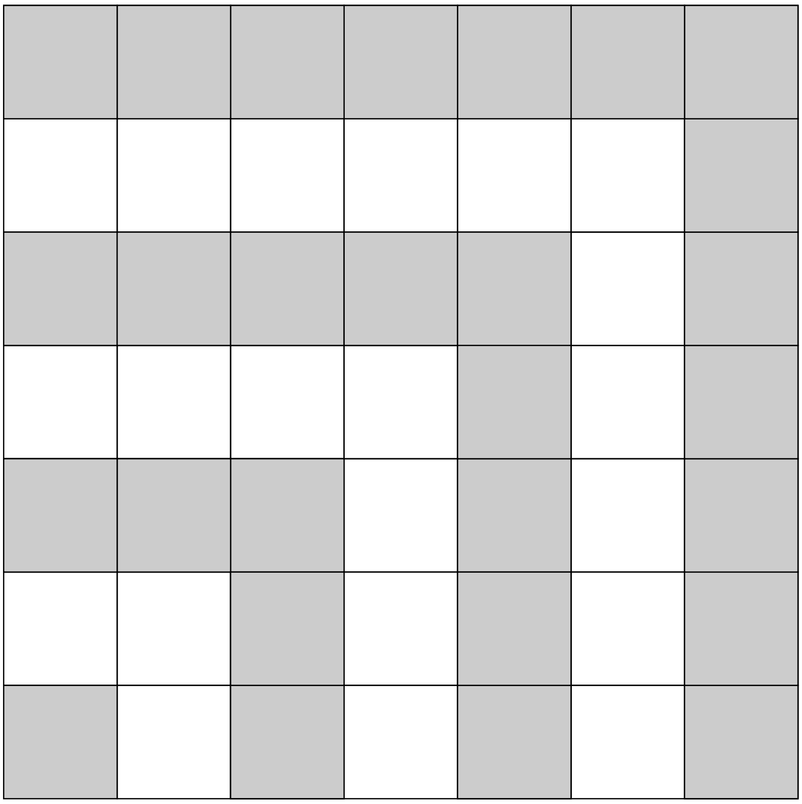
Jahrgang 26 Heft 86 Juni 2006

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



7^2

$$1 + 3 + 5 + \boxed{7} + 9 + 11 + 13$$

Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)
Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.09.2006.**
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Dies ist das Titelbild der Broschüre, die Martin Mettler noch vor seinem Tode im September 2005 anlässlich des 25-jährigen Jubiläums der von ihm begründeten Zeitschrift MONOID zusammengestellt hat.

Die Broschüre enthält eine Fülle von Aufgaben und Beiträgen aus den ersten Jahren dieses „Mathematikblattes für Mitdenker" und ist daher hervorragend geeignet, das Problemlösen zu üben - sei es begleitend zum Mathematikunterricht, sei es zur Vorbereitung und als Training für mathematische Wettbewerbe.

Martin Mettler schrieb im Juni 2004 in der Einleitung: „Das Buch richtet sich an alle Mathe-Liebhaber, insbesondere an Begabte, an Teilnehmer an Wettbewerben; selbstverständlich auch an Mathe-Lehrer, besonders an jene, die eine Mathe-AG gründen wollen oder bereits leiten, an Lehramtsstudenten, aber auch an andere, die sich mit dem Gedanken tragen, ihr logisches Denken zu trainieren. Zur unterhaltsamen Einführung bringe ich am Anfang einige Beiträge aus dem MONOID-Sonderheft 1986, welches die Überschrift „Spiel und Spaß mit und ohne Mathe" trug.

Selbstverständlich konnte ich nicht das ganze Buch mit Spielereien füllen. Allmählich dringen wir immer tiefer in die geheimnisvolle Welt der Mathematik ein. So folgen die überarbeiteten Artikel und Aufgaben der ersten 16 MONOID-Hefte. Nur ein Teil des bereits 1995 in der Broschüre „Kollektaneen" erschienenen Materials wurde weggelassen. Die „Neuen Aufgaben" erscheinen hier mit den Nummern, mit denen sie damals in der Zeitschrift erschienen sind. Ihre Lösungen erscheinen unter „Gelöste Aufgaben".

Es besteht kein Zweifel, dass der Mathematik die Ehre gebührt, im besonderen Blickfeld der Öffentlichkeit zu stehen. Gilt sie doch als eine der unverzichtbaren Wissenschaften für die hoch technisierte Welt des globalen Wettbewerbs. Das vorliegende Buch soll mein bescheidener Beitrag zur Werbung für die Mathematik sein."

„Spiel und Spaß mit Mathe" von Martin Mettler kann bezogen werden zum Unkostenbeitrag von **6 €** + ggf. **2 €** Versandkostenpauschale von der MONOID-Redaktion durch Bestellung über Internet

`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`

< Kontakt >< Bestellungen>, oder Sie schicken eine e-Mail an die Redaktion:

`monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Wille, Friedrich: „Humor in der Mathematik“.

„Mathematiker sind introvertiert, langweilig und humorlos“, so das landläufige Klischee, dem Menschen, die Mathematik faszinierend finden und betreiben, zu entsprechen haben. Doch Mathematiker sind keinesfalls humorlos, sie haben nur eine sehr eigene Form von Humor. Der Aufgabe, Beispiele dieses eigenen Humors darzustellen, widmet sich der mittlerweile in 5. Auflage erschienene Band „Humor in der Mathematik“ von Friedrich Wille.

Der Mathematiker Friedrich Wille hat auf 126 Seiten Didaktisches, Lyrisches, Witziges, Parodistisches und Rätselhaftes über Mathematik und Mathematiker zusammengetragen. Neben 19 verschiedenen mathematischen Methoden, einen Löwen in der Wüste zu fangen, schreckte er dabei unter anderem auch nicht vor einer Mathematisierung des Rotkäppchens zurück.

Absoluter Höhepunkt von Willes Zusammenstellung ist jedoch die Hauptsatzkantate, eine „Vertonung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nebst Beweis, Anwendungen und historischen Bemerkungen“ welche nicht nur bei Mathematikerfesten, sondern auch bei anderen Gelegenheiten, wie Abiturbällen etc. gerne zu Gehör gebracht wird.

Eine Schülerin der 12. Jahrgangsstufe beurteilte „Humor in der Mathematik“ folgendermaßen: „In diesem Buch wird verdeutlicht, dass humoristische Einkleidungen unmittelbar das Verständnis einzelner Sachverhalte der Mathematik fördern können, wie unter anderem „Das Hilbertsche Hotel“ zeigt. Man versucht immer mehr, die Mathematik durch Humor aufzulockern und anschaulicher darzustellen. Es wird sogar behauptet, dass der Humor das Lernen, Verstehen und Behalten unterstützen könne. Aus diesem Grunde wurde in diesem Buch einiges über Humor in der Mathematik zusammengetragen.“

Fazit: Introvertierte, langweilige und humorlose Mathematiker sollten die Finger davon lassen, für alle Anderen ist Willes Sammlung ein Muss. Man sollte jedoch schon über einige mathematische Vorkenntnisse verfügen, und die veralberten Inhalte kennen, deshalb die hohe Altersempfehlung.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Wille, Friedrich: Humor in der Mathematik. Vandenhoeck & Ruprecht 2005^5, ISBN 3-525-40730-0, 123 Seiten, 14,90 €.

Art des Buches:	Sammelband mathematischer Anekdoten, Witze und Rätsel
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 16 Jahren

Martin Mattheis

P.S.: Wer von „Humor in der Mathematik“ nicht genug kriegen kann, sei auf den entsprechenden Beitrag von Markus Sigg im 2001 erschienenen Band 2 des „Lexikon der Mathematik“ verwiesen...

Ein Blick hinter die Kulissen: Der bequeme Lehrer

Von Hartwig Fuchs

Ein Mathematiklehrer will in seiner Klasse die Notwendigkeit von Klammern in der Arithmetik durch ein mathematisches „Kunststück“ begründen. Dazu fordert er seine Schüler auf, die folgenden Anweisungen auszuführen:

A1) Wähle vier einziffrige Zahlen $\neq 0$ und schreibe sie nieder.

A2) Multipliziere die erste dieser Zahlen mit 2 und addiere 5.

A3) Multipliziere das Ergebnis aus A2) mit 5 und addiere 10 sowie die zweite gewählte Zahl.

A4) Multipliziere die Summe aus A3) mit 10 und addiere die dritte gewählte Zahl.

A5) Multipliziere das Ergebnis aus A4) mit 10, addiere die vierte gewählte Zahl und subtrahiere 3500.

Danach – behauptet der Lehrer – kann ich mit einem Blick auf eure Rechenblätter entscheiden, ob ihr richtig gerechnet habt.

Die Schüler stellen nach mehreren Wiederholungen des Rechenspiels fest: Es scheint immer zu klappen. Wie kann der Lehrer begründen, dass er – offensichtlich ohne zu rechnen – beurteilen kann, ob die Schülerergebnisse richtig oder falsch sind?

Ein Schüler fragt noch den Lehrer, ob er das Rechenspiel selbst erfunden habe. Der antwortet ihm, dass es von Claude G. Bachet (1581 – 1638), einem französischen Dichter und Hobbymathematiker stammt, der 1612 eines der ersten nur der Unterhaltungsmathematik gewidmeten Bücher veröffentlicht hat.

Nun zum arithmetischen Hintergrund des Rechenspiels. Es seien a, b, c, d die vier gewählten einziffrigen Zahlen $\neq 0$. Damit lassen sich 1.-5. so darstellen:

A1) a, b, c, d sind gegeben.

A2) $2a + 5$

A3) $(2a + 5) \cdot 5 + 10 + b$

A4) $\big((2a + 5) \cdot 5 + 10 + b\big) \cdot 10 + c$

A5) $\Big[\big((2a + 5) \cdot 5 + 10 + b\big) \cdot 10 + c\Big] \cdot 10 + d - 3500.$

Wenn man den letzten Term ausrechnet, erhält man $1000a + 100b + 10c + d$, und das ist in Ziffernschreibweise die Zahl $abcd$. Wenn also der Lehrer sieht, dass der Schüler die Zahlen a, b, c, d gewählt hat, dann weiß er sofort, dass das Rechenergebnis $abcd$ sein muss.

Beispiel: Die Zahlen $6, 7, 4, 7$ wurden gewählt. Das Rechenergebnis ist 6747.

Die „besondere“ Aufgabe

Von Hartwig Fuchs

Es wird vermutet, dass der Prozentsatz p der Hauseigentümer, welche schon einmal einen Schwarzarbeiter beschäftigt haben, recht hoch ist.

Durch eine Umfrage soll der Wert von p abgeschätzt werden. Da man bei einer direkten Frage sicher viele falsche Antworten erhält, können die Befragten ihre Antworten auf zwei Fragen F_1 und F_2 folgendermaßen verschlüsseln: Jeder Befragte wirft zwei Münzen so, dass der Frager das Ergebnis **nicht** sehen kann.

Erhält er zweimal „Zahl“ (ZZ), so beantwortet er wahrheitsgemäß die Frage F_1 mit „ja“ oder mit „nein“; bei jedem anderen Ergebnis – nämlich bei ZW, WZ, WW mit $W =$„Wappen“ – beantwortet er die Frage F_2 wahrheitsgemäß mit „ja“ oder mit „nein“.

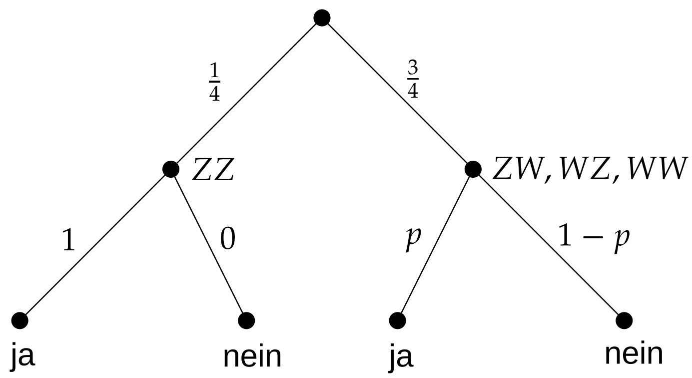
F_1: Ist die Gleichung $1 + 2 = 3$ richtig?
F_2: Haben Sie schon mal einen Schwarzarbeiter beschäftigt?

Es werden 5000 Hausbesitzer befragt; 4011 von ihnen antworten mit „ja“, wobei der Fragende nicht erkennen kann, auf welche der Fragen F_1 und F_2 sich ein „ja“ oder ein „nein“ bezieht. Wie kann man aus diesem Ergebnis den Wert von p abschätzen?

Lösung:

Die relative Häufigkeit h, mit der die Antwort „ja“ gegeben wird, ist $h = \frac{4011}{5000} = 0,8022$.

Wenn man zwei Münzen wirft, dann ist in $\frac{1}{4}$ aller Würfe das Ergebnis ZZ und in $\frac{3}{4}$ aller Würfe ist es ZW, WZ oder WW. Beim Ergebnis ZZ wird dann mit Wahrscheinlichkeit 1 die Antwort „ja“ und mit Wahrscheinlichkeit 0 die Antwort „nein“ sein. Bei jedem anderen Ergebnis wird mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p die Antwort „ja“ und mit der ebenfalls unbekannten Wahrscheinlichkeit $1 - p$ die Antwort „nein“ sein. Das folgende Diagramm veranschaulicht die Möglichkeiten des Ausgangs der Befragung einer Person.



Wenn wir nun $h = 0,8022$ als einen geeigneten Näherungswert für das Eintreten der Antwort „ja“ benutzen, dann ergeben die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung – vgl. Figur:

$h = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot p$. Also ist $p = (0,8022 - 0,25) \cdot \frac{4}{3} \approx 0,7363$.

Fazit: Fast 75% aller Hausbesitzer haben schon mal einen Schwarzarbeiter beschäftigt.

Die Seite für den Computer-Fan

Ein Punkte-Wettrennen für Primzahlpotenzen

Wir veranstalten für die Potenzen 2^n und 5^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ein Wettrennen. 2^n und 5^n starten beide mit 0 Punkten. Wenn nun eine Potenz 2^n bereits t Punkte besitzt, dann erhöht sich die Punktezahl von 2^{n+1} genau dann auf $t+1$, wenn sich in der Dezimaldarstellung von 2^{n+1} mindestens eine Ziffer 0 befindet.

In gleicher Weise erhöhen sich die Punktezahlen der Potenzen von 5. Am Anfang sieht das Rennen so aus, wenn $Z(n)$ die Punktezahl von 2^n und $F(n)$ die von 5^n bezeichnet:

n	1	2	3	$\cdots$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2^n	2	4	8	$\cdots$	128	256	512	1024	2048	4096	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$Z(n)$	0	0	0		0	0	0	1	2	3	3	3	3	3
5^n	5	25	125		78125	390625	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$F(n)$	0	0	0		0	1	1	1	1	2	3	4	5	6

Deutet sich hier vielleicht schon an, dass für $n > 13$ stets 5^n in Führung liegt, d. h. dass $F(n) > Z(n)$ ist für jedes $n > 13$? Wenn das aber nicht zutrifft, dann muss 2^n für irgend ein $n > 13$ wieder mit 5^n gleichziehen, so dass dann $F(n) = Z(n)$ ist. Welches ist in diesem Fall das kleinste $n > 13$ mit $F(n) = Z(n)$? Wir kennen auf keine der beiden Fragen eine Antwort – deshalb geben wir diese Fragen zur Untersuchung an unsere Le(ö)ser weiter. (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 84

2006 als Summe aufeinander folgender Zahlen?

Lässt sich 2006 als Summe mehrerer aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen, gibt es also natürliche Zahlen d und n, so dass gilt:

$$n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+d-2) + (n+d-1) + (n+d) = 2006\ ?$$ (WJB)

Die linke Seite der Gleichung lässt sich mit der Gaußschen Formel für das Aufaddieren der ersten d natürlichen Zahlen umformen zu

$$(d+1) \cdot n + (1 + 2 + \ldots + d) = (d+1) \cdot n + d \cdot (d+1)/2.$$

Das Computeralgebra-System DERIVE liefert dann mit dem Befehl

VECTOR (VECTOR (IF ((d+1) · n + d · (d+1)/2 = 2006, [n , d] , " ") , n , 1 , 500) , d , 1 , 100)

alle drei Lösungspaare [5, 58], [110, 16], [500, 3] oder mit dem Befehl

VECTOR (VECTOR (IF ((d+1)· n + d · (d+1)/2 = 2006 , RETURN [n , d]) , n , 1 , 500), d , 1 , 100)

nur das letzte Paar [500, 3].

