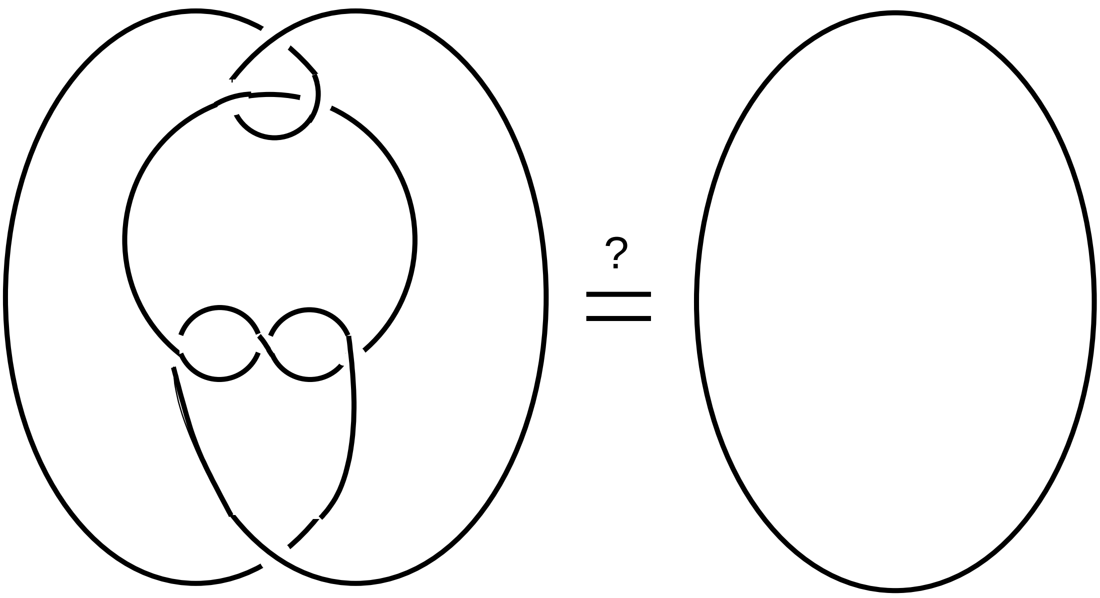
Jahrgang 26 Heft 87 September 2006

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen

1980 begründet von Martin Mettler;

gegenwärtig herausgegeben vom

Institut für Mathematik an der

Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins" hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien" vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan" abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)
Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.11.2006.**

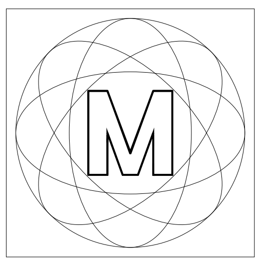
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien" und „Neue Aufgaben" zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**



Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan", Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben", Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Das Schubfach-Prinzip

Von Hartwig Fuchs

Kannst Du Dir vorstellen, dass man mit Hilfe von „Schubladen“ mathematische Beweise führen kann?

Vorgeschichte

Wenn wir die Stufen der geistigen Entwicklung der Menschheit nur tief genug hinab steigen, dann gelangen wir in eine Zeit, in der die Menschen nicht zählen konnten, weil ihnen noch die Zahlwörter fehlten. Un doch waren sie bereits damals vermutlich schon hin und wieder mit der Notwendigkeit konfrontiert, bei eine Ansammlung von Objekten (z.B. von feindlichen Kriegern) sich eine – wenn auch noch nicht numerisch präzise – Vorstellung von deren Anzahl zu verschaffen.

Wie sie, ohne zählen zu können, einem solchen Problem zu Leibe rückten? Das mag eine Geschichte zeigen, die sich in jenen fernen Zeiten so abgespielt haben könnte.

Zwei Hirten A und B waren in Streit geraten, weil der Hirte A behauptete, eines seiner Schafe befände sich in Bs Herde, was aber B mit Entschiedenheit zurückwies.

Wie haben sie wohl ihre Meinungsverschiedenheit bereinigt?

Ganz einfach: Sie trieben Bs Tiere, eines nach dem anderen, in einen Pferch und jedes Mal, wenn ein Schaf durch das Tor des Gatters lief, nahm B ein Steinchen von einem Häufchen Kiesel, das sich neben dem Tor befand. Als nun das vorletzte Schaf in den Pferch rannte, waren alle Steine aufgebraucht. Damit war die Streitfrage geklärt: Tatsächlich hatte sich eines von As Schafen der Herde des B angeschlossen.

Wo aber kam das Steinhäufchen her?

Am Morgen, als B seine Herde auf die Weide trieb, hatte er für jedes Tier, das den Pferch verließ, einen Kieselstein neben dem Tor deponiert.

Kaum zu glauben: Dieses in der Hirtengeschichte enthaltene urtümliche Vergleichsverfahren, bei dem nicht gezählt, sondern nur festgestellt wird, ob zwei mengen gleich oder verschieden viele Objekte besitzen, haben Mathematiker zu einer wirkungsvollen Beweismethode ausgestalten können!

Wahrscheinlich hat J. P. G. Dirichlet (1805-1859) als erster einen Satz der Mathematik mit dieser Methode bewiesen – weshalb dieser Beweistyp manchmal als DIRICHLET-Prinzip bezeichnet wird; meist spricht man aber anschaulicher vom **Schubfach-Prinzip**, im Englischen vom ”pidgeonhole principle” (Taubenschlag-Prinzip).

Das Dirichletsche Schubfach-Prinzip

An einer Grillparty nehmen 18 Personen teil. Da 19 Würste auf dem Grill gebraten werden, erhält zunächst jeder Anwesende eine Wurst und eine Wurst bleibt übrig.

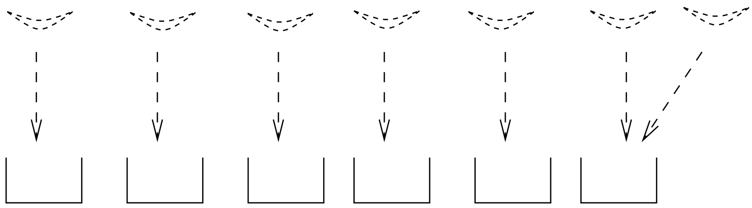
Bis hier hin haben wir eine ganz ähnliche Situation wie in der Hirtengeschichte. Nun erfolgt aber eine unscheinbare zusätzliche Forderung für den Ablauf des Grillfestes – wodurch die Angelegenheit zu einem „Beweisverfahren“ mutiert: Es wird verlangt, dass alle 19 Würste verteilt werden.

