAS: *Théorie des Nombres*,
Verlag Jaques Gabay, Sceaux 1991, Original: Gauthier–Villars, Paris 1891.

Differenzengleichungen

von Wolfgang J. Bühler

1. Die Fibonacci-Folge

In MONOID 73 (März 2003) kommt zweimal die Fibonacci-Folge vor, einmal als das ursprüngliche Modell, das Leonardo da Pisa schon im 13. Jahrhundert für die Entwicklung einer Kaninchenpopulation formulierte, einmal als Modell für die Anzahl der Vorfahren einer Drohne (männlichen Biene) vor n Generationen.

Die Fibonacci-Folge ist bestimmt durch die Rekursionsgleichung

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Man rechnet leicht aus, dass sie so beginnt:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377.

Offensichtlich wächst sie ins Unendliche, aber wie schnell?

Dazu berechnen wir die Quotienten $q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ und erhalten als Anfang dieser Folge (gerundet)

1; 2; 1,5; 1,667; 1,625; 1,615; 1,619; 1,618; 1,618; ...

Dies lässt vermuten, dass die Quotientenfolge gegen einen Wert in der Nähe von 1,618 konvergiert.

Wir dividieren nun die Rekursionsgleichung (1) durch F_n :

$$q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}.$$

Falls die Folge (q_n) tatsächlich konvergiert, nennen wir ihren Grenzwert q und erhalten damit $q = 1 + \frac{1}{q}$. Hieraus ergibt sich die quadratische Gleichung $q^2 - q - 1 = 0$ mit den Lösungen $\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Wegen $\sqrt{5} > 2$ ist die Lösung $\rho_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ negativ, kann also nicht das gesuchte q sein; $\rho_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ hat den Wert 1,61803..., was die obige Vermutung zu bestätigen scheint.

Vorsicht: Es fehlt uns der Nachweis, dass die Quotientenfolge tatsächlich konvergiert. Wir haben nur gezeigt, dass $q = \rho_1$ der Grenzwert ist, falls sie einen Grenzwert besitzt.

2. Verallgemeinern und Spezialisieren

Wir wollen nun allgemeiner eine Rekursion der Form

$$x_{n+1} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_l x_{n-l} \quad (n = l, l+1, \dots) \quad (2)$$

mit $a_l \neq 0$ betrachten. Wenn wir in einer solchen Differenzengleichung die Anfangsbedingungen $x_0, x_1, \dots, x_l$ kennen, so ist durch (2) die gesamte Folge bestimmt.

Einen Hinweis darauf, wie sich solche Folgen für wachsende n verhalten, finden wir, indem wir zunächst spezialisieren auf den einfachsten Fall, d.h. $l = 0, a_0 = \rho$, also $x_{n+1} = a_0 x_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Mit der Anfangsbedingung $x_0 = A$ ergibt sich $x_1 = A\rho, x_2 = A\rho^2, x_3 = A\rho^3, \dots, x_n = A\rho^n$.

Wir fragen uns, ob auch (2) eine Lösung der Form $x_n = A\rho^n$ besitzt mit einem $\rho \neq 0$. Speziell setzen wir $A = 1$. Mit dem Ansatz $x_n = \rho^n$ wird aus (2) die Gleichung

$$\rho^{n+1} = a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + \dots + a_l\rho^{n-l}$$

und nach Division durch ρ^{n-l} die „charakteristische“ Gleichung

$$\rho^{l+1} - a_0\rho^l - a_1\rho^{l-1} - \dots - a_{l-1}\rho - a_l = 0. \quad (3)$$

$x_n = \rho^n$ ist also genau dann eine Lösung zu (2), wenn ρ eine Lösung von (3) ist. Mehr noch: Sind $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_j$ Lösungen von (3), so ist $x_n = b_1\rho_1^n + b_2\rho_2^n + \dots + b_j\rho_j^n$ Lösung der Differenzengleichung (2). Man kann zeigen, dass jede Lösung von dieser Form ist, wenn (3) l verschiedene Lösungen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ besitzt.

3. Der Fall $l = 1$

Wir betrachten nun den Fall einer echten zweistufigen linearen Rekursion mit $l = 1$ (zu dem auch die Fibonacci-Folge gehört), also Differenzengleichungen der Form

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \quad \text{mit } a \neq 0, b \neq 0. \quad (4)$$

Schon in diesem Fall kann man alles Wesentliche beobachten, was im allgemeinen Fall vorkommen kann.