Mit eigenen Programmen gefunden haben diese Lösungen Christian Behrens vom Gymnasium am Römerkastell Alzey und Stefanie Tiemann vom Gymnasium Marienberg Neuss; Pascal Cremer vom Gymnasium Korschenbroich hat nur die Lösung $n = 5$, $d = 58$ angegeben.

Thomas Geiß vom Leibniz-Gymnasium Östringen und Florian Schweiger vom Gymnasium Marktoberdorf nützen die schon oben genannte Formel für eine rein rechnerische Lösung der Aufgabe aus. Nach Herausziehen des gemeinsamen Faktors $d + 1$ erhält Florian Schweiger die Gleichung

$$(d+1) \cdot \left(n + \frac{d}{2}\right) = 2006.$$

Löst man nach n auf, erhält man:

$$n = \frac{2006}{d+1} - \frac{d}{2}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite muss ganzzahlig sein. Hierzu gibt es die Möglichkeiten:

1. $\frac{2006}{d+1}$ und $\frac{d}{2}$ sind beide ganzzahlig.
   Hier muss $d + 1$ ein Teiler von 2006 sein und d gerade. Also gilt $d \in \{16; 58; 1002\}$.

2. $\frac{2006}{d+1}$ und $\frac{d}{2}$ sind beide nicht ganzzahlig und haben die gleiche Differenz zur nächst kleineren ganzen Zahl. Weil $\frac{d}{2}$ dann genau den Rest $\frac{1}{2}$ zu einer ganzen Zahl hat, muss auch $\frac{2006}{d+1}$ diesen Rest haben, was genau für $d = 3$ der Fall ist, also $d \in \{3\}$.

Weil sich für $d = 1002$ ein negatives n (nämlich -499) ergäbe, muss dieses d weggelassen werden, für die anderen Werte von d ergibt sich:

$$\begin{array}{lcrclcr} d & = & 3 & \Rightarrow & n & = & 500 \\ d & = & 16 & \Rightarrow & n & = & 110 \\ d & = & 58 & \Rightarrow & n & = & 5 \end{array}$$

Es gibt also genau drei solche Summendarstellungen und zwar:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 500 & + & 501 & + & 502 & + & 503 & = & 2006 \\ 110 & + & 111 & + & 112 & + & \ldots & + & 125 & + & 126 & = & 2006 \\ 5 & + & 6 & + & 7 & + & \ldots & + & 62 & + & 63 & = & 2006 \end{array}$$

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen auch einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer e-Mail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Hättest Du es gewusst: Was ist die Würfel-Paradoxie?

Von Hartwig Fuchs

Die Anfänge des Würfelspiels verlieren sich im Dunkel der Geschichte - es gibt bereits Zeugnisse aus dem alten Ägypten der ersten Dynastie (etwa 3300-3100 v. Chr.), dass damals schon gewürfelt wurde. Die ersten aber, die über das Würfelspiel nachgedacht hatten, waren ohne Zweifel diejenigen Spieler, die ihre Gewinnchancen verbessern wollten, indem sie ihre Würfel fälschten.
Andere, ehrliche Spieler haben wohl eher Spielausgänge registriert und analysiert, um so vielleicht für sie günstige Gewinnstrategien zu finden. Dabei müssen erfahrene Zocker – möglicherweise im späten europäischen Mittelalter, als jede Art von Glücksspiel eine enorme Popularität besaß – auf ein Phänomen gestoßen sein, das für sie eine (damals) unerklärliche Anomalie des Würfelspiels darstellte, die heute noch als die „Würfel-Paradoxie“ bekannt ist.

Die Würfel-Paradoxie

Sie tritt auf beim Spiel mit mehreren Würfeln, bei dem die geworfene Augensumme über Gewinn oder Verlust entscheidet.
Beim Würfeln mit zwei Würfeln ist bei jedem Wurf eine der Augensummen $2, 3, 4, \dots 12$ ein mögliches Resultat. Da die Augensummen 9 und 10 beide jeweils auf zwei Arten zustande kommen können, nämlich $9 = 3 + 6 = 4 + 5$ und $10 = 4 + 6 = 5 + 5$, erwartet man folgende Spielausgänge:

(1) Bei langen Wurfserien ist die Augensumme 9 etwa ebenso häufig wie die Augensumme 10.

Tatsächlich aber beobachtet man:

(1’) Die Augensumme 9 kommt häufiger vor als die Augensumme 10.

Beim Würfeln mit drei Würfeln sind $3, 4, 5, \dots 18$ die möglichen Augensummen. Da die Augensummen 9 und 10 jetzt beide auf sechs Arten entstehen können, nämlich

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3,$$
$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$$

sollte man auch hier erwarten:

(2) Bei langen Wurfserien erscheint die Augensumme 9 durchschnittlich ebenso oft wie die Augensumme 10.

Aber beim Würfeln mit drei Würfeln zeigt sich:

(2’) Die Augensumme 10 kommt häufiger vor als die Augensumme 9.

Die Spieler, die die Würfel-Paradoxie entdeckt hatten oder denen sie mitgeteilt worden war, sahen sehr wohl, dass sich bei (1), (1’) und bei (2), (2’) sowie bei (1’), (2’) jeweils die logische Argumentation und die Spiel-Realität widersprachen – aber eine Erklärung für das Auftreten dieser Widersprüche konnten sie nicht angeben.

Sie befanden sich dabei übrigens in bester Gesellschaft: Selbst ein so überragender Mathematiker wie G. W. LEIBNIZ (1646–1716) war an einer Auflösung dieser Widersprüche gescheitert, und dabei hatte erstaunlicherweise schon GIROLAMO CARDANO (1501–1576) in der frühesten Schrift, die sich mit Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigte, seinem Buch „De Ludo Aleae" („Vom Würfelspiel") einen Weg gezeigt, wie man die Würfel-Paradoxie beseitigen kann.

Die Auflösung der Würfel-Paradoxie

Eine Erklärung der Würfel-Paradoxie ist heute mit den längst gesicherten Begriffen und Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie denkbar einfach.

Schauen wir uns an, wie die Augensummen 9 und 10 beim Spiel mit zwei Würfeln W_1 und W_2, die z. B. farblich verschieden, sonst aber völlig gleich seien, entstehen können:

	Augensumme 9				Augensumme 10		
	$3+6$	$4+5$	$5+4$	$6+3$	$4+6$	$5+5$	$6+4$
Augen von W_1	⚂	⚃	⚄	⚅	⚃	⚄	⚅
Augen von W_2	⚅	⚄	⚃	⚂	⚅	⚄	⚃

Es gibt $6 \cdot 6 = 36$ verschiedene Augenpaare, von denen jedes mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ beim Würfeln mit zwei Würfeln vorkommen kann. Weil vier dieser Paare die Augensumme 9, aber nur drei Paare die Augensumme 10 besitzen, ist $\frac{4}{36}$ die Wahrscheinlichkeit für das Würfelergebnis Augensumme 9, während sie $\frac{3}{36}$ für das Auftreten der Augensumme 10 ist.

Daraus folgt: Die zu (1) führende Argumentation und damit (1) selbst treffen nicht zu; andererseits gilt (1') auf Grund der für die Augensummen 9 und 10 berechneten Wahrscheinlichkeiten $\frac{4}{36}$ und $\frac{3}{36}$. Damit ist der Widerspruch (1), (1') aufgelöst.

Beim Spiel mit drei Würfeln erhält man eines von $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ möglichen Augentripeln. Die Augensumme 9 kann aus 25, die Augensumme 10 aus 27 verschiedenen Augentripeln entstehen. Somit ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{25}{216}$ für das Ergebnis Augensumme 9 und $\frac{27}{216}$ für das Auftreten der Augensumme 10. Deshalb trifft (2) nicht zu – vielmehr gilt (2') und der Widerspruch (2), (2') ist beseitigt.

Die Wahrscheinlichkeiten $\frac{4}{36}$ und $\frac{3}{36}$ bzw. $\frac{25}{216}$ und $\frac{27}{216}$ für die Augensumme 9 und 10 beim Spiel mit zwei bzw. drei Würfeln zeigen: (1') und (2') stellen keinen Widerspruch dar; sie beschreiben vielmehr umgangssprachlich den Sachverhalt, den die Wahrscheinlichkeitsrechnung numerisch charakterisiert.

$*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Anhang für unsere Computer-Fans

Bei der Schilderung der Würfel-Paradoxie wird von „Erwartungen“ und „Beobachtungen“ gesprochen, d. h. es besteht die Vorstellung, dass mit realen Würfeln wirklich gewürfelt wird und dass die beobachteten Resultate in bestimmten Fällen nicht mit den Erwartungen übereinstimmen. Allerdings setzen verlässliche Aussagen eine möglichst häufige Wiederholung des Würfelns mit zwei bzw. drei Würfeln und das sorgfältige Protokollieren der erzielten Augensummen voraus. Die Durchführung von Hand kostet natürlich Zeit. Darum liegt es nahe, ein Computeralgebra-System wie zum Beispiel DERIVE einzusetzen. DERIVE stellt die Funktion **RANDOM** zur Verfügung. So liefert der Aufruf **RANDOM(6)** eine ganze Zahl zwischen 0 und 5. Also können wir mit dem Aufruf **RANDOM(6)+1** das Würfeln mit einem Würfel simulieren. Der Befehl

VECTOR (RANDOM (6) + 1 + RANDOM (6) + 1 , i , 1 , 10)

liefert die Zahlenfolge der Augensummen bei der Simulation eines zehnmaligen Würfelns mit zwei Würfeln, zum Beispiel:

[5, 11, 5, 8, 4, 7, 6, 5, 7, 11]

Natürlich macht es DERIVE nichts aus, statt zehnmal gleich hundertmal zu „würfeln“ und die Augenzahlen zusammenzuzählen. Da uns hier nur die Häufigkeit der Augensumme 9 im Vergleich zur Häufigkeit der Augensumme 10 interessiert, lassen wir uns mit dem Befehl

SELECT(x=9 ∨ x=10, x , VECTOR (RANDOM(6) + 1 + RANDOM (6) + 1 , i , 1 , 100))

nur die Summen 9 und 10 ausgeben. Das kann zum Beispiel so aussehen:

[9, 10, 9, 9, 10, 9, 9, 9, 10, 10, 9, 9, 9, 9, 10]

Tatsächlich tritt hier die 9 häufiger auf als die 10. Wenn uns das Abzählen zu umständlich ist - und das wird es, wenn wir z. B. tausendmal und noch öfter „würfeln“ lassen - dann können wir das Abzählen auch noch DERIVE übertragen mit dem Befehl:

[DIM (SELECT (x=9 , x , [9 , 10 , 9 , 9 , 10 , 9 , 9 , 9 , 10 , 10 , 9 , 9 , 9 , 9 , 10])), DIM (SELECT (x=10 , x , [9 , 10 , 9 , 9 , 10 , 9 , 9 , 9 , 10 , 10 , 9 , 9 , 9 , 9 , 10]))]

In dem von DERIVE ausgegebenen Zahlenpaar

[10 , 5]

erhalten wir dann die Anzahlen der 9 und 10 in direktem Vergleich. Hier noch einige weitere Vergleiche, die sich bei zehn Serien mit tausendmaligem „Würfeln“ ergeben haben:

**[90 , 87] , [87 , 101] , [91 , 91] , [104 , 79] , [107 , 78] ,
[105 , 85] , [122 , 87] , [138, 66] ,[92 , 68] , [89 , 77].**

Die Anzahl der „Neunen“ (erste Komponente) überwiegt meistens eindeutig die Anzahl der „Zehnen“ (zweite Komponente), auch wenn es gelegentlich mal umgekehrt sein kann oder Gleichstand eintritt. Tatsächlich ändert sich dieses Verhältnis, wenn wir die Augensummen beim Werfen dreier Würfel untersuchen. So liefert der Befehl

SELECT (x=9 ∨ x=10 , x , VECTOR (RANDOM (6) + 1 + RANDOM (6) + 1 + RANDOM (6) + 1 , i, 1, 100))

zum Beispiel die Sequenz

[9 , 10 , 9 , 9 , 10 , 10 , 10 , 10 , 9 , 9 , 9 , 9 , 9 , 10 , 10 , 10 , 9 , 10 , 10 , 9 , 10 , 10]

mit 10 „Neunen und 12 „Zehnen“ . Wiederholungen mit jeweils 1000 Würfen haben zum Beispiel folgende Zahlenpaare geliefert (1. Komponente = Zahl der „Neunen“ , 2. Komponente = Zahl der „Zehnen“):

[97 , 130] , [114 , 112] , [122 , 133] , [102 , 114] , [126 , 121],
[111 , 128] , [114 , 138] , [104 , 121] , [122 , 133] , [115 , 135].

Hinweis: Das Computer-Algebra-System DERIVE in der Version 6.1 kann als 30-Tage-Demoversion unter

`http://shop.bk-teachware.com` <Downloads>

kostenlos aus dem Internet herunter geladen werden. E. Kroll

Von einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf

Von Martin Mattheis

“Ein Mann musste einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluss bringen und konnte nur ein Schiff finden, das nicht mehr als zwei Gegenstände tragen konnte. Es war ihm aber vorgeschrieben, dass er sie alle unverletzt hinüberbringen sollte. Sage, wer es kann, wie er sie unverletzt hinüberbringen konnte.“

Diese Transportaufgabe, bei der ein Mann einen Kohlkopf, einen Wolf und eine Ziege unversehrt über einen Fluss bringen möchte, fehlt in kaum einem mathematischen Rätselbuch. Meistens ist sie noch mit dem erläuternden Zusatz versehen, dass der Mann weder Wolf und Ziege noch Ziege und Kohlkopf alleine an einem Ufer lassen dürfe, weil sonst der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf auffressen würde.

Wer Spaß an Knobelaufgaben hat, kennt diese Aufgabe, aber fast niemand weiß, von wem sie stammt und wie alt sie ist. . .

Eine erste Hilfestellung gibt die folgende Originalfassung der Aufgabe:

„Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli.
Homo quidam debebat ultra fluvium transferre lupum et capram et fasciculum cauli, et non potuit aliam navem invenire, nisi quae duos tantum ex ipsis ferre valebat. Praeceptum itaque ei fuerat, ut omnia haec ultra omnino illaesa transferret. Dicat, qui potest, quomodo eos illaesos ultra transferre potuit.“

Auch wenn man die Sprache selbst nicht beherrscht, erkennt man, dass dies Latein ist. Da auch Carl Friedrich Gauß seine mathematischen Werke noch in Latein geschrieben hat, muss die Aufgabe also mindestens 200 Jahre alt sein.

Die Aufgabe von Wolf, Ziege und Kohlkopf ist aber noch wesentlich älter: Sie gehört zu der ältesten überlieferten Aufgabensammlung in lateinischer Sprache „Propositiones ad acuendos iuvenes“ (Aufgaben zur Übung der Jugendlichen), die von Alkuin von York verfasst wurde.

Wer war dieser Freund mathematischer Rätselaufgaben? Alkuin wurde wahrscheinlich 730 in Northumbria geboren und an der Kathedralschule in York, der damals berühmtesten Bildungsstätte des ganzen christlichen Europa, erzogen. Seit 766 leitete er die Schule, an der er vorher bereits als Lehrer unterrichtet hatte und welche die umfangreichste Bibliothek des Abendlandes besaß. Seine wissenschaftlichen Interessen waren dabei nicht nur auf die Bemühungen um ein reines Latein und die Entwicklung der karolingischen Minuskel, einer gereinigten, klaren Schrift, beschränkt, sondern umfassten alle Bereiche der septem artes liberalis (Grammatik, Dialektik (Logik), Rhetorik, Geometrie, Arithmetik, Astronomie und Musik). Alkuins Ruf als Gelehrter veranlasste Karl den Großen, ihn im Alter von 51 Jahren als Berater des Königs in allen kirchlichen Fragen ins Frankenreich zu rufen. Der Mittelpunkt von Alkuins Tätigkeit dort wurden jedoch Ausbau und Leitung der Hofschule, die nach dem Willen Karls zum Zentrum des geistigen Aufschwungs in seinem Reich wurde.