Ist diese Bedingung erfüllt, dann gilt: Unter den 18 Personen gibt es eine, die zwei Würste auf dem Teller hat.

Aus diesem Beispiel können wir das Dirichletsche Schubfach–Prinzip herausdestillieren. Es lautet in mathematischer Umgangssprache:

- Wenn man $n+1$ (oder mehr) Gegenstände auf n Schubfächer verteilt, dann gibt es ein Schubfach, das mehr als einen Gegenstand enthält.

Klar!



Verteilen von 7 Objekten auf 6 Fächer

Wir beschreiben nun einige kompliziert scheinende mathematische Situationen, die durch die Anwendung der Schubfach-Methode auf ganz elementare Weise geklärt werden können.

11 natürliche Zahlen

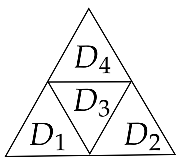
Wähle beliebig 11 natürliche Zahlen. Dann gibt es darunter stets zwei Zahlen, deren Differenz ein Vielfaches von 10 ist. Begründe dies!

Es gibt 10 verschieden Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$. Wir betrachten diese Ziffern als unsre 10 Schubfächer. Wenn wir nun die 11 gewählten Zahlen so auf die 10 Schubfächer $0, 1, 2, \ldots, 9$ verteilen, dass die Einerziffer der Zahl mit der Nummer des Schubfaches übereinstimmt, dann müssen wir in ein Fach (mindestens) zwei Zahlen einordnen. Da diese zwei Zahlen die gleiche Einerziffer haben, hat ihre Differenz die Einerziffer 0, so dass die Differenz ein Vielfaches von 10 ist.

5 Punkte im Dreieck

Im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 1 sollen 5 Punkte beliebig markiert werden. Wie auch immer Du die Punkte festlegst, stets gilt: Zwei dieser Punkte haben einen Abstand $\leq \frac{1}{2}$. Begründe dies!

Vorweg: Wir zerlegen das gegebene Dreieck in 4 gleichseitige Dreiecke D_1, D_2



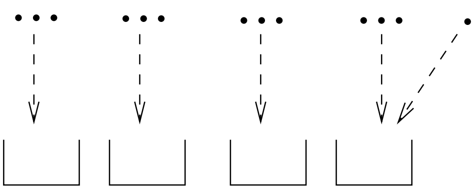
D_3, D_4, jedes von der Seitenlänge $\frac{1}{2}$. Dann gilt: Jede Strecke, die vollständig im Inneren oder auf dem Rand eines dieser Dreiecke liegt, hat eine Länge $\leq \frac{1}{2}$. Wir betrachten D_1, D_2, D_3 und D_4 als unsere Schubfächer.

Von den 5 gewählten Punkten müssen in einem der 4 Schubfächer (mindestens) zwei Punkte liegen. Dann aber ist ihre Verbindungsstrecke und mithin ihr Abstand $\leq \frac{1}{2}$.

Verallgemeinerung des Schubfach-Prinzips

Das oben formulierte DIRICHLETSCHE Schubfach-Prinzip bleibt sicher gültig für den Fall, dass $n+m$ Objekte, $m < n$, auf n Fächer verteilt werden sollen.

Was aber passiert, wenn wir z. B. 13 Paar Socken auf 4 Schubladen verteilen? Es gibt dann offensichtlich ein Fach mit 4 (oder mehr) Socken



Verteilen von 13 Objekten auf 4 Schubladen

- Wenn man $m \cdot n + 1$ (oder mehr) Gegenstände auf n Schubfächer verteilt, dann gibt es ein Schubfach, das mehr als m Gegenstände enthält.

Ein haariges Problem

Es gibt in Deutschland wenigstens 406 Menschen mit der gleichen Anzahl von Haaren auf dem Kopf. Wie lässt sich das begründen?

Vorweg: In Deutschland gibt es etwas mehr als 81 Millionen Einwohner und jeder von ihnen hat weniger als 200 000 Haare auf dem Kopf. Wir betrachten jede mögliche Anzahl von Haaren als ein Schubfach mit einer der Nummern $0, 1, 2, \dots 199\,999$. Wenn man nun entsprechend ihrer Haarzahl 81 000 000 Einwohner gleichmäßig auf diese 200 000 Fächer verteilte, dann befänden sich in jedem Fach 405 Leute. Weil es jedoch mindestens 81 000 001 Einwohner gibt, wird die 81 000 001-te Person in ein Fach mit dann 406 Leuten gelangen, die alle die gleiche Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Versuch' es nun selbst

Die Potenzen $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ seien als Dezimalzahlen geschrieben – wobei $2^1 = 02, 2^2 = 04$ und $2^3 = 08$ gesetzt seien. Die beiden letzten Ziffern dieser Potenzen bilden die Folge $02, 04, 08, 16, \dots$, die sich spätestens ab der Potenz 2^{41} wiederholt. Zeige dies!

Das Sechs-Kreise-Problem
oder:
Wie sieht ein Unmöglichkeitsbeweis aus?

Von Hartwig Fuchs

Versuche, in der Ebene sechs Kreise so zu zeichnen, dass keiner den Mittelpunkt eines anderen Kreises enthält und doch mindestens ein Punkt allen Kreisen[1] angehört! Es wird Dir nicht gelingen.

Die **Behauptung**:

Die Mittelpunkte M_i von sechs Kreisen K_i mit den Radien r_i, $i = 1, 2, \dots, 6$ seien so in der Ebene gewählt, dass keiner der den Mittelpunkt eines anderen Kreises enthält. Dann gilt:

($\bullet$) Es gibt keinen Punkt P, der allen Kreisen K_i, $i = 1, 2, \dots, 6$ angehört.

Der **Beweis** ist ein „Unmöglichkeitsbeweis“:

Erster Beweisschritt

Wir treffen eine Annahme, die das logische Gegenteil – die Verneinung – der zu beweisenden Aussage ($\bullet$) ist, und setzen dabei stillschweigend voraus, dass diese Annahme wahr sei.

▷ Für unser Beispiel machen wir also die Annahme:

(1) Es gibt einen Punkt P, der allen Kreisen K_i angehört.

[1] Ein Kreis K_i ist hier das Innengebiet von K_i samt seinem kreisförmigen Rand.

Zweiter Beweisschritt

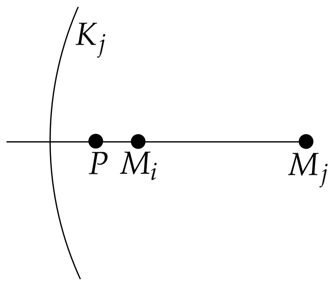
Aus der Annahme leiten wir eine Aussage ab, die einer als wahr bekannten mathematischen Tatsache widerspricht.

