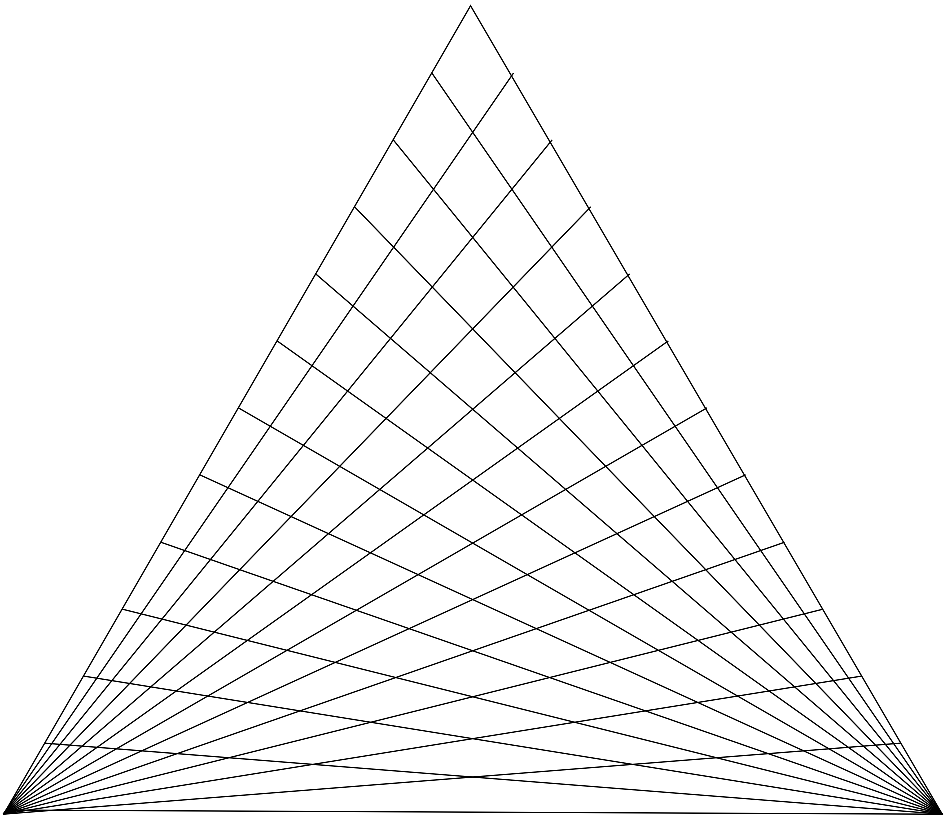
Jahrgang 25 Heft 83 September 2005

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen

1980 begründet von Martin Mettler;

gegenwärtig herausgegeben vom

Institut für Mathematik an der

Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)
Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.11.2005.**

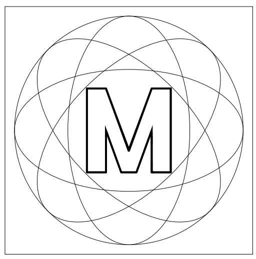
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**



Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Einladung
zur „25 Jahre MONOID“-Jubiläumsfeier

am 26. November 2005
im Karolinen-Gymnasium Frankenthal

Anlässlich der 200-Jahrfeier des *Karolinen-Gymnasiums* in Frankenthal im Jahre 1980 gab es auch einen schulinternen mathematischen Wettbewerb. Daraus entwickelte **Martin Mettler** die Schülerzeitschrift MONOID als „Mathematikblatt für Mitdenker“, von dem er 20 Jahrgänge selbst heraus gab - zunächst in Frankenthal, später beim *Elisabeth-Langgässer-Gymnasium* in Alzey, wohin Herr Mettler als Mathematiklehrer inzwischen gewechselt war. Seit 2001 erscheint MONOID mit vier Ausgaben pro Jahr beim *Fachbereich Mathematik und Informatik* der *Johannes Gutenberg-Universität* in Mainz, der seit April dieses Jahres im Fachbereich 08 *Physik, Mathematik und Informatik* aufgegangen ist.

Die Jubiläumsfeiern zum 225-jährigen Bestehen des *Karolinen-Gymnasiums* sind inzwischen angelaufen und erreichen am 23. September mit einer Schulfeier ihren ersten Höhepunkt. Informationen zur Geschichte der Schule und die Termine zum Jubiläum gibts auf der Schul-Homepage unter `http://www.karolinen-gymnasium-ft.de`.

Ein weiterer Höhepunkt und gleichzeitig der Abschluss der Feiern wird die **25-Jahr-Feier für MONOID** sein mit der feierlichen **Preisverleihung** am **Samstag, dem 26. November 2005**, in der Aula des *Karolinen-Gymnasiums* am Röntgenplatz 5 in Frankenthal. **Hierzu laden die Schulleitung und die MONOID-Redaktion alle Freunde und Förderer von MONOID herzlich ein;** die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen. Die Anfahrt zur Schule ist in einem Stadtplan zu ersehen, zu dem es von der Schul-Homepage aus einen Link gibt. Das ausführliche Programm mit weiteren Informationen wird auf den Schul- und den MONOID-Seiten im Internet zu finden sein.

Nach der Begrüßung der Festgäste um 11 Uhr und der Entgegennahme von Grußadressen hält Prof. Dr. Stefan Müller-Stach vom Institut für Mathematik der Universität Mainz den **Festvortrag**. An die Vergabe der vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestifteten MONOID-Preise einschließlich des **Goldenen M** an die erfolgreichsten Löserinnnen und Löser schließt sich die Ehrung der Preisträger(innen) des Landeswettbewerbs Mathematik aus dem Karolinen- und dem Elisabeth-Langgässer-Gymnasium an.

Umrahmt wird die MONOID-Feier am Vormittag von 9 bis 11 Uhr und am Nachmittag nach dem Imbiss um 13 Uhr von einem *„Markt der Möglichkeiten“*: Hier soll es Exponate mit „Mathematik zum Anfassen“, mathematische Arbeitsgruppen, experimentelle Untersuchungen am Computer sowie Literatur- und Software-Präsentationen der Schulbuchverlage geben.

Betrachtungen über große Zahlen

von Markus Dillmann

Immer wieder tauchen in Zeitungen oder Nachrichtensendungen Zahlen auf. Oft verbirgt sich die eigentliche Größenordnung der Zahlen hinter Namen wie z.B. Milliarden oder Millionen. Manche Zahlen sehen dadurch auf den ersten Blick relativ klein aus. Ein Standardbeispiel ist die Verschuldung der öffentlichen Haushalte. Ganz harmlos klingt die Verschuldung des Bundes: 39 Milliarden € Schulden in einem Jahr. In dieser Schreibweise sieht die Zahl ganz harmlos aus. Doch ausgeschrieben ist sie kaum mehr vorstellbar: 39 000 000 000 €. Wenn wir nun wissen wollen, was sich wirklich hinter dieser Zahl verbirgt, kommt die Mathematik ins Spiel. Es bietet sich an, diese Zahl einmal mit der Bevölkerung der BRD (ungefähr 83 000 000 = 83 Millionen) zu vergleichen. Der übliche Vergleichswert für Schulden ist die „Pro Kopf-Verschuldung". Dazu müssen die Schulden durch die Anzahl der Einwohner geteilt werden. Für den Bund bedeutet dies:

$$39 \text{ Milliarden €} \div 83 \text{ Millionen Einwohner} = 469,88 \text{ € pro Einwohner.}$$

Wer versucht mitzurechnen, muss bei diesen vielen Nullen gut aufpassen. Mathematiker versuchen deshalb die Schreibweise zu vereinfachen. Sie zählen die Anzahl der Nullen – bei $83\,000\,000$ sind das 6 – und schreiben kürzer: $83\,000\,000 = 83 * 10^6$ und genauso $39\,000\,000\,000 = 39 * 10^9$. Man sagt, die Zahl ist mit einer 10er Potenz geschrieben. Damit sieht die Rechnung gleich viel übersichtlicher aus:
$39 * 10^9$ € $\div\, 83 * 10^6$ Einwohner. Diese Rechnung kann direkt mit dem Taschenrechner ausgeführt werden. Für die 10er Potenz muss je nach Taschenrechner die Taste EXP oder EE verwendet werden. Aber auch ein wenig Bruchrechnung hilft bei dieser Rechnung weiter. Wenn die Divisionsaufgabe zunächst als Bruch geschrieben wird, können wir insgesamt 6 mal mit 10 kürzen:

$$39 * 10^9 \div 83 * 10^6 = \frac{39000000000}{83000000} = \frac{39000}{83}$$

Als Regel können wir uns merken: beim Dividieren werden die Hochzahlen der Potenzen subtrahiert. Ohne Brüche sieht die Rechnung dann so aus:

$39 * 10^9$ € $\div\, 83 * 10^6$ Einwohner $= (39 * 10^3$ € $\div\, 83$ Einwohner$) = 39000$ € $\div\, 83$ Einwohner $= 469,88$ € pro Einwohner.

Jeder Einwohner, dabei sind auch Jugendliche und Kinder mitgezählt, müsste im Jahr rund 470 € bezahlen. Versuchen wir einmal, die Zahl noch besser zu verstehen: Das sind 470 € $\div 12$ Monate ≈ 40 € im Monat.

Für einige sind diese 40 € schon mehr als das monatliche Taschengeld. Dazu kommen aber auch noch die Schulden aus den Vorjahren. Insgesamt hat die BRD übrigens eine Verschuldung von 760 Milliarden €. Das sind pro Einwohner etwa 9100 €. Das sind pro Monat... Nun ist der Bund nicht der einzige öffentliche Haushalt. Auch Länder und Gemeinden machen jedes Jahr Schulden. Du kannst ja die pro Kopf Verschuldung deines Bundeslandes und deines Wohnortes mit der Verschuldung des Bundes vergleichen. Hier die Zahlen für

Rheinland-Pfalz:	4 Millionen Einwohner	
	26 Millionen Gesamtschulden	
	2 Millionen Schulden in einem Jahr	
Mainz:	$200\,000$ Einwohner	
	500 Millionen Schulden	
	$77{,}4$ Millionen Schulden in einem Jahr	

Die Schreibweise mit 10er Potenzen begegnet uns z.B. auch in der Astronomie. So ist die mittlere Entfernung von der Erde zur Sonne ca. $1{,}5 * 10^8$ km. Wenn wir diese Strecke in einem Jahr zurücklegen wollen, müssten wir jeden Tag 410 000 km zurücklegen. Das ist eine Strecke, 10 mal so lang wie der Äquator. Eine unvorstellbar weite Strecke. Vielleicht ist ja der von der NASA geplante Raumflug zum Mars ein Beispiel, das euch interessiert. Versucht doch einmal, die Entfernung von der Erde zum Mars herauszufinden. Wie lange eine Raumfähre wohl für diese Strecke benötigt. Doch diese Frage soll zunächst einmal als Anregung offen bleiben. Bestimmt könnt ihr noch viele weitere Beispiele finden.

✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷

Was heißt hier „besser“?

Von Wolfgang J. Bühler

Ungleichungen sind transitiv, das heißt: Wenn $a < b$ und $b < c$, so folgt $a < c$. So etwas gilt z. B. auch im Sport: Ist Philipp schneller als Maurice und Maurice schneller als Patrick, so ist auch Philipp schneller als Patrick. Von den Dreien ist also Philipp der Schnellste.

Andererseits habe ich gesehen, dass Patrizia beim Tischtennis gegen Dorothee meistens gewinnt, d. h. besser spielt als diese. Genauso spielt Dorothee besser als Annette. Ich war dann überrascht, dass Annette fast immer gegen Patrizia gewinnt. Hier lässt sich also keine „beste“ Spielerin finden.

Noch überraschender ist folgendes Spiel, bei dem Mathematik eine Rolle spielt. Gespielt wird mit drei Würfeln, einem roten, dessen sechs Seiten die Zahlen $1, 1, 5, 5, 9, 9$ tragen, einem blauen mit $2, 2, 6, 6, 7, 7$ und einem gelben mit den Zahlen $3, 3, 4, 4, 8, 8$.

Ich lasse Dich zuerst einen der Würfel wählen, danach wähle ich einen der beiden anderen Würfel. Danach werfen wir, und es gewinnt, wer die höhere Zahl geworfen hat.

Meine Chancen zu gewinnen sind dann höher als Deine, obwohl Du doch die erste Wahl des Würfels hattest. Wundert Dich das ein bisschen?

Wenn mit dem roten und dem blauen Würfel gespielt wird, so treten die Zahlenpaare

$$\underline{(1,2)},\ \underline{(1,6)},\ \underline{(1,7)},\ (5,2),\ \underline{(5,6)},\ \underline{(5,7)},\ (9,2),\ (9,6),\ (9,7)$$

gleich häufig auf (sind gleich wahrscheinlich). Von diesen sind die unterstrichenen Paare günstig für blau. Blau hat also die besseren Chancen (5 von 9 Möglichkeiten), zu gewinnen. Ähnlich berechnet man 5 von 9 Möglichkeiten für gelb gegen blau und für rot gegen blau. Wählst Du also rot, so wähle ich blau, wählst Du blau, so wähle ich gelb, und wählst Du gelb, so spiele ich mit dem roten Würfel. In jedem Fall stehen dann die Chancen für mich besser.

Der kleine Carl Friedrich hat's uns vorgemacht.

Von Hartwig Fuchs

Man löse die Aufgabe

(1) Berechne die Summe der Ziffern aller Zahlen $n \leq 10^{10}$. (Wir wollen im folgenden unter einer Zahl stets eine positive ganze Zahl verstehen.)

Bevor wir uns entscheiden, diesem Problem rechnerisch – z. B. mit einem Computer – zu Leibe zu rücken, wollen wir versuchen, eine Lösung von (1) auf einem Weg zu finden, der schon den siebenjährigen Carl Friedrich Gauß bei einem ähnlichen Problem zum Ziel führte und der auch sonst in der Mathematik bei bestimmten Beweisen begangen wird.
Jedem ist wohl die Geschichte vom kleinen Carl Friedrich bekannt: Der sollte in der Schule die Zahlen von 1 bis 100 addieren. Das gelang ihm unerwartet schnell, weil er aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 100$ die 50 Paare $1|100$; $2|99$; $\ldots$; $50|51$ bildete und er damit wusste, dass die gesuchte Summe $50 \cdot 101 = 5050$ ist.

Auch bei der folgenden Aufgabe erweist sich das Prinzip der Paarbildung als nützlich: Es seien alle Teiler einer Zahl mit vielen Teilern zu bestimmen. Um keinen Teiler zu übersehen, arbeiten wir zweckmäßig mit den Paaren Teiler|Komplementärteiler.

Beispiel:

(2) Berechne die Teiler von 1440.

Lösung:

Teiler	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
Komplementärteiler	1440	720	480	360	288	240	180	160	144	120

Teiler	15	16	18	20	24	30	32	36
Komplementärteiler	96	90	80	72	60	48	45	40

Wir probieren nun die Paarbildungsmethode am Problem (1) aus. Um etwaige Strukturen des Lösungswegs aufzuspüren, betrachten wir zunächst die Fälle $n \leq 10^m, m = 1, 2$ und 3.

$n \leq 10:$ Aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 10$ bilden wir die vier Paare $1|9$; $2|8$; $3|7$; $4|6$ – jedes Paar hat die Ziffernsumme 10; bei der Paarbildung wurden die Zahlen 5 und 10 mit der Ziffernsumme 6 nicht berücksichtigt. Somit ist $4 \cdot (1 + 9) + 6$ die gesuchte Ziffernsumme.

$n \leq 100:$ Es gibt 49 Paare $1|99$; $2|98$; $\ldots$; $49|51$ – jedes Paar hat die Ziffernsumme $1 + 2 \cdot 9$; die Zahlen 50 und 100 mit der Ziffernsumme 6 kommen in keinem Paar vor. Also gilt hier: Die Ziffernsumme aller Zahlen $n \leq 100$ ist $49 \cdot (1 + 2 \cdot 9) + 6$.

$n \leq 1000:$ Es gibt 499 Paare $1|999$; $2|998$; $\ldots$; $499|501$ – jedes Paar hat die Ziffernsumme $1 + 3 \cdot 9$; die bei der Paarbildung nicht beteiligten Zahlen 500 und 1000 haben die Ziffernsumme 6. Also gilt: Die Ziffernsumme aller Zahlen $n \leq 1000$ ist $499 \cdot (1 + 3 \cdot 9) + 6$.

Aus diesen drei Fällen lesen wir eine Gesetzmäßigkeit ab:
(3) Die Ziffernsumme aller Zahlen $n \leq 10^m, m = 1, 2, 3 \ldots$, ist $\left(\frac{10^m}{2} - 1\right)(1 + m \cdot 9) + 6$.

Für (1) gilt somit: Die Ziffernsumme aller Zahlen $\leq 10^{10}$ ist $454\,999\,999\,915$.

Es ist offensichtlich, wie wirkungsvoll die Paarbildungsmethode den Aufwand zur Lösung der Aufgabe (1) reduziert – man stelle sich einfach nur einmal vor, man wollte der Reihe nach die Ziffern der Zahlen von 1 bis 10^6 oder z. B. auch bis 10^{100} aufaddieren – selbst wenn man dabei einen elektronischen Rechenknecht einspannt, was für eine Arbeit!

Aufgabe
Berechne die Summe der Ziffern aller ungeraden ganzen Zahlen n, $0 < n < 10^6$ $(n < 10^m, m = 1, 2, 3, \ldots)$. (H.F.)

Die **Lösung** findet ihr an anderer Stelle in diesem Heft.

Fibonacci und der Bruch $1/89$

Von Marion Heublein

Die Meisten werden sicher schon einmal von Leonardo von Pisa, Leonardo Pisano oder besser bekannt unter dem Namen Leonardo Fibonacci gehört haben.