Außer dem König selbst und dessen Familie wurden dort bedeutende Persönlichkeiten wie Einhard, der Biograph Karls, oder der spätere Mainzer Erzbischof Hrabanus Maurus unterrichtet. Alkuins umfassende literarische Werke sind zu einem großen Teil aus seiner praktischen didaktischen Tätigkeit hervorgegangen; so z.B. seine Schrift „De orthographia“, der die Auffassung zugrunde liegt, dass das genaue und sorgfältige Schreiben Grundlage aller geistigen Arbeit ist, oder „Grammatica“, „Dialogus de Rhetorica et virtutibus“und „De Dialectica“.

Neben diesen grundlegenden Wissenschaften hatte Alkuin auch großes Interesse an der Musik sowie an Zahlen, Zahlensymbolik und Rätseln, was in vielen seiner Werke, Briefen oder kleineren Schriften belegt ist. In den Jahren 786 sowie zwischen 789 und 793 befand sich Alkuin nochmals in seiner Heimat, bevor er nach dem endgültigen Verzicht auf eine Heimkehr im Alter von 66 Jahren Abt des reichen und angesehenen Klosters St. Martin in Tours wurde. Aus der Zeit in Tours ist ein umfangreicher Briefwechsel Alkuins mit Karl dem Großen über die Astronomie, der das besondere Interesse des Königs galt, überliefert.

Die Überlieferung der Werke Alkuins umfasst neben theologischen Abhandlungen auch über 300 meist kurze Gedichte sowie eine Sammlung mathematischer Rätselaufgaben: Die „Propositiones ad acuendos iuvenes“(Aufgaben zur Übung der Jugendlichen) umfassen 56 Aufgaben mit 53 Lösungen, die überwiegend der Unterhaltungsmathematik entstammen. Alkuins Bedeutung in seiner Zeit beruht im Wesentlichen auf den Einfluss, den ihm seine Stellung am Hofe Karls des Großen gab. Die durch seine Stellung ermöglichte Wirksamkeit auf allen Gebieten, die von der Kirche zu beeinflussen waren, wirkte auch nach seinem Tode am 19. Mai 804 weiter auf die folgende Entwicklung des Frankenreiches.

Hier nun zum Schluss noch die Lösung von Alkuins Aufgabe über Wolf, Ziege und Kohlkopf:

„Solutio.

Simili namque tenore ducerem prius capram et dimitterem foris lupum et caulum. Tum deinde venirem lupumque ultra transferrem, lupoque foras misso rursus capram navi receptam ultra reducerem, capraque foras missa caulum transveherem ultra, atque iterum remigassem, capramque assumptam ultra duxissem. Sicque faciente facta erit remigatio salubris absque voragine lacerationis.“

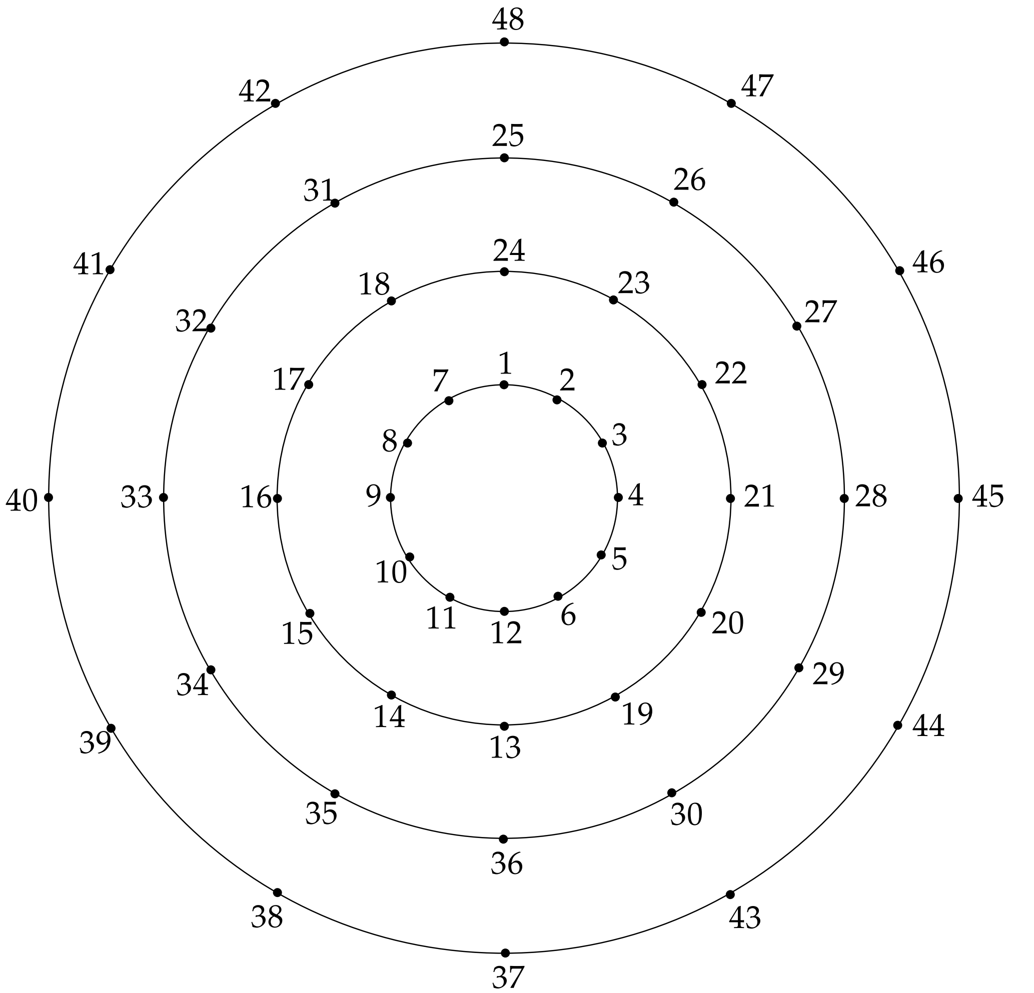
Literatur:

Lexikon des Mittelalters, Band 1 Aachen bis Bettelordenskirchen, München (Artemis & Winkler) 1980, Spalte 417-420.

Menso Folkerts und Helmuth Gericke: Die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend), in: Butzer, P.L./ Lohmann, D.: Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times, Birkhäuser 1993, Seite 283-362.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Der Zahlenring



Im MONOID-Heft 83 hatten wir Euch eingeladen, an dieser Zahlenfigur aus vier konzentrischen Zahlenringen nach überraschenden Eigenschaften zu fahnden.
Hier einige mögliche **Lösungen**, die der Aufgabensteller H.F. vorschlägt:

- Auf den Zahlenringen finden sich alle Zahlen von 1 bis 48.
- Die Summe der zwölf Zahlen des innersten Ringes ist $S_1 = 78$; die Summe auf dem 2. Ring beträgt $S_2 = S_1 + 144$; die Summe auf dem dritten Ring beträgt $S_3 = S_2 + 144$; die Summe auf dem äußersten Ring ist $S_4 = S_3 + 144$.
- Auf jedem der zwölf „Radien" ist die Summe der darauf befindlichen Zahlen gleich, nämlich 98; z. B. ist $1 + 24 + 25 + 48 = 98$.
- Vier benachbarte Zahlen, davon zwei auf dem kleineren und zwei auf dem nächst größeren Kreis bilden ein 2×2-Zahlenquadrat – davon gibt es auf dem inneren und auf dem zweiten Kreis, auf dem zweiten und auf dem dritten Kreis, auf dem dritten und auf dem äußeren Kreis jeweils zwölf Stück.

Die Summe der vier Zahlen aller zwölf Quadrate auf dem zweiten und dritten Kreis sind übereinstimmend 98. Auch die zwölf Quadrate auf dem ersten und zweiten Kreis sowie die auf dem dritten und vierten Kreis haben jeweils die gleiche Summe – für die ersten ist sie $98 - 48 = 50$, für die letzteren ist sie $98 + 48 = 146$.

Beispiele:

$$\begin{matrix} 24 & 23 \\ 1 & 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Summe} = 50; \quad \begin{matrix} 25 & 26 \\ 24 & 23 \end{matrix} \Rightarrow \text{Summe} = 98; \quad \begin{matrix} 48 & 47 \\ 25 & 26 \end{matrix} \Rightarrow \text{Summe} = 146.$$

- Ein „$n-$Sektor“ $n = 2, 3, \dots 11$, besteht aus n nebeneinander liegenden Zahlenradien – es gibt deren 12 verschiedene. Trivialerweise haben alle $n-$Sektoren die gleiche Summe, nämlich $n \cdot 98$.

- Die Zahlen der zwölf Quadrupel, die nach dem Muster $\begin{matrix} 48 & 47 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ gebildet sind, haben jeweils die Summe 98.

Weitere Entdeckungen am Zahlenring

Es folgen nun einige Entdeckungen von Malte Meyn aus der 8. Klasse der Freien Waldorfschule Erlangen. Malte bezeichnet die vier Kreise von innen nach außen mit A, B, C, D (A ist also der kleinste und D der größte Kreis) und führt folgende Bezeichnungen ein:

- $x(Z)$ sei eine (beliebige) Zahl auf Kreis Z.
- $y(Z)$ ihre gegenüberliegende Zahl.
- $\Sigma(Z)$ sei die Summe aller Zahlen auf Kreis Z.

Beispiel: $x(A)$ sei 5, dann ist $y(C) = 32$.

Der magische Kreis hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcccccc}
x(A) + x(B) & = & 25 & = & 2 \cdot 12 & + & 1 \\
x(B) + x(C) & = & 49 & = & 4 \cdot 12 & + & 1 \\
x(C) + x(D) & = & 73 & = & 6 \cdot 12 & + & 1 \\
x(A) + y(C) & = & 37 & = & 3 \cdot 12 & + & 1 \\
x(B) + y(D) & = & 61 & = & 5 \cdot 12 & + & 1 \\
x(A) + x(D) & = & 49 & = & 4 \cdot 12 & + & 1 \\
x(B) - y(A) & = & 12 & = & 1 \cdot 12 & & \\
x(C) - y(B) & = & 12 & = & 1 \cdot 12 & & \\
x(D) - y(C) & = & 12 & = & 1 \cdot 12 & & \\
x(C) - x(A) & = & 24 & = & 2 \cdot 12 & & \\
x(D) - x(B) & = & 24 & = & 2 \cdot 12 & & \\
x(D) - y(A) & = & 36 & = & 3 \cdot 12 & &
\end{array}$$

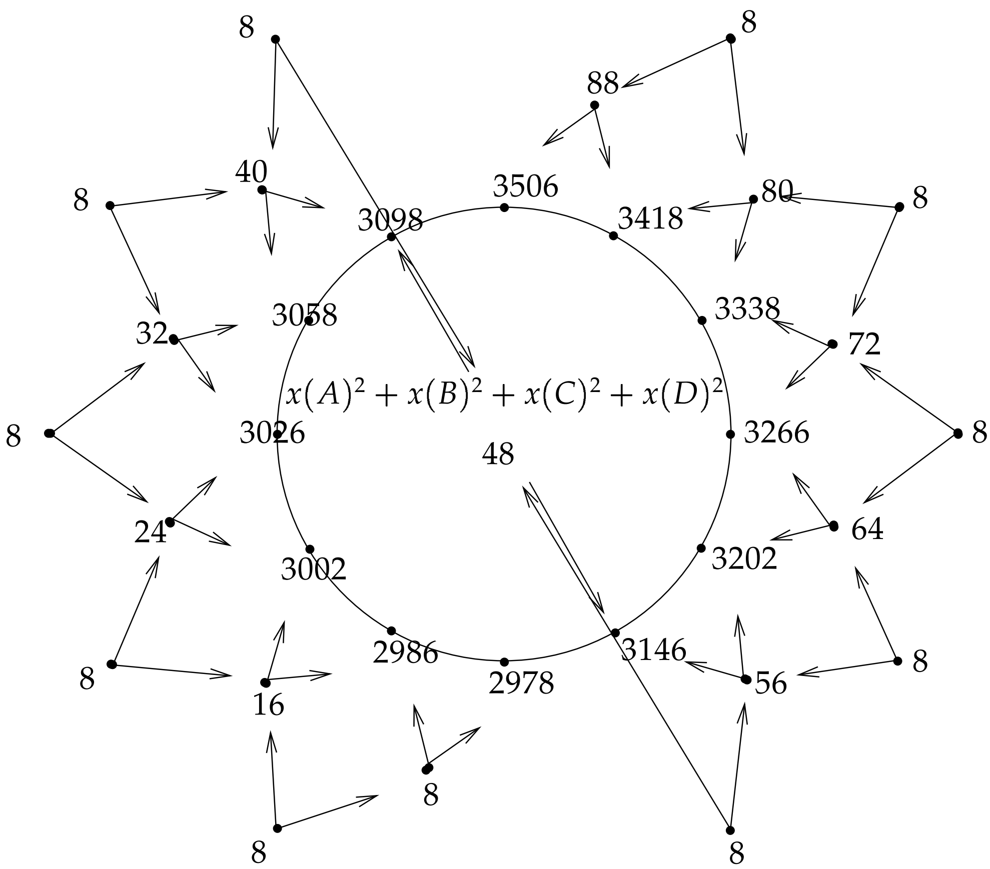
$$x(A) + x(B) + x(C) + x(D) = 98 = 8 \cdot 12 + 2$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\Sigma(A) & = & 78 & = & 6 \cdot 12 & + & 6 & = & 1 \cdot 6 \cdot 12 & + & 6 \\
\Sigma(B) & = & 222 & = & 18 \cdot 12 & + & 6 & = & 3 \cdot 6 \cdot 12 & + & 6 \\
\Sigma(C) & = & 366 & = & 30 \cdot 12 & + & 6 & = & 5 \cdot 6 \cdot 12 & + & 6 \\
\Sigma(D) & = & 510 & = & 42 \cdot 12 & + & 6 & = & 7 \cdot 6 \cdot 12 & + & 6 \\
\Sigma(A) + \Sigma(B) & = & 300 & = & 25 \cdot 12 & = & 2 \cdot 12^2 & + & 12 & & \\
\Sigma(B) + \Sigma(C) & = & 588 & = & 49 \cdot 12 & = & 4 \cdot 12^2 & + & 12 & & \\
\Sigma(C) + \Sigma(D) & = & 876 & = & 73 \cdot 12 & = & 6 \cdot 12^2 & + & 12 & & \\
\Sigma(A) + \Sigma(C) & = & 444 & = & 37 \cdot 12 & = & 3 \cdot 12^2 & + & 12 & & \\
\Sigma(B) + \Sigma(D) & = & 732 & = & 61 \cdot 12 & = & 5 \cdot 12^2 & + & 12 & & \\
\Sigma(A) + \Sigma(D) & = & 588 & = & 49 \cdot 12 & = & 4 \cdot 12^2 & + & 12 & & \\
\Sigma(B) - \Sigma(A) & = & 144 & = & 1 \cdot 12^2 & & & & & & \\
\Sigma(C) - \Sigma(B) & = & 144 & = & 1 \cdot 12^2 & & & & & & \\
\Sigma(D) - \Sigma(C) & = & 144 & = & 1 \cdot 12^2 & & & & & & \\
\Sigma(C) - \Sigma(A) & = & 288 & = & 2 \cdot 12^2 & & & & & & \\
\Sigma(D) - \Sigma(B) & = & 288 & = & 2 \cdot 12^2 & & & & & & \\
\Sigma(D) - \Sigma(A) & = & 432 & = & 3 \cdot 12^2 & & & & & &
\end{array}
$$

$$\Sigma(A) + \Sigma(B) + \Sigma(C) + \Sigma(D) = 117698 = 8 \cdot 12 + 2$$

Man sieht, der magische Kreis hat viel mit der Zahl 12 zu tun.