Die „charakteristische“ Gleichung (3) lautet jetzt

$$\rho^2 - a\rho - b = 0. \quad (5)$$

a) Zunächst studieren wir den Fall, dass (5) zwei verschiedene reelle Lösungen ρ_1 und ρ_2 besitzt. Wir wissen schon, dass dann jede Folge

$$x_n = A\rho_1^n + B\rho_2^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

eine Lösung von (3) ist. Wir geben uns die Anfangsbedingungen $x_0 = y, x_1 = z$ vor und lösen die Gleichungen $y = A\rho_1^0 + B\rho_2^0 = A + B, z = A\rho_1 + B\rho_2$ auf zu $A = \frac{y\rho_2 - z}{\rho_2 - \rho_1}$ und $B = \frac{z - y\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$. Zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, x_1) = (y, z)$ gibt es also Werte A und B , für die (6) die Anfangsbedingung erfüllt. Also liefert (6) die Gesamtheit *aller* Lösungen von (4).

Ist nun (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) $|\rho_1| > |\rho_2|$, so konvergiert $(\rho_2/\rho_1)^n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0, und wir finden (außer wenn $A = 0$): $\frac{x_n}{\rho_1^n} = A + B \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen A und

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A\rho_1^{n+1} + B\rho_2^{n+1}}{A\rho_1^n + B\rho_2^n} = \frac{A\rho_1^{n+1} \left(1 + \frac{B}{A} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n+1}\right)}{A\rho_1^n \left(1 + \frac{B}{A} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n\right)} = \rho_1 \cdot \frac{1 + \frac{B}{A} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{B}{A} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_1.$$

Im Fall $A = 0$ gilt $\frac{x_n}{\rho_2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ und $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_2$. Damit haben wir auch die Konvergenz der Fibonacci-Folge nachgewiesen, denn diese ist ein Spezialfall von (4) mit $a = b = 1$.

b) Hat die charakteristische Gleichung (5) keine reelle Lösungen, so sind die beiden Lösungen komplexe Zahlen $\rho_1 = u + iv$ und $\rho_2 = u - iv$. Auch in diesem Fall kann man durch geeignete Wahl von A und B in (6) jede Anfangsbedingung realisieren, d.h. (6) gibt wieder die Gesamtheit aller Lösungen. Allerdings darf man jetzt nicht die Konvergenz der Folgen x_n/ρ_1^n oder x_{n+1}/x_n erwarten.

c) Hat (5) eine „doppelte“ reelle Lösung ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), so sind die Lösungen von (6) von der Gestalt $x_n = (A + Bn)\rho^n$.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

Mit dem vorliegenden Heft, dem letzten, für das sich Punkte ergattern lassen, die in die Wertung für die MONOID-Preisvergabe am **26. November 2005** am Karolinen-Gymnasium in Frankenthal eingehen (Termin bitte schon mal vormerken!), hoffen wir nicht nur wieder fesselnde Knobelaufgaben, sondern auch interessante Artikel anzubieten. Dabei freuen wir uns besonders, wenn neue Autoren zu dem bewährten Stamm hinzu kommen.

So hat uns Herr StD i.R. **Helmut Rössler** aus 67346 Speyer, Am Woogbach 38, bereits 2003 seinen Beitrag „Aufstieg in höhere Dimensionen“ zugeschickt; nun können wir endlich zeigen, wie ein vierdimensionaler Würfel (allerdings in einer zweidimensionalen Projektion) aussieht.

Herr Dr. **Stefan Müller-Stach**, Professor für Mathematik an unserem Institut (E-Mail: mueller-stach@mathematik.uni-mainz.de), arbeitet auf den Gebieten Algebra, Zahlentheorie und arithmetische Geometrie. Eine Verbindung von Arithmetik und fraktaler Geometrie stellt sein Beitrag „Delannoy-Zahlen und fraktale Zahlenteppiche“ dar, in dem er über ein Thema berichtet, mit dem Alexandra Julier und Christina Flörsch am Bundeswettbewerb *Jugend forscht* 2005 erfolgreich teilnahmen. (Herr Müller-Stach ist für das Institut für Mathematik Mitglied der Landes-Jury „Jugend forscht“.)-

Nun wünscht die MONOID-Redaktion noch allen Leser(inne)n und Löser(inne)n schöne und erholsame Sommerferien!