▷ In unserem Beispiel zeigen wir, dass der durch die Annahme (1) gegebene Punkt P seine Umgebung in einer Weise strukturiert, die mit der Geometrie unmöglich in Einklang zu bringen ist.

Zunächst zeigen wir:

(2) Die Strecken $\overline{PM_i}$ von P zu den Kreismittelpunkten M_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ bilden ein sechsstrahliges Streckenbündel – vgl. Fig. 2

Für eine Strecke $\overline{PM_i}$ und einen Punkt M_j, $j \neq i$ gilt entweder



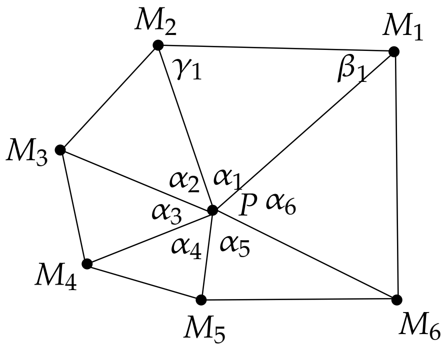
Figur 1

(a) M_j liegt nicht auf der Geraden durch PM_i.

oder

(b) Falls M_j auf der Geraden durch PM_i liegt, dann befinden sich M_i und M_j auf verschiedenen Seiten von P; denn sonst wäre – weil PM_j vollständig im Kreis K_j liegt, vgl. Figur 1 – der Punkt M_i in K_j, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Aus (a) und (b) ergibt sich (2).
Nun steuern wir den gewünschten Widerspruch mit Figur 2 an.



Figur 2

Im Dreieck $\triangle PM_1M_2$ ist $|PM_1| \leq r_1$ und $|PM_2| \leq r_2$ sowie $|M_1M_2| > r_1$ und $> r_2$, so dass $|M_1M_2| > |PM_1|$ und $> |PM_2|$. Daher ist $|M_1M_2|$ die längste Seite von $\triangle PM_1M_2$. Dieser liegt der größte Winkel α_1 von $\triangle PM_1M_2$ gegenüber, es gilt also $\alpha_1 > 60°$.

Ganz entsprechend zeigt man, dass $\alpha_i > 60°$, $i = 2, 3 \ldots, 6$ – vgl. Figur 2, so dass

(3) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6 > 6 \cdot 60° = 360°$.

Dritter Beweisschritt

Wenn man davon ausgeht, dass alle logischen Schlüsse im zweiten Beweisschritt fehlerfrei sind und sie dennoch in eine widersprüchliche Aussage führen, dann gibt es dafür nur eine Erklärung: Die eingangs getroffene Annahme verursacht diesen Widerspruch, weil sie falsch ist. Deswegen muss die Verneinung der Annahme – und das ist ja die zu beweisende Behauptung – wahr sein.

▷ In unserem Beispiel leiten wir aus der Annahme (1) die Aussage (3) her. Aber (3) steht im Widerspruch zu der Tatsache, das der Vollwinkel $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6$ genau $360°$ groß ist. Folglich ist die Annahme (1) falsch, und es gilt die Behauptung $(\bullet)$.

Nicolaus Cusanus' Berechnung von π

Von Hartwig Fuchs

Nicolaus Cusanus (eigentlich: Nicolaus Chrypffs aus Cues an der Mosel 1401-1464), Theologe, Philosoph und Mathematiker, war der erste europäische Gelehrte, der fast 1000 Jahre nach dem Zusammenbruch der griechisch-römischen Zivilisation sich eines in der Antike unerledigten Problems erneut annahm: die Berechnung von Umfang und Fläche eines Kreises und damit auch der Bestimmung des Wertes der Kreiszahl π.

N. Cusanus wusste sehr wohl, dass der von Archimedes (um 287-212 v. Chr.) angegebene Wert von $\frac{22}{7} = 3{,}142857$ nur eine Näherung für π darstellt[2]. Er versuchte daher auf mehreren geometrischen Wegen, die in seinen Schriften dokumentiert sind,eine Verbesserung der archimedischen Approximation für π zu erreichen. Mit einer seiner Konstruktionen, welche er in seinem Werk „De transmutationibus geometrici“ beschreibt und die wir hier vorstellen wollen, gelang ihm dies tatsächlich.

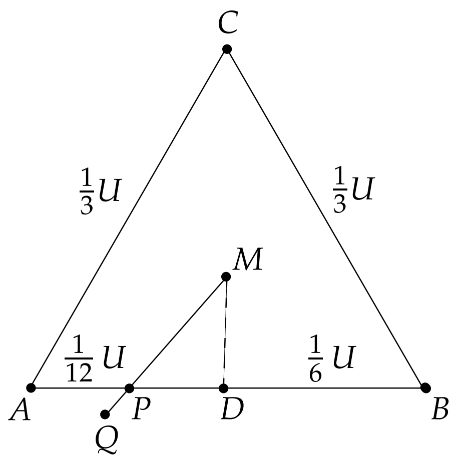
Sein Ausgangspunkt war die folgende

Aufgabe: Zu einer Strecke der vorgegebenen Länge U ist der Radius r eines Kreises vom Umfang U zu konstruieren und zu berechnen.

Mit seiner Lösung r konnte er dann eine Näherung für π abgeben, weil – wie wir heute schreiben – aus $U = 2\pi r$ mit bekanntem U und r folgt, das auch $\pi = U : 2r$ bekannt ist.

Lösung der Aufgabe: N. Cusanus konstruiert zunächst ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ vom Umfang U und das Zentrum M von $\triangle ABC$ (z.B. als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden). Durch M zeichnet er dann eine Linie, welche die Dreiecksbasis $\overline{AB}$ in einem Punkt P so schneidet, dass $\overline{|AP|} = \frac{1}{4}\overline{|AB|} = \frac{1}{12}U$ ist. Danach verlängert er die Strecke $\overline{MP}$ um $\frac{1}{4}\ \overline{|MP|}$ über P hinaus bis zum Punkt Q und behauptet:

$\overline{|MQ|}$ ist näherungsweise die Länge des Radius' r des Kreises vom Umfang U.



Wir zeigen nun durch Rechnung, dass die doch sehr elementare Konstruktion des N. Cusanus einen recht guten Näherungswert für r und für π eine Approximation liefert, die etwas besser als der archimedische Wert $\frac{22}{7}$ ist.