Jetzt schaue ich mir noch die Quadrate der Zahlen $x(A, B, C, D)$ an, bzw. die Summen $x(A)^2 + x(B)^2 + x(C)^2 + x(D)^2$:



Das heißt, die Abstände der Abstände dieser Summen sind immer 8, wenn man die Summen nach der Reihenfolge der Zahlen im Kreis A „nummeriert“ ordnet.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 85

Vier Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Fußball - WM 2006

Bei der Fußballweltmeisterschaft 2006 werden 32 Mannschaften teilnehmen. Bis der Weltmeister ermittelt sein wird, werden insgesamt 64 Spiele ausgetragen werden. Wie viele Spiele müssten ausgetragen werden, wenn der Weltfußballverband FIFA die Regeln wie folgt abändern würde:

a) Die Mannschaften spielen jeweils nach dem K.-o.-System, das heißt, wer ein Spiel verliert, scheidet aus.

b) Jede Mannschaft spielt einmal gegen jede andere Mannschaft.

c) Wie viele Tage würde das WM-Turnier im Falle b) dauern, wenn jeden Tag wegen der Fernsehübertragungen zwei Spiele stattfinden würden? (WK)

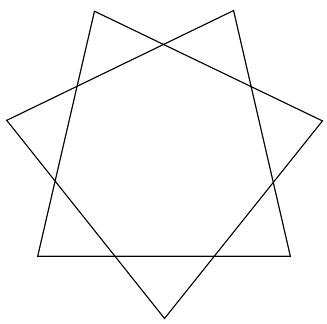
Lösung:

a) Beim k.o.-System ist immer **ein** Spiel nötig, um eine Mannschaft auszuschalten. Da bis zur Ermittlung des Weltmeisters 31 Mannschaften ausscheiden müssen, sind auch 31 Spiele nötig (bzw. 32 Spiele, wenn man berücksichtigt, dass es auch ein Spiel um den 3. Platz gibt).

b) Beim Modus „Jeder gegen Jeden“ muss die erste Mannschaft gegen 31 Mannschaften antreten, die zweite hat (außer dem Spiel gegen die erste) noch 30 Spiele auszutragen, die dritte noch 29 Spiele, usw.
Gesamtanzahl der Spiele: $31 + 30 + 29 + \ldots + 3 + 2 + 1 = 31 + (30 + 1) + (29 + 2) + (28 + 3) + \ldots + (16 + 15) = 16 \cdot 31 = 496$.

c) $496 : 2 = 248$ Tage, also mehr als 8 Monate.

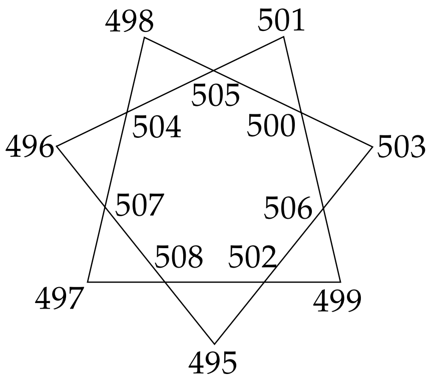
Ein magischer Siebenstern



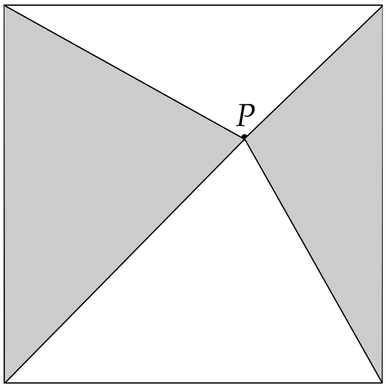
Verteile die 14 aufeinander folgenden Zahlen $495, 496, 497, \ldots, 508$ so auf die Eckpunkte der Figur, dass die Summe der vier Zahlen längs jeder der sieben im Stern vorkommenden Strecken jeweils 2006 ist. (H.F.)

Lösung:

(Tipp: Löse die Aufgabe mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 14$ (Streckensumme 30) und addiere zu jeder Zahl 494.)



Wahr oder falsch?



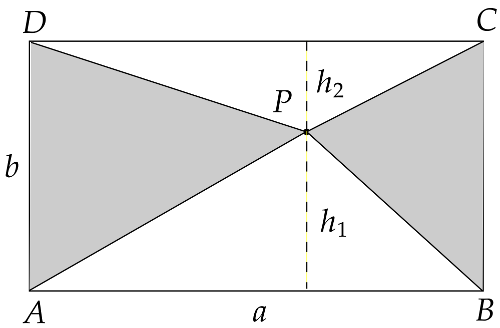
Mathis behauptet:

a) Wie auch immer man den Punkt P im Innern eines Quadrats wählt, stets gilt: Die unterlegten Dreiecke sind zusammen so groß wie die nicht unterlegten Dreiecke zusammen.

b) Entsprechendes trifft für ein Rechteck zu.

Was hältst du von diesen Behauptungen? (H.F.)

1. Lösung (rechnerisch):



Im Rechteck $ABCD$ gilt

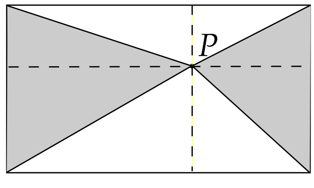
$$|ABP| + |CDP| = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + \frac{1}{2}a \cdot h_2$$
$$= \frac{1}{2}a \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}a \cdot b.$$

Da das Rechteck $ABCD$ die Fläche ab hat, haben die unterlegten Dreiecke zusammen die Fläche $ab - \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab$. Mathis Behauptung gilt also für Rechtecke und damit auch für Quadrate.

2. Lösung (geometrisch):

Zeichne die Parallelen zu den Rechtecksseiten durch den Punkt P. Dadurch wird das Rechteck in vier kleine Rechtecke unterteilt. Nun sehen wir, dass in jedem Teilrechteck eine Hälfte unterlegt und die andere Hälfte weiß ist. Daraus erkennen wir, dass die unterlegte Fläche gleich der weißen Fläche ist. Da die Behauptung für Rechtecke gilt, ist sie auch für Quadrate (als spezielle Rechtecke) wahr.

(Natalie Fischbach, Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied, 7d;
Tristan Keller, Ludwig Marum-Gymnasium Pfinztal, 7a;
Dominik Kim, Ludwig Marum-Gymnasium Pfinztal, 6d;
Madeline Kohlhaas, Gymnasium Marienberg, 8f;
Vivien Kohlhaas, Gymnasium Marienberg, 7a;
Malte Meyn, Freie Waldorfschule Erlangen, 8;
Sina Spangenberger, Burggymnasium Kaiserslautern, 9e;
Dorothea Winkelvoß, Leibnizgymnasium Wiesbaden, 5c;
Melanie Wagner, Georg Christoph Lichtenberg-Schule Ober-Ramstadt, 7b)



Wortrechnung

Lies den Artikel über Stifel und überlege Dir, wie Du aus „N**UM**ER**U**S PR**IMU**S“ unter Verwendung der Zeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $($, $)$ eine Primzahl machen kannst. (WJB)

Lösungsbeispiele:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 5 & + & 1000 & - & 5 & \cdot & 1 & - & 1000 & + & 5 & = & 5 \\ (5 & + & 1000) & : & 5 & \cdot & 1 & + & 1000 & : & 5 & = & 401 \end{array}$$

Einkauf

Susi kauft ein Päckchen mit zehn Bleistiften, einem Kugelschreiber und einem Füller und bezahlt mit einem 10 €–Schein. Das Rückgeld beträgt $3{,}46$ €. Der Kugelschreiber kostet $0{,}40$ € mehr als die zehn Bleistifte, der Füller doppelt so viel wie Beides zusammen. Wieviel kostet der Kugelschreiber? (WJB)

Lösung:

Sie gibt $6{,}54$ € aus; davon ein Drittel, also $2{,}18$ € für Kugelschreiber und Bleistifte. 40 Cent weniger, also $1{,}78$ €, geteilt durch 2 ergibt 89 Cent als Preis für die Bleistifte. Es bleibt $1{,}29$ € für den Kugelschreiber.

Wer sagt die Wahrheit?

In einem Raum befinden sich drei Männer, die entweder aus TrueCity oder aus LiarsTown stammen. Man weiß, dass alle Bürger aus TrueCity immer die Wahrheit sagen, und dass alle Einwohner von LiarsTown ständig lügen. Die 3 Männer erzählen nun, woher sie kommen. Dummerweise murmelt der erste Mann so undeutlich, dass er nicht zu verstehen ist. Der zweite sagt: „Der erste hat gesagt, er sei aus TrueCity. Das stimmt, und ich bin auch von dort.“ Der dritte sagt: „Ich komme aus TrueCity, aber die beiden anderen nicht.“

Ermittle, wer ein Wahrheitsliebender aus TrueCity ist und wer ein Lügner aus LiarsTown ist!

Lösung:

Wenn der erste Mann aus TrueCity stammt, so sagt er dies wahrheitsgemäß aus. Stammt er aus Liarstown, so würde er lügen und ebenfalls behaupten, er sei aus True City. Der Erste sagt also in jedem Fall, er sei aus TrueCity. Da der zweite Mann dies auch aussagt, muss er die Wahrheit sagen, also aus True City sein. Dann stimmt auch die Aussage des Ersten, und er ist auch von dort. Dann muss der dritte Mann lügen, folglich ist er aus Liarstown.

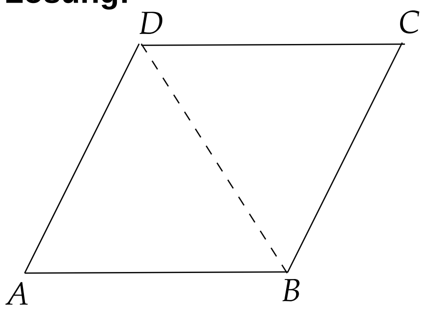
(Gregor Angeloni, Kaiserin Friedrich-Gymnasium Bad Homburg, 7;
Moritz Hahn, Mainz, 8;
Florian Schweiger, Gymnasium Marktoberdorf, 8d)

Parallelogramm im Dreieck

Füge einem Parallelogramm einige untereinander kongruente Dreiecke so hinzu, dass ein Dreieck entsteht. Dabei soll die hinzugefügte Fläche genauso groß sein wie die Fläche des Parallelogramms.

(Alia’a Ahmed Doma, 8A, Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo)

Lösung:



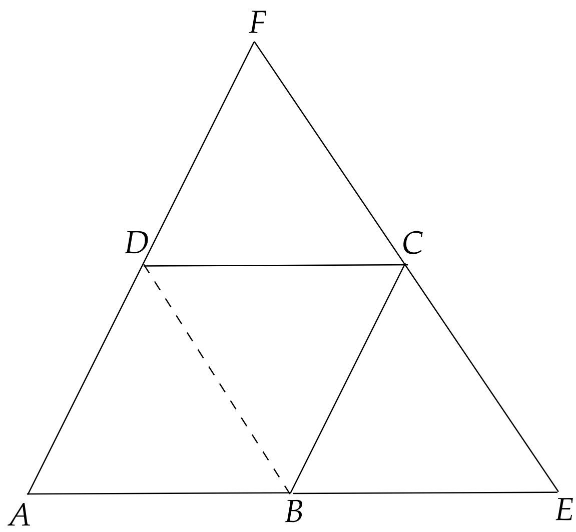
Es gilt:

- Eine Diagonale zerlegt ein Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke (d.h. hier: Es ist $\triangle ABD \mathrel{\widehat{=}} \triangle DBC$).
- Wenn man die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks miteinander verbindet, erhält man vier kongruente Dreiecke.

Somit nehmen wir an, die Punkte B, C und D seien die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks $\triangle AEF$. Dann gilt auch: $\triangle ADB \mathrel{\widehat{=}} \triangle\ DBC \mathrel{\widehat{=}} \triangle\ BEC \mathrel{\widehat{=}} \triangle\ DCF$.

Daraus folgt: $AB = DC = BE, AD = BC = DF, DB = CE = FC$.

Das Dreieck sieht anschließend so aus:



Offensichtlich ist die hinzugefügte Fläche genauso groß wie die Fläche des Parallelogramms.

Wie weit sind denn diese Züge voneinander entfernt?

Der InterCity „Pythagoras“ fuhr am 11. Februar von München nach Frankfurt ohne Unterbrechung mit 145 km/h. Der ICE „Archimedes“ fuhr zur gleichen Zeit von Frankfurt nach München ohne Unterbrechung mit 165 km/h. Um 16:43 Uhr trafen sie sich. Welchen Abstand hatten die beiden Züge um 15:43 Uhr?

Lösung:

Eine Stunde vor dem Zusammentreffen war der InterCity 145 km vom Treffpunkt entfernt, der ICE aus der entgegengesetzten Richtung 165 km vom Treffpunkt entfernt. Folglich waren die beiden Züge zu diesem Zeitpunkt 145 km + 165 km = 310 km voneinander entfernt.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Magisches Quadrat mit Jahreszahlen

2006		
	2007	
		2008

Setze in die sechs leeren Felder Zahlen so ein, dass ein magisches Quadrat entsteht.
(H.F.)

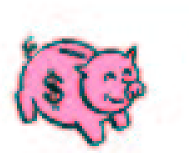
Das Alter der Kinder des Mathematikers

Die Mathematiker Aebli und Baebli unterhalten sich, während sie auf die Straßenbahn warten. Aebli sagt zu Baebli: „Sie haben doch vier Kinder. Wie alt sind die?“ Baebli antwortet: „Das Produkt ihrer Lebensjahre (in ganzen Jahren) ist 36, während die Summe mit der Nummer der Straßenbahn übereinstimmt, mit der wir fahren wollen.“

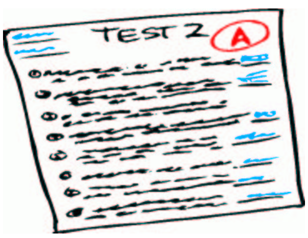
Nach kurzem Nachdenken stellt Aebli fest: „Ich kann das Alter der Kinder nicht bestimmen.“
Darauf Baebli: „Ach ja, ich vergaß zu sagen, dass mein ältester Sohn Mathis heißt.“
Und nun Aebli: „Jetzt kann ich das Alter der Kinder angeben.“
Kannst Du das auch? (H.F.)

Geldausteilung

Ein Vater verteilt Geld auf seine vier Kinder. Der ältere Sohn erhält das Doppelte dessen, was der jüngere Sohn bekommt. Seine ältere Tochter bekommt das Dreifache des Betrags ihrer Stiefschwester, doch das ist immer noch 270 € weniger als die Summe, die der jüngere Sohn erhält. Am Ende soll der Vater 3995 € ausgegeben haben.



(Scheima'a Ahmed Doma, 5a, Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo)



Mathis wird getestet

Mathis nahm an einem „Multiple-Choice-Test“, also einem Test, bei dem die Antworten durch Ankreuzen gegeben werden, mit 25 Fragen teil.
Für eine richtige Antwort gab es 5 Punkte, für eine falsche Antwort -4 Punkte und für eine unbeantwortete Frage gab es -2 Punkte. Mathis erreichte 90 Punkte.

Wie viele Fragen hatte er richtig, wie viele falsch und wie viele gar nicht beantwortet?
(H.F.)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Analyse einer Berechnungsvorschrift

Wir schreiben zwei Zahlen nebeneinander, z.B. 87 und 47 oder 47 und 87. Unter die linke Zahl schreiben wir ihre (ggf. abgerundete) Hälfte. Die rechte Zahl verdoppeln wir. Dies wiederholen wir, bis links eine 1 steht. Dann addieren wir rechts die Zahlen, bei denen links eine ungerade Zahl steht. In den Beispielen sieht das so aus:

87	47		47	87
43	94		23	174
21	188	bzw.	11	348
10	~~376~~		5	696
5	752		2	~~1392~~
2	~~1504~~		1	2784
1	3008			4089
	4089			

a) Prüfe in zwei anderen Beispielen nach, dass bei Vertauschung der gewählten Zahlen das gleiche Ergebnis auftritt.

b) Welche Zahl ist das jeweilige Ergebnis?

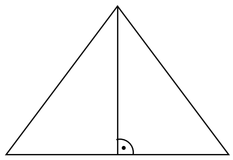
c) Zeige, warum diese Methode funktioniert, das Ergebnis zu finden. (WJB)

Das Problem der Quadratverdopplung

In der Schrift „Menon“ des griechischen Philosophen Platon (427 – 347 v. Chr.) stellt der Hauptakteur Sokrates einem Sklaven die Aufgabe:

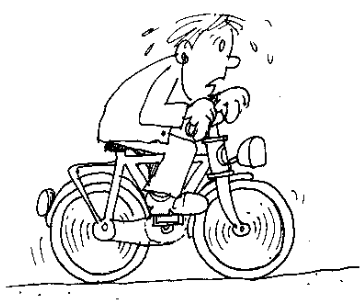
Vergrößere ein Quadrat so, dass die Fläche des neuen Quadrats doppelt so groß wie die des Ausgangsquadrats ist.

Wir verengen die Aufgabenstellung, indem wir eine konstruktive Lösung verlangen, wobei als einziges Zeichengerät ein Dreieck mit einem markierten $90°$-Winkel erlaubt ist. (H.F.)