Ekkehard Kroll

Rubrik der Löser und Löserinnen (Stand: einschließlich Heft 80)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:

Kl. 5: Teresa Hähn 29, Bula Hauch 6, Elisabeth Koch 9, Patricia Petry 4, Kevin Schmitt 12;

Kl. 6: Martin Achenbach 19, Emma Braininger 8, Luisa Dörrhöfer 4, Annika Flick 15, Ramona Friedrich 5, Eduard Hauck 6, Larissa Hyar 5, Peter Machemer 3, Marina Matchlakowa 10, Alexander Maus 7, Philipp Mayer 25, Ann-Kristin Müller 4, Raphael Wetzel 8;

Kl. 7: Jonathan Peters 41, Lisa Simon 32, Julia Zech 32;

Kl. 9: Patricia Kastner 42, Johannes Merz 15;

Kl. 10: Markus Bassermann 16; **Kl. 13:** Manuel Ross 12.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:

Kl. 6: Lena Baum 14, Daniel Draper 16, Monja Reinmuth 14, Ann-Christin Ruhland 12, Désirée Schalk 52, Johanna Stimm 12;

Kl. 8: Sivana-Maria Clotan 48, Felix Liebrich 43, Martin Reinhardt 40, Jessica Tischbierek 11, Bettina Zimmermann 11.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):

Kl. 8: Thomas Geiß 34.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):

Kl. 6: Ossama Bassant 12, Dina Hamdy 8, Ahmed Malak 11, Sherif Nariman 3, Hosam Rana 11, Hossny Salma 5, Hassan Shaimaa 10, Mohamed Youmna 7.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:

Kl. 9: Christian Behrens 44, Martin Alexander Lange 34.

Bad Homburg: Kl. 10: Laura Biroth 9.

Beselich, Grundschule: Kl. 3: Marc Dinges 4.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):

Kl. 6: Marius Falkenhahn 15, Anna-Lena Herrmann 6, Alexander Möller 6;

Kl. 7: Angela Schmelz 9, Luisa Schmelz 2.

Eltville, Gymnasium (Betreuender Lehrer Markus Dillmann):

Kl. 7: Daniel Mayer 17, Hagen Söngen 17; **Kl. 9:** Ralf Jung 17.

Enger, Widukind-Gymnasium:

Kl. 5: Moritz Aschemeyer 13, Jan-Henrik Brandling 24, Lennart Dross 2, Florian Junklewitz 12, Christoph Lindemeier 5, Lena Militschke 14, Lisa Sophia Nigbur 2, Nicklas Reetz 2, Wilhelm Reger 5, Philipp Rüter 9, Niklas Rutz 4, Erik Saharge 7, Tobias Schlegel 8.

Eutin, Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium: Kl. 13: Lars Imsdahl 14.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):

Christoph Daum 4;

Kl. 5: Marius Burkhardt 9, Julian Roth 8, Philipp Wenzel 15; **Kl. 6:** Isabell Schardt 7;

Kl. 7: Corinna Dinges 32, Hannah Meilinger 29, Tatjana Mendt 4, Katharina Schmidt 5, Andreas Weimer 36, Johannes Weimer 28.

Halberstadt, Martineum: Kl. 8: Robert Hesse 28.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 7: Christoph Tietz 25.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Gerd Weber, Christoph Straub):

Kl. 7: Caroline Amin 4, Alia'a Ahmed Doma 42, Karin Emil 45, Marina Magdy 15, Heba Mandouh 20, Marina Morad 45, Sandra Waguih 17, Sylvia Zekry 18;

Kl. 9: Sherine Ali 6, Marina Ashraf 13, Alia el Bolock 24, Mariam Emad 19, Salma Mariam Ismail 40, Nadia Abou Shady 32, Marwa Talal 28;

Kl. 10: Lauren Emil 15, Nadine Gouda 16, Miriam Morad 18, Iman Tarek 14.

Kaiserslautern, Burggymnasium:

Kl. 10: Eduard Bierich 3, Kerstin Bonfica 3, Simone Gockel 3, Irina Herdt 3, Matthias Reis 3, Jonathan Zorner 3.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 10: Maximilian Mühlbacher 17.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:

Kl. 8: Thu Giang Nguyen 5; **Kl. 9:** Katharina Kober 30; **Kl. 10:** Christoph Karg 12;

Kl. 11: Claudia Mack 9, Judith Reinhardt 10, Adriana Spalwiz 3;

Kl. 12: Ulrich Koffler 6.

Magdeburg, Werner-von-Simens-Gymnasium: Kl. 10: Sebastian Schulz 18.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Mattheis):

Kl. 9: Ilja Fragin 17, Niklaas Baudet von Gersdorff 14, Jennifer Groß 15, Sabrina Groß 15, Cordula Rohde 13.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 4: Dorothea Winkelvoß 16.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):

Kl. 7: Stefanie Grünwald 24, Katharina Irmscher 24;

Kl. 9: Maike Bäcker 9, Natalie Geiß 12, Michaela Schuster 8.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 7: Florian Schweiger 71.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 10: Bernhard Saumweber 8.