[2] $\frac{22}{7}$ ist die bestmögliche Approximation für π durch eine Bruchzahl, bei der Zähler und Nenner beide < 100 sind.

Rechnungen (vgl. Figur)	Erläuterungen
$\overline{\lvert MQ\rvert} = \overline{\lvert MP\rvert} + \frac{1}{4}\overline{\lvert MP\rvert}$	
$= \frac{5}{4}\sqrt{\overline{\lvert PD\rvert}^2 + \overline{\lvert DM\rvert}^2}$	$\overline{\lvert PD\rvert} = \frac{1}{12}U$
	M teilt die Seitenhalbierende $\overline{\lvert CD\rvert}$ im Verhältnis $2:1$ von C aus; also ist
	$\overline{\lvert DM\rvert} = \frac{1}{3}\overline{\lvert DC\rvert} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\overline{\lvert CB\rvert^2} - \overline{\lvert DB\rvert^2}}$
$= \frac{5}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{12}U\right)^2 + \left(\frac{1}{18}U\sqrt{3}\right)^2}$	$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{9}U^2 - \frac{1}{36}U^2} = \frac{1}{18}U\sqrt{3}$
$= \frac{5}{4}U\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{36}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{36}\right)^2}$	Nach N. Cusanus ist $\overline{\lvert MQ\rvert} = r$ und
$= \frac{5}{144}U\cdot\sqrt{21}$	somit $r \approx 0{,}1591172\,U$.

Wenn wir nun die ersten 7 Stellen nach dem Komma des Cusanusschen Näherungswertes $r \approx 0{,}1591172\,U$ mit den entsprechenden Nachkommastellen des theoretischen Wertes $r = \frac{1}{2\pi}U = 0{,}1591549\,U$ vergleichen, dann zeigt sich: Die ersten 4 Nachkommastellen stimmen überein – die Cusanus-Approximation für r ist also recht gut.

Aus $\pi = \frac{1}{2r}\,U$ erhält N. Cusanus für $r = 0{,}1591172\,U$ den Näherungswert $\pi \approx 3{,}1423376$, während der archimedische Wert $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3{,}1428571$ und der exakte π-Wert (auf 7 Stellen nach dem Komma) $\pi = 3{,}1415926$ ist.

Der π-Wert des Cusanus stellt somit eine – wenn auch kleine – Verbesserung gegenüber dem archimedischen π–Wert dar; seine Abweichung vom exakten π-Wert beträgt nur etwa $0{,}00075$ oder 0.024%.

Anschaulich: Ein Kreis vom Radius $r = 1$ m hat (auf 4 Stellen genau) einen Umfang von $6{,}2832$ m; nach Cusanus ist sein Umfang $6{,}2847$ m, also $1{,}5$ mm größer, während sein Umfang nach Archimedes $6{,}2857$ m und damit $2{,}5$ mm größer ist.

Lösung der Aufgabe zum Schubfachprinzip

Als Einerziffer der Potenzen 2^n kommen nur $2, 4, 6$ und 8 vor. Deshalb sind nur die 40 Paare $02, 04, 08, 12, 14, 16, 18, \ldots, 92, 94, 96, 98$ als Endziffernpaare möglich. Betrachten wir diese 40 Ziffernpaare als unsere Schubladen. Wenn wir nun die 41 Potenzen $2^1, 2^2, \ldots, 2^{41}$ entsprechend ihrer beiden letzten Ziffern auf die 40 Fächer verteilen, dann gibt es (mindestens) in einem Fach zwei Zahlen mit übereinstimmendem Endziffernpaar. Sobald aber die beiden letzten Ziffern bei zwei Potenzen gleich sind, beginnt in der Folge $02, 04, 08, 12, 14, 16, 18, \ldots$ die (periodische) Wiederholung von Folgenelementen.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Ball, Johnny: „Die verrückte Welt der Zahlen“.

In der Einleitung seines Buches „Die verrückte Welt der Zahlen“ schreibt Johnny Ball „In der Schule war ich nicht besonders gut, aber Mathe mochte ich immer. Später wollte ich mehr über dieses Fach erfahren und die Mathematik wurde zu meinem lebenslangen Hobby. Ich liebe alle mathematischen Fragen“.
Alle die Menschen, denen es in Bezug auf Interesse für mathematische Fragestellungen genauso geht werden in Balls mit vielen Illustrationen und Bildern versehenen Buch eine Menge Anregungen über spannende Fragen aus der Mathematik finden.
Unterteilt ist der großformatige Band in vier Kapitel:
„Woher stammen die Zahlen“? untersucht die Geschichte der Zahlentwicklung vom Zählen mit den Fingern über babylonische und ägyptische Zahlen bis hin zu unserer modernen indisch-arabischen Zahlschreibweise.
Das Kapitel über „Magische Zahlen“ hat nichts mit der Zaubererwelt von Harry Potter zu tun, sondern beschäftigt sich mit magischen Quadraten, Fibonacci-Zahlen, Primzahlen, der Kreiszahl Pi, dem Pascalschen Dreieck und dem goldenen Schnitt. Abgerundet wird das Kapitel noch mit mathemagischen Zaubertricks, mit denen man nicht nur bei der nächsten Geburtstagsparty glänzen kann.
Im Kapitel „Besondere Formen“ geht es um Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecke; aber auch räumliche Gebilde wie Platonische Körper, ein Fußball, Kegelschnitte oder Labyrinthe werden untersucht.
Das letzte Kapitel „Die Welt der Mathematik“untersucht, wo uns in der Welt überall Mathematik begegnet: Wahrscheinlichkeiten, Chaos und Fraktale fehlen dabei genauso wenig wie logische Paradoxien, Mathematik in der Kunst und ein Überblick über die 16 größten Mathematiker von Ahmose bis hin zu Carl Friedrich Gauss. Das hierbei auch der Physiker Albert Einstein als „großer Mathematiker“ vereinnahmt wird, ist lediglich ein kleiner Schönheitsfehler.
Abgerundet wird das schön gestaltete Buch durch die Lösungen der zahlreichen im Buch enthaltenen Aufgaben.

Fazit: Johnny Ball ist ein sehr schönes Sachbuch gelungen, dass man nicht nur wegen der durchgängig bunten Bebilderung immer wieder gerne zur Hand nimmt. Dabei ist ihm das Kunststück gelungen ein sowohl für 10jährige als auch für Oberstufenschüler ansprechendes Werk vorzulegen. Ältere werden vielleicht zunächst durch die Kinderbuch-Aufmachung abgeschreckt werden, aber beim zweiten Hinsehen werden sie auch einige interessante Neuigkeiten entdecken.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Ball, Johnny: Die verrückte Welt der Zahlen. So spannend kann Mathe sein! Dorling Kindersley 2006, ISBN 3-8310-0807-8, 96 Seiten, 14,90 €.