Dieser bedeutende Mathematiker des Mittelalters, der um 1170 geboren wurde und am Hofe Kaiser Friedrichs II. angestellt war, verfasste 1202 die erste systematische Einführung in das indische Zahlenrechnen sowie geometrische und zahlentheoretische Schriften. Wohl bei dieser Arbeit stieß der Italiener auch auf die später nach ihm benannte Fibonaccifolge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, a_n, \ldots$, für die allgemein gilt:

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0.$$

Doch nur selten begegnet man einer verblüffenden Beziehung, die zwischen dieser bekannten Folge und dem Bruch $1/89$ besteht. Die Dezimalschreibweise dieses sonst nicht weiter auffälligen Bruches lässt sich, wie verschiedene Mathematiker entdeckt haben, wie folgt mit der Fibonacci-Reihe in Verbindung setzen:

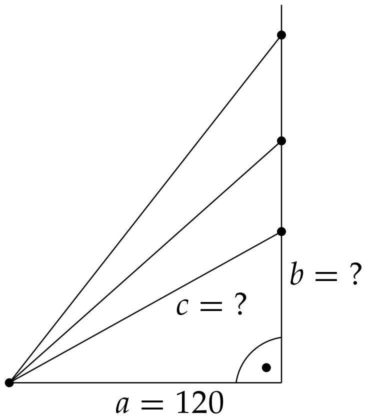
$$\begin{array}{ll}
n & \\
1 & 0,01 \\
2 & 0,001 \\
3 & 0,0002 \\
4 & 0,00003 \\
5 & 0,000005 \\
6 & 0,0000008 \\
7 & 0,00000013 \\
8 & 0,000000021 \\
\vdots & \vdots \\
\hline
 & 0,01123595\ldots
\end{array}$$

Addiert man die Fibonaccizahlen der Reihe nach als Dezimalstellen eines Bruches und lässt die Anzahl an Dezimalstellen mit steigendem n je um 1 wachsen, so erhält man den Bruch $1/89$ in Dezimalstellen.

Wer noch mehr solcher faszinierender Geheimnisse der Mathematik kennen lernen will, für den ist Clifford A. Pickovers „Dr. Googols wundersame Welt der Zahlen“, erschienen im dtv, ISBN 3-423-34177-7, 256 Seiten, 9,50 €, genau das Richtige!

Die „besondere“ Aufgabe

Pythagoreische Dreiecke



In einem rechtwinkligen Dreieck habe eine Kathete die Länge $a = 120$.

Begründe: Es gibt höchstens 63 Möglichkeiten, die anderen Seitenlängen b und c so festzulegen, dass sie ganzzahlig sind.

Welches sind die größten sowie die kleinsten ganzen Zahlen b, c ? (H.F.)

Lösung:
Für die gesuchten Dreiecke gilt nach Pythagoras $c^2 - b^2 = 120^2$, also auch $(c-b)(c+b) = 120^2$. Wenn b und c ganzzahlig sind, dann müssen $(c-b)$ und $(c+b)$ ganzzahlige Teiler von 120^2 sein.

Wie viele ganzzahlige Teiler hat nun 120^2?

Nach einem Satz aus der Zahlentheorie hat eine als Produkt ihrer Primfaktorpotenzen $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_r^{\alpha_r}$ geschriebene natürliche Zahl n, also $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ genau $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ Teiler.

Daher hat $120^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ genau $7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$ Teiler.

Die Aufgabe hat also höchstens 63 verschiedene ganzzahlige Lösungen $(c-b)$ und $(c+b)$, aus denen sich jeweils höchstens eine ganzzahlige Lösung b und c ergibt.

Wir schreiben nun die Teiler $(c-b)$ und $(c+b)$ von 120^2 tabellarisch auf. Aus $(c-b) + (c+b) = 2c$ folgt, dass c nur dann ganzzahlig ist, wenn $(c-b) + (c+b)$ gerade ist. Weiter: Aus der Kenntnis von $(c-b)$ und c erhält man b.

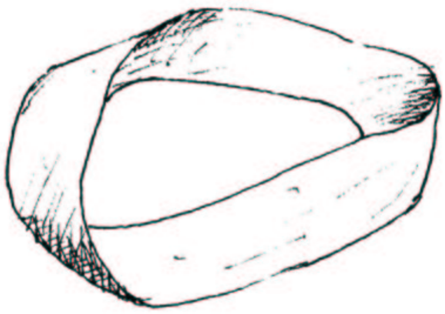
$c-b$	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	100	120
$c+b$	14 400	7200	4800	3600	2880	2400	$\cdots$	144	120
c	–	3601	–	1802	–	1203	$\cdots$	122	–
b	–	3599	–	1798	–	1179	$\cdots$	22	–

Die größte Lösung ist danach $c = 3601$, $b = 3599$, und die kleinste Lösung ist $c = 122$, $b = 22$.

Die Aufteilung eines Königreiches

von Hartwig Fuchs

August Ferdinand Möbius (1790 – 1868), Mathematiker und Astronom, Entdecker des nach ihm benannten Möbiusbandes*



lehrte von 1816 bis zu seinem Tode an der Universität Leipzig. In einer Geometrievorlesung im Jahre 1840 stellte er seinen Studenten die folgende Aufgabe:

> Ein König, der in Indien über ein großes Reich herrschte, legte in seinem Testament fest, dass seine fünf Söhne das Reich nur unter drei Bedingungen unter sich aufteilen durften:

(1) Jedes Teilreich muss mit jedem der vier anderen eine Grenzlinie gemeinsam haben, und keine Hauptstadt eines Teilreiches darf auf einer Grenze liegen.

(2) Jede Hauptstadt eines Teilreiches soll mit jeder anderen Hauptstadt durch eine Straße so verbunden werden, dass jede dieser Straßen nur durch die beteiligten zwei Länder und über die ihnen gemeinsame Grenzlinie (nicht aber Grenzpunkt) verläuft.

(3) Keine zwei Straßen dürfen sich kreuzen.

Der König verlangte aber ausdrücklich nicht, dass die durch die Reichsteilung entstehenden Länder gleich groß sein mussten.

Nach dem Tod des Königs versuchten die Söhne, das Reich zu teilen – sie fanden jedoch keine Lösung ihres Problems! Wieso?

Bevor wir uns mit der Möbius-Aufgabe befassen, wollen wir die zu ihr hinführenden Vorstufen untersuchen. Dabei nehmen wir an, dass das Königreich ein Quadrat ist (die Form des Königreichs ist für die Lösung der Aufgabe unerheblich – sie muss nur ein zusammenhängendes Gebiet ohne Löcher sein).

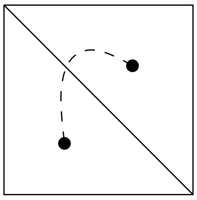
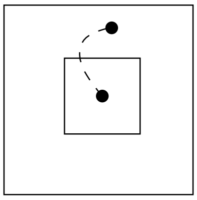
Mit Punkten • bezeichnen wir die Hauptstädte und mit gestrichelten Linien – – – die Verbindungsstraßen der Hauptstädte.

Der König hat

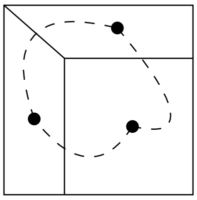
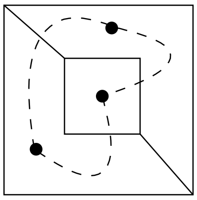
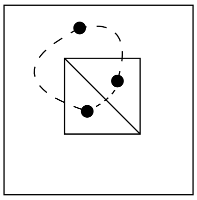
---

*Man erhält ein Möbiusband, indem man die Enden eines Papierstreifens um $180°$ verdrillt und mit einander verklebt. Stellt euch doch selbst mal eines her und versucht euch vorzustellen, was mit einer Ameise passiert, die auf dem Band einmal die volle Streifenlänge entlang krabbelt.

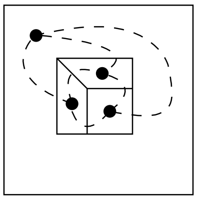
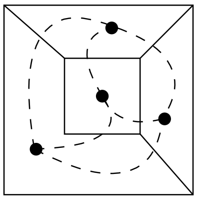
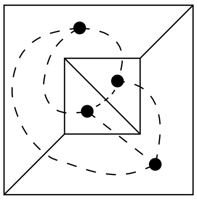
zwei Söhne: Diese können das Reich

so  oder so  aufteilen.

drei Söhne: Folgende Aufteilungen sind möglich

so  oder so  oder so 

vier Söhne: Wieder gibt es drei Aufteilungsmöglichkeiten

so  oder so  oder so 

Überprüfe selbst, ob die Bedingungen (1), (2) und (3) jeweils eingehalten wurden.
Gibt es eventuell weitere Aufteilungen in diesen drei Fällen? Finde es selbst heraus.

Nun betrachten wir den Fall, dass der König fünf Söhne hat.
Annahme:
(4) Das Reich ist so auf die fünf Söhne aufteilbar, dass (1), (2) und (3) erfüllt sind.

Wir bezeichnen die Hauptstädte der fünf Teilreiche mit A, B, C, D, E und eine Straße z. B. zwischen A und B mit AB.
Je zwei der fünf Hauptstädte sind durch eine Straße verbunden, die kein drittes Land (auch nicht seine Grenzen) berührt (2) und die keine andere Straße kreuzt (3).
Die Städte A, B und C sind durch eine Ringstraße $ABCA$ verbunden. Da die Straße DE, welche die Städte D und E verbindet, die Ringstraße $ABCA$ nicht kreuzt, gilt für D und E:

Entweder liegen D und E beide innerhalb oder beide außerhalb des von der Ringstraße $ABCA$ umschlossenen Gebiets.

1. Fall: D und E liegen innerhalb der Ringstraße $ABCA$. Dann gehen von D die drei Straßen DA, DB, DC aus, die zusammen mit den Straßen AB, BC, CA drei neue Ringstraßen bilden, nämlich $DABD, DBCD, DCAD$ – vgl. Bild 1.
Nun kann E nicht innerhalb einer dieser drei Ringstraßen liegen. Läge E z. B. innerhalb von $DABD$, dann gäbe es keine Straße von E nach C, die nicht eine andere Straße kreuzte – und entsprechend gäbe es keine Straßen von E nach A bzw. nach B, wenn E innerhalb der Ringstraße $DBCB$ bzw. $DCAD$ läge. Der erste Fall tritt somit nicht ein.

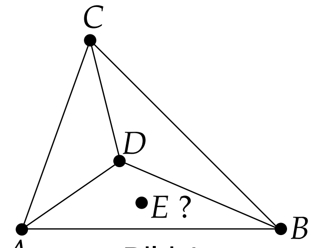


Bild 1

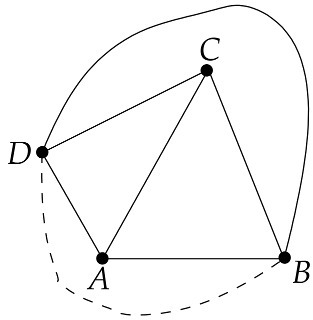


Bild 2

2. Fall: D und E liegen außerhalb der Ringstraße $ABCA$. Dann gehen von D die drei Straßen DA, DB und DC (gestrichelt bzw. durchgezogen) aus.
Die Stadt E kann nicht innerhalb der Ringstraße $DACD$ liegen, weil es keine kreuzungsfreie Straße von E nach B gibt. Analog schließt man aus, dass E innerhalb oder außerhalb der Ringstraße $DBAD$ bzw. $DCBD$ liegt. Der 2. Fall ist also auch nicht möglich.

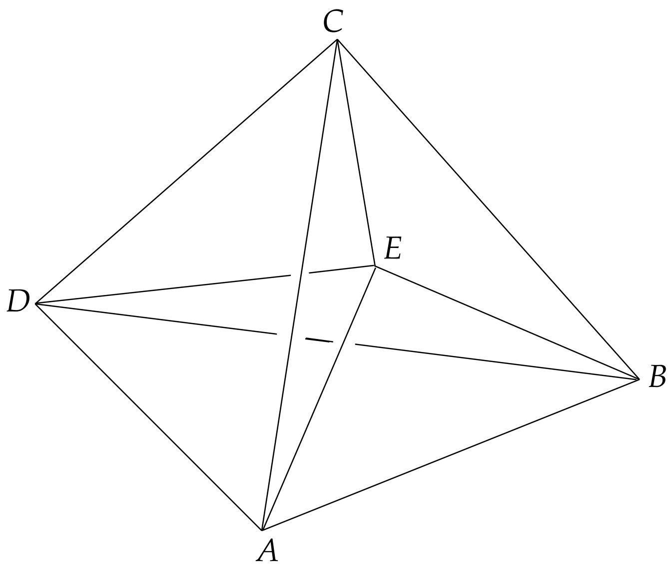
Insgesamt gilt daher: die Annahme (4) ist falsch – das Königreich kann nicht so auf die fünf Söhne verteilt werden, dass (1) – (3) erfüllt sind!

Anhang: Der Satz von Kuratowski

von Cynthia Hog-Angeloni

Heutzutage würde man die Unmöglichkeit der Aufteilung des Königreichs so formulieren: „Der vollständige Graph über 5 Punkte ist nicht plättbar“.

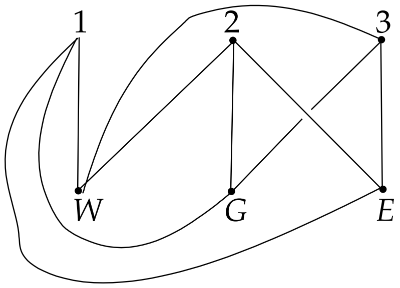
Da nach (2) und (3) jede Hauptstadt • mit jeder kreuzungsfrei verbunden werden soll, bedeutet dies, dass in dem aus Hauptstädten und ihren Verbindungsstraßen bestehenden Graphen jeder Punkt mit jedem zu verbinden ist. Solche Graphen heißen *vollständig*. Graphen, die sich kreuzungsfrei in die Ebene zeichnen lassen, heißen *plättbar* (oder *planar*).
Im Raum ist es durchaus möglich, die fünf Punkte A, B, C, D, E paarweise zu verbinden, ohne dass die Verbindungsstrecken sich schneiden:



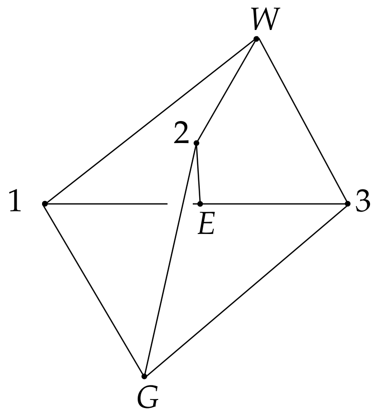
Der vollständige Graph V_5 über fünf Punkte.

Ein verwandtes, weithin bekanntes Problem ist das Folgende:
Drei Häuser sollen jeweils mit dem Wasserwerk W, dem Elektrizitätswerk E und dem Gaswerk G verbunden werden. Gelingt dies überkreuzungsfrei?

Eine ganz ähnliche Betrachtung wie bei der Aufteilung des Königreiches zeigt, dass dies nicht der Fall ist: Auch dieser Graph ist nicht plättbar. (Versuche, dies selbst zu beweisen!)

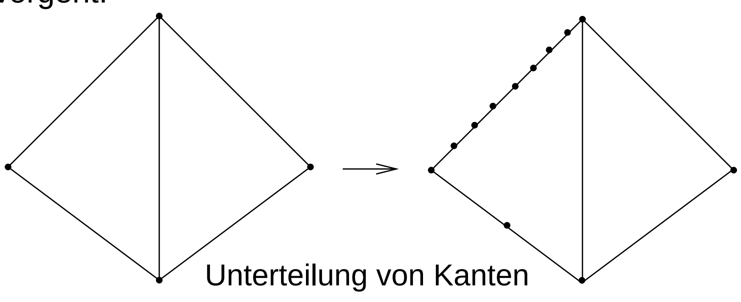


Der Graph $K_{3,3}$: Drei Punkte $1, 2, 3$
sind duch je eine Kante mit drei weiteren Punkten W, E, G verbunden.



Räumliches Bild des $K_{3,3}$

Wie kann ich nun herausfinden, ob ein gegebener Graph plättbar ist? Sicher ist er es dann *nicht*, wenn er einen der beiden V_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraphen enthält, d.h. einen Graphen, der aus dem ursprünglichen Graphen durch Entfernen von Ecken und Kanten entsteht. Auch dann nicht, wenn er einen Graphen umfasst, der aus V_5 oder $K_{3,3}$ durch Unterteilung hervorgeht:



Unterteilung von Kanten

Ersetzt man in einem Graphen eine Kante durch einen Weg endlicher Länge (Einfügen von Punkten), so spricht man von einer *Unterteilung* der Kante.
Tatsächlich gilt sogar die Umkehrung:
Satz von Kuratowski: Ein endlicher Graph ist genau dann plättbar, wenn er keinen Teilgraphen enthält, der durch Unterteilung von V_5 oder $K_{3,3}$ entstanden ist.
Dieser Satz wurde von dem polnischen Mathematiker Kazimierz Kuratowski (1896-1980) bewiesen.

Ein Blick hinter die Kulissen: Wie macht das der Magier?

Von Hartwig Fuchs

Ein Magier verspricht seinem Publikum eine Demonstration seiner Fähigkeit, den Willen einer ihm fremden Person – ohne Hypnose! – zu beeinflussen. Dazu bittet er einen Zuschauer auf die Bühne und zeigt ihm einen Stapel farblich unterschiedener Karten mit Zahlenquadraten verschiedener Felderzahl. Dann erklärt er: „Ich werde den Willen des Zuschauers so lenken, dass er auf einer beliebig von ihm gewählten Karte die von mir insgeheim gewünschte Zahlenfolge auswählt.“

Der Zuschauer zieht z. B. das nebenstehende ‚grüne‘ Quadrat aus dem Stapel. Der Magier fordert nun den Zuschauer auf, sieben Zahlen des Quadrats auf folgende Weise auszuwählen: Nach der ersten Wahl sollen alle Zahlen in der Zeile und der Spalte, an deren Kreuzungspunkt die gewählte Zahl steht, gestrichen werden; nach der Wahl der zweiten Zahl – die keine gestrichene Zahl sein darf! – verfahre man mit den zugehörigen Zeilen- und Spaltenzahlen ebenso wie nach der ersten Wahl; usw. bis alle sieben Zahlen ausgesucht sind. Aber – so der Magier: Der Zuschauer kann die sieben Zahlen nur so auswählen, wie ich es will. Zum Beweis, dass ich das kann, schreibe ich vorweg die Summe der sieben Zahlen auf einen Zettel, den ich dem Zuschauer zur Verwahrung gebe. Er schreibt „58“ auf den Zettel. Der Zuschauer wählt sieben Zahlen auf die vorgeschriebene Weise: Ihre Summe ist tatsächlich 58. Probier’ es selbst – es klappt! Mit welchem Trick arbeitet der Magier?