Das Wettrennen der beiden Radfahrer

Dennis und seine Schwester Laura machen ein Wettrennen per Fahrrad um ihre Heimatstadt. Beide haben sich ganz unterschiedliche Taktiken zurechtgelegt.



- Dennis will zunächst langsam fahren, um Kondition für die zweite Hälfte zu sparen. Er fährt deshalb die erste Hälfte der Strecke mit „nur“ 20 km/h Geschwindigkeit. Dann steigert er seine Geschwindigkeit auf das Doppelte und fährt die zweite Hälfte mit 40 km/h.

- Laura dagegen fährt gleichmäßig die ganze Strecke mit 30 km/h. Gibt es ein „totes Rennen,“ kommen also beide gleichzeitig ins Ziel, oder wer ist der Sieger?

Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 882. Dreieckszerlegung

Kannst Du allein mit einem Lineal der Länge ℓ ein Dreieck, dessen Seitenlängen sämtlich $< \ell$ sind, in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegen? (H.F.)

Aufgabe 883.

Welche fünfstelligen Quadratzahlen sind durch 5 und 7 teilbar? (WJB)

Aufgabe 884.

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Der Kreis um A durch C schneidet die Gerade AB in D_1 und D_2. Die Gerade CD_1 schneidet den Kreis um B durch D_1 nochmals in E_1. Die Gerade CD_2 schneidet den Kreis um B durch D_2 nochmals in E_2.

Zeige: $AC||E_1E_2$. (Dietmar Viertel, Flörsheim)

Aufgabe 885.

Bestimme die kleinste natürliche Zahl n sowie die kleinste natürliche Zahl m, für die jeweils gilt:

a) Wenn man n der Reihe nach durch 2, durch 3, $\dots$, durch 11 und durch 12 teilt, dann bleibt stets ein Rest 1.

b) Wenn man m durch 2 teilt, dann bleibt ein Rest 1,
wenn man m durch 3 teilt, dann bleibt ein Rest 2, $\dots$, usw.
wenn man m durch 11 teilt, dann bleibt ein Rest 10 und
wenn man m durch 12 teilt, dann bleibt ein Rest 11. (H.F.)

Aufgabe 886. Punkte im Dreieck

In der Ebene sind n verschiedene Punkte, $n \geq 4$, so gegeben, dass je drei von ihnen ein Dreieck bilden. Das größte dieser Dreiecke habe den Flächeninhalt F. Dann gibt es ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $4F$, das alle n Punkte im Innern oder auf seinem Rand enthält. (H.F.)

Aufgabe 887.

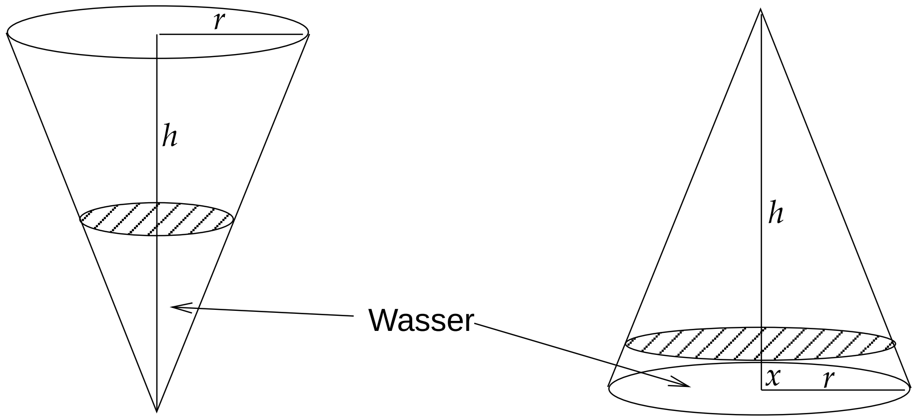
1981 kostete das erste MONOID-Heft mit 32 Seiten 1 DM ($\approx$ 0,511 €). 25 Jahre später zahlst Du für ein Abonnement von vier Heften zu je 44 Seiten 8 € inklusive 0,85 € Porto pro Heft.

Wieviel beträgt die durchschnittliche Preissteigerungsrate pro Jahr,

a) wenn man den Preis pro Heft zugrundelegt

b) wenn man sich auf den Preis pro Seite bezieht? (WJB)

Aufgabe 888.
Ein senkrechter, oben geschlossener Kegel ist bis zur halben Höhe mit Wasser gefüllt. Wie hoch steht das Wasser im Kegel, wenn man ihn umdreht? (Erst schätzen!)



Berechne die Höhe des Wasserstandes x in Abhängigkeit von der Höhe h des Kegels.
(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 889. $\ast$
Im gleichschenkligen Dreieck mit Grundseite $2s$ und Höhe h suchen wir den Punkt, für den die Summe der Abstände zu den Ecken am kleinsten ist.
a) Zeige, dass der Punkt auf der Mittelsenkrechten liegen muss.
b) Bestimme seine Höhe über der Grundseite. (WJB)

$\ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast$

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 85
Kl. 8-13

Kommentar: Leider hatte sich in Aufgabe 875 ein Fehler eingeschlichen – hier die Aufgabenstellung, wie sie *gemeint* war (und sich dann lösen lässt):

Aufgabe 875. „Magisches“ Sudoku
In dem 9×9-Sudoku, dessen Hauptdiagonale die Ziffern $1, 2, 3, \ldots 9$ in aufsteigender Reihenfolge enthält, sollen *zusätzlich* als Bedingungen erfüllt sein:

(1) Jedes der 3×3-Quadrate ist ein partiell-magisches Quadrat, d.h. jede Zeile und Spalte hat die gleiche Summe.

(2) Die Hauptdiagonale des großen Quadrats enthält die Ziffern $1, 2, 3, \ldots 9$ in der richtigen Reihenfolge. Die Nebendiagonale des großen Quadrats enthält die Ziffern $1, 2, 3, \ldots 9$ in beliebiger Reihenfolge. (WK)

Lösung:

1	9	5	3	8	4	6	2	7
6	2	7	5	1	9	8	4	3
8	4	3	7	6	2	1	9	5
9	5	1	4	3	8	2	7	6
2	7	6	9	5	1	4	3	8
4	3	8	2	7	6	9	5	1
5	1	9	8	4	3	7	6	2
7	6	2	1	9	5	3	8	4
3	8	4	6	2	7	5	1	9

Aufgabe 876. Die drei Kugeln

In einem total dunklen Raum liegen in einer Schublade 3 rote und 2 blaue Kugeln sowie 1 weiße Kugel. Wenn man 3 Kugeln nacheinander herausnimmt, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass es drei verschiedenfarbige sind?

Malte Meyn, 8. Klasse Waldorfschule Otterberg

Lösung:

Gehen wir von der Reihenfolge rbw (=rot, blau, weiß) aus, ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$. Damit man die verschiedenen Zähler verschiedenen Nennern zuordnen kann, schreibe ich es als einen Bruch: $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4}$. Dann multipliziere ich das Ganze mit 6, weil es die 6 Möglichkeiten $rbw, rwb, brw, bwr, wrb, wbr$ gibt. $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot 6 = \frac{6}{120} \cdot 6 = \frac{1}{20} \cdot 6 = \frac{6}{20} = \frac{30}{100}$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln verschiedenfarbig sind 30%.

Aufgabe 877. Lauter Stammbrüche

Die Priester-Mathematiker des alten Ägypten trieben Bruchrechnung nur mit Stammbrüchen (einzige Ausnahme: die Bruchzahl $\frac{2}{3}$). Deshalb hätte ihnen die folgende Aufgabe sicher gefallen:

Kannst du zwei verschiedene Stammbrüche $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ angeben, deren (arithmetischer) Mittelwert $\frac{1}{13}$ ist? (H.F.)

1. Lösung:

Es soll gelten: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{13}$.

$\Rightarrow \frac{2}{13} = \frac{m+n}{m \cdot n} \Rightarrow 2mn = 13 \cdot (m+n) \Rightarrow m(2n-13) = 13n$

$\Rightarrow m = \frac{13n}{2n-13} \Rightarrow 2m = \frac{26n}{2n-13} = \frac{13 \cdot (2n-13)}{2n-13} + \frac{13^2}{2n-13} = 13 + \frac{13^2}{2n-13}$

Weil nun $2m$ eine ganze Zahl ist, muss der Nenner $2n-13$ im letzten Bruch ein Teiler des Zählers 13^2 sein.

$\Rightarrow$ $2n-13=1$ $\Rightarrow n=7$ und $m=91$

oder $2n-13=13$ $\Rightarrow n=13$ und $m=13$: scheidet als Lösung aus, weil $\frac{1}{m} \neq \frac{1}{n}$ vorausgesetzt ist.

oder $2n-13=169$ $\Rightarrow n=91$ und $m=7$: diese Lösung stimmt mit der ersten Lösung überein - es sind nur m und n vertauscht.

Somit ist $\frac{1}{m}=\frac{1}{91}$ und $\frac{1}{n}=\frac{1}{7}$

Probe: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{91}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{91}+\frac{13}{91}\right)=\frac{1}{2} \cdot \frac{14}{91}=\frac{1}{13}$.

2. Lösung:
Wenn man sich an den Artikel über die Bruchrechnung in der Pharaonenzeit aus Heft 77 (März 2004) erinnert, findet sich dort die Formel

$$\frac{2}{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n(2n-1)}.$$

Damit kann man sofort die Lösung $\frac{1}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$ angeben. (Thomas Weiß)

Aufgabe 878.Wahr oder falsch?
Wir bezeichnen die Primzahlen nach wachsender Größe mit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Dann ist das um 1 vermehrte Produkt aller Primzahlen $\leq p_n$, also $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, niemals eine Quadratzahl. (H.F.)

1. Lösung:

Angenommen, es gäbe eine Zahl k, welche die Bedingung $p_1 p_2 \ldots p_n + 1 = k^2$ erfülle. Diese Bedingung ist äquivalent zu $p_1 p_2 \ldots p_n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$.
Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, ist die linke Seite genau einmal durch 2 teilbar. Die rechte Seite ist aber, falls k gerade ist, ungerade, also gar nicht durch 2 teilbar, oder, falls k ungerade ist, sogar zweimal durch 2 teilbar.

(Pascal Cremer, Gymnasium Korschenbroich, 10;
Thomas Weiß)

2. Lösung:
$p_1 = 2$ ist die einzige gerade Primzahl, alle anderen Primzahlen sind ungerade.
Also gilt: $p_1 p_2 \ldots p_n \equiv 2 \bmod 4$ und daher $p_1 p_2 \ldots p_n + 1 \equiv 3 \bmod 4$.
Quadratzahlen sind aber immer 0 oder $1 \bmod 4$.
Daher kann $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ keine Primzahl sein, die Aussage ist also wahr.

(Laura Biroth, Humboldtschule Bad Homburg, 11;
Florian Schweiger, Gymnasium Marktoberdorf, 8d;
Stefanie Tiemann, Gymnasium Marienberg Neuss, 12)

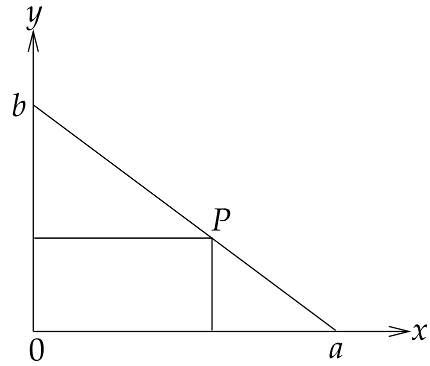
Aufgabe 879.

In ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten a und b sei ein Rechteck einbeschrieben wie abgebildet. Kann man den Punkt P so wählen, dass

a) die Fläche F des Rechtecks maximal wird?

b) der Umfang U des Rechtecks maximal wird?

c) Gib bei gegebener Fläche F den Umfang U an. (WJB)



Lösung:

a) Hat P die Koordinaten x und y, so gilt $y = b - \frac{b}{a}x$ und daher $F = xy = bx(1 - \frac{x}{a}) = bx - \frac{b}{a}x^2$. Die Ableitung von F nach x ist $F'(x) = b - 2\frac{b}{a}x = b(1 - \frac{2x}{a})$. Die einzige Nullstelle $x = \frac{a}{2}$ ist die gesuchte Lösung, d. h. P ist $(\frac{a}{2} \mid \frac{b}{2})$. Die maximale Fläche ist $\frac{ab}{4}$.

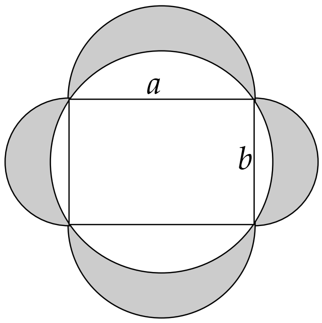
b) Für den Umfang gilt entsprechend $U = 2(x + y) = 2(1 - \frac{b}{a})x + 2b$. Ist $b < a$, so steigt U im Intervall $[0, a]$ von $2b$ nach $2a$. Ist $b > a$, so fällt U von $2b$ nach $2a$. Es gibt in beiden Fällen kein echtes Rechteck mit maximalem Umfang. Ist schließlich $b = a$, so ist $U = 2a$ konstant.

c) Aus $F = bx - \frac{b}{a}x^2$ folgern wir $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a}{b}F}$. Setzen wir dies in die Formel $U = 2(1 - \frac{b}{a})x + 2b$ ein, so ergeben sich die beiden Lösungen

$U = 2(1 - \frac{b}{a}) \left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a}{b}F} \right) + 2b$. Wir bemerken, dass es zwei Lösungen gibt, wenn F kleiner ist als $\frac{ab}{4}$ und genau eine Lösung für $F = \frac{ab}{4}$. Der Fall $F > \frac{ab}{4}$ kann nach a) nicht eintreten.

Aufgabe 880.

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b sowie sein Umkreis. Über jeder Rechtecksseite sei (nach außen hin) ein Halbkreis konstruiert. Kannst Du die Gesamtfläche der vier schraffierten „Sicheln“ berechnen? (H.F.)



Lösung:

Die Fläche F_1 des Rechtecks beträgt $F_1 = a \cdot b$. Die Fläche des Umkreises vom Rechteck sei F_2. Da der Radius des Umkreises $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ ist, gilt

$$F_2 = \pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left(a^2 + b^2 \right).$$

Die Fläche eines kleinen Halbkreises sei F_3, die eines großen Halbkreises sei F_4. Dann ist

$$F_3 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}b \right)^2 = \frac{\pi}{8}b^2; \qquad F_4 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}a \right)^2 = \frac{\pi}{8}a^2.$$

Die Gesamtfläche F der vier schraffierten „Sicheln“ ist daher

$$F = 2F_3 + 2F_4 - (F_2 - F_1) = \frac{\pi}{4}b^2 + \frac{\pi}{4}a^2 - \left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2 - ab\right) = ab.$$

Die Flächen der vier „Sicheln“ zusammen sind genauso groß wie die Rechtecksfläche.

Aufgabe 881. $\ast$
In der Mitte eines kreisrunden Sees sitzt Max in seinem Paddelboot. Am Ufer steht Fritz, der Max fangen will. Nun ist Fritz (extrem) wasserscheu und wird deshalb stets an Land bleiben. Fritz kann vier Mal schneller laufen als Max paddeln. Andererseits weiß Max auch, dass er an Land viel schneller ist als Fritz, d. h. er muss nur das Ufer an einer Stelle erreichen, an der Fritz noch nicht ist. Wie muss sich Max verhalten, um Fritz zu entkommen? (H.J. Schuh)

Lösung:
Max kann durch Paddeln auf einem Kreis mit kleinem Radius – etwa einem Radius von ganz knapp unter einem Viertel des Radius’ des Sees – erreichen, dass er sich diametral zu Fritz befindet, d. h. dass die Verbindungslinie zwischen den Jungen durch den Mittelpunkt des Sees geht.

(Ausführlicher: Sei r der Radius des Sees. Max fährt z. B. auf dem Kreis mit Radius $t_M = \frac{2}{9}r$ um den Seemittelpunkt. Dort benötigt er für eine Umrundung $\frac{\frac{2}{9}r \cdot 2\pi}{v} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\pi r}{v}$. Fritz benötigt für eine Umrundung am Ufer aber $t_F = \frac{r \cdot 2\pi}{4v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r}{v}$.)