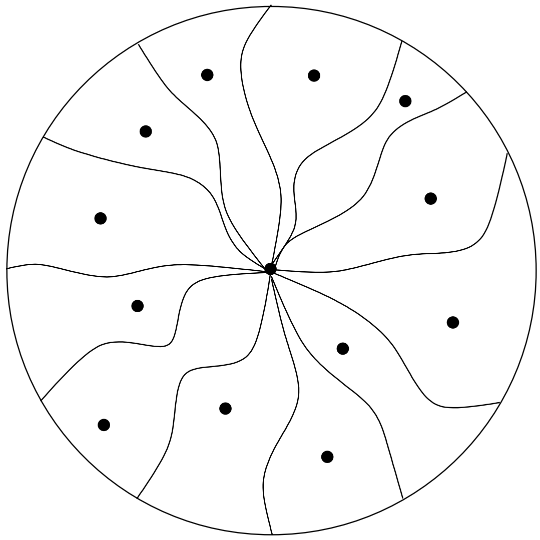
Art des Buches:	Sachbuch
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 10 Jahren

Martin Mattheis

Ein Blick hinter die Kulissen: Ein Spiel, das man nicht gewinnen kann

Von Hartwig Fuchs

Am Rand eines Rummelplatzes steht eine winzige Bude, deren Besitzer lauthals den „großen Gewinn“ von 20 € bei nur 2 € Einsatz demjenigen verspricht, der das folgende von ihm angebotenen Spiel gewinnt.



Auf einem Spielbrett ist ein in 12 „unordentliche“ Sektoren eingeteilter Kreis gezeichnet. In jeden Sektor ist ein Spielstein platziert. Ziel des Spiels ist es, alle Steine in höchstens 20 Spielzügen in einem beliebigen Sektor zusammenzuführen. Dabei besteht ein Spielezug darin, dass man zwei beliebig gewählte Steine in entgegengesetzten Richtungen – also den einen im Uhrzeigersinn, den anderen gegen den Uhrzeigersinn – in den jeweils benachbarten Sektor verschiebt.

Mathis kommt an der Bude vorbei und schaut eine Weile zu, wie ein Spieler nach dem anderen wegen Überschreitung der erlaubten Zugzahl verliert. Schließlich bemerkt er zu dem Budenbesitzer:

(a) **Dieses** Spiel kann man nicht gewinnen.

Als das der Budenbesitzer hört, hebt er triumphierend das Spielbrett in die Höhe und sagt: „Ich werde diesem Besserwisser das Gegenteil beweisen.“
Er legt das Brett wieder hin und spielt – tatsächlich gelingt es ihm, nach 15 Spielzügen alle Spielsteine in einem Sektor zu versammeln. Den Erfolg des Budenbesitzers kommentiert Mathis so:

(b) **Dieses** Spiel ist immer leicht zu gewinnen.

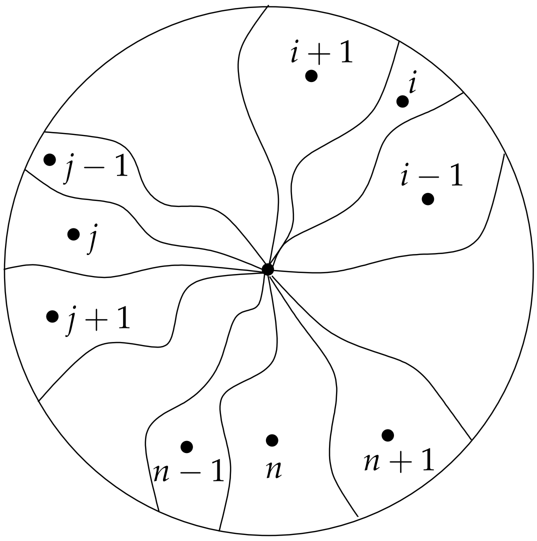
Wie lassen sich Mathis Behauptungen (a) und (b) rechtfertigen oder widerlegen?

Wir denken uns den Kreis in n Sektoren eingeteilt und diese mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots n$ durchnummeriert. Als Sammelplatz der Steine wählen wir z. B. den Sektor n.
Nun bilden wir für die Startposition und nach jedem Spielzug die Nummernsumme – das ist die Summe der Nummern derjenigen Sektoren, in denen sich Steine befinden; in dieser Summe wird eine Nummer einmal (zweimal, dreimal,...) mitgerechnet, wenn es im zugehörigen Sektor einen Stein (zwei, drei,... Steine) gibt.

Für die Nummernsumme S_0 der Startposition gilt:

$S_0 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, weil dann nämlich jeder Sektor genau einen Stein enthält;
für die Nummernsumme S_e der Endposition ist $S_e = n + n + \ldots + n = n^2$, weil sich nun alle Steine im Sektor n befinden. Sei nun k die Nummernsumme nach dem $k$ten Spielzug.

Wie groß ist dann S_{k+1}?



Ein Steine-Paar, von dem sich ein Stein im Sektor i, der andere im Sektor j befindet, bezeichnen wir mit (i, j)
– $i = j$ nicht ausgeschlossen –
und eine Bewegung dieses Paares mit $(i, j) \rightarrow$.

Es genügt nun die Betrachtung einiger Spielzüge, um zu erkennen, wie sich bei ihnen S_k zu S_{k+1} verändert.

$$\begin{array}{lllllll}
(i,j) & \rightarrow & (i+1, j-1) & \Rightarrow & S_{k+1} & = S_k + 1 - 1 & = S_k \\
(1,j) & \rightarrow & (n, j+1) & \Rightarrow & S_{k+1} & = S_k + n - 1 + 1 & = S_k + n \\
(n,j) & \rightarrow & (1, j-1) & \Rightarrow & S_{k+1} & = S_k - (n-1) - 1 & = S_k - n \\
(n,n) & \rightarrow & (n-1, 1) & \Rightarrow & S_{k+1} & = S_k - 1 - (n-1) & = S_k - n
\end{array}$$

Es gilt also:

(1) $\quad S_{k+1} = S_k + \delta$ mit $\delta = 0$ oder $\delta = n$ oder $\delta = -n$.

Bei jedem Spielzug ändert sich somit die Nummernsumme gar nicht oder um n oder um $-n$.