9	13	17	6	11	7	8
3	7	11	0	5	1	2
5	9	13	2	7	3	4
15	19	23	12	17	13	14
8	12	16	5	10	6	7
4	8	12	1	6	2	3
6	10	14	3	8	4	5

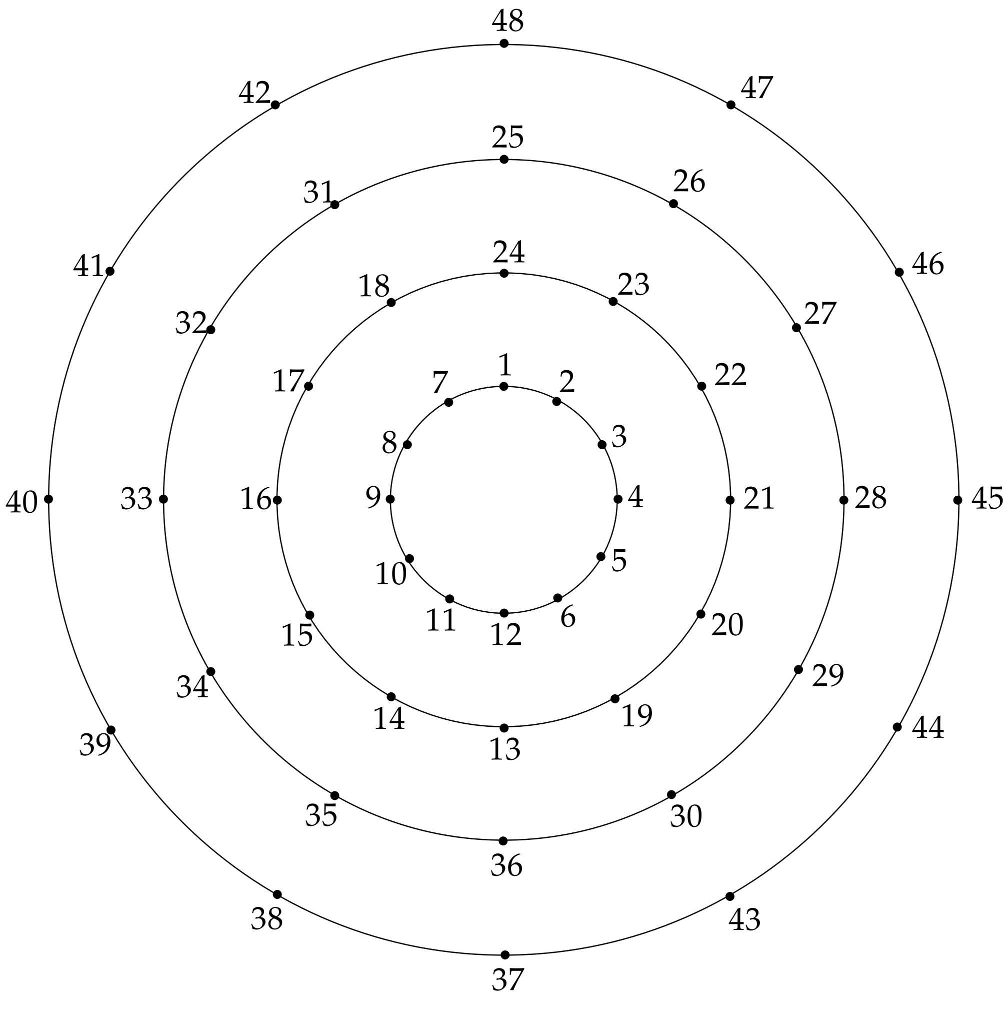
Wir erläutern den Trick des Magiers am Beispiel des gegebenen 7×7-Quadrats.

	3	7	11	0	5	1	2
6					⋮	⋮	
0					⋮	⋮	
2	…	…	…	…	7	⋮	
12						⋮	
5						⋮	
1	…	…	…	…	…	2	
3							

An die Zeilen- und Spaltenanfänge des zunächst leeren ‚grünen‘ Quadrats schreibt der Magier beliebige Zahlen, z. B. so wie in nebenstehender Figur. Er merkt sich: Beim ‚grünen‘ Quadrat ist die Summe der Zeilen- und auch der Spaltenanfangszahlen 58. Dort, wo sich eine Zeile und eine Spalte überschneiden, schreibt er die Summe aus der zugehörigen Zeilen- und Spaltenanfangszahl hin (vgl. die Figur). So konstruiert er das gegebene grüne Zahlenquadrat.

Danach radiert er alle Zeilen- und Spaltenanfangszahlen weg. Wenn nun der Zuschauer das grüne Quadrat wählt und darauf sieben Zahlen nach Vorschrift des Magiers festgelegt hat, dann gilt: Keine zwei dieser Zahlen stehen in der gleichen Zeile oder Spalte. Mit der Wahl der sieben verschiedenen Zahlen hat der Zuschauer – ohne es zu wissen – auch sieben verschiedene Paare als Anfangszahlen gewählt. Die Summe dieser 14 Anfangszahlen kennt der Magier – er weiß: Beim ‚grünen' Quadrat ist sie 58 – und sie stimmt überein mit der Summe der sieben Zahlen auf seinem Zettel.
So kann er die Summe der gewählten Zahlen stets im Voraus angeben; er braucht dazu nur die Farbe des Quadrats zu kennen.
Nach dem Muster der Konstruktion des 7×7-Quadrats können Quadrate beliebiger Größe mit beliebig vorgegebenen Anfangszahlen hergestellt werden.

Mathis machen mathematische Entdeckungen am magischen Kreis



Unsere Zahlenfigur aus vier konzentrischen Zahlenringen hat viele überraschende Eigenschaften, die es zu entdecken gilt. Wir wünschen den Mathis unter den MONOID-Le(ö)sern dabei viel Vergnügen. (H.F.)

Eure Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2006 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im MONOID-Heft 85 werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen; außerdem erhaltet Ihr auch hierauf Punkte.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Im MONOID-Heft 79 hatten wir Euch eingeladen, am nebenstehenden 6×6-Zahlenquadrat aus den ungeraden Zahlen von 1 bis 71 nach überraschenden Eigenschaften zu fahnden und bei erfolgreicher Suche auch das entsprechende 8×8- oder das 10×10-Quadrat unter die Lupe zu nehmen. Bisher ist bei der Redaktion keine Einsendung hierzu eingegangen.

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71

Hier einige mögliche **Lösungen**, die der Aufgabensteller H.F. vorschlägt:

Wir bezeichnen den unvollständigen Satz „Die Summe aller Zahlen“ mit Σ. Dann gilt für das

6×6-Quadrat z. B.

Σ in der 1. Zeile = 6^2
Σ in der 2. Zeile = $3 \cdot 6^2$
Σ in der 3. Zeile = $5 \cdot 6^2$
Σ in der 4. Zeile = $7 \cdot 6^2$
Σ in der 5. Zeile = $9 \cdot 6^2$
Σ in der 6. Zeile = $11 \cdot 6^2$

Σ in der 1–Diagonale = 6^3
Σ in der 11–Diagonale = 6^3

Σ im inneren 2×2-Quadrat = $(2 \cdot 6)^2$
Σ im mittleren 4×4-Quadrat = $(4 \cdot 6)^2$

Σ im gesamten 6×6-Quadrat = $(6 \cdot 6)^2$

Σ in den 4 Ecken des 6×6-Quadrats = 6^2

$n \times n$-Quadrat, n gerade, z. B.

$\Sigma = n^2$ in der 1. Zeile
$\Sigma = 3 \cdot n^2$ in der 2. Zeile
$\Sigma = 5 \cdot n^2$ in der 3. Zeile
$\Sigma = 7 \cdot n^2$ in der 4. Zeile
$\vdots \qquad \vdots$
$\Sigma = (2n-1) \cdot n^2$ in der n. Zeile

$\Sigma = n^3$ in der 1–Diagonale
$\Sigma = n^3$ in der (2n-1)–Diagonale

$\Sigma = (2 \cdot n)^2$ im inneren 2×2-Quadrat
$\Sigma = (4 \cdot n)^2$ im nächsten 4×4-Quadrat
$\vdots \qquad \vdots$
$\Sigma = (n \cdot n)^2$ im gesamten $n \times n$-Quadrat

$\Sigma = n^2$ in den 4 Ecken des $n \times n$-Quadrats

Für die acht 2×2-Teilquadrate des 6×6-Quadrats gilt - vgl. Figur:

<table>
<tr><td rowspan="2">$\Sigma = 2^5$</td><td></td><td rowspan="2">$\Sigma = 2 \cdot 2^5$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Sigma = 3 \cdot 2^5$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Sigma = 4 \cdot 2^5$</td><td rowspan="2">$\Sigma = 5 \cdot 2^5$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Sigma = 6 \cdot 2^5$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Sigma = 7 \cdot 2^5$</td><td rowspan="2">$\Sigma = 8 \cdot 2^5$</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Usw., usw, ...

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Albrecht Beutelspacher: „Christian und die Zahlenkünstler“

Der Autor zahlreicher unterhaltsamer populärwissenschaftlicher Mathematikbücher und Gründer des mathematischen Mitmachmuseums Mathematikum, Albrecht Beutelspacher, wagt sich mit dem neu erschienenen Werk „Christian und die Zahlenkünstler“ erstmals in die Sparte der Kinder- und Jugendbücher vor. Dieses Wagnis kann im Großen und Ganzen als gelungen bezeichnet werden.

Der zwölfjährige Christian hat Zoff mit seinen Eltern und seiner um zwei Jahre jüngeren Schwester. Um diesem zu entgehen, wird beschlossen, dass er zwei Wochen seiner Sommerferien zusammen mit seiner Tante Ursula in Italien verbringen soll. Diese plant jedoch keinen Strandurlaub, sondern will dort in einem abgelegenen Schloss an einer Sommerschule über Mathematik teilnehmen.
Christian ist zunächst wenig begeistert, freundet sich jedoch im Schloss angekommen mit den jungen italienischen Mathematikern Laura, Giorgio und Giovanni an, die ihn neugierig auf das machen, worum es bei der Sommerschule geht: Das Knacken von Codes.
Professor Primo, eine Koryphäe auf dem Gebiet der Kryptographie, hatte angekündigt, im Verlauf der zweiwöchigen Sommerschule ein Verfahren darzustellen, mit dem alle Codes zu knacken seien. Verständlicherweise waren daran nicht nur Mathematiker interessiert, sondern auch diverse andere Menschen, darunter zwei seltsame ältere Männer in schwarzen Anzügen mit dunklen Sonnenbrillen...
Christian lernt in den zwei Wochen durch seine italienischen Freunde nicht nur spannende mathematische Zusammenhänge, sondern Ursula erzählt ihm auch den Grund, warum sie Mathematikerin geworden ist: „In der Mathematik können wir durch logische Argumente herauskriegen, was richtig ist. Wir brauchen nicht zu streiten. Es gewinnt nicht der, der stärker ist. Sondern der, der Recht hat. Und wer Recht hat, das können alle einsehen.“

Fazit: „Christian und die Zahlenkünstler“ ist ein ansprechendes, faszinierendes und spannend zu lesendes mathematisches Kinder- und Jugendbuch. Einziger Wermutstropfen ist der sehr abrupt und effektheischend hereinbrechende Schluss, der leider etwas zu aufgesetzt wirkt.
Deshalb erhält das Buch nur die Gesamtbeurteilung: gut ☺☺😐

Angaben zum Buch:
Albrecht Beutelspacher: Christian und die Zahlenkünstler. Eine Reise in die wundersame Welt der Mathematik. Beck 2005, ISBN 3-406-52708-6, geb. 176 Seiten, 14,90 €.

Art des Buches:	Mathematisches Kinder- und Jugendbuch
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Martin Mattheis

Die Seite für den Computer-Fan

Ein Ziffernquadrat mit unglaublichen Primzahleigenschaften

Wenn man die Ziffern in nebenstehendem Quadrat

9	1	3	3
1	5	8	3
7	5	2	9
3	9	1	1

horizontal von links nach rechts,
vertikal von oben nach unten,
diagonal von links oben nach rechts unten sowie
von rechts oben nach links unten

als vierziffrige Zahlen liest, dann sind diese 10 Zahlen **sämtlich Primzahlen**.
Überprüfe dies mit deinem Computer!
Wenn man nun die vier Leserichtungen umkehrt, also von rechts nach links, von unten nach oben, diagonal von unten nach oben liest, sind dann die neuen 10 Zahlen ebenfalls sämtlich Primzahlen? (gefunden H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 81

169 als Quadratsumme

Untersuche mit Deinem Computer, für welche natürlichen Zahlen n die Zahl 169 als Summe von n Quadratzahlen darstellbar ist, wobei diese nicht verschieden zu sein brauchen; tritt eine Quadratzahl in der Summe mehrfach auf, wird sie auch entsprechend mehrfach gezählt.

(Noch ein Hinweis: Auch 1 gehört wegen $1 = 1^2$ zu den Quadratzahlen.) (H.F.)

Lösung:
Auch ohne Computer findet man rasch Beispiele; so ist für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5:

$$169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^4 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$$

Klar ist auch für $n = 169$ die Lösung $169 = 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2$ mit 169 Einsen. Größere n kommen nicht in Betracht. Unmittelbar klar ist auch, dass es für $n = 168$ und $n = 167$ keine Lösung geben kann, wohl aber für $n = 166$:

$$169 = 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 + 2^2 \text{ mit } 165 \text{ Einsen.}$$

Für den verbleibenden Bereich $6 \leq n \leq 165$ lohnt es sich, ein kleines Computer-Programm zu schreiben, das entsprechende Darstellungen von 169 als Quadratsummen liefert. Das haben Simon Bats (Gymnasium Oberursel, Kl. 11), Christian Behrens (Gymnasium am Römerkastell Alzey, Kl. 9) und Stefanie Tiemann (Gymnasium Marienberg Neuss, Kl. 11) getan. Dabei ergab sich, dass die einzigen Ausnahmefälle, für die es **keine** Darstellung von 169 als Summe von n Quadratzahlen gibt, die sieben Fälle $n = 156, 159, 162, 164, 165, 167$ und 168 sind.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).

Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

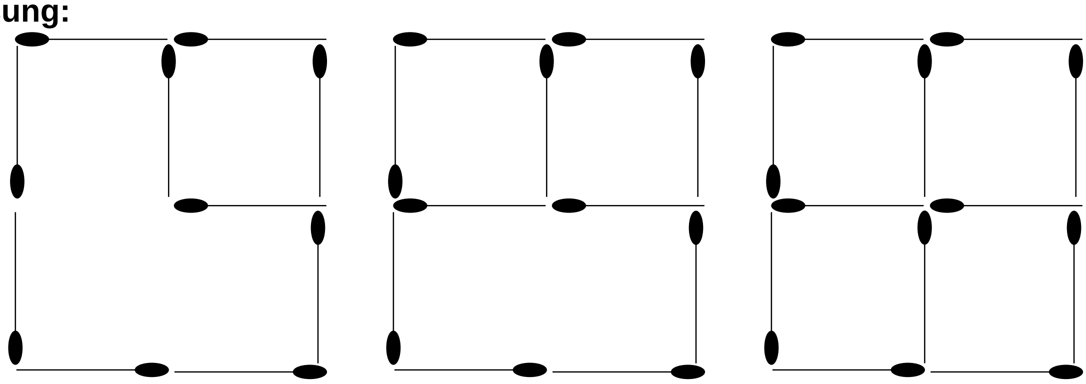
Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 82

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Streichholzaufgabe

Lege Streichhölzer so aneinander, dass
a) 10 Streichhölzer 2 Quadrate,
b) 11 Streichhölzer 3 Quadrate und
c) 12 Streichhölzer 5 Quadrate ergeben. (H.F.)

Lösung:



Aufzugs-Problem

Im Erdgeschoss eines Wolkenkratzers steigen 12 Personen in den Aufzug nach oben. In jedem Stockwerk hält der Aufzug. Dabei steigt mindestens ein Viertel, aber höchstens ein Drittel aller mitfahrenden Personen aus; zugleich steigen so viele Personen ein, wie die Nummer des Stockwerks angibt. (Ausnahme: das Erdgeschoss = Stockwerk 0)

Gibt es ein Stockwerk, bei dem

a) möglicher Weise genau so viele Personen aussteigen wie einsteigen?

b) mit Sicherheit sich erstmals mehr Leute im Lift befinden als im Erdgeschoss eingestiegen sind? (H.F.)

Lösung:

Wir stellen die Veränderungen von Stockwerk zu Stockwerk der Anzahlen beteiligter Personen tabellarisch dar.

Stockwerk	Ankommende		Aussteigende		Einsteigende	Weiterfahrende	
	minimal	maximal	minimal	maximal		minimal	maximal
0	0	0	0	0	12	12	12
1	12	12	3	4	1	9	10
2	9	10	3	3	2	8	9
3	8	9	2	3	3	8	10
4	8	10	2	3	4	9	12
5	9	12	3	4	5	10	14
6	10	14	3	4	6	12	17
7	12	17	3	5	7	14	21

a) Im 3. Stock steigen möglicher Weise 3 Personen aus, und 3 Personen steigen ein.

b) Im 7. Stock befinden sich mit mindestens 14 Personen erstmals mit Sicherheit mehr Leute im Lift als im Erdgeschoss eingestiegen sind.

Logelei: Das Diebestrio

Die drei Diebe A, B, C werden nach einem Einbruch beim Verteilen der Beute gefasst. Es ist bekannt, dass genau einer von ihnen der Tresorknacker, ein anderer der Aufpasser und der dritte der Fahrer des Fluchtautos ist. Beim Verhör sagen sie nun *übereinstimmend* aus:
(1) A ist der Fahrer.
(2) B ist nicht der Fahrer.
(3) C ist nicht der Tresorknacker.
(4) Leider ist nur eine einzige dieser drei Aussagen wahr.
Wer hat also bei dem Einbruch was getan? (H.F.)