Dann kann er auf dem kürzesten Weg zum Ufer rudern: Max’ Strecke beträgt dann nur knapp über drei Viertel des Radius’ des Sees, Fritz’ Strecke dagegen $\pi\cdot$(Radius des Sees) und selbst bei vierfacher Geschwindigkeit kann er Max nicht erreichen, weil π größer als 3 ist. (C.H-A)

Beweise ohne Worte

Von Hartwig Fuchs

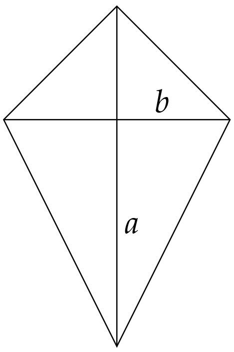
In der griechischen Antike gab es eine bedeutende und für die Entwicklung der Mathematik sehr wichtige mathematische „Schule“, die im 5. und 4. Jahrhundert v. Chr. besonders einflussreich war: Der Bund der Pythagoreer. Diese haben wohl erstmals durchgehend mathematische Sätze nur dann anerkannt, wenn sie bewiesen werden konnten.

Deshalb erfanden sie selbst mehrere Beweisverfahren – vermutlich z. B. die Methode des Widerspruchsverfahrens. Eine ihrer bemerkenswertesten Strategien waren *Beweise ohne Worte*, die sie in der Geometrie benutzten.

Einige typische Beispiele:

Die Fläche eines Drachen
mit den Diagonalenlängen a und b ist $\frac{1}{2}\cdot ab$.

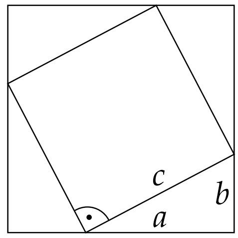
Beweis ohne Worte:



Satz des Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a, b und der Hypotenusenlänge c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Beweis ohne Worte:

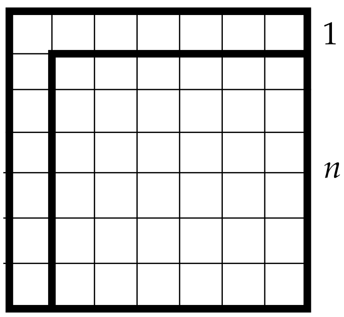


Die Pythagoreer haben sogar arithmetische Sätze „ohne Worte“ bewiesen, wenn es ihnen gelang, diese in geeignete geometrische Zusammenhänge zu stellen.

Jede ungerade natürliche Zahl ist die Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen

Beweis ohne Worte:

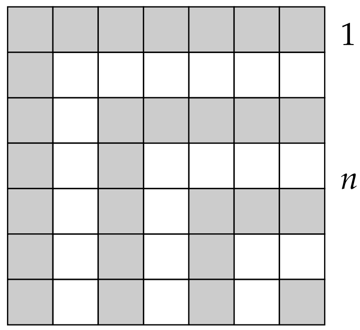
$n+1$



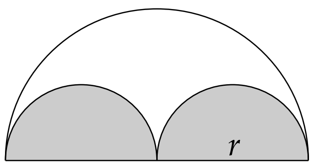
Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist eine Quadratzahl

Beweis ohne Worte:

$n+1$



Welcher Satz samt Beweis steckt in folgendem Kreisbogendreieck?



* * * * * * *

Hier als Service für unsere Leser doch noch ein paar Worte zu den Beweisen ohne Worte:

Fläche des Drachen = $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}ab$

Satz des Pythagoras:
$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2$

Differenz zweier Quadratzahlen:
$2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$

Summe der ungeraden Zahlen:
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$

* * * * * * *

Kreisbogendreieck:

Satz: Die beiden kleinen Halbkreisflächen sind zusammen so groß wie die Fläche des Kreisbogendreiecks, denn $\frac{1}{2}\pi r^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$

Die Forscheraufgabe aus MONOID 83:

Geometrische Konstruktionen allein mit dem Zirkel

Von Florian Schweiger, Gymnasium Marktoberdorf

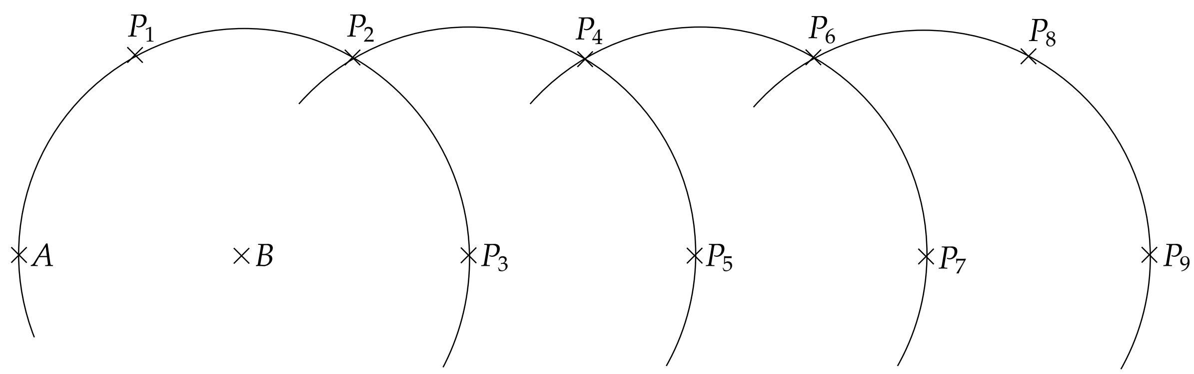
Für eine Konstruktion nur mit einem Zirkel ist zunächst eine Vereinbarung nötig: Da man Strecken und Geraden nicht mit einem Zirkel zeichnen kann, soll bei Nur-Zirkel-Konstruktionen gelten, dass eine Strecke $\overline{AB}$ oder eine Gerade AB durch die Punkte A, B konstruiert ist, wenn man A und B als Schnittpunkte von Kreisen festlegen kann.

Mit $k(M; r)$ sei im Folgenden stets der Kreis um M mit Radius r gemeint.

Lorenzo Mascheroni (1750–1800) hat in seinem Buch „La geometria del compasso" 1797 bewiesen, dass man alle mit Zirkel und Lineal durchführbaren Konstruktionen auch nur mit dem Zirkel durchführen kann (vgl. `www.oliver-bieri.ch/mascheroni`).

Für die Grundkonstruktionen kann man konkret Möglichkeiten für die Konstruktion angeben:

1. Abtragen des n-fachen einer gegebenen Strecke



$\overline{AB}$ sei die gegebene Strecke. Einer der Schnittpunkte des Kreises $k(B; r = |\overline{AB}|)$ mit dem Kreis $k(A; r = |\overline{AB}|)$ sei mit P_1 bezeichnet. Ebenso sei der zweite Schnittpunkt von $k(B; r = |\overline{AB}|)$ mit $k(P_1; r = |\overline{AB}|)$ gleich P_2 und der von $k(B; r = |\overline{AB}|)$ mit $k(P_2; r = |\overline{AB}|)$ sei P_3.

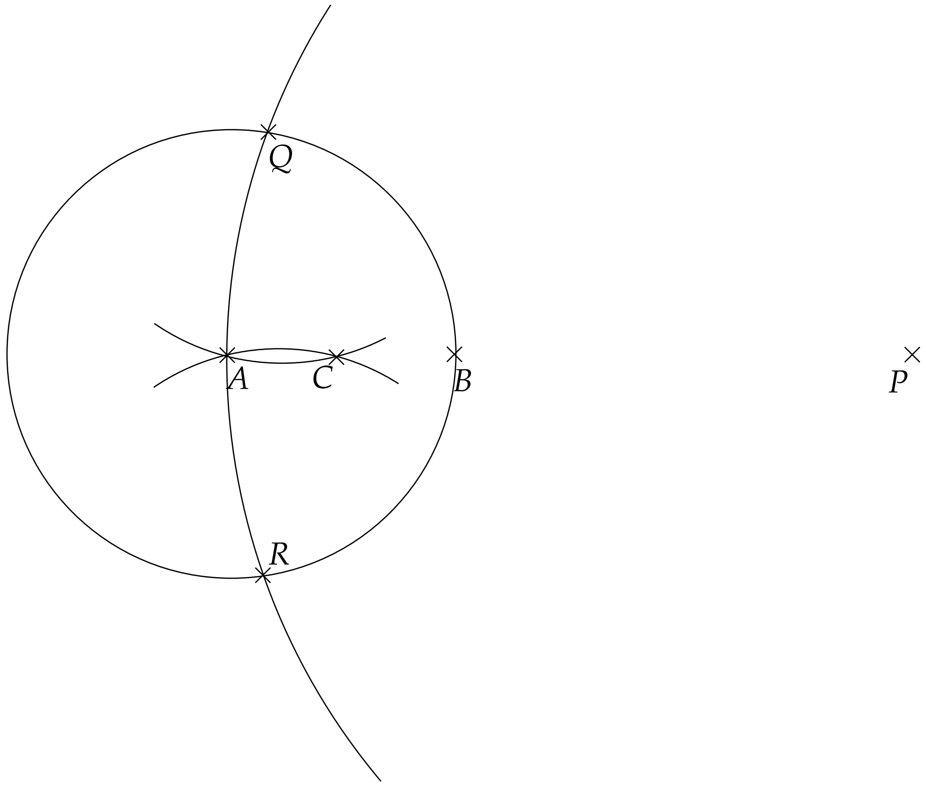
Dann hat die Strecke $\overline{AP_3}$ die doppelte Länge der Strecke $\overline{AB}$. Für das n-fache einer Strecke $(n > 2)$ muss man diese Konstruktion noch $(n - 2)$-mal anwenden und zwar immer auf zwei am „Rand" der bisherigen Strecke gelegene Punkte.

Für n = 3 müsste man obige Konstruktion also nochmal auf $\overline{BP_3}$ anwenden, u.s.w.

Erläuterung:

Da A, P_1, P_2, P_3 die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks sind, liegen A, B, P_3 auf einer Geraden und $|\overline{AB}| \cdot 2 = |\overline{AP_3}|$. Die Konstruktion erklärt sich ebenso.

2. Konstruktion einer Strecke, deren Länge $\frac{1}{n}$ einer gegebenen Strecke beträgt



Man gewinnt mittels Konstruktion 1 den Punkt $P \in AB$, für den $\overline{AP} = n \cdot |\overline{AB}|$ gilt. Die Schnittpunkte von $k(P; r = |\overline{AP}|)$ mit $k(A; r = |\overline{AB}|)$ seien Q und R. Der zweite Schnittpunkt von $k(R; r = |\overline{AR}|)$ mit $k(Q; r = |\overline{AQ}|)$ sei C. Dann gilt: $|\overline{AC}| = \frac{1}{n} \cdot |\overline{AB}|$.

Erläuterung:

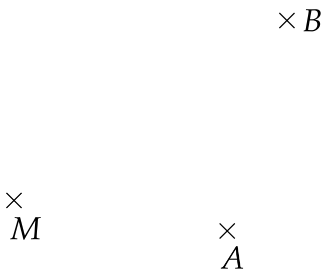
Wegen $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle CAQ$ sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke $\triangle ACQ$ und $\triangle APQ$ ähnlich. Daraus folgt:

$$\frac{|\overline{PA}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{AC}|}$$

oder $|\overline{AP}| \cdot |\overline{AC}| = |\overline{AQ}|^2$.

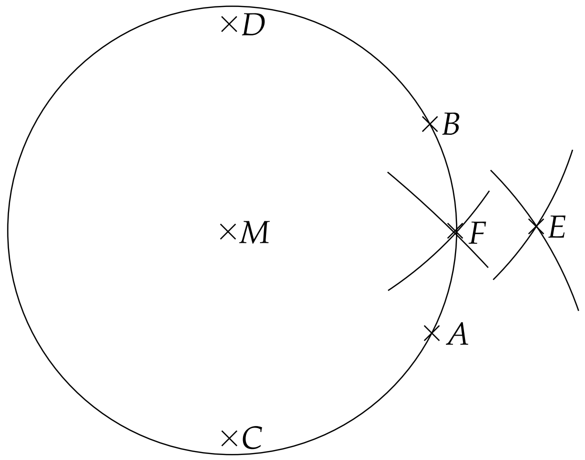
Man kann nun umformen: $n \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| = |\overline{AB}|^2$ oder $|\overline{AC}| = \frac{|\overline{AB}|}{n}$ q.e.d.

3. Konstruktion der Winkelhalbierenden



Der gegebene Winkel sei $\sphericalangle AMB$.

Die Winkelhalbierende ist konstruiert, wenn wir außer M einen weiteren Punkt auf ihr gefunden haben.
Für weitere Konstruktionen ist es hilfreich, wenn dieser Punkt auf einem der Kreise $k(M; r = |\overline{MA}|)$ oder $k(M; r = |\overline{MB}|)$ liegt.
Ich betrachte zunächst den Spezialfall $|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$.



Man ergänzt die Eckpunkte C und D der Parallelogramme $ABMC$ bzw. $ABDM$. Der Schnittpunkt von $k(C; r = |\overline{BC})|$ und $k(D; r = |\overline{AD}|)$ sei E. Der Schnittpunkt F von $k(C; r = |\overline{ME}|)$ mit $k(D; r = |\overline{ME}|)$ ist der gesuchte Punkt.

Erläuterung:

Aufgrund der Symmetrie der Konstruktion liegt F auf der Winkelhalbierenden des $\sphericalangle AMB$. Zu zeigen ist nur noch $|\overline{MF}| = |\overline{MA}|$:

In einem Parallelogramm $ABCD$ gilt die Formel $|\overline{AC}|^2 + |\overline{BD}|^2 = 2(|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2)$, was man mit dem Kosinussatz zeigen kann.

Anwendung auf $ABMC$ ergibt:

$$|\overline{BC}|^2 + |\overline{AM}|^2 = 2 \cdot \left(|\overline{AB}|^2 + |\overline{BM}|^2\right)$$

(1) $\quad |\overline{BC}|^2 = 2 \cdot |\overline{AB}|^2 + 2 \cdot |\overline{BM}|^2 - |\overline{AM}|^2 = 2 \cdot |\overline{AB}|^2 + |\overline{AM}|^2$.

Im rechtwinkligen $\triangle CEM$ gilt nach Pythagoras:

$|\overline{BC}|^2 = |\overline{CE}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{ME}|^2$

$|\overline{ME}|^2 = |\overline{BC}|^2 - |\overline{AB}|^2$ und mit (1):

$|\overline{ME}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AM}|^2$ (2)

Im rechtwinkligen $\triangle CFM$ gilt:

(3) $\quad |\overline{CF}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{MF}|^2$

Wegen $|\overline{CF}| = |\overline{ME}|$ kann man (2) und (3) gleichsetzen:

$|\overline{AB}|^2 + |\overline{AM}|^2 = |\overline{ME}|^2 = |\overline{CF}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{MF}|^2$ also:
$|\overline{AM}| = |\overline{MF}|$.

F ist also wirklich der gesuchte Punkt.

Literatur: Beweis entnommen aus: `www.oliver-bieri.ch/mascheroni`

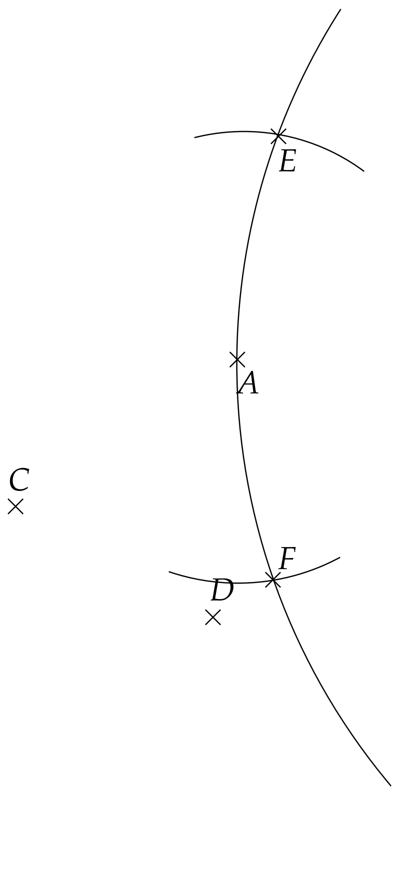
Nun kann auch der allgemeine Fall eines $\triangle AMB$ behandelt werden:

Man konstruiert zunächst einen Punkt $B' \in k(M; r = |\overline{MA}|) \cap MB$ und wendet auf den neu entstehenden Winkel $\angle AMB'$ obige Konstruktion an.