Nun denke man sich von der Endposition aus alle Spielzüge rückgängig gemacht. Da S_e ein Vielfaches von n ist, gilt wegen (1) Gleiches für alle Summen S_k, $k < e$ und insbesondere auch für S_0. Somit ist für S_0:
$S_0 = \frac{1}{2}n(n+1) = v \cdot n$ mit einer natürlichen Zahl v. Daraus folgt: $\frac{1}{2}(n+1) = v$ und $n + 1 = 2v$. Daher muss n ungerade sein. Also:

(c) Das Spiel kann nur bei ungeradzahlig vielen Sektoren gewonnen werden.

Nun zu Mathis Behauptungen (a) und (b). Mathis konnte offensichtlich die Sektoren des Spielfeldes trotz ihrer etwas verwirrenden Form zählen: Es waren 12 und wegen (c) durfte Mathis behaupten, dass das 12-Sektoren-Spiel nicht zu gewinnen ist.

Wie aber konnte dann der Budenbesitzer anschließend sein Spiel mit nur 15 Zügen erfolgreich beenden? Mathis war klar: Das war nur möglich bei einem Spielfeld mit ungeradzahlig vielen Sektoren. Er zählte deshalb erneut die Sektoren: Jetzt müssen 11 oder 13 Sektoren auf dem Spielfeld vorhanden sein. Denn bei weniger als 11 oder mehr als 13 Sektoren wäre es jedem Spieler aufgefallen, dass der Budenbesitzer nicht das 12-Sektoren-Spiel gespielt hätte.

Aber nur in einem 11-Sektoren-Spielfeld – nicht aber in einem Spielfeld mit 13 Sektoren – kann man alle Spielsteine in 15 Zügen in einem Sektor versammeln; z.B. so:

ein Zug $(5, 6) \to (4, 7)$; zwei Züge $(4, 7) \to (3, 8)$; drei Züge $(3, 8) \to (2, 9)$; vier Züge $(2, 9) \to (1, 10)$; und fünf Züge $(1, 10) \to (11, 11)$.

Mathsi hatte auch eine Erklärung dafür, wie ein 12-Sektoren-Spiel in ein 11-Sektoren-Spiel „verwandelt“ werden konnte: Das Spielbrett hatte auf der Vorderseite ein 12- und auf der Rückseite ein 11-Sektoren-Spiel und dem Budenbesitzer war es bei seiner triumphierenden Siegesankündigung unbemerkt gelungen, das Spielbrett umzudrehen, so dass die Seite mit dem 11-Sektoren-Spiel nach oben zu liegen kam.

Die „besondere“ Aufgabe

Von Ingmar Rubin

In einem Kreis k_1 vom Radius r sei eine Sehne eingezeichnet, die durch einen Punkt P in zwei Teilstrecken der Länge a und b geteilt wird. Wenn die Sehne einmal im Kreis herumwandert, beschreibt der Teilungspunkt P einen weiteren (inneren) Kreis k_2 als Ortslinie.

Welchen Flächeninhalt besitzt der Kreisring zwischen k_1 und k_2 ?

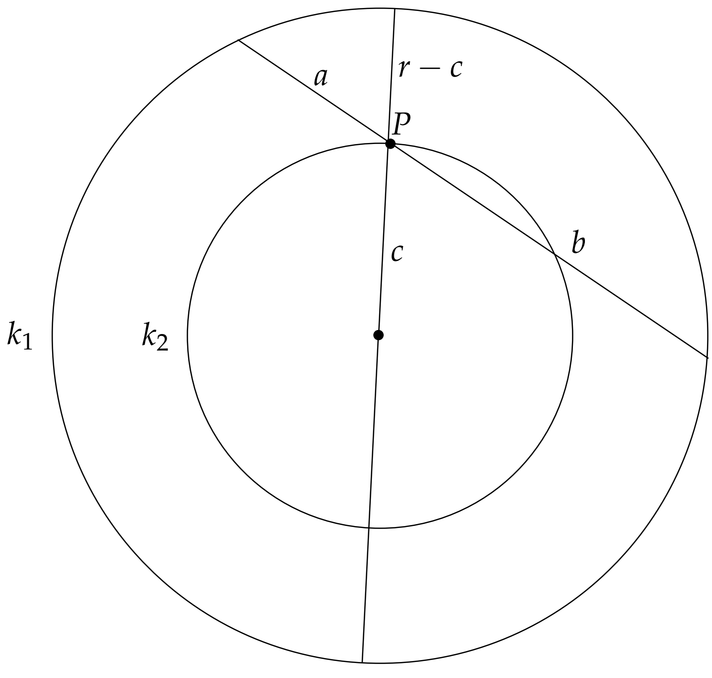


Abbildung: Kreis k_1 mit einer Sehne der Länge $a + b$ und dem Teilungspunkt P sowie dessen Ortslinie k_2

Lösung: Wir bezeichnen den Radius des inneren Kreises k_2 mit c und wenden den **Sehnensatz** an:

Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnittslängen der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnittslängen der anderen Sehne.

$$a \cdot b = (r + c) \cdot (r - c) = r^2 - c^2. \tag{1}$$

Multiplizieren wir beiden Seiten der Gleichung mit π erhalten wir:

$$\pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot c^2. \tag{2}$$

Der Flächeninhalt des Kreisringes zwischen k_1 und k_2 beträgt damit:

$$F_{diff} = \pi \cdot a \cdot b. \tag{3}$$

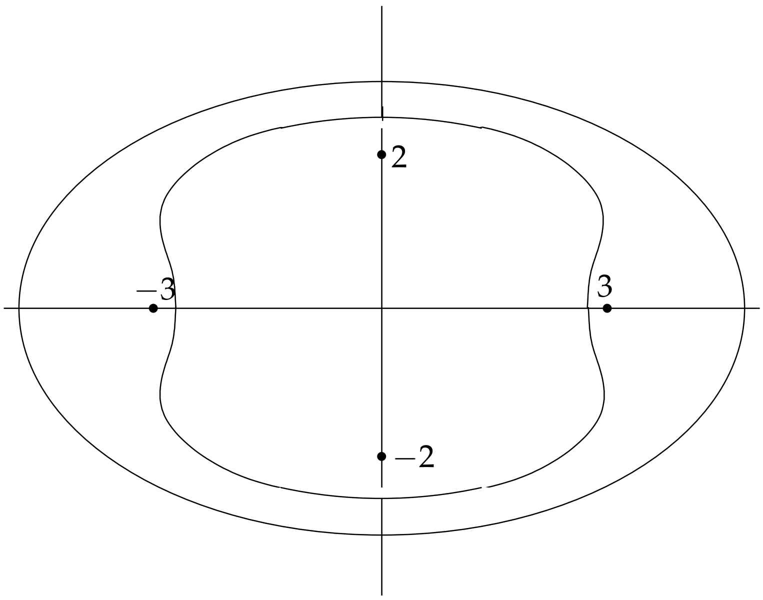
Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes des englischen Mathematikers HAMMOND HOLDITCH aus dem Jahr 1858:

Satz: Wenn eine Sehne der konstanten Länge $a + b$ in einer geschlossenen Kurve von einem Punkt P in zwei Strecken der Längen a, b geteilt wird, hat die Differenz der von der Kurve und der Ortslinie des Teilpunktss P erzeugten Fläche den Inhalt $(F_{diff}) = \pi \cdot a \cdot b$.