Lösung:

(a) Annahme: (1) sei wahr. $\Rightarrow$ (2) kann nicht auch wahr sein wegen (4). $\Rightarrow$ (2) ist falsch, d. h. B ist der Fahrer. Widerspruch zu (1)

(b) Annahme: (2) sei wahr. $\Rightarrow$ (1) muss falsch sein wegen (4). Dann aber ist weder B noch A der Fahrer. $\Rightarrow$ C ist der Fahrer. $\Rightarrow$ (3) ist wahr – aber (2) und (3) können nicht beide wahr sein. Widerspruch: (2) ist falsch – **B ist der Fahrer**.

Aus (a) folgt: (1) ist falsch; aus (b) folgt: (2) ist falsch. Somit ist (3) wahr nach Voraussetzung (4). $\Rightarrow$ C ist der Aufpasser oder der Fahrer. Weil B der Fahrer ist, muss **C der Aufpasser** und folglich **A der Tresorknacker** sein.

Ricardas Rechner

Ricarda hat einen Rechner, auf dem die vier Grundrechenarten (und sonst nichts) vorkommen. Alle vier Tasten sind nur mit einem $*$ versehen. Ricarda rechnet $a * a * a * a * a$. Gibt es Zahlen a, für die das Ergebnis immer gleich a ist, egal in welcher Reihenfolge die vier Rechenarten $+, -, \cdot$ und : gedrückt werden? (gefunden WJB)

Lösung:

$a * a * a * a * a = a$ gilt offensichtlich für alle $a \neq 0$, wenn $+$ und $-$, $-$ und $+$, $\cdot$ und : oder : und $\cdot$ direkt hintereinander vorkommen. Wir brauchen also nur noch die anderen Fälle zu prüfen, z.B. $a + a \cdot a - a : a = a$. Auf dem Rechner heißt das aber

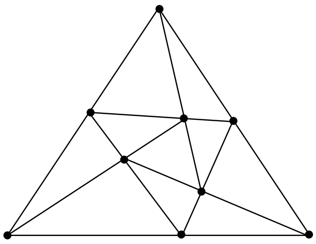
$$(((a + a) \cdot a) - a) : a = (2a^2 - a) : a = 2a - 1.$$

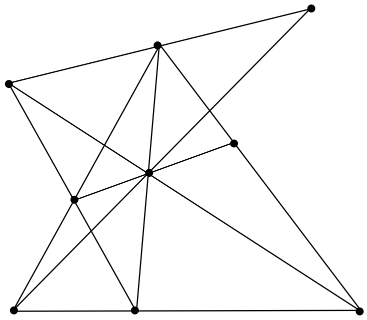
Die Gleichung $2a - 1 = a$ ist nur für $a = 1$ richtig (und $a = 1$ löst offenbar auch alle anderen der Gleichungen $a * a * a * a * a = a$).

9 Punkte und 9 Strecken

9 Punkte und 9 Strecken sollen so in die Ebene gezeichnet werden, dass gilt:
Jeder Punkt liegt auf drei dieser Strecken, und jede Strecke verläuft durch 3 dieser Punkte.
Fertige eine Zeichnung an, in der diese Bedingungen erfüllt sind. (H.F.)

Lösung:
Es gibt drei wesentlich verschiedene Lösungen. Wir geben zwei davon an:





Divisionsrest einer Quadratzahl
Wenn man das Quadrat einer natürlichen Zahl, die kein Vielfaches von 3 ist, durch 3 dividiert, dann ergibt sich stets der Rest 1. (H.F.)

Lösung:
Es sei z eine natürliche Zahl, die kein Vielfaches von 3 ist. Dann gilt: $z = n \cdot 3 + 1$ oder $z = n \cdot 3 + 2$, wobei $n = 0$ oder n eine natürliche Zahl ≥ 1 ist.
Sei $n = 0$: Dann ist $z = 1$ oder $z = 2$ und beide Male gilt die Behauptung.
Sei $n \geq 1$: Dann folgt aus $z = 3 \cdot n + 1$ bzw. $z = 3 \cdot n + 2$, dass

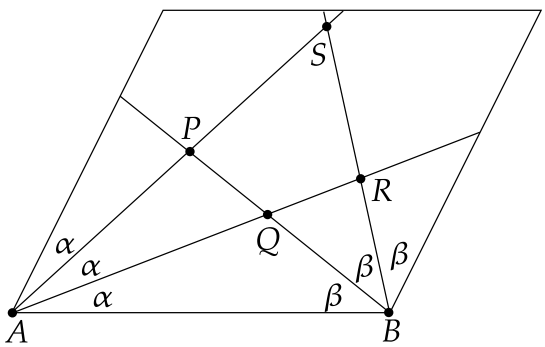
$$z^2 = (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = (3n^2 + 2n) \cdot 3 + 1$$

bzw.

$$z^2 = (3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = (3n^2 + 4n + 1) \cdot 3 + 1,$$

und in beiden Fällen ergibt die Division von z^2 durch 3 den Rest 1.

Winkel im Parallelogramm



In einem beliebigen Parallelogramm seien die Innenwinkel bei A und bei B in drei gleiche Teilwinkel zerlegt.

Berechne den Winkel PQR und zeige, dass er doppelt so groß ist wie der Winkel ASB. (H.F.)

Lösung:
Die Drittelwinkel bei A [bei B] seien α [β]; der Winkel AQB sei γ und der Winkel ASB sei δ.

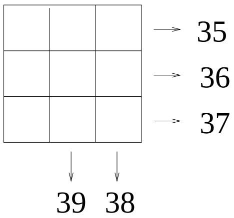
Im Parallelogramm gilt: $2 \cdot 3\alpha + 2 \cdot 3\beta = 360°$. Also ist $\alpha + \beta = 60°$. $(*)$

Im Dreieck ABQ gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Mit $(*)$ folgt: $\gamma = 120°$; also ist auch der Winkel PQR $120°$ groß. Im Dreieck ABS gilt: $2\alpha + 2\beta + \delta = 180°$. Somit ist mit $(*)$: $\delta = 60°$.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Zahlenknobelei



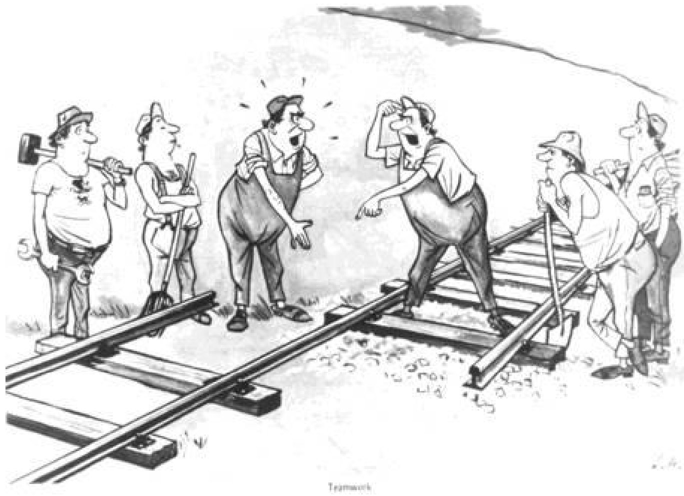
Verteile die Zahlen $8, 9, 10, \dots, 16$ so auf die 9 Quadrate der Figur, dass die drei Zeilensummen $35, 36, 37$ und zwei Spaltensummen 38 und 39 sind. (H.F.)

Geburtstags-Logelei

Eine Person behauptet von sich: „Vorgestern war ich noch 20 Jahre alt und im nächsten Jahr werde ich schon 23 Jahre alt werden." An welchem Tag hatte die Person Geburtstag, und an welchem Tage fand das Gespräch statt? (gefunden H.F.)

Eine einfache Geschwindigkeitsbestimmung

Bei älteren Gleisanlagen sind die Schienen nicht zusammengeschweißt, so dass zwischen ihnen Dehnungsfugen bleiben. Wenn nun ein Zug über eine solche Fuge fährt, hört man einen Klick. Wie lange musst du bei $16{,}5$ m langen Schienen die Klicks zählen, bis deren Anzahl mit der Geschwindigkeit des Zuges (in km/h) annähernd übereinstimmt? (H.F.)



Eiswasser

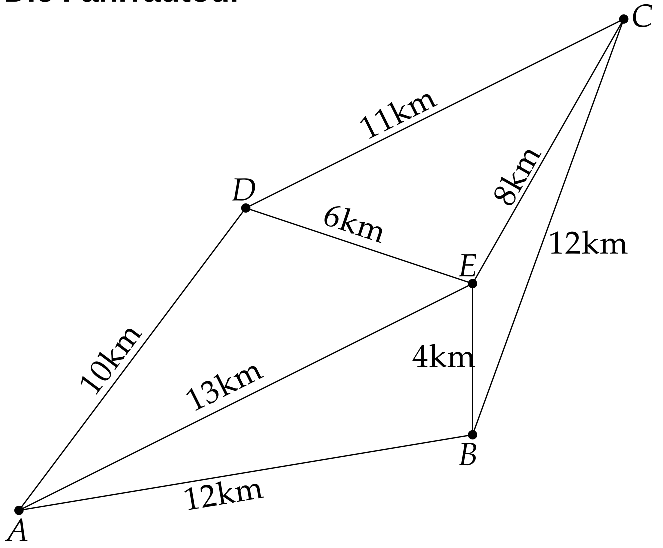
Antje will in einer Literflasche Wasser zu Eis gefrieren lassen. Sie hat gelesen, dass $1\,\mathrm{kg}$ Wasser bei Zimmertemperatur 1% mehr Platz braucht als $1\,\mathrm{l}$ und dass $1\,\mathrm{cm}^3$ Eis nur $\frac{6}{7}$ g wiegt. Da sie diese Angaben nicht für ganz genau hält, will sie sicherheitshalber (damit die Flasche im Gefrierschrank nicht platzt) nur so viel Wasser einfüllen, dass bei Richtigkeit dieser Angaben nach dem Gefrieren $10\,\mathrm{cm}^3$ Platz bleiben sollte.
Wie viel Wasser füllt sie ein? (WJB)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

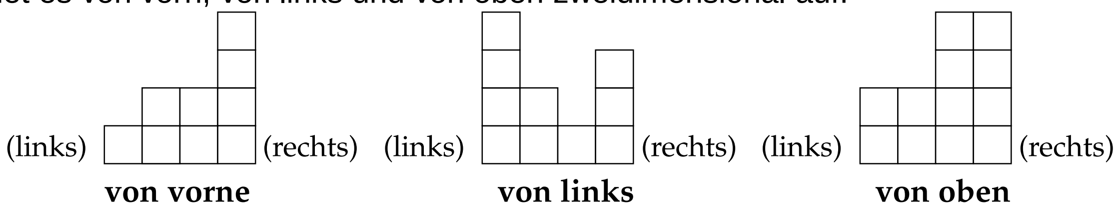
Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Die Fahrradtour

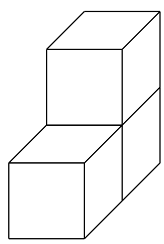


Mathis plant eine Fahrradtour: Von A-Stadt aus will er zu den Dörfern B, C, D, E fahren und dann nach A zurückkehren.
Wie viele verschiedene Touren gibt es, wenn jede Verbindungsstraße höchstens ein Mal benutzt und jedes Dorf genau ein Mal besucht wird? Welches ist die kürzeste Tour? (H.F.)

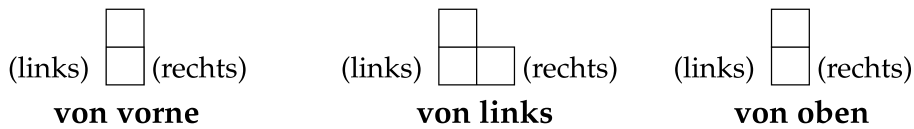
Bauklötze
Paulas kleiner Bruder hat aus vielen gleichen Holzwürfeln ein Gebäude errichtet. Paula zeichnet es von vorn, von links und von oben zweidimensional auf:



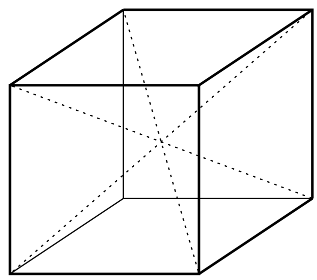
Wie viele Würfel hat Paulas Bruder höchstens verbaut, wie viele mindestens? Begründe! (C.H-A.)



Hinweis: Die Zeichnungen sind wirklich nur zweidimensional und ohne Perspektive. Das links perspektivisch dargestellte 3-Würfel-Gebäude würde Paula so zeichnen:



Ein an Diagonalen armer Körper
Kannst Du einen von regelmäßigen Vielecken begrenzten Körper angeben, der nur eine einzige Raumdiagonale besitzt?
(Jeder Würfel zum Beispiel hat genau drei Raumdiagonalen.) (H.F.)



Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

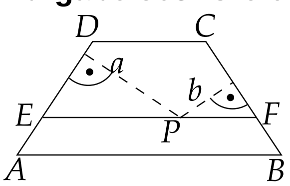
Aufgabe 861. Wo steckt der Fehler?
Wir bezeichnen die nicht abbrechende Summe $1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots$ mit S.
Dann gilt $S = 1+10+100+1000+\ldots = 1+10(1+10+100+1000+\ldots) = 1+10S$.
Aus $1 + 10S = S$ folgt $9S = -1$, also $S = -\frac{1}{9}$ – und das ist offensichtlich falsch.
Wie erklärst du das? (H.F.)

Aufgabe 862. Problem mit dem Alter
Sabine fragt ihren Onkel, wie alt seine drei Kinder sind. Er antwortet: „Als Anna geboren wurde, war Markus so alt wie Birgit bei seiner Geburt gewesen war. Multipliziert man das Produkt aus dem Alter von Anna und dem von Markus mit dem Produkt aus dem Alter der beiden Mädchen, so erhält man das Vierfache des Produkts aus den Altern der beiden älteren Geschwister." Sabine unterbricht ihn: „Jetzt weiß ich, wie alt Anna ist." Der Onkel erzählt weiter: „Multiplizierst du das kleinste der drei Produkte mit der Wurzel aus dem mittleren, so erhältst du das größte Produkt."

a) Wie alt ist Anna?

b) Wie alt sind die anderen Beiden? (WJB)

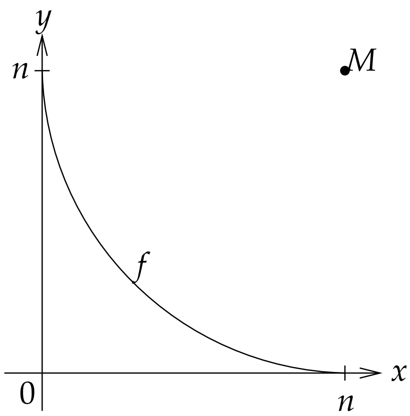
Aufgabe 863. Gleichschenkliges Trapez



Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke EF, $EF \parallel AB$. Seine Abstände zu den Trapezseiten AD und BC seien mit a und b bezeichnet.
Zeige, dass die Summe $a + b$ sich nicht ändert, wenn P seine Lage auf EF beliebig ändert. (H.F.)

Aufgabe 864. Spezielle pythagoreische Zahlentripel
Die pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z) – also natürliche Zahlen x, y, z mit $x^2 + y^2 = z^2$ – bieten vielfach Anlass zu mathematischen Erkundungen.
Nachdem nun geklärt ist, dass es unendlich viele Tripel der Form $(a, a + 1, c)$ gibt (Heft 79), kann man ebenso gut fragen:
Gibt es Tripel der Form $(a, b, b + 1)$? Vielleicht sogar unendlich viele? Finde eine Gleichung, mit der sich diese Tripel darstellen lassen! (Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 865. Funktionsgraph



Bestimme die Funktionsvorschrift des Graphen, den man erhält, wenn man mit einem Zirkel bei M einsticht und einen Viertelkreis mit dem Radius $r = n$ zeichnet.
(Christoph Karg,
Geschwister-Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Aufgabe 866. Ein Zufall oder nicht?

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2005\cdot 2004+\frac{1}{4}}+\sqrt{2005\cdot 2006+\frac{1}{4}}\right)=2005\ ?$$

Trifft die Gleichung zu? Wenn ja, warum? (H.F.)

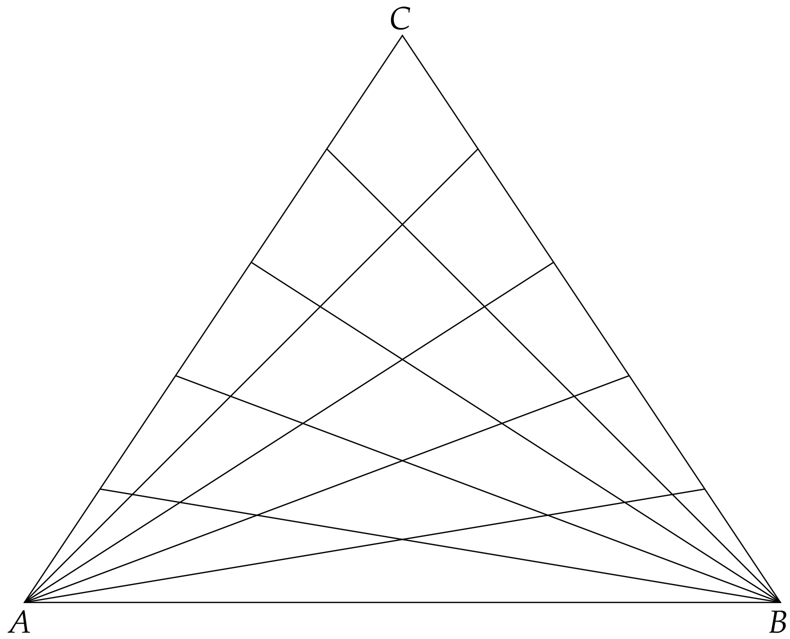
Aufgabe 867. $\ast$

a) Wie viele Dreiecke sind in dieser Figur zu sehen?

b) Kannst Du eine Anzahlformel für den allgemeinen Fall herleiten, wenn die Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ in n Teile unterteilt sind?

(Christoph Sievert, Bornheim)

Hinweis: Das Abzählen dieser Dreiecke – es sind vermutlich mehr, als man auf den ersten Blick erwarten würde – ist nicht besonders spannend; interessanter ist es, einen *systematischen* Weg zu finden, um diese Anzahl relativ schnell zu ermitteln.



Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 82

Kl. 8-13

Aufgabe 854. Wägeaufgabe

Von 12 gleich aussehenden Kugeln ist eine leichter oder schwerer als die übrigen 11 Kugeln.