Um B' zu konstruieren, konstruiert man zunächst den zu A bezüglich $\overline{MB}$ symmetrisch liegenden Punkt X als Schnittpunkt von $k(M; r = |\overline{MA}|)$ und $k(B; r = |\overline{AB}|)$. Auf den Winkel $\sphericalangle XMA$ wendet man nun wieder obige Konstruktion an, um den Punkt B' zu erhalten.

4. Abtragen einer Strecke auf einer Geraden

Die Strecke $\overline{CD}$ ist von A aus auf der Geraden AB abzutragen.



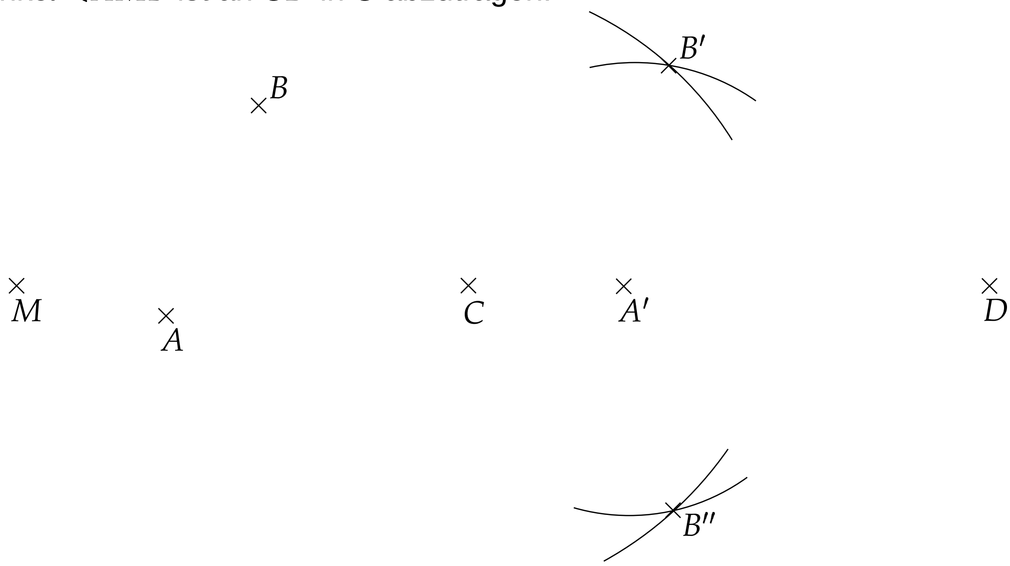
Man konstruiert die Schnittpunkte E und F des $k(A; r = |\overline{CD}|)$ mit einem Kreis um B mit Radius r, der die Bedingung $|\overline{AB}| - |\overline{CD}| < r < |\overline{AB}| + |\overline{CD}|$ erfüllt. Führt man nun 3. mit dem $\triangle EAF$ durch, so erhält man den gesuchten Endpunkt P.

Erläuterung:

Wegen der Symmetrie der Konstruktion liegt P auf AB. Da P auch den Abstand $|\overline{CD}|$ von A hat, ist er der gesuchte Punkt.

5. Abtragen eines Winkels

Der Winkel $\sphericalangle AMB$ ist an CD in C abzutragen:

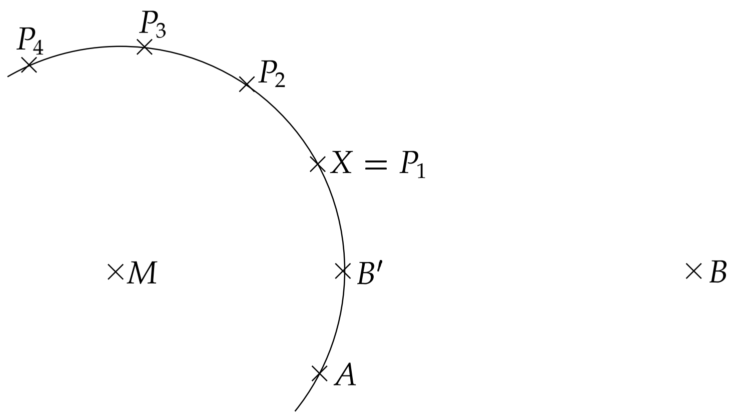


Man erhält mit Konstruktion 4 einen Punkt $A' \in CD$ mit $|\overline{A'C}| = |\overline{AM}|$. Nun konstruiert man die Schnittpunkte B' und B'' von $k(C; r = |\overline{BM}|)$ mit $k(A'; r = |\overline{AB}|)$. Die Winkel $B''CA'$ und $A'CB'$ sind gleich groß wie der Winkel AMB.

Erläuterung:

Die Dreiecke $B''A'C, A'B'C$ und ABM sind nach SSS kongruent, so dass die drei Winkel in der Tat gleich sind.

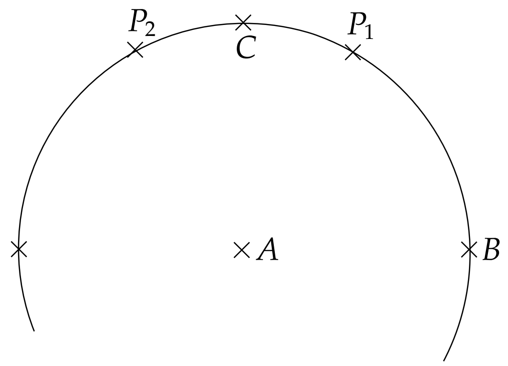
6. Konstruktion des n-fachen eines Winkels



Man konstruiert zunächst den Punkt B', wie am Schluss von Konstruktion 3 beschrieben. Der $\sphericalangle AMB'$ kann dann, wie mit Zirkel und Lineal auch, verdoppelt oder ver-n-facht werden.

7. Konstruktion eines rechten Winkels

Der rechte Winkel ist in A an AB zu konstruieren:



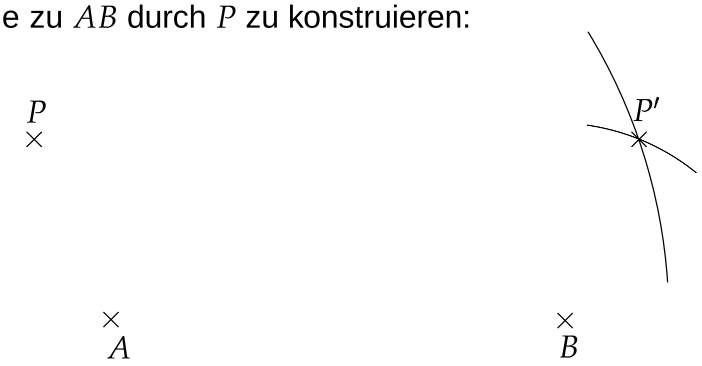
Man zeichnet den Kreis $k(A; r = |\overline{AB}|)$ und ermittelt auf diesem wie in Konstruktion 1 die Punkte $P_1; P_2$. Führt man nun Konstruktion 3 für den $\sphericalangle P_1AP_2$ durch, so bildet der entstehende Punkt C mit B und A den Winkel $90°$.

Erläuterung:

Der $\sphericalangle BAC$ kann berechnet werden:
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAP_1 + \frac{1}{2}\sphericalangle P_1AP_2 = 60° + 30° = 90°$.

8. Konstruktion einer Parallelen durch einen gegebenen Punkt

Es ist die Parallele zu AB durch P zu konstruieren:



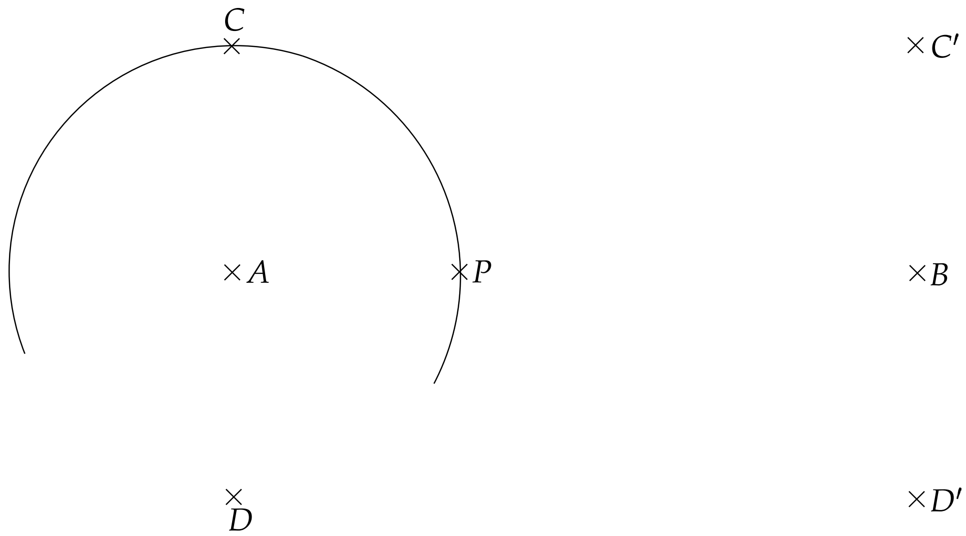
Man konstruiert den Punkt P' als Schnittpunkt von $k(A; r = \overline{BP})$ und $k(B; r = \overline{AP})$. PP' ist die gesuchte Parallele.

Erläuterung:

Die Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle ABP'$ sind offenbar kongruent: Weil sie auch noch achsensymmetrisch zueinander bezüglich m_{AB} sind, ist PP' wirklich die gesuchte Parallele.

9. Konstruktion einer Parallelen (in einem gegebenen Abstand)

Es sind die Parallelen zu AB im Abstand d zu konstruieren.



Man konstruiert zunächst einen Punkt $P \in AB$ mit $|\overline{AP}| = d$, indem man Konstruktion 4 anwendet.
Auf $\overline{AP}$ wendet man nun Konstruktion 7 nach beiden Seiten hin an und erhält die Punkte C und D. Wendet man Konstruktion 8 auf $\overline{AB}$ und C bzw. D an, erhält man die Punkte C' und D'. CC' und DD' sind die gesuchten Parallelen.

Erläuterung:

C und D haben offenbar den Abstand d von AB. Die Parallelen durch diese Punkte sind also die gesuchten.

10. Fällen bzw. Errichten eines Lotes

Das Fällen oder Errichten eines Lotes kann wie mit Zirkel und Lineal ablaufen.

Zusammenfassung:

- Alle Grundkonstruktionen sind also auch mit den Zirkel allein konstruierbar.
- Durch weitere Überlegungen, ähnlich wie diese (vor allem Konstruktionen 3 und 7) könnte man noch zeigen, dass aus zwei gegebenen Strecken x und y auch die Strecken der Länge $x + y$; $x - y$ und $\sqrt{x^2 + y^2}$ konstruiert werden können; durch Verkettung dieser Operationen können also alle Punkte, die auch mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, allein mit dem Zirkel konstruiert werden.
- **Das Lineal ist also „völlig unnötig“! Es beschleunigt aber das Konstruieren sehr!**

● ● ● ● ● ● ●

Hinweis: Einen weiteren Beitrag zu diesem Thema hat die Redaktion von **Alia'a Ahmed Doma**, Kl. 8A der Deutschen Schule der Borromäerinnen in Kairo, erhalten. Sie löst das Problem der Vervielfältigung einer Strecke $\overline{AB}$ der Länge r zur Länge $f \cdot r$, $f = 2, 3, 4, \ldots$

Konstruktion mit beschränkten Mitteln
oder:
Kann man eine Strecke allein mit einem Lineal in n gleich lange Teilstrecken zerlegen?

Von Hartwig Fuchs

Mathis vertreibt sich die Zeit mit Papier, Bleistift und mit einem Lineal der Länge ℓ und der Breite b mit zwei Zeichenkanten, aber ohne jegliche Markierung. Er zeichnet eine Strecke $\overline{AB}$ und überlegt:

Ist es möglich, allein mit meinem Lineal die Strecke $\overline{AB}$ in $n = 2, 3, 4, \ldots$ gleich lange Teilstrecken konstruktiv zu zerlegen?
Mathis macht sich daran, eine Lösung dieses Problems zu finden – falls es sie gibt!

Zunächst stellt er drei mit seinem Lineal ausführbare Grundkonstruktionen zusammen.

1* Verbindung zweier Punkte A und B von einem Abstand $< \ell$ durch eine Strecke $\overline{AB}$.
2* Verlängerung einer Strecke $\overline{AB}$.
3* Zeichnung einer Parallelen zu einer Strecke $\overline{AB}$ im Abstand b ($=$ Linealbreite).

Lösung der Zerlegungsaufgabe:

Fall 1: $n = 2$

Mathis gelingt es, nur mit den Konstruktionsschritten 1*, 2* und 3* die Strecke $\overline{AB}$ in zwei gleich lange Strecken zu zerlegen.

Seine Konstruktion läuft so ab:

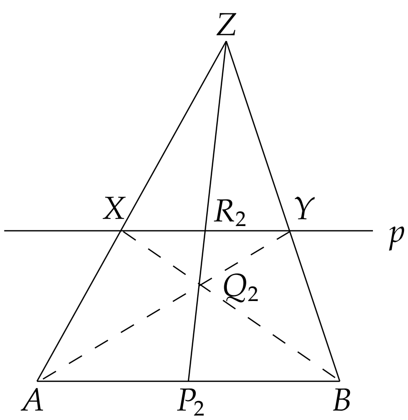


Bild 1

- Er zeichnet eine Strecke p, die im Abstand b parallel zu $\overline{AB}$ verläuft (3*);
- danach wählt er einen Punkt Z außerhalb des von $\overline{AB}$ und p gebildeten Streifens so, dass $|\overline{AZ}| < \ell$ und $|\overline{BZ}| < \ell$ sind;
- er zeichnet die Strecken $\overline{AZ}$ und $\overline{BZ}$ (1*), die mit p oder einer Verlängerung von p (2*) die Schnittpunkte X und Y haben;
- nun zeichnet er die Strecken $\overline{AY}$ und $\overline{BX}$ mit dem Schnittpunkt Q_2 (wegen $|\overline{AY}| < \ell$ und $|\overline{BX}| < \ell$ ist das möglich);
- die Strecke $\overline{ZQ_2}$ verlängert er bis zu ihrem Schnittpunkt P_2 mit $\overline{AB}$.

Behauptung:
Der Punkt P_2 ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
Beweis:
Nach dem Strahlensatz – angewendet auf die Figur in Bild 1, zunächst mit Z, dann mit Q_2 als Zentrum – gilt:

$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{XY}|} = \frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{XZ}|} = \frac{|\overline{AP_2}|}{|\overline{XR_2}|}$ und $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{XY}|} = \frac{|\overline{BQ_2}|}{|\overline{XQ_2}|} = \frac{|\overline{BP_2}|}{|\overline{XR_2}|}$, so dass $\frac{|\overline{AP_2}|}{|\overline{XR_2}|} = \frac{|\overline{BP_2}|}{|\overline{XR_2}|}$ ist, also $|\overline{AP_2}| = |\overline{BP_2}|$. Damit hat Mathis sein Konstruktionsziel für $n = 2$ erreicht.

Fall 2: $n = 3$

Um die Strecke $\overline{AB}$ zu dritteln, geht Mathis so vor:

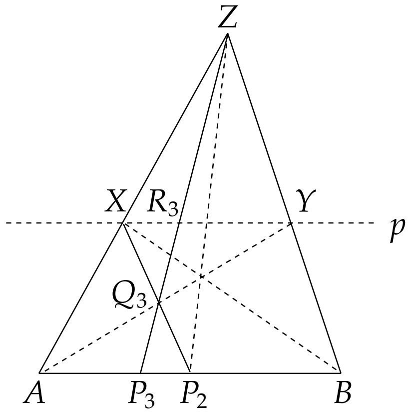


Bild 2

- Zunächst konstruiert er die Figur wie bei $n = 2$;
- danach zeichnet er die Strecke $\overline{P_2X}$, die die schon vorhandene Strecke $\overline{AY}$ im Punkt Q_3 schneidet;
- die Verlängerung der Strecke ZQ_3 schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt P_3.