München, Rupprecht-Gymnasium: Sigurd Vogler 2.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):

Kl. 6: Jennifer Elster 5, Katharina Hartmann 13, Kirsten Hubert 13, Marelina Kaules 6, Vivien Kohlhaas 32, Louisa Korbmacher 6, Lea Krause 6, Nora Mollner 26, Felicitas Pünder 9, Hannah Rohmann 6;

Kl. 7: Madeline Kohlhaas 39; **Kl. 9:** Daniela Leinsinger 5, Miriam Menzel 24;

Kl. 10: Annika Kohlhaas 44, Stefanie Tiemann 62.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium: Kl. 9: Martin Jöhlinger 9.

Nürnberg: Marion Heublein 7.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):

Kl. 5: Markus Bauch 7, Jan Biersack 4, Veronika Finke 6, Patricia Gierga 5, Romy Kaestner 5, Luisa Regina Keuscher 7, Philipp Krosion 9, Eveline Lipp 10, Gesa Musiol 12, Clara Nigratschka 10, Marie Oster 6, Heike Weber 12;

Kl. 6: Hannah Braun 15, Philipp Kalte 20, Jonas Köhler 14, Sabrina Kopp 13, Lars Thiel 12;

Kl. 7: Larissa Habbel 29, Franziska Metzler 8, Sarah Rosengarten 27, Viktoria Schreiber 8, Sophia Waldvogel 25, Valentin Walther 23;

Kl. 8: Annkatrin Weber 30; **Kl. 9:** Marie Jargeleit und Alicia Schwammborn 2;

Kl. 10: Sebastian Eckart 14; **Kl. 11:** Simon Bats 9.

Otterberg, Freie Waldorfschule: Kl. 7: Malte Meyn 34.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):

Kl. 5: David Feiler 29, Neal Graham 11, Jana Klaes 8, Korbinian Wester 12;

Kl. 8: Keven Runge 3.

Siegburg, Anno-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hachtel):

Kl. 12: Jan B. Boscheinen 25.

Speyer: Sergej Betcher (Bruder von Olga Betcher, 11. Kl. am Speyer-Kolleg) 8.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:

Kl. 6: Alexander Rettkowski 51; **Kl. 7:** Sina Bronkalla 9.

St. Goarshausen, Wilhelm-Hofmann-Gymnasium: Kl. 8: Julia Koch 12.

Weiterstadt: Kl. 11: Artjom Zern 14.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):

Kl. 5: Kira Bayer 3, Joel Jung 11, Emily Linn 36, Lukas Scheid 7;

Kl. 7: Sophie Schäfer 1, Philipp Thau 5; **Kl. 9:** Julia Jung 8, Sarah Tröbs 19;

Kl. 12: Verena Prägert 25.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium: Kl. 9: Charlotte Capitain 42.

Inhalt

An die Le(ö)ser	2
Hartwig Fuchs: Von regelmäßigen Vielecken, Kreuzen und Sternen.	3
Hartwig Fuchs: Was ist der Algorithmus von Jamblichos?	5
Theo de Jong: Archimedes und π	7
Hartwig Fuchs: Zwei Näherungsformeln für die Kreisfläche aus pharaonischer Zeit	9
Hartwig Fuchs: C. F. Gauß und die regelmäßigen n -Ecke	10
Ekkehard Kroll: Mit dynamischer Geometrie-Software von der „Hundekurve“ zur „Muschelkurve“	12
Die Seite für den Computer-Fan	16
Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 81	17
Neue Mathespielereien	21
Neue Aufgaben	23
Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 81	25
Helmut Rössler: Aufstieg in höhere Dimensionen	30
Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	32
Stefan Müller-Stach: Delannoy-Zahlen und fraktale Zahlenteppiche	33
Wolfgang J. Bühler: Differenzengleichungen	39
Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion	41
Rubrik der Löser(innen)/ Stand einschließlich Heft 80	41

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz

Mitglieder: Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Ehrenmitglied: Martin Mettler

Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe

Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Johannes Merz, Manuel Ross und Rebecca Zimmer

Zusammenstellung und Layout: Jens Mandavid **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen.**

Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

**Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.**

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität, Institut für Mathematik/Monoid-Redaktion, D-55099 Mainz; Tel. 06131/39-26107; Fax -24389

e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>