Finde durch dreimaliges Wiegen mit einer Balkenwaage heraus, welches die Kugel mit anderem Gewicht ist, und sage, ob sie leichter oder schwerer ist als die anderen Kugeln. (Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:

Wir teilen die Kugeln in drei Gruppen à 4 Kugeln und legen 8 Kugeln auf die Waage, 4 auf jede Seite.

Fall A: Gleichgewicht

Die Kugeln auf der Waage haben alle das selbe Gewicht; diese 8 Kugeln werden mit c gekennzeichnet, die restlichen 4 Kugeln mit unbekanntem Gewicht – unter ihnen ist die gesuchte Kugel – mit n_1, n_2, n_3, n_4.

Nun legen wir n_1, n_2, n_3 und eine mit c gekennzeichnete Kugel auf die linke Seite der Waage, 4 andere mit c gekennzeichnete Kugeln auf die rechte Seite.

Fall AA: *Gleichgewicht:* n_4 muss die gesuchte Kugel sein. Dann wiegen wir n_4 gegen eine c-Kugel und sehen an der Waage, ob n_4 schwerer oder leichter ist.

Fall AB: *rechts leichter:* n_1 oder n_2 oder n_3 ist die gesuchte Kugel; sie ist schwerer. Nun wiegen wir n_1 gegen n_2. Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist n_3 schwerer, ansonsten n_1 bzw. n_2.

Fall AC: *rechts schwerer:* n_1 oder n_2 oder n_3 ist die gesuchte Kugel; sie ist leichter. Wie eben wiegen wir dann n_1 gegen n_2. Bei Gleichgewicht ist n_3 leichter, sonst n_1 bzw. n_2.

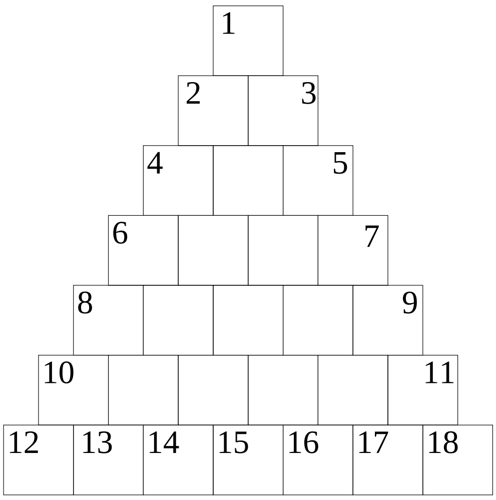
Fall B: Ungleichgewicht
Die 4 Kugeln, die nicht gewogen wurden, haben das selbe Gewicht und werden mit c gekennzeichnet, die 4 Kugeln, die auf der „schwereren" Seite waren, mit s_1, s_2, s_3, s_4 (sollte die gesuchte Kugel dabei sein, dann muss sie schwerer sein), die 4 „leichteren" Kugeln mit l_1, l_2, l_3, l_4 (sollte die gesuchte Kugel dabei sein, dann muss sie leichter sein).
Nun legen wir drei c-Kugeln und s_1 auf die linke Seite der Waage, s_2, s_3, l_1 und l_2 auf die rechte Seite.

Fall BA: *Gleichgewicht:* Die gesuchte Kugel muss s_4 oder l_3 oder l_4 sein. Wir wiegen dann l_3 gegen l_4. Bei Gleichgewicht ist s_4 schwerer, ansonsten ist l_4 bzw. l_3 leichter.

Fall BB: *rechts leichter:* Die gesuchte Kugel muss s_1 oder l_1 oder l_2 sein. Jetzt wiegen wir l_1 gegen l_2. Bei Gleichgewicht ist s_1 schwerer, sonst l_1 bzw. l_2 leichter.

Fall BC: *rechts schwerer:* Die gesuchte Kugel muss s_2 oder s_3 sein. Dann wiegen wir s_2 gegen s_3 und sehen an der Waage, ob s_2 oder s_3 schwerer ist.

Aufgabe 855. Zahlenrätsel



Ersetze in den Angaben unten verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen. Trage danach horizontal sowie schräg von rechts oben nach links unten Zahlen ein, die so festgelegt sind:

Horizontal:

$2/3$	–	$s \cdot (t^t)^t + v$
$4/5$	–	$s \cdot v^t \cdot w$
$6/7$	–	$u \cdot (v^4 - v^2 - v^0)$
$8/9$	–	$t^u \cdot (t^{t^s} - t^t - t) + s$
$10/11$	–	$r \cdot s \cdot t \cdot u^s \cdot w$
$12/18$	–	(Zeile $6/7) \cdot s^{s+1} \cdot t \cdot v$

Vertikal:

$1/12$	–	s^w
$3/13$	–	w^v
$5/14$	–	$s^{t \cdot v}$
$7/15$	–	$v^v - s \cdot u \cdot v + s \cdot t$
$9/16$	–	Spiegelzahl, bestehend aus den Ziffern s, s^2, s
$11/17$	–	erste Primzahl $> s \cdot t \cdot u$

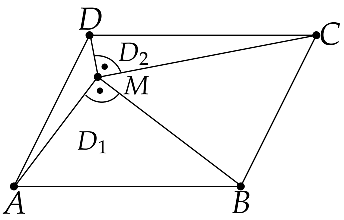
<u>Hinweis:</u> Die den Buchstaben r, s, t, u, v, w entsprechenden Zahlen sind (in anderer Reihenfolge) unmittelbar aufeinander folgende Primzahlen. (H.F.)

Lösung:

Aus $2/3$ folgt $t = 2$ (denn wäre $t \geq 3$, so wäre $\left(t^t\right)^t \geq \left(3^3\right)^3 > 100$). Aus $5/14$ und s, v Primzahlen $\neq 2$ folgt: Nur $3^{2 \cdot 5}$ und $5^{2 \cdot 3}$ sind 5-ziffrig. Also ist $s = 3$, $v = 5$ oder $s = 5$, $v = 3$. Wegen $9/16$ kommen nur $s = 3$, $v = 5$ in Frage.
Nun gilt z.B. für $1/12$: 3^w ist 7-ziffrig und w ist eine Primzahl – also muss $w = 13$ sein; usw.
Insgesamt ergibt sich: $t = 2$, $s = 3$, $v = 5$, $u = 7$, $r = 11$, $w = 13$.

1
5 3
9 7 5
4 1 9 3
3 2 0 0 3
2 9 4 2 9 4
3 3 9 6 3 3 0

Aufgabe 856. Parallelogramm-Zerlegung



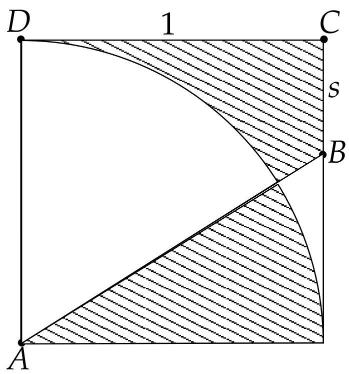
In einem Parallelogramm seien zwei rechtwinklige Dreiecke D_1 und D_2 wie in der Figur links konstruiert.
Begründe, dass eine solche Konstruktion stets möglich ist, und zeige:
Die Flächen von D_1 und D_2 sind zusammen halb so groß wie die Parallelogrammfläche. (H.F.)

Lösung:
Die Eckpunkte des Parallelogramms seien so mit A, B, C, D bezeichnet, dass die Seiten AB und CD des Parallelogramms mindestens so lang sind wie die Seiten BC und AD.

Dann schneiden sich die Halbkreise des Thales über AB und CD in einem Punkt M im Innern des Parallelogramms. (Im Allgemeinen gibt es sogar zwei solche Schnittpunkte. Damit diese jedoch tatsächlich im Innern des Parallelogramms liegen, muss eine entsprechende Voraussetzung über das Größenverhältnis der Parallelogrammseiten und die Winkel des Parallelogramms, also seine Gestalt, in die Aufgabenstellung aufgenommen werden.) Die Dreiecke $D_1 = ABM$ und $D_2 = CDM$ sind rechtwinklig.
Bezeichnet man die Höhen von D_1, D_2 mit h_1, h_2, dann gilt:
$|D_1| + |D_2| = \frac{1}{2}|AB|h_1 + \frac{1}{2}|CD|h_2 = \frac{1}{2}|AB|(h_1 + h_2)$ und $|ABCD| = |AB|(h_1 + h_2)$, so dass $|D_1| + |D_2| = \frac{1}{2}|ABCD|$ ist.

Aufgabe 857. Ein Flächenproblem

Im Einheitsquadrat mit Kreisbogen (siehe nebenstehende Figur) bestimme man die Länge s so, dass die beiden schraffierten Flächenstücke gleichen Inhalt haben. (gefunden Christoph Sievert, Bornheim)



Lösung:
Sind die beiden schraffierten Flächen gleich, so ist die Fläche des Viertelkreises gleich der Fläche des Trapezes $ABCD$, also $\frac{\pi}{4} = \frac{1+s}{2}$. Dann ist $s = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$.

Aufgabe 858. Die Klassensprecherwahl
Eine Klasse besteht aus w Mädchen und m Jungen. Die Klassenstärke $n = w + m$ liegt zwischen 20 und 30.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, Klassensprecher/in und Stellvertreter/in zu wählen?

b) Bei wie vielen dieser Möglichkeiten sind Beide männlich bzw. Beide weiblich?

c) Wenn wir wissen, dass es gleich viele Möglichkeiten gibt, bei denen die beiden Gewählten das gleiche Geschlecht haben wie Möglichkeiten mit ungleichem Geschlecht, wie viele Kinder sind dann in der Klasse? (WJB)

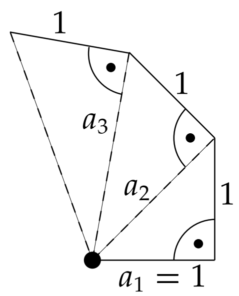
Lösung:

a) Für Sprecher/in gibt es n Möglichkeiten, für Vertreter/in dann nur noch $n-1$, insgesamt also $n(n-1)$ Möglichkeiten.

b) Mit der entsprechenden Begründung: $m(m-1)$ bzw. $w(w-1)$ Möglichkeiten.

c) Die Hälfte der Möglichkeiten $\frac{n(n-1)}{2}$ ist wegen b)
$m(m-1) + w(w-1) = (n-w)(n-w-1) + w(w-1) = 2w^2 - 2wn + n^2 - n$.
Wir lösen die quadratische Gleichung $2w^2 - 2wn + n^2 - n = \frac{n^2-n}{2}$ nach w auf und erhalten $w = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{1}{2}(n \pm \sqrt{n})$ sowie $m = n - w = \frac{1}{2}(n \mp \sqrt{n})$.
Dies ist nur möglich, wenn $\sqrt{n}$ eine ganze Zahl ist. Das einzige solche n zwischen 20 und 30 ist 25. Es ist dann $m = 15$, $w = 10$ oder $m = 10$, $w = 15$.

Aufgabe 859. Streckeniteration
a) An das Ende einer Strecke der Länge $a_1 = 1$ wird senkrecht eine Strecke der Länge 1 angelegt. Ihr Ende wird mit dem Ausgangspunkt verbunden und an das Ende dieser Verbindungsstrecke wieder senkrecht eine Strecke der Länge 1 angelegt. Dieses Verfahren wird wiederholt. Wie lang ist die n-te Verbindung zum Ausgangspunkt?



b) Ersetzt man den rechten Winkel durch einen kleineren Winkel α, so hat a_n einen Grenzwert a. Wie groß ist dieser? (WJB)

Lösung:
a) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1^2$, woraus sich $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = 2$, $a_3^2 = 3, \ldots$, d.h. $a_n = \sqrt{n}$ ergibt.

b) Nach dem Kosinussatz ist $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1^2 - 2a_n \cdot 1 \cdot \cos(\alpha)$. Falls a_n den Grenzwert a hat, so haben a_n^2 und a_{n+1}^2 den Grenzwert a^2 und somit gilt $a^2 = a^2 + 1 - 2a\cos(\alpha)$. Diese Gleichung hat die Lösung $a = \frac{1}{2\cos(\alpha)}$.

Aufgabe 860. Abstandsuntersuchung $\ast$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ seien n voneinander verschiedene reelle Zahlen. Betrachte die Summe ihrer Abstände von x, d.h.

$$A(x) = |a_1 - x| + |a_2 - x| + \ldots + |a_n - x|$$

und die Summe der quadrierten Abstände

$$Q(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2$$

a) Stelle für $n = 2, 3$ fest, für welche Werte von x die Funktion $A(x)$ ihren kleinsten Wert annimmt.

b) n sei ungerade, $n = 2m + 1$. Für welches x ist $A(x)$ minimal?

c) n sei gerade, $n = 2m$. Für welche x ist $A(x)$ minimal?

d) Für welches x hat $Q(x)$ sein Minimum? (WJB)

Lösung:

a) Für $n = 2$ ist $A(x) = \begin{cases} a_2 - x + a_1 - x > a_2 - a_1 & \text{falls } x < a_1 \\ a_2 - x + x - a_1 = a_2 - a_1 & \text{falls } a_1 \leq x \leq a_2 \\ x - a_2 + x - a_1 > a_2 - a_1 & \text{falls } x > a_2, \end{cases}$

also ist $A(x)$ minimal für $a_1 \leq x \leq a_2$.

Für $n = 3$ gilt $A(x) = \begin{cases} a_3 - x + a_2 - x + a_1 - x > a_3 - a_1 & \text{für } x < a_1 \\ a_3 - x + a_2 - x + x - a_1 > a_3 - a_1 & \text{für } a_1 \leq x < a_2 \\ a_3 - x + 0 + x - a_1 = a_3 - a_1 & \text{für } x = a_2 \\ a_3 - x + x - a_2 + x - a_1 > a_3 - a_1 & \text{für } a_2 < x \leq a_3 \\ x - a_3 + x - a_2 + x - a_1 > a_3 - a_1 & \text{für } x > a_3, \end{cases}$

d.h. $A(x)$ ist minimal für $x = a_3$.

b) Liegt x zwischen a_i und a_{i+1}, so gibt es bei wachsendem x i Summanden $a_j - x$, die wachsen, und $n - i$ fallende Summanden in $A(x)$. Also fällt $A(x)$ solange $n - i > i$ und wächst, wenn $n - i < i$, d.h. $A(x)$ fällt solange $2i < 2m + 1$ und wächst, wenn $2i > 2m + 1$. Der minimale Wert wird also erreicht, wenn $x = a_m$.

c) Für gerades $n = 2m$ ergibt sich entsprechend: fallendes $A(x)$ solange $2i < 2m$ und wachsendes, wenn $2i > 2m$. Für alle Werte x (mit $i = m$) mit $a_m \leq x \leq a_{m+1}$ ist $A(x)$ minimal.

d) Q ist eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $Q'(x) = -2(a_1 - x + a_2 - x + \ldots + a_n - x) = -2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 2nx$. Diese hat als einzige Nullstelle $x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ und dort liegt ein Minimum vor.

Lösung der Aufgabe aus dem Artikel „Der kleine Carl Friedrich hat's uns vorgemacht“

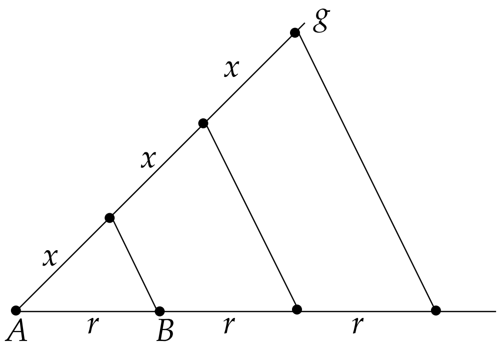
Es gibt $500\,000 = \frac{1}{2} \cdot 10^6$ ungerade ganze Zahlen $< 10^6$. Folglich gibt es $\frac{1}{4} \cdot 10^6$ Paare $1|999\,999$; $3|999\,997; \ldots, 499\,999|500\,001$ aus ungeraden Zahlen, von denen jedes die Ziffernsumme $1 + 6 \cdot 9$ hat.

Somit ist $\frac{1}{4} \cdot 10^6 \cdot (1 + 6 \cdot 9) = 13\,750\,000$ die gesuchte Ziffernsumme. Entsprechend ist $\frac{1}{4} \cdot 10^m \cdot (1 + m \cdot 9)$ die Ziffernsumme aller ungeraden ganzen Zahlen $< 10^m$.

Wer forscht mit?
Geometrische Konstruktionen allein mit dem Zirkel

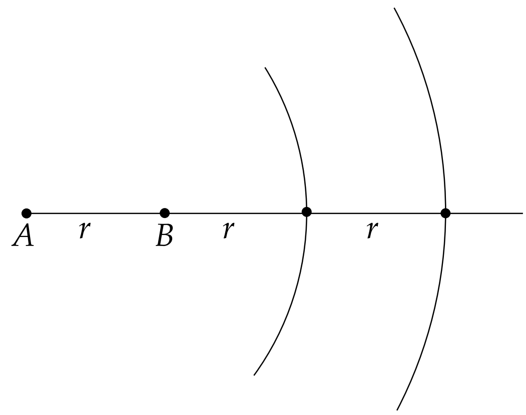
Bei elementaren geometrischen Konstruktionen gelten traditionell nur Zirkel und Lineal als zulässige Arbeitsmittel. Wenn man sich aber die Beschränkung auferlegt, dass allein der Zirkel erlaubt ist, dann sind viele Konstruktionen naturgemäß verwickelter oder sie sind gar nicht ausführbar.

Beispiel: Man konstruiere eine Strecke, die drei Mal so lang ist wie eine gegebene Strecke AB.
Mit Zirkel und Lineal sieht eine Lösung etwa so aus:



$|AB| = r$, x beliebig
g beliebiger Strahl durch A

oder so



Für eine Konstruktion nur mit einem Zirkel ist zunächst eine Vereinbarung nötig: Da man Strecken und Geraden nicht mit einem Zirkel zeichnen kann, soll bei Nur-Zirkel-Konstruktionen gelten, dass eine Strecke AB oder eine Gerade durch die Punkte A, B konstruiert ist, wenn man A und B als Schnittpunkte von Kreisen festlegen kann.