Behauptung:
Der Punkt P_3 zerlegt die Strecke $\overline{AB}$ so, dass $|\overline{AP_3}| = \frac{1}{3}|\overline{AB}|$ ist.
Beweis:
Nach dem Strahlensatz – angewendet auf die Figur in Bild 2, zunächst mit Z, dann mit Q_3 als Zentrum – gilt:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{XY}|} = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZX}|} = \frac{|\overline{AP_3}|}{|\overline{XR_3}|} \text{ und } \frac{|\overline{AP_2}|}{|\overline{XY}|} = \frac{|\overline{P_2Q_3}|}{|\overline{XQ_3}|} = \frac{|\overline{P_2P_3}|}{|\overline{XR_3}|}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{|\overline{XR_3}|}{|\overline{XY}|} = \frac{|\overline{AP_3}|}{|\overline{AB}|} \text{ und } \frac{|\overline{XR_3}|}{|\overline{XY}|} = \frac{|\overline{P_2P_3}|}{|\overline{AP_2}|}, \text{ daher auch } |\overline{P_2P_3}| = \frac{|\overline{AP_2}|}{|\overline{AB}|} \cdot |\overline{AP_3}| = \frac{1}{2}|\overline{AP_3}|.$$

Damit ist $\frac{1}{2}|\overline{AB}| = |\overline{AP_3}| + |\overline{P_2P_3}| = |\overline{AP_3}| + \frac{1}{2}|\overline{AP_3}| = \frac{3}{2}|\overline{AP_3}|$, woraus folgt $|\overline{AP_3}| = \frac{1}{3}|\overline{AB}|$.
Wenn nun Mathis noch die Strecke $|\overline{P_3B}|$ halbiert, dann hat er die Zerlegungsaufgabe für $n = 3$ gelöst.

Fall 3: $n \geq 4$

Mathis kann den Fall $n = 4$ leicht lösen (wie?)
Aber wie kann er sich Gewissheit verschaffen, dass sich die Zerlegungsaufgabe für jedes beliebige $n > 4$ lösen lässt, und wie sehen dann die zugehörigen Konstruktionen aus?
Mathis überlegt so – seine Methode nennt man die vollständige Induktion:
Annahme: Für jedes $m = 2, 3, 4, \ldots$ sei die Zerlegungsaufgabe gelöst (für $n = 2, 3$ explizit getan). Dann zeichnet er eine Figur wie in Bild 2, in der er den Punkt P_2 nun mit P_{n-1} bezeichnet und von P_{n-1} annimmt, dass für ihn $|\overline{AP_{n-1}}| = \frac{1}{n-1}|\overline{AB}|$ gilt; die Punkte P_3, Q_3, R_3 in Bild 2 nennt er P_n, Q_n, R_n.

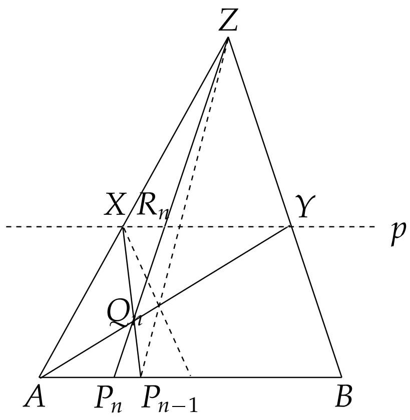


Bild 3

Mit dem Strahlensatz bekommt er nun analog zu Fall 2:
$|\overline{P_{n-1}P_n}| = \frac{1}{n-1}|\overline{AP_n}|$ und
$\frac{1}{n-1}|\overline{AB}| = |\overline{AP_n}| + |\overline{P_{n-1}P_n}| = (1 + \frac{1}{n-1})|\overline{AP_n}|$
$= \frac{n}{n-1}|\overline{AP_n}|$, also
$|\overline{AP_n}| = \frac{1}{n}|\overline{AB}|$.

Wenn Mathis dann noch die Strecke P_nB in $n-1$ gleich lange Teilstrecken zerlegt – was nach Induktionsannahme konstruierbar ist – dann hat er so nachgewiesen:
Die Strecke $\overline{AB}$ ist allein mit einem Lineal in n gleich lange Teilstrecken zerlegbar für jedes $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Erratum Heft 83

Leider bleiben trotz Korrekturlesens immer mal wieder Fehler stehen. Aber MONOID hat aufmerksame Leserinnen und Leser, die uns auf Irrtümer hinweisen, wofür die Redaktion dankbar ist.

So hat uns Herr **Siegfried Herrmann** aus Greiz auf einen Fehler bei der Berechnung der Summe der Ziffern aller Zahlen $n \le 10^{10}$ im MONOID-Heft 83, S. 6-7, hingewiesen. Die vom Autor H.F. vorgenommene Paarbildung für die Zahlen von 1 bis $10^{10} - 1$ darf nicht mit 1, sondern muss mit 0 beginnen, also im Falle

$n \le 10$:	$0\vert 9$; $1\vert 8$; $2\vert 7$; $3\vert 6$; $4\vert 5$, was zur Quersummen-Summe $5 \cdot 9$ führt, die „Single“ 10 noch um 1 erhöht; Ergebnis: 46;
$n \le 100$:	Paare: $0\vert 99$; $1\vert 98$; $2\vert 97$; $\ldots$; $47\vert 52$; $48\vert 51$; $49\vert 50$; „Single“ 100; also Quersummen-Summe $= 50 \cdot 2 \cdot 9 + 1 = 901$;
$n \le 1000$:	Paare: $0\vert 999$; $1\vert 998$; $2\vert 997$; $\ldots$; $497\vert 052$; $498\vert 501$; $499\vert 500$; „Single“ 1000; also Quersummen-Summe $= 500 \cdot 3 \cdot 9 + 1 = 13\,501$.

Damit wird schon ein allgemeines Bildungsgesetz für die Quersummen-Summe aller Zahlen $n \le 10^m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, erkennbar:

$$\frac{10^m}{2} \cdot m \cdot 9 + 1,$$

welches durch eine den Fällen $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ entsprechende formale Paarbildung zu beweisen ist. Im Falle $m = 10$ erhalten wir die Quersummen-Summe $450\,000\,000\,001$.

Hierzu die passenden Sprüche aus Schülermund:

Mathe ist . . .

. . . wie ein Puzzle; man muss alles Mögliche zusammensetzen, dann erhält man das richtige Ergebnis.

. . . wie Zauberei: wenn man mehrere Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert, kommt immer eine neue Zahl heraus.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

- Die Redaktion wünscht allen MONOID-Leserinnen und -Lesern **schöne Sommerferien!**

  Damit Ihr einerseits diese genießen, andererseits aber auch für die Mathe-Spielereien und die Neuen Aufgaben nutzen könnt, ist der Abgabetermin für die Lösungen auch in diesem Jahr auf den **15. September** gelegt worden. Die Punkte, die Ihr hiermit bekommen könnt, zählen noch mit für die Preisvergabe 2006, die im Rahmen der **MONOID-Feier** am **25. November 2006** im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey stattfinden wird. Näheres wird im Septemberheft von MONOID stehen.

- Vielleicht noch ein Hinweis an diejenigen Oberstufenschüler(innen), die sich schon Gedanken machen über ein späteres Studium: Das Kompetenzzentrum IT/ Mathematik am Staatlichen Schulamt Offenbach veranstaltet am 28.6.2006 einen Informationstag für Schüler/innen der Jahrgangstufen 11-13 mit dem inhaltlichen Schwerpunkt „Studium der Mathematik bzw. Informatik an einer Hessischen Universität / Fachhochschule“. Es geht um

  – Voraussetzungen zur Aufnahme eines Studiums,
  – mögliche Studiengänge im Bereich der Informationstechnologie bzw. Mathematik,
  – Abschlüsse (Master, Bachelor, Diplom, Lehramt),
  – Berufsperspektiven.

  Wann und Wo: Mittwoch, den 28.06.2006, von 9.30 - 15.30 Uhr, in der Claus-von-Stauffenberg-Schule, Mainzer-Str. 16, 63110 Rodgau-Dudenhofen (S-Bahn-Haltestelle in der Nähe).

  Anmeldung und weitere Informationen:

  `wachter-bieri@kompetenzzentrum-it.de`

Ekkehard Kroll

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe
Monoidaner: Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Alexander Gerharz, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Philipp Mayer und Rebecca Zimmer
Zusammenstellung und Layout: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Internet: Marcel Gruner mit Unterstützung durch Oliver Labs

Rubrik der Löser und Löserinnen
(Stand: neu nach Heft 84)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Lara Bergjohann 3, Jacqueline Machemer 3, Jonas Petzold 14, Alexandra Reisbeck 4, Charlotte Seiter 2, Tim Siebecker 8;
Kl. 6: Elisabeth Kopf 9, Kevin Schmitt 26, Anne Vorherr 11;
Kl. 7: Alexander Gerharz 23, Philipp Mayer 18;
Kl. 8: Lisa Simon 15, Julia Zech 16, Max de Zoeten 2;
Kl. 9: Janina Braun 17, Keno Krewer 6;
Kl. 10: Patricia Kastner 16.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 8: Lena Baum 36, Désirée Schalk 14;
Kl. 9: Silvana-Maria Clotan 45, Felix Liebrich 50, Martin Reinhardt 58, Jessica Tischbierek 28, Bettina Zimmermann 7.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Soheila Hesham 3, Yassin Basama 8, Amr May 3, Caroline Pierre 14, Aya Mohames 1, Marina Markus 7;
Kl. 7: Ossama Basent 22, Rahaf Moustafa 11.
Kl. 8: Yomna Awadalla 4, Nada Nabil 4

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Kl. 9: Lennart Adam 35;
Kl. 10: Christian Behrens 55, Martin Alexander Lange 46.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 11: Laura Biroth 46.

Bad Homburg, Kaiserin-Friedrich-Gymnasium: Kl. 7: Gregor Angeloni 33.

Beselich, Grundschule: Kl. 4: Marc Dinges 11.

Darmstadt, Eleonorenschule: Kl. 12: Moritz Egert 20.

Daun, Geschwister-Scholl-Gymnasium:
Kl. 5: Bernadette Mauren 5, Corinna Mayer 3.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:
Kl. 5: Christian Geiger 6, Florian Salamat 11, Chakan Tektas 6, Frederik Träuble 13, Kai Werner 9.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 7: Anna-Lena Herrmann 5, Dominik Hildenbrand 1, Theresa Isert 8, Jennifer Jost 6, Hannah Lenk 6, Alexander Möller 22, Christian Most 16, Larissa Wiegand 5, Melanie Willhardt 10.

Erlangen, Freie Waldorfschule Erlangen: Kl. 4: Thore Meyn 5.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Niklas Hannappel und Marvin Salewski 2, Timo Kremer 4, Helen Schneider 3;
Kl. 6: Marius Burkardt 6, Dennis Hofmann 7, Rolf Niedenthal 16, Monja Schütz 8, Philipp Wenzel 29;
Kl. 7: Lara Czarnetzki 16, Renate Eckenberger 6, Kai Roth 17;

Kl. 8: Corinna Dinges 19, Hannah Meilinger 22, Andreas Weimer 7, Johannes Weimer 7.

Halberstadt, Martineum: Kl. 9: Robert Hesse 34.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 9: Christoph Tietz 17.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 7: Connor Röhricht 15.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Christoph Straub, Gerd Weber):
Kl. 5: Sheima'a Ahmed Doma 31, Ragia Rami 3;
Kl. 8: Alia'a Ahmed Doma 49, Karen Emil 23, Marina Morad 30;
Kl. 9: Gina Mamdouh 15, Marina Milad 12, Hayat Selim 29, Noha Wahab 20, Ghada Wesham 9;
Kl. 10: Alia'a el Bolock 19, Mariam und Selma el Sayyad/Ismail 28, Mariam Emad 3, Marwa Talal 6;
Kl. 11: Nadine Adel 8, Lauren Emil 7, Riham Amr Falchry 4, Monika Fares 6, Miriam Morad 9, Iman Tarek 13.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 9: Kathrin Becker 6, Ilja Birmann 3, Artur Grylla 9, Steffen Hirth 5, Alexander Linn 3, Sina Spangenberger 12, Johannes Vetter 3, Patric van Zwamen 8.

Klausen: Annika Meyer 7.

Gymnasium Korschenbroich: Kl. 10: Pascal Cremer 51.

Kusel, Gymnasium:
Kevin Schiffer 14;
Kl. 6: Michelle Shania Bemme 12, Julia Brell 15, Mike Brüchner 11, Lars Cerentz 5, Marvin Derzt 6, Lukas Dietrich 5, Daniel Heil 10, Mischa Helfenstein 9, Philipp Jahn 9, Nico Süs 7, Dominik Wilson 8, Alexander Wobedo 4.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 11: Maximilian Mühlbacher 32.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 6: Aleksandra Ratković 1; **Kl. 10:** Katharina Kober 21.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 11: Cornelie Koop 26.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 3: Magdalena Winkelvoß 13.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Stefanie Grünewald 36, Katharina Irmscher 36; **Kl. 10:** Maike Bäcker 1.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 8: Florian Schweiger 73.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 11: Bernhard Saumweber 8.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 7: Kira Godehardt 1, Julia Hennig 13, Marelina Kaules 11, Vivien Kohlhaas 31, Nora Mollner 27;
Kl. 8: Madeline Kohlhaas 37; **Kl. 10:** Miriam Menzel 46;
Kl. 11: Annika Kohlhaas 28; **Kl. 12:** Stefanie Tiemann 50.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:
Niklas Fietz 8;

Kl. 5: Christian Voigt 14;
Kl. 6: Anne Bach 12.

Nürnberg, Gymnasium Stein: Marion Heublein 13.

Ober-Ramstadt, Georg Christoph Lichtenberg-Schule:
Kl. 5: Mero Kaya 12, Tobias Thomas 11;
Kl. 7: Kay Ackermann 14, Rica Altrock 15, Sandra Burkhardt 14, Sebastian Hiller 15, Julian Hottes 11, Jana Lauth 13, Christian Marx 3, Manja Mörl-Kreitschmann 8, Patrick Plößer 11, Mareike Silbereis 3, Carlo Trockel 12.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Vanessa Kappuss 7, Joshua Mayer 6;
Kl. 5: Lars Behr 15, Tobias Braun 22, Tobias Eckinger 20, Tobias Feick 9, Leonie Herzog 16, Carina Jensen 3, Tim Kinkel 11, Carla Koch 9, Elisabeth Koch 4, Janina Köhler 8, Valentin Kuhn 29, Anna-Katharina Löw 21, Franziska Matern 2, Elias Petry 5, Nils Rehm 9, Mai-Britt Rosengarten 21, Uwe Schulz 22, Jemina Schwab 7, Nikola Trivicevic 13, Bernd von Wehden 7, Alina Wietschorke 11, Manuel Wörth 8;
Kl. 6: Markus Bauch 15, Jan Biersack 3, Aline Endreß 25, Veronika Finke 17, Philipp Krosien 10, Romina Röpke 6, Nathan Valenti 17, Antje Weicker 16;
Kl. 7: Stephan Ausbüttel 13, Hannah Braun 19, Philipp Kalte 9, S. Kopp 12, Markus Walter 10;
Kl. 8: Eva-Lotte Andereya 8, Larissa Habbel 13, Sophia Waldvogel 6;
Kl. 9: Sarah Rosengarten 7, Valentin Walther 4, Annkatrin Weber 36.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 9: Thomas Geiß 63.

Otterberg, Freie Waldorfschule: Kl. 8: Malte Meyn 44.

Pfinztal, Ludwig-Marum-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Pfeifle):
Kl. 12: Robin Roth 22.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 6: Verena Bauch 8, Barbara Bücker 13, Susanne Damm 3, Raphael Eisenbeis 4, Carmen Engels 5, David Feiler 26, Jana Klaes 23, Sebastian Kramer 21, Nikola Lübbering 3, Lisa Rohrwasser 4, Alina Schäfer 6, Selina Weich 15, Nadia Wester 11, Korbinian Wester 15, Charlotte Wittenius 3.

Speyer, Kolleg (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):
Kl. 12: Viktor Eberhardt 10, Patrick Heist 7.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 7: Alexander Rettkowski 51; **Kl. 11:** Tobias Grunwald 30.

Tegernsee, Gymnasium: Kl. 11: Juliane Oberwieser 7.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 5: Dorothea Winkelvoß 14.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 6: Joel Jung 23, Emily Linn 17; **Kl. 10:** Julia Jung 3.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Elisabeth Manger):
Kl. 10: Charlotte Capitain 38.

Worms, Eleonoren-Gymnasium: Kl. 10: Moritz Maurer 17.

MONOID Jahrgang 26 Heft 86 Juni 2006

Inhalt

Abonnementbestellungen über die MONOID-Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', zu überweisen; **Adresse nicht vergessen** (oder Bestellung über Internet).
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
D-55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107
Fax: 06131/39-24389

e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`