Dabei sind einige implizite Voraussetzungen gemacht worden:

Die Kurve ist konvex; die Sehnen sind Tangenten, d. h. die innere Kurve ist Hüllkurve; die Sehne darf nicht zu lang sein und wandert nur einmal herum, die innere Kurve ist einfach zusammenhängend.

In einer späteren MONOID-Ausgabe werden wir auf Ellipsensehnen eingehen.



Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 86

Vier Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Magisches Quadrat mit Jahreszahlen

2006		
	2007	
		2008

Setze in die sechs leeren Felder Zahlen so ein, dass ein magisches Quadrat entsteht.

(H.F.)

Lösung:

Es gibt viele Lösungen, z. B. diese:

2006	2098	1917
1918	2007	2096
2097	1916	2008

Das Alter der Kinder des Mathematikers

Die Mathematiker Aebli und Baebli unterhalten sich, während sie auf die Straßenbahn warten. Aebli sagt zu Baebli: „Sie haben doch vier Kinder. Wie alt sind die?“ Baebli antwortet: „Das Produkt ihrer Lebensjahre (in ganzen Jahren) ist 36, während die Summe mit der Nummer der Straßenbahn übereinstimmt, mit der wir fahren wollen“.

Nach kurzem Nachdenken stellt Aebli fest: „Ich kann das Alter der Kinder nicht bestimmen.“
Darauf Baebli: „Ach ja, ich vergaß zu sagen, dass mein ältester Sohn Mathis heißt.“
Und nun Aebli: „Jetzt kann ich das Alter der Kinder angeben.“
Kannst Du das auch? (H.F.)

Lösung:

Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Anzahlen der Lebensjahre der Kinder. Wegen $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 = 36$ gibt es die folgenden 9 Möglichkeiten für A_1, A_2, A_3, A_4 (von Vertauschungen abgesehen):

A_1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
A_2	1	1	1	1	1	2	2	3	2
A_3	1	2	3	4	6	2	3	3	3
A_4	36	18	12	9	6	9	6	4	3
$A_1 + A_2 + A_3 + A_4$	39	22	17	15	14	14	12	11	10

Wäre die Summe $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ eine der Zahlen $39, 22, 17, 15, 12, 11$ oder 10, dann hätte Aebli sie gekannt (sie ist ja die Nummer der Straßenbahnlinie) und mit Hilfe der Tabelle hätte er die Zahlen $A_1, \dots A_4$ angeben können. Daran wurde er offensichtlich deshalb gehindert, weil $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 14$ war.
Wenn nun $1, 1, 6, 6$ das Alter der Kinder wäre, dann hätte Baebli nicht von seinem *ältesten* Sohn sprechen dürfen. Somit sind Baeblis Kinder $1, 2, 2$ und 9 Jahre alt.

Geldausteilung
Ein Vater verteilt Geld auf seine vier Kinder. Der ältere Sohn erhält das Doppelte dessen, was der jüngere Sohn bekommt. Seine ältere Tochter bekommt das Dreifache des Betrags ihrer Stiefschwester, doch das ist immer noch 270 € weniger als die Summe, die der jüngere Sohn erhält. Am Ende soll der Vater 3995 € ausgegeben haben.
(Scheima'a Ahmed Doma, 5a, Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo)

Lösung:
älterer Sohn: 2010 €
jüngerer Sohn: 1005 €
ältere Tochter: 735 €
ihre Stiefschwester: 245 €

Mathis wird getestet
Mathis nahm an einem „Multiple-Choice-Test“ also einem Test, bei dem die Antworten durch Ankreuzen gegeben werden, mit 25 Fragen teil.
Für eine richtige Antwort gab es 5 Punkte, für eine falsche Antwort -4 Punkte und für eine unbeantwortete Frage gab es -2 Punkte. Mathis erreichte 90 Punkte.
Wie viele Fragen hatte er richtig, wie viele falsch und wie viele gar nicht beantwortet?
(H.F.)

Lösung:
Es sei r die Anzahl der richtigen Antworten, f die Anzahl der falschen Antworten und u die Anzahl der unbeantworteten Fragen. Dann ist
(1) $r + f + u = 25 \quad 0 \leq r, f, u \leq 25$.

Mathis Testergebnis errechnet sich so:
(2) $5r - 4f - 2u = 90$.

Wegen (1) ist $2u = 50 - 2r - 2f$.

Für (2) folgt daraus $5r - 4f - (50 - 2r - 2f) = 7r - 2f - 50 = 90$, also

(3) $7r - 2f = 140$.

Aus (3) folgt: r ist gerade und $7r \geq 140$, also $r \geq 20$. Wegen $r \leq 25$ kommen somit nur die Werte $r = 20, 22$ oder 24 in Frage.

Es sei $r = 24$.
Damit heißt (3): $168 - 2f = 140$, so dass $f = 9$ ist. Aber mit (1) folgt dann der Widerspruch $24 + 9 + u = 25$.

Es sei $r = 22$.
Aus (3) ergibt sich dann $f = 7$ und wieder erhält man mit (1) den Widerspruch $22 + 7 + u = 25$.

Wenn aber **r = 20** ist, dann lautet (3): $140 - 2f = 140$. Danach ist **f = 0** und aus (1) folgt **u = 5** .