Zurück zum Beispiel: **Mit dem Zirkel allein** könnte die Verlängerung von AB mit $|AB| = r$ so beginnen:
Man zeichnet zunächst einen Kreis vom Radius r um den Punkt A der Ebene und auf diesem konstruiert man die 6 Eckpunkte B, C, D, E, F, G eines regelmäßigen Sechsecks. Je zwei diametral gegenüberliegende Eckpunkte - etwa B und E - sind die Eckpunkte einer Strecke der Länge $2r$. Es ist nun gar nicht naheliegend, wie man weiter konstruiert, um eine Strecke der Länge $3r$ zu erhalten. Der Leser versuche es selbst!

Und hier unsere Aufforderung: Untersuche, welche der sogenannten geometrischen Grundkonstruktionen allein mit dem Zirkel ausführbar sind. Dabei könnte man sich zunächst z. B. mit Fragestellungen befassen wie dieser: Ist eine Strecke (ein Winkel) konstruierbar, die f-mal so lang (der f-mal so groß) wie eine gegebene Strecke (wie ein gegebener Winkel) ist? Man sollte wohl mit ganzzahligen f beginnen. (H.F.)

Eure Ergebnisse könnt Ihr bis zum 15. Februar 2006 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im MONOID-Heft 85 werden wir diese veröffentlichen; außerdem erhaltet Ihr auch hierauf Punkte.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Die Forscheraufgabe aus MONOID 79

Ziffern-Perioden
Wenn wir eine lange, lückenlose Kette der Potenzen von 2 hinschreiben, dann beobachten wir, dass die Einerziffern immer wieder der Reihe nach die Werte $2, 4, 6, 8$ annehmen. Man sagt: Die Einerziffern haben die **Periode** $2, 4, 6, 8$ und die **Länge der Periode** ist 4.

(a) Wiederholen sich auch die Zehnerziffern, die Hunderterziffern, die Tausenderziffern periodisch? Wenn ja – wie lang ist dann die jeweilige Periode?

(b) Finde eine Formel, mit der man die Periodenlänge für die Ziffern auf der n-ten Stelle von rechts bei den Zweierpotenzen angeben kann!

Behandle nun auch a) und b) für die Potenzen von 5, sowie für die Quadratzahlen. (H.F.)

Mit dieser Aufgabe haben sich Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf, Kl. 7) und Stefanie Tiemann (Gymnasium Marienberg Neuss, Kl. 11) erfolgreich auseinandergesetzt. Da die Lösung von Stefanie die ausführlichere ist, geben wir sie hier wieder. Auch mit dem „Problem 2“ aus MONOID 75, das wir in MONOID 79 nochmals zur Bearbeitung empfohlen haben, hat sich Stefanie Tiemann beschäftigt. Auf ihre Lösung gehen wir im nächsten Heft ein. Nun zu den **Ziffern-Perioden** von Stefanie Tiemann:

Potenzen von 2
a) Um die Periode der **Zehnerziffern** zu bestimmen, genügt es, die letzten beiden Ziffern der Potenzen von 2 zu betrachten. Es ergibt sich dabei folgende Kette:

$02 \to 04 \to 08 \to 16 \to 32 \to 64 \to 28 \to 56 \to 12 \to 24 \to 48 \to 96 \to 92 \to 84 \to 68 \to 36 \to 72 \to 44 \to 88 \to 76 \to 52 \to 04 \to 08 \to \dots$

Es gilt also $04 \xrightarrow{(20)} 04$. Die beiden letzten Ziffern wiederholen sich mit einer Periodenlänge von 20. Also wiederholen sich auch die Zehnerziffern mit einer Periodenlänge von 20.

Hunderterziffern:
Hier gilt bei Betrachtung der letzten 3 Ziffern der 2er Potenzen: $008 \xrightarrow{(100)} 008$. Entsprechend der 3 letzten Ziffern wiederholen sich die Hunderterziffern mit einer Periodenlänge von 100.

Tausenderziffern:
Hier gilt bei Betrachtung der letzten 4 Ziffern der 2er Potenzen: $0016 \xrightarrow{(500)} 0016$. Entsprechend der 4 letzten Ziffern wiederholen sich die Tausenderziffern mit einer Periodenlänge von 500.

b) Bei der **n-ten Ziffer von rechts** gilt: $2^n \xrightarrow{(4\cdot 5^{n-1})} 2^n$ (modulo 10^n betrachtet). Die Periodenlänge ist also $4 \cdot 5^{n-1}$.

Beweis:
Zunächst zeige ich folgende Aussage mittels vollständiger Induktion über n:
Für alle natürlichen Zahlen n gibt es natürliche Zahlen $m_1, m_2, m_3, \dots$, so dass gilt:
$(1)\quad 2^{(4\cdot 5^{n-1})} = m_n \cdot 5^n + 1$
Induktionsanfang ($n = 1$): $2^{(4\cdot 5^0)} = 2^4 = 16 = 3 \cdot 5 \ + 1$

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
2^{(4\cdot 5^n)} &= \left(2^{4\cdot 5^{n-1}}\right)^5 \\
&= \left(m_n \cdot 5^n + 1\right)^5 && |\text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= m_n^5 \cdot 5^{5n} + 5 \cdot m_n^4 \cdot 5^{4n} + 10 \cdot m_n^3 \cdot 5^{3n} + 10 \cdot m_n^2 \cdot 5^{2n} + 5 \cdot m_n \cdot 5^n + 1 \\
&= \left(m_n^5 \cdot 5^{4n-1} + m_n^4 \cdot 5^{3n} + 2 \cdot m_n^3 \cdot 5^{2n} + 2 \cdot m_n^2 \cdot 5^n + m_n\right) 5 \cdot 5^n + 1 \\
&= m_{n+1} \cdot 5^{n+1} + 1 \\
&\quad \text{mit } m_{n+1} = m_n^5 \cdot 5^{4n-1} + m_n^4 \cdot 5^{3n} + 2 \cdot m_n^3 \cdot 5^{2n} + 2 \cdot m_n^2 \cdot 5^n + m_n
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (1) folgt nun: $2^n \cdot 2^{4\cdot 5^{n-1}} = 2^n \cdot m_n \cdot 5^n + 1 = m_n \cdot 10^n + 2^n$.
Damit ist gezeigt: Die Periodenlänge der n-ten Ziffer von rechts ist $4 \cdot 5^{n-1}$.

Potenzen von 5

Die Betrachtung der letzten zwei Ziffern ergibt folgende Kette: $05 \to 25 \to 25 \to \ldots$
Es gilt also $25 \xrightarrow{(1)} 25$. Die Periodenlänge ist 1.
Die Betrachtung der letzten drei Ziffern ergibt folgende Kette: $005 \to 025 \to 125 \to 625 \to 125 \to \ldots$ Es gilt also $125 \xrightarrow{(2)} 125$. Die Periodenlänge ist 2.
Die Betrachtung der letzten vier Ziffern ergibt folgende Kette: $0005 \to 0025 \to 0125 \to 0625 \to 3125 \to 5625 \to 8125 \to 0625 \to \ldots$ Es gilt also $0625 \xrightarrow{(4)} 0625$. Die Periodenlänge ist 4.
Allgemein gilt für $n > 1$:
(2) $5^n \xrightarrow{(2^{n-2})} 5^n$ (modulo 10^n betrachtet).
Daraus folgt, dass die Periodenlänge 2^{n-2} ist.
Beweis von (2):

$$\begin{aligned}
5^n \cdot 5^{2^{n-2}} - 5^n &= 5^n \left(5^{2^{n-2}} - 1\right) \\
&= 5^n \left(5^{2^{n-3}} + 1\right)\left(5^{2^{n-3}} - 1\right) && |\text{3. Binomische Formel} \\
&= 5^n \left(5^{2^{n-3}} + 1\right)\left(5^{2^{n-4}} + 1\right)\left(5^{2^{n-4}} - 1\right) && |\text{3. Binomische Formel} \\
&= 5^n \left(5^{2^{n-3}} + 1\right)\left(5^{2^{n-4}} + 1\right)\left(5^{2^{n-5}} + 1\right) \ldots \left(5^0 + 1\right)\left(5^0 - 1\right) \\
&= 5^n \left(2 \cdot \frac{5^{2^{n-3}}+1}{2}\right)\left(2 \cdot \frac{5^{2^{n-4}}+1}{2}\right)\left(2 \cdot \frac{5^{2^{n-5}}+1}{2}\right) \ldots \left(2 \cdot \frac{5^0+1}{2}\right)\left(2^2\right) \\
&= 5^n \cdot 2^n \left(\frac{5^{2^{n-3}}+1}{2}\right)\left(\frac{5^{2^{n-4}}+1}{2}\right)\left(\frac{5^{2^{n-5}}+1}{2}\right) \ldots \left(\frac{5^0+1}{2}\right) \\
&= 10^n \left(\frac{5^{2^{n-3}}+1}{2}\right)\left(\frac{5^{2^{n-4}}+1}{2}\right)\left(\frac{5^{2^{n-5}}+1}{2}\right) \ldots \left(\frac{5^0+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Also ist $5^n = 5^n \cdot 5^{2^{n-2}} \bmod 10^n$.

Quadratzahlen

Es gilt: $(10+n)^2 = 100 + 20n + n^2 = 10(10+2n) + n^2$. Also ergibt sich für die letzte Ziffer eine Periodenlänge von 10.
Weiter gilt für $m > 0$:

$$(5 \cdot 10^m + n)^2 = 25 \cdot 10^{2m} + 10n \cdot 10^m + n^2 = 10^{m+1}(25 \cdot 10^{m-1} + n) + n^2$$

Daraus ergibt sich für die $(m+1)$-te Ziffer von hinten eine Periodenlänge von $5 \cdot 10^m$.
Also zusammenfassend:

$$\text{Periodenlänge} = \left\{ \begin{array}{ll} 10 & \text{für die letzte Ziffer} \\ 5 \cdot 10^{m-1} & \text{für die } m\text{-te Ziffer von rechts, falls } m > 1 \end{array} \right\}$$

Der Umfangswinkelsatz für die Parabel

von Edzard Salow

Beim Kreis kann man den Umfangswinkelsatz in folgender Weise beschreiben:
Sind A, B zwei Punkte auf einem Kreis und C, D zwei weitere Kreispunkte, die auf dem Kreis nicht von A und B getrennt werden, dann stimmen die Größen der Winkel ACB und ADB überein.
Ersetzt man hier den Kreis durch eine Parabel, so gilt diese Aussage nicht mehr. Es gibt aber auch bei der Parabel merkwürdige Gemeinsamkeiten zwischen den Winkeln ACB und ADB.
Wir sehen uns dazu die Parabel $y = 0,2x^2$ an. Mit kleinen Buchstaben $a, b, c, d, \dots$ sollen die x-Werte der Punkte $A, B, C, D, \dots$ auf der Parabel bezeichnet werden. Die Steigung der Geraden AC ist dann $\dfrac{0,2a^2 - 0,2c^2}{a-c} = 0,2(a+c)$.

Entsprechend ist $0,2(b+c)$ die Steigung von BC. Darum ist die Differenz der beiden Steigungen gleich $0,2(a-b)$, also unabhängig von C. Für die Winkel ACB und ADB ist darum zwar die gewöhnliche (man sagt: 'die euklidische') Winkelgröße nicht gleich. Man kann hier jedoch ein nicht-euklidisches Winkelmaß (kurz: NE-Winkelmaß) einführen, für das die Maße der beiden Winkel übereinstimmen. Der Wert des NE-Winkelmaßes für einen Umfangswinkel über dem Bogen AB soll die Differenz $0,2(a-b)$ der Steigungen der Schenkelgeraden sein.

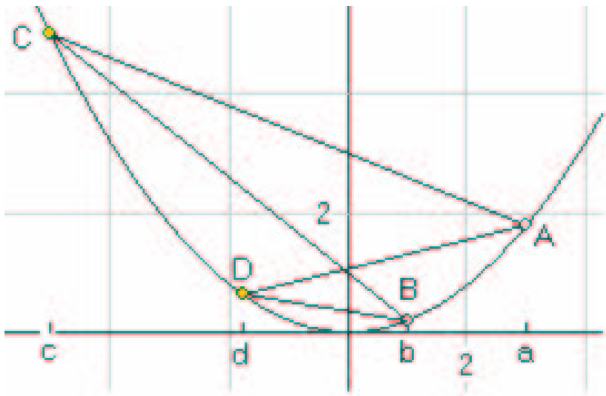


Abb. 1. Die Umfangswinkel ACB und ADB

Um zu beurteilen, welchen Wert dieses NE-Winkelmaß für die Geometrie hat, sehen wir uns in dem Sehnendreieck ABC der Parabel $y = 0,2x^2$ Geraden an, die für dieses Winkelmaß die Innenwinkel halbieren (Abb. 2). Beim Winkel ACB ist dies die Gerade CE, wobei E der Punkt auf der Parabel mit dem x-Wert $e = \frac{1}{2}(a+b)$ ist.

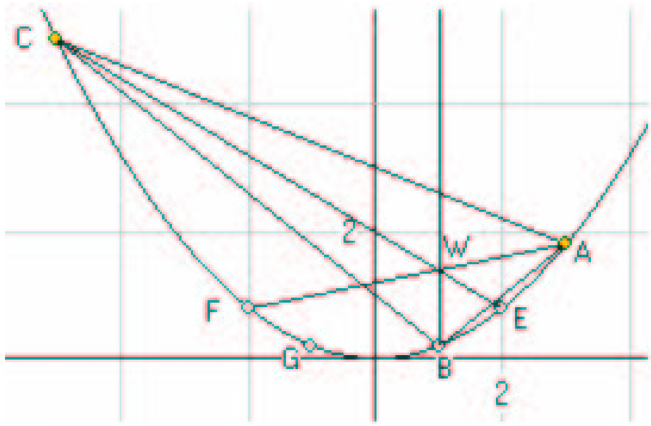


Abb 2. NE-Winkelhalbierende im Dreieck ABC

Es stimmen die NE-Maße der Winkel ACE und ECB überein, nämlich $0,2(a-e)$ und $0,2(e-b)$. Der Winkel BAC wird durch die Gerade AF mit $f = \frac{1}{2}(b+c)$ halbiert, der Winkel CBA durch die Gerade BG mit $g = \frac{1}{2}(c+a)$. Die Geraden CE mit der Gleichung

$y = 0,2(c+e) \cdot x - 0,2ce$ und AF mit der Gleichung $y = 0,2(a+f) \cdot x - 0,2af$ schneiden sich im Punkt W mit

$$w = \frac{ce - af}{c + e - a - f} = \frac{c \cdot 0,5(a+b) - a \cdot 0,5(b+c)}{c + 0,5(a+b) - a - 0,5(b+c)} = \frac{0,5 \cdot b \cdot (c-a)}{0,5 \cdot (c-a)} = b.$$

Leider liegt W im Allgemeinen nicht auf BG. Schade!
Nun sollte man sich aber daran erinnern, dass es zu jedem Winkel noch eine zweite Winkelhalbierende gibt, nämlich die Halbierende des Nebenwinkels. Zu jedem Dreieck gibt es also sechs Winkelhalbierende. Aus der euklidischen Geometrie weiß man, dass diese sechs Geraden ein Dreieck mit den zugehörigen Höhen bilden.
In unserer Parabelgeometrie kann man nun zu einem Sehnendreieck ABC drei weitere Winkelhalbierende einführen, die durch die Eckpunkte verlaufen und parallel zur y-Achse sind. Dann geht durch den Schnittpunkt W der zwei Winkelhalbierenden AF und BG auch noch eine dritte Winkelhalbierende. In dieser nicht-euklidischen Parabelgeometrie könnte man nun eine neue Form von Orthogonalität einführen. Sie ist jedoch etwas gewöhnungsbedürftig. Denn die Parallelen zur y-Achse sind in dieser Geometrie zu allen anderen Geraden ‚orthogonal', also auch zu sich selbst!

Es gibt aber noch andere Methoden, ein Winkelmaß so zu definieren, dass der Umfangswinkelsatz für die Parabel $y = 0,2x^2$ gilt. Dazu brauchen wir eine Maßgerade g und einen Maßpunkt P. Wir nehmen weitgehend willkürlich für g die Gerade $y = -0,8$. Diese Maßgerade und die Parabel bestimmen den Punkt $P(0; -2,8)$. (Warum das so ist, kann erst nach den folgenden Erläuterungen klar werden.) Wenn A, B, C Punkte der Parabel sind, so wird der Winkel ACB bei C in folgender Weise gemessen: Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden AC und g mit Q und den von BC und g mit R, dann soll das NE-Winkelmaß von ACB durch die ***euklidische*** Winkelgröße des Winkels QPR gegeben sein.

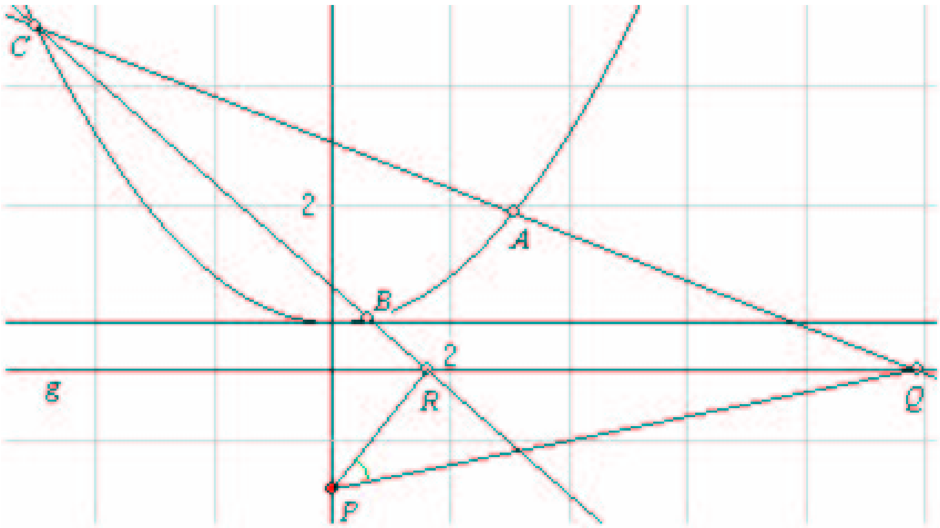


Abb 3. Der Winkel ACB wird mit Hilfe des Winkels QPR gemessen.

Sie kann also in Grad angegeben werden, wobei zu beachten ist, dass mit dem Geo-Dreieck nicht am Scheitelpunkt C der Winkels ACB gemessen wird, sondern bei P. Wenn AC zu g parallel ist nimmt man für Q den 'unendlich fernen' Punkt auf g. Das bedeutet, dass die Gerade PQ durch eine Parallele zu g durch P ersetzt wird.
Merkwürdigerweise bleibt diese Winkelgröße unverändert, wenn C bei festem A und B auf der Parabel verschoben wird, obwohl sich natürlich die Lage von Q und R auf g verändert. Das soll jetzt gezeigt werden.

Die Sekante durch A und C hat die Gleichung $y = 0,2(a+c)x - 0,2ac$. Sie schneidet g im Punkt $Q\left(-0,8; \frac{ac-4}{a+c}\right)$. Wenn α (bzw. β) die euklidische Winkelgröße des Winkels zwischen PQ (bzw. PR) und der y-Achse bezeichnet, ist $\tan(\alpha) = \frac{ac-4}{2(a+c)}$ (bzw. $\tan(\beta) = \frac{bc-4}{2(b+c)}$). Die Größe des Winkels QPR ist $\alpha - \beta$. Mit dem Additionstheorem für den Tangens errechnet man:

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} = (\tan\alpha - \tan\beta)\cdot\frac{1}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}\\
&= \frac{(ac-4)(b+c)-(bc-4)(a+c)}{2(a+c)(b+c)}\cdot\frac{4(a+c)(b+c)}{4(a+c)(b+c)+(ac-4)(bc-4)}\\
&= \frac{2(abc+ac^2-4b-4c-abc-bc^2+4a+4c)}{4ab+4ac+4bc+4c^2+abc^2-4ac-4bc+16}\\
&= \frac{2(a-b)(c^2+4)}{(ab+4)(c^2+4)} = \frac{2(a-b)}{ab+4}.
\end{aligned}$$

Dieser letzte Term enthält c nicht mehr. Damit ist der Peripheriewinkelsatz für dieses NE-Winkelmaß bewiesen.
Um zu verstehen, weshalb zu der Maßgeraden $y = -0,8$ der Maßpunkt $P(0;-2,8)$ benutzt wird, könnte man statt $-2,8$ eine Variable einführen und die Berechnung von $\tan(\alpha-\beta)$ damit durchführen. Diese Variable müsste dann so gewählt werden, dass im Ergebnis für $\tan(\alpha-\beta)$ die Variable c wegfällt.

Bei diesem zweiten NE-Winkelmaß ist merkwürdig, dass zwei verschiedene Geraden, die durch einen Punkt Q auf der Maßgeraden g gehen, einen Winkel von $0°$ einschließen. Darum werden Geraden, die sich auf g schneiden, als nicht-euklidisch 'parallel' angesehen. Noch in einer anderen Hinsicht unterscheidet sich dieses zweite NE-Winkelmaß vom ersten. Es gibt hier nämlich einen von Null verschiedenen Wert des Winkelmaßes, der bei Verdopplung den Wert Null ergibt. Denn $180°$, also das Doppelte von $90°$, stimmt hier mit $0°$ überein, anders als in der gewöhnlichen Winkelmessung.

Bei dem neuen Winkelmaß haben Winkel mit der NE-Größe $90°$ ganz entsprechende Eigenschaften wie rechte Winkel in der gewöhnlichen euklidischen Geometrie.

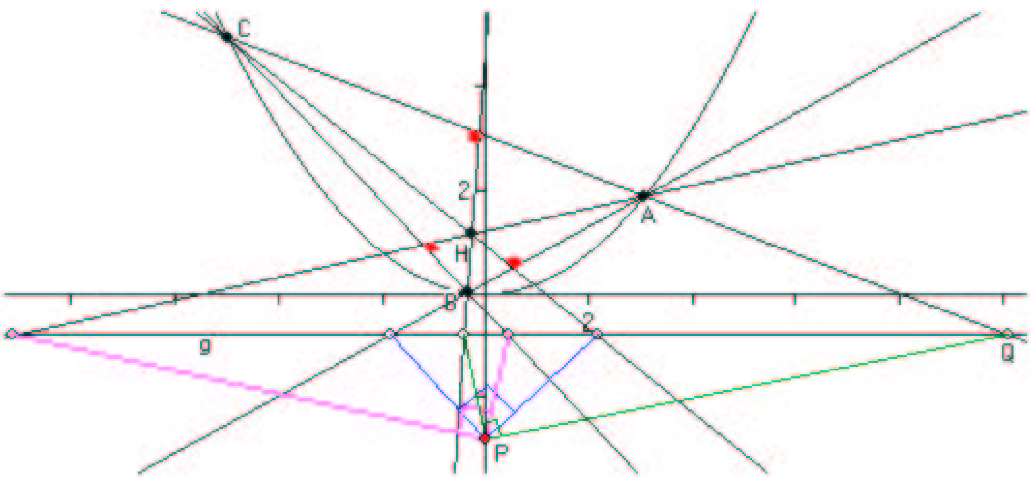


Abb 4. Die NE-Höhen in dem Dreieck ABC schneiden sich in H.

Liegen die Punkte A, B, C auf der Parabel $y = 0,2x^2$, so kann man in dem Sehnendreieck ABC Höhengeraden definieren, und es stellt sich heraus, dass die drei Höhengeraden einen Punkt H gemeinsam haben. (Dabei ist die Bindung der Punkte A, B und C an die Parabel eigentlich nicht nötig.)

Bei dem Versuch, den Satz über den Schnitt von Mittelsenkrechten aus der euklidischen Geometrie zu übertragen, gibt es das Problem, zu einer Strecke AC einen Punkt T zu bestimmen, der dem Mittelpunkt der Strecke AC entspricht.

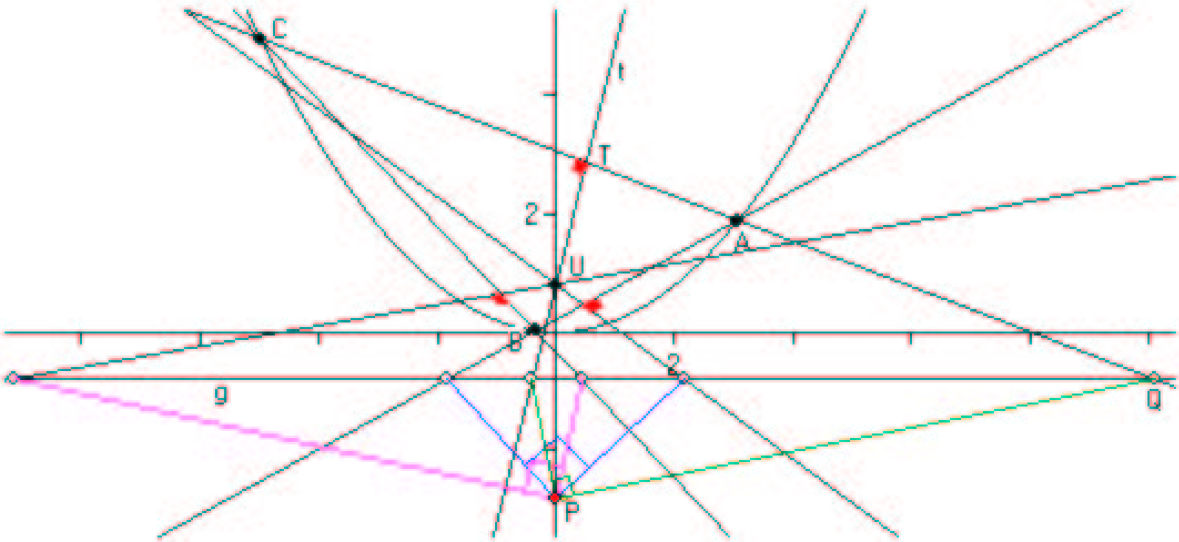


Abb 5. Die NE-Mittelsenkrechten in dem Dreieck ABC schneiden sich in U.

Die Lösung: Man wählt T so zwischen A und C, dass für den Schnittpunkt Q der Messgeraden g mit der Geraden AC gilt: $\frac{\overline{TA}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$. T wird der vierte harmonische Punkt zu A, C, Q genannt (Abb. 5). Die 'Mittelsenkrechte' von AC wird nun als Gerade t durch T definiert, so dass der Wert des neuen NE-Winkelmaßes für den durch AC und t gebildeten Winkel $90°$ beträgt. Die drei 'Mittelsenkrechten' haben einen gemeinsamen Punkt U.

Man kann mit dem vierten harmonischen Punkt auch 'Seitenhalbierende' definieren. Sie haben einen Punkt S gemeinsam. Wie in der euklidischen Geometrie liegt S auf der Geraden HU, die der Euler'schen Geraden entspricht. Die Winkelhalbierenden machen für das neue NE-Winkelmaß ebenfalls keine Mühe. Auch hier gehen durch jeden Eckpunkt eines Sehnendreiecks zwei Winkelhalbierende, die einen Winkel von $90°$ im Sinne des NE-Winkelmaßes einschließen.

Wir sehen also, dass der Wortlaut der bekannten Sätze über Dreiecke unverändert bleibt, wenn man dem Winkelmaß einen neuen Sinn gibt. Wir haben uns hier zwar auf Sehnendreiecke auf der Parabel $y = 0,2x^2$ konzentriert, für andere Parabeln lässt sich das Verfahren aber analog durchführen.

Die Maßgerade g, die die Winkelmessung festgelegt, kann die Parabel auch schneiden. Die Messung mit Hilfe eines Maßpunktes P muss dann aber verändert werden. Es sind nämlich alle Geraden durch die beiden Schnittpunkte von g mit der Parabel zu *sich selbst* orthogonal! Es ist eine lohnende Aufgabe, sich hier klar zu machen, was die NE-Orthogonalität für die anderen Geraden bedeutet. Die zugehörige Geometrie wird Minkowski'sche Geometrie genannt. Sie ist die Geometrie, die der Einstein'schen Relativitätstheorie zugrunde liegt.

Primzahlketten und die Vermutung von Hardy und Littlewood

von Hartwig Fuchs

Arithmetische Primzahlfolgen

In der Menge der natürlichen Zahlen sind die Primzahlen höchst unregelmäßig verteilt. Und doch: Es gibt Beziehungen zwischen ihnen, die ihre gruppenweise Zusammenfassung unter numerischen Gesichtspunkten möglich macht. Der *Abstand* von Primzahlen ist so eine Beziehung!

In der Primzahlfolge $(2, 3, 19, 37, 59, 61)$ haben die Folgenelemente ungleiche Abstände, nämlich der Reihe nach 1, 16, 18, 22, 2, während sie in der Folge $(5, 11, 17, 23)$ alle den gleichen Abstand 6 haben.

> Es sei d eine natürliche Zahl ≥ 1. Dann heißt $(p, p+d, p+2d, \ldots, p+nd)$, $n \geq 1$, eine *arithmetische Primzahlfolge*, wenn p, $p+d$, $\ldots$, $p+nd$ sämtlich Primzahlen sind.

Ketten aus Primzahlen vom Abstand d

Eine sehr bekannte arithmetische Primzahlfolge ist $(199,\ 199+210,\ 199+2\cdot 210,\ \ldots,\ 199+9\cdot 210)$ mit 10 Elementen. Sie ist maximal in dem Sinne: Es gibt keine Primzahl < 199 oder $> 199 + 9 \cdot 210 = 2089$, die von 199 oder von 2089 den Abstand 210 hat.

> Es sei $(p, p+d, p+2d, \ldots, p+(L-1)d)$ eine maximale arithmetische Primzahlfolge, $d \geq 1$ und $L \geq 2$. Dann heißt diese Primzahlfolge eine $\boldsymbol{d}$**-Kette**; L heißt die Länge der d-Kette.

Beispiel: Die Folge $(823, 853, 883)$ ist eine 30-Kette der Länge 3.

Wir werden nun den Fragen nachgehen:

(F_1) Für welche Abstände $d \geq 1$ gibt es d-Ketten?

(F_2) Gibt es unendlich viele oder nur endlich viele d-Ketten für ein vorgegebenes d ?

Ein berühmter Satz von P. G. L. Dirichlet (1805-1859) besagt: Wenn zwei natürliche Zahlen a und d keinen gemeinsamen Teiler außer 1 besitzen, dann gibt es in der arithmetischen Zahlenfolge $(a, a+d, a+2d, \ldots)$ stets unendlich viele Primzahlen. Aus diesem Satz folgt zwar, dass die Abstände der Primzahlen in $(a, a+d, a+2d, \ldots)$ allesamt irgend welche Vielfache von d sind, er gibt aber leider nicht an, welche Vielfachen das sind. Deshalb werden wir – um Antworten auf die Fragen (F_1), (F_2) zu finden – konkrete Fälle von Abständen d betrachten müssen.

$\boldsymbol{d = 1}$

(1) Es gibt nur die eine 1-Kette $(2, 3)$.

Denn für jedes von $(2, 3)$ verschiedene Primzahlpaar $(p, p+d)$ ist $p \geq 2$.

$d = 2$

Eine 2-Kette der Länge $L = 2$ hat die Form $(p, p+2)$ – sie heißt ein Primzahlzwilling. Solche Zwillinge sind z.B. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$. Da man (vorläufig?) keine Regel zur Berechnung von Primzahlen kennt, hat man erst recht keine solche Regel zur Bestimmung von Primzahlzwillingen. Aber aus Primzahllisten und neuerdings unter Computereinsatz hat man so viele und so große Zwillingspaare gefunden, dass damit (und mit anderen Argumenten) die folgende Vermutung als Antwort für (F_2) bei $d = 2$ gerechtfertigt erscheint:

(2) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge $(p, p+2)$, $p \geq 3$.

Ein Beweis oder die Widerlegung von (2) stellt eines der schwierigsten ungelösten Probleme der Zahlentheorie dar.

Dagegen konnte der Fall einer 2-Kette mit einer Länge $L \geq 3$ leicht vollständig geklärt werden:

(3) Es gibt nur eine 2-Kette mit einer Länge $L \geq 3$, nämlich $(3, 5, 7)$.

Zum Nachweis von (3) nehmen wir an: $(p, p+2, p+4)$ sei eine weitere, von $(3, 5, 7)$ verschiedene 2-Kette.
Dann ist $p > 3$ und eine der Zahlen p, $p+1$, $p+2$ ist ein Vielfaches von 3. Nach Annahme sind p und $p+2$ Primzahlen mit $p > 3$ – folglich ist $p+1$ und daher auch $p+4 = (p+1)+3$ jeweils ein Vielfaches von 3. Aber nach Annahme ist auch $p+4$ eine Primzahl: Widerspruch! Die Annahme ist falsch.

Weil es daher keine 2-Kette $(p, p+2, p+4)$ mit $p > 3$ gibt und weil die Kette $(3, 5, 7)$ maximal, also nicht „verlängerbar“ ist, kann es auch keine 2-Ketten mit $L = 4, 5, 6, \ldots$ geben. Damit ist (3) gezeigt.

$d \geq 3$ und ungerade

Es sei $(p, p+d, \ldots, p+(L-1)d)$ eine d-Kette mit ungeradem $d \geq 3$ und mit der Länge $L \geq 2$.

Für jedes d gilt dann: Das erste Element der d-Kette ist gerade, weil sonst $p+d$ gerade und mithin keine Primzahl wäre; somit ist nur $p = 2$ möglich. Dann aber hat die d-Kette notwendiger Weise die Länge $L = 2$: Wäre nämlich $L \geq 3$, dann enthielte sie das Element $p + 2d$, und wegen $p = 2$ ist $p + 2d$ keine Primzahl: Widerspruch!
Die für ein bestimmtes d einzig mögliche d-Kette sieht daher so aus: $(2, 2+d)$. Folglich gilt:

(4) Es sei $d \geq 3$ und ungerade. Nur wenn $2 + d$ eine Primzahl ist, dann gibt es für d eine und nur diese eine d-Kette $(2, 2+d)$.

Beispiele

d	3	5	7	9	11	13	$\cdots$	21	23	25	27	$\cdots$
d-Kette	$(2,5)$	$(2,7)$	–	$(2,11)$	$(2,13)$	–	$\cdots$	$(2,23)$	–	–	$(2,29)$	$\cdots$

$d \geq 4$ und gerade

Bei den d-Ketten mit geradem $d \geq 4$ betreten wir ein weithin unbekanntes Terrain. Bereits die Frage (F_1) ist unbeantwortet. Zwar können wir für kleine Primzahlabstände d schnell Beispiele mit geradem $d \geq 4$ angeben, etwa

4-Ketten: $(3, 7, 11)$; $(13, 17)$; $(19, 23)$; $(37, 41)$; $(43, 47)$; $\ldots$

6-Ketten: $(5, 11, 17, 23, 29)$; $(7, 13, 19)$; $(31, 37, 43)$; $\ldots$

8-Ketten: $(3, 11, 19)$; $(5, 13)$; $(23, 31)$; $(29, 37)$; $\ldots$

Mit wachsendem d wird es immer aufwändiger, zu d gehörige Ketten zu finden – wobei erschwerend hinzukommt, dass man von vorneherein gar nicht weiß, ob es für ein bestimmtes d überhaupt eine d-Kette gibt. Aber selbst wenn man für ein bestimmtes gerades $d \geq 4$ viele d-Ketten angeben kann, stellt die Frage (F_2) wohl die gleiche Problematik wie die Vermutung (2) über 2-Ketten (=Primzahlzwillinge) dar und sie führt auch in vergleichbar große Schwierigkeiten, weshalb wir (F_1) und (F_2) nicht weiter verfolgen – wir brechen somit an dieser Stelle ab mit einer leichten

Aufgabe:

(5) Die einzige 4-Kette mit einer Länge $L \geq 3$ ist $(3, 7, 11)$. Zeige dies!

(Lösung siehe am Schluss!)

Primzahlketten der Länge L

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir Primzahlabstände d vorgegeben und versucht, für diese d Antworten auf die Fragen (F_1) und (F_2) zu finden. Dabei haben wir zwar die Fälle $d \geq 1$ und d ungerade vollständig aufgeklärt – vgl. (1) und (4) –, aber für gerade $d \geq 2$ können wir nur zwei Teilergebnisse – vgl. (3) und (5) – vorweisen, so dass die Fälle $d = 2, 4, 6, \dots$ im Wesentlichen ungelöst bleiben.

Wir ändern nun unsere „Blickrichtung“ und stellen die Länge L von maximalen arithmetischen Primzahlketten in den Vordergrund – wir sprechen kurz von Ketten der Länge L. Für kleine L ist es leicht, aus Primzahllisten Ketten der Länge L herauszulesen.

Beispiele

Vorgegebenes L	Ketten der Länge L
$L = 3$	$(3, 5, 7)$ mit $d = 2$; $(19, 43, 67)$ mit $d = 24$
$L = 4$	$(5, 11, 17, 23)$ mit $d = 6$; $(41, 71, 101, 131)$ mit $d = 30$
$L = 5$	$(5, 17, 29, 41, 53)$ mit $d = 12$; $(5, 47, 89, 131, 173)$ mit $d = 42$
$L = 6$	$(541, 571, 601, 631, 661, 691)$ mit $d = 30$

Schon seit langem haben sich Mathematiker – etwa J. L. Lagrange (1736-1813) – gefragt:

(F_3) Welche Länge L kann eine Primzahlkette haben?

Aber sie sind über isolierte Einzelergebnisse wie z.B. die oben genannte 210-Kette $(199, \dots, 199 + 9 \cdot 210)$ der Länge $L = 10$ nicht hinaus gekommen. Um so erstaunlicher ist die „Antwort“, die G. H. Hardy* (1877-1947) zusammen mit J. E. Littlewood (1885-1977) zu geben versuchten

(6) **Die Vermutung von Hardy-Littlewood (1923):**
Zu jeder natürlichen Zahl $L \geq 2$ gibt es stets eine maximale arithmetische Primzahlfolge aus L Gliedern (eine Kette der Länge L).

Wie mutig Hardys und Littlewoods Behauptung (6) war, mag man daraus ermessen, dass es erst im letzten Jahrzehnt gelang, etwas längere Ketten aufzuspüren. So hat P. A. Pritchard mit hohem Computeraufwand eine Kette $(a, \dots, a + 18d)$ der Länge $L = 19$ mit $a = 8\,297\,644\,387$ und $d = 4\,180\,566\,390$ entdeckt. Später (1993) fand er zusammen mit Anderen sogar eine damals als Rekord geltende Kette der Länge $L = 22$.

*Nur S. Ramanujan (1887-1920) kann wohl Hardy den Rang des größten Zahlentheoretikers im 20. Jahrhundert streitig machen.

Aber echte Fortschritte für einen Beweis von (6) gab es zunächst nicht. Deshalb wandte man sich einer möglicher Weise leichter zu beantwortenden Frage zu:

(F_4) Gibt es zu einer vorgegebenen Zahl $L \geq 2$ unendlich viele oder endlich viele oder gar keine Ketten der Länge L ?

Für $\boldsymbol{L = 2}$ lässt sich (F_4) leicht entscheiden.
Jedes Primzahlpaar $(2, p)$, p eine Primzahl ≥ 3, ist eine d-Kette der Länge 2 mit $d = p - 2$. Dazu ist nur zu zeigen, dass $(2, p)$ maximal ist. Wäre sie nämlich verlängerbar zu $(2, p, q)$, dann müsste nach Definition einer d-Kette gelten: q ist Primzahl und $q = 2 + 2d = 2 + +2(p - 2) = 2p - 2$; aber $2p - 2$ ist keine Primzahl für $p \geq 3$: Widerspruch!
Also gilt, da es unendlich viele Primzahlen $p \geq 3$ gibt:

(7) Es gibt unendlich viele Ketten der Länge $L = 2$, nämlich $(2, p)$ mit Primzahlen $p \geq 3$.

Sei $\boldsymbol{L = 3}$.
J. van der Corput (1890-1970) hat 1939 die Frage (F_4) für $L = 3$ beantwortet, indem er bewies:

(8) Es gibt unendlich viele Ketten der Länge $L = 3$.

Sein Beweis von (8) enthält allerdings keinen Hinweis auf ein Verfahren, mit dem man diese Ketten finden könnte.

$\boldsymbol{L \geq 4}$
Nach 1939 ist man über 60 Jahre lang bei der Frage (F_4) und erst recht bei (F_3) keinen wesentlichen Schritt weiter gekommen. Vor Kurzem nun machten sich die beiden jungen Mathematiker Ben Green aus Kanada und Terence Tao aus den USA daran, die Arbeit van der Corputs fortzusetzen und (F_4) für $L = 4$ zu entscheiden.
Sie entwickelten dazu eine Methode, die sich im Laufe ihrer Untersuchungen überraschender Weise als so mächtig und flexibel herausstellte, dass sie mit ihr weitaus mehr beweisen konnten, als sie ursprünglich vorhatten. Sie fanden heraus, dass es nicht nur für $L = 4$, sondern für jedes $L \geq 2$ jeweils unendlich viele Ketten der Länge L gibt!

Damit ist (F_4) für jedes gegebene $L \geq 2$ entschieden und zugleich ist (F_3) beantwortet – Letzteres bedeutet, dass die Richtigkeit der Vermutung von Hardy-Littlewood nachgewiesen ist.

Leider ist der Beweis von Green und Tao nicht konstruktiv, d.h. er gibt nicht an, wie man Ketten der Länge L tatsächlich findet – für Zahlentüftler mit Computer eröffnet sich eine unermessliche Spielwiese!

Lösung der Aufgabe – vgl. (5)
Annahme: Neben $(3, 7, 11)$ gibt es eine weitere 4-Kette $(p, p + 4, p + 8, \ldots)$ der Länge $L \geq 3$. p ist kein Vielfaches von 3, da p eine Primzahl > 3 sein muss.
Wäre $p + 1$ ein Vielfaches von 3, dann wäre $p + 4 = (p + 1) + 3$ ein Vielfaches von 3, also wäre $p + 4$ keine Primzahl: Widerspruch!
Wäre $p + 2$ ein Vielfaches von 3, dann wäre auch $p + 8 = (p + 2) + 6$ ein Vielfaches von 3, also wäre jetzt $p + 8$ keine Primzahl: Widerspruch!
Wäre $p + 3$ ein Vielfaches von 3, dann wäre auch p ein Vielfaches von 3: Widerspruch!
Die Annahme ist somit falsch.
Folglich gibt es nur die eine 4-Kette $(3, 7, 11)$ der Länge 3.

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: einschließlich Heft 81)

Die Klassenangaben beziehen sich auf das Schuljahr 2004/05.

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Teresa Hähn 41, Bula Hauch 6, Elisabeth Kopf 21, Patricia Petry 4, Kevin Schmitt 12, Anne Vorherr 13;
Kl. 6: Martin Achenbach 19, Emma Braininger 10, Luisa Dörrhöfer 4, Annika Flick 15, Ramona Friedrich 10, Eduard Hauck 6, Larissa Hyar 5, Peter Machemer 10, Marina Matchlakowa 10, Alexander Maus 15, Philipp Mayer 38, Ann-Kristin Müller 4, Patrick Schnell 6, Raphael Wetzel 8;
Kl. 7: Jonathan Peters 56, Lisa Simon 53, Julia Zech 49;
Kl. 8: Keno Krewer 6, Sabine Oßwalt 4; **Kl. 9:** Patricia Kastner 52, Johannes Merz 15;
Kl. 10: Markus Bassermann 21; **Kl. 13:** Manuel Ross 12.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 6: Lena Baum 39, Daniel Draper 34, Melissa Lutsch 10, Monja Reinmuth 26, Ann-Christin Ruhland 28, Désirée Schalk 74, Johanna Stimm 26, Christoph Wippel 12;
Kl. 8: Silvana-Maria Clotan 68, Felix Liebrich 70, Richard Nixdorf 9, Martin Reinhardt 73, Jessica Tischbierek 25, Bettina Zimmermann 11.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 8: Thomas Geiß 51.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Ossama Bassant 12, Dina Hamdy 8, Ahmed Malak 11, Nada Mohamed 11, Sherif Nariman 3, Hossam Rana 11, Hossny Salma 5, Hassan Shaimaa 10, Amira Wael 12, Mohamed Youmna 7;
Kl. 7: Youmna Awadalla 5, Sarah Magdy 6.

Altötting, König-Karlmann Gymnasium: Kl. 9: Amelie Hüttner 18.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Kl. 9: Christian Behrens 71, Martin Alexander Lange 51.

Bad Homburg: Kl. 10: Laura Biroth 34.

Beselich, Grundschule: Kl. 3: Marc Dinges 4.

Darmstadt, Eleonorenschule: Kl. 11: Moritz Egert 39.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 6: Marius Falkenhahn 15, Anna-Lena Herrmann 6, Theresa Isert 5, Alexander Möller 6; **Kl. 7:** Sabine Sauer 15, Angela Schmelz 9, Luisa Schmelz 2.

Eltville, Gymnasium (Betreuender Lehrer Markus Dillmann):
Kl. 5: Maruis Holderrieth 10; **Kl. 7:** Daniel Mayer 38, Hagen Söngen 38;
Kl. 9: Ralf Jung 45.

Enger, Widukind-Gymnasium:
Kl. 5: Moritz Aschemeyer 13, Jan-Henrik Branding 32, Lennart Dross 2, Nils Gärtner 2, Florian Junklewitz 12, Christoph Lindemeier 5, Lena Militschke 14, Lisa Sophia Nigbur 2, Nicklas Reetz 2, Wilhelm Reger 5, Philipp Rüter 9, Niklas Rutz 4, Erik Saharge 7, Tobias Schlegel 8.

Eutin, Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium: Kl. 13: Lars Imsdahl 14.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Christoph Daum 4;
Kl. 5: Marius Burkhardt 9, Julian Roth 8, Philipp Wenzel 15;
Kl. 6: Kai Roth 26, Isabell Schardt 7;
Kl. 7: Corinna Dinges 50, Hannah Meilinger 48, Tatjana Mendt 4, Katharina Schmidt 9, Andreas Weimer 63;
Kl. 8: Johannes Weimer 42.

Halberstadt, Martineum: Kl. 8: Robert Hesse 52.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 8: Christoph Tietz 44.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Gerd Weber, Christoph Straub):
Kl. 7: Caroline Amin 4, Alia'a Ahmed Doma 69, Karin Emil 72, Marina Magdy 24, Heba Mandouh 42, Marina Morad 72, Sandra Waguih 21, Sylvia Zekry 18;
Kl. 9: Sherine Ali 6, Marina Ashraf 24, Alia el Bolock 38, Mariam Emad 29, Salma Mariam Ismail 57, Nadia Abou Shady 46, Marwa Talal 49;
Kl. 10: Lauren Emil 19, Nadine Gouda 22, Miriam Morad 21, Iman Tarek 17.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 10: Eduard Bierich 5, Kerstin Bonfico 15, Simon Gockel 6, Irina Herdt 9, Matthias Reis 5, Jonathan Zorner 7;
Kl. 12: Annika Radau 2.

Kusel, Gymnasium: Kl. 5: Marco Gebauer 6.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 10: Maximilian Mühlbacher 39.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 8: Thu Giang Nguyen 5; **Kl. 9:** Katharina Kober 52; **Kl. 10:** Christoph Karg 28;
Kl. 11: Claudia Mack 24, Judith Reinhardt 10, Adriana Spalwisz 3;
Kl. 12: Ulrich Koffler 6.

Magdeburg, Werner-von-Simens-Gymnasium: Kl. 10: Sebastian Schulz 18.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 9: Ilja Fragin 24, Niklaas Baudet von Gersdorff 21, Jennifer Groß 22, Sabrina Groß 22, Cordula Rohde 22.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 4: Dorothea Winkelvoß 24.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 7: Stefanie Grünwald 51, Katharina Irmscher 51;
Kl. 9: Maike Bäcker 18, Natalie Geiß 12, Michaela Schuster 17.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 7: Florian Schweiger 110.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 10: Bernhard Saumweber 8.

München, Rupprecht-Gymnasium: Sigurd Vogler 2.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 6: Jennifer Elster 5, Katharina Hartmann 21, Julia Hennig 2, Kirsten Hubert 13, Marelina Kaules 6, Vivien Kohlhaas 51, Louisa Korbmacher 6, Lea Krause 6, Nora Mollner 45, Felicitas Pünder 9, Hannah Rohmann 6;

Kl. 7: Madeline Kohlhaas 65; **Kl. 9:** Daniela Leinsinger 5, Miriam Menzel 84;
Kl. 10: Annika Kohlhaas 64; **Kl. 11:** Stefanie Tiemann 96.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium: Kl. 9: Martin Jöhlinger 16.

Nürnberg: Marion Heublein 7.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Markus Bauch 7, Jan Biersack 4, Aline Endreß 23, Veronika Finke 6, Patricia Gierga 5, Romy Kaestner 5, Luisa Regina Keuscher 7, Philipp Krosion 9, Eveline Lipp 10, Gesa Musiol 22, Clara Nigratschka 10, Marie Oster 6, Heike Weber 12;
Kl. 6: Hannah Braun 29, Philipp Kalte 20, Jonas Köhler 14, Sabrina Kopp 30, Lars Thiel 12;
Kl. 7: Martin Graßler 16, Larissa Habbel 47, Patricia Limpert 13, Franziska Metzler 8, Sarah Rosengarten 48, Katrin Schlemm 15, Viktoria Schreiber 8, Sophia Waldvogel 43, Valentin Walther 33;
Kl. 8: Annkatrin Weber 49; **Kl. 9:** Marie Jargeleit und Alicia Schwammborn 2;
Kl. 10: Sebastian Eckart 14; **Kl. 11:** Simon Bats 22.

Otterberg, Freie Waldorfschule: Kl. 7: Malte Meyn 68.

Pfinztal, Ludwig-Marum-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Pfeifle):
Kl. 8: Finn Lanzendorfer 4; **Kl. 9:** Jiska Classen 4;
Kl. 10: Benjamin Bechtle 6, Fabian Lanzendorfer 4, Robin Roth 21.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: Verena Bauch 14, Marian Becker 4, Sandro Birkenhof 3, Barbara Bücker 16, Carmen Engels 15, David Feiler 46, Sarah Geißler 13, Lena Gräf 5, Neal Graham 11, Jana Klaes 24, Sebastian Kramer 11, Nikola Lübbering 13, Maria Pohl 1, Lisa Rohrwasser 4, Alina Schäfer 17, Anna Schilling 9, Fabian Strang 14, Pia Wegmann 11, Selina Weich 17, Korbinian Wester 21, Nadia Wester 17;
Kl. 8: Keven Runge 3.

Siegburg, Anno-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hachtel):
Kl. 12: Jan B. Boscheinen 25.

Speyer, Kolleg (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):
Sergej Betcher (Bruder von Olga Betcher, 11. Kl.) 8;
Kl. 11: Viktor Eberhardt 6.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 6: Alexander Rettkowski 73; **Kl. 7:** Sina Bronkalla 19;
Kl. 10: Tobias Grunwald 10.

St. Goarshausen, Wilhelm-Hofmann-Gymnasium: Kl. 8: Julia Koch 23.

Tegernsee, Gymnasium: Kl. 10: Juliane Oberwieser 4.

Weiterstadt, Albrecht-Dürer-Schule: Kl. 11: Artjom Zern 21.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 5: Kira Bayer 5, Joel Jung 20, Emily Linn 56, Lukas Scheid 7;
Kl. 7: Sophie Schäfer 1, Philipp Thau 5; **Kl. 9:** Julia Jung 23, Sarah Tröbs 32;
Kl. 12: Verena Prägert 46.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium: Kl. 9: Charlotte Capitain 48.

Worms, Eleonoren-Gymnasium: Kl. 8: Moritz Maurer 17.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

Zum neuen Schuljahr 2005/2006 kann die MONOID-Redaktion wieder viele neue Abonnenten begrüßen. Allen, die sich so dem Club der MONOIDaner angeschlossen haben, wünschen wir gute Unterhaltung bei der Lektüre der Artikel und viel Erfolg beim Lösen der Aufgaben! Die Bedingungen für das Einsenden der Lösungen stehen auf der zweiten Umschlagseite.

Aber auch denjenigen Leserinnen und Lesern, die MONOID weiterhin die Treue halten, sei dafür gedankt und ebenfalls viel Erfolg gewünscht! Besonderen Dank spricht die Redaktion den fleißigen Einsendern von Aufgabenvorschlägen und neuen Artikeln aus. Für jeden Aufgabenvorschlag, den Ihr Euch selbst ausgedacht habt, gibt es vorweg einen Punkt und wird die Aufgabe in MONOID gestellt, gibt's für die mit eingesandte Lösung auch die entsprechende Punktezahl.

Als neue Autoren stellen sich in diesem Heft vor: Herr **Markus Dillmann**, Mathe-Lehrer am Gymnasium in Eltville und bereits Mitglied in der Redaktion (`Markus_Dillmann@gmx.de`), die Schülerin **Marion Heublein** vom Gymnasium Stein (`marionheublein@web.de`) und Herr Dr. **Edzard Salow** aus Bremen (`Edzard-Salow@gmx.de`).

Auch in der Redaktion gab es Veränderungen: Herr Dr. **Hans-Jürgen Schuh**, Professor für Mathematik in unserem Institut (Spezialgebiet: Stochastik) und schon früher Autor von Beiträgen für MONOID, wirkt nun auch in der Redaktion mit, und Frau Dr. **Cynthia Hog-Angeloni** übernimmt ab diesem Heft von Herrn Jens Mandavid das Zusammenstellen der Beiträge und das Layout. Herrn Mandavid danken wir herzlich für seine umsichtige und sorgfältige Arbeit an den MONOID-Heften und deren Versendung.

Ekkehard Kroll

Kurz vor Redaktionsschluss erreicht uns die traurige Nachricht, dass OStR Martin Mettler in der Nacht vom 10. auf den 11. September 2005 nach langer schwerer Krankheit in seinem Wohnsitz in Carlsberg verstorben ist. Unsere Anteilnahme gilt seiner Familie.

Eine Würdigung der Verdienste von Martin Mettler um MONOID folgt im nächsten MONOID-Heft.

Die Redaktion

Die Redaktion

MONOID Jahrgang 25 Heft 83 September 2005

Inhalt

Abonnementbestellungen über die MONOID-Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort ’MONOID’, zu überweisen; **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
D-55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107
Fax: 06131/39-24389

e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`