Russische Multiplikation

Wir schreiben zwei Zahlen nebeneinander, z.B. 87 und 47 oder 47 und 87. Unter die linke Zahl schreiben wir ihre (ggf. abgerundete) Hälfte. Die rechte Zahl verdoppeln wir. Dies wiederholen wir, bis links eine 1 steht. Dann addieren wir rechts die Zahlen, bei denen links eine ungerade Zahl steht. In den Beispielen sieht das so aus:

87	47		47	87
43	94		23	174
21	188	bzw.	11	348
10	~~376~~		5	696
5	752		2	~~1392~~
2	~~1504~~		1	2784
1	3008			4089
	4089			

a) Prüfe in zwei anderen Beispielen nach, dass bei Vertauschung der gewählten Zahlen das gleiche Ergebnis auftritt.

b) Was hat das jeweilige Ergebnis mit den Ausgangszahlen zu tun?

c) Zeige, warum diese Methode funktioniert, das Ergebnis zu finden. (WJB)

Lösung:

b) Es ergibt sich immer das Produkt der beiden Zahlen.

c) Multiplizieren wir in der linken Spalte von oben nach unten $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ mit 1, wenn dort eine ungerade Zahl steht und mit 0 bei einer geraden Zahl, und addieren, so ergibt sich die Darstellung der Zahl im Zweiersystem, z. B.

$87 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 64$, d.h.

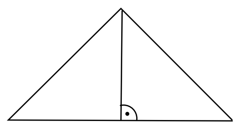
$$87 \cdot 47 = 1 \cdot 47 + 2 \cdot 47 + 2 \cdot (2 \cdot 47) + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 47) + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 47)$$

Das Problem der Quadratverdopplung

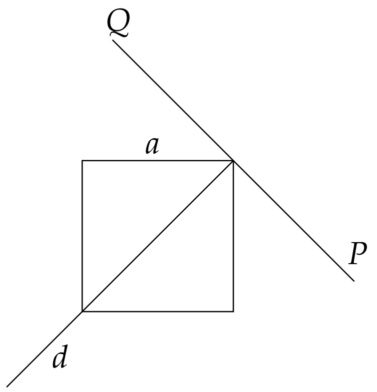
In der Schrift „Menon“ des griechischen Philosophen Platon (427 – 347 v. Chr.) stellt der Hauptakteur Sokrates einem Sklaven die Aufgabe:

Vergrößere ein Quadrat so, dass die Fläche des neuen Quadrats doppelt so groß wie die des Ausgangsquadrats ist.

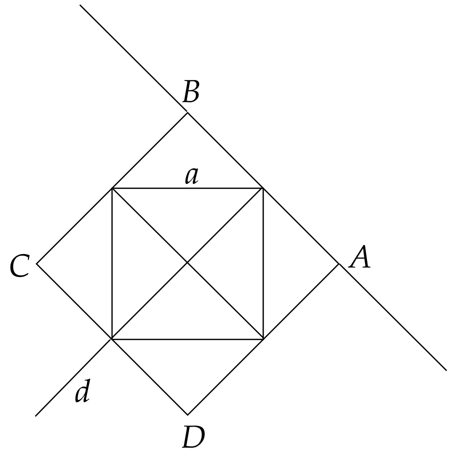
Wir verengen die Aufgabenstellung, indem wir eine konstruktive Lösung verlangen, wobei als einziges Zeichengerät ein Dreieck mit einem markierten $90°$-Winkel erlaubt ist. (H.F.)



Lösung:



- Zeichne eine Diagonalengerade d des Quadrats.
- Lege das Zeichendreieck so wie in der Figur auf das Quadrat und zeichne die Strecke PQ.
- Wiederhole diese Konstruktion an den übrigen drei Ecken des Quadrats.
- Man erhält so das Quadrat $ABCD$ und dieses ist die Lösung.



Das Wettrennen der beiden Radfahrer

Dennis und seine Schwester Laura machen ein Wettrennen per Fahrrad um ihre Heimatstadt. Beide haben sich ganz unterschiedliche Taktiken zurechtgelegt.

- Dennis will zunächst langsam fahren, um Kondition für die zweite Hälfte zu sparen. Er fährt deshalb die erste Hälfte der Strecke mit „nur" 20 km/h Geschwindigkeit. Dann steigert er seine Geschwindigkeit auf das Doppelte und fährt die zweite Hälfte mit 40 km/h.
- Laura dagegen fährt gleichmäßig die ganze Strecke mit 30 km/h. Gibt es ein „totes Rennen," kommen also beide gleichzeitig ins Ziel, oder wer ist der Sieger?

Lösung:

Bekanntlich berechnet sich die Geschwindigkeit v als Quotient aus der zurückgelegten Wegstrecke s durch die verbrauchte Zeit t, also

$$v = \frac{s}{t} \; (*).$$

Dabei setzt sich Dennis' Zeit t aus t_1 und t_2 als Zeiten der beiden Halbstrecken zusammen. Formt man $(*)$ entsprechend um, so gilt

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{s}{2}}{20} \text{ und } t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{40}, \text{ also } t = \frac{\frac{s}{2}}{20} + \frac{\frac{s}{2}}{40} = \frac{3 \cdot \frac{s}{2}}{40}.$$

Setzen wir dies in $(*)$ ein, so folgt:

$$v = \frac{s}{\frac{\frac{3}{2}s}{40}} = \frac{40s}{\frac{3}{2}s} = 26\frac{2}{3}\text{km/h}.$$

Das heißt also, dass Dennis' Durchschnittsgeschwindigkeit kleiner ist als die von Laura (30 km/h), die somit früher im Ziel sein wird.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Acht Gleichungen

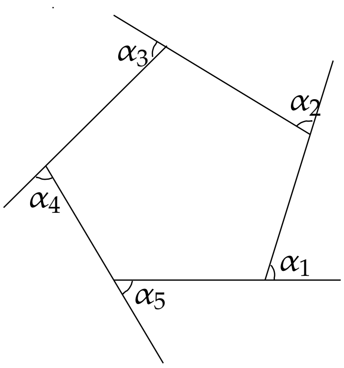
	+		:	3	=	
:		+		+		–
	–		+		=	2
:		:		–		+
	·		–		=	
=		=		=		=
1	+		+		=	

Setze natürliche Zahlen ≤ 8 so in die leeren Felder der Figur ein, dass sich horizontal und vertikal jeweils vier richtige Gleichungen ergeben. Dabei soll jede Zahl mindestens einmal verwendet werden, aber so, dass in keiner Zeile und in keiner Spalte eine Zahl mehrfach vorkommt.
Man rechne **ohne** Beachtung der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“ von links nach rechts und von oben nach unten. (H.F.)

Variation von Aufgabe 874

Zeige: Die Summe aus vier unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen ist niemals eine Quadratzahl. (Malte Meyn, 8. Kl., Freie Waldorfschule Otterberg)

Außenwinkel am $n-$Eck



In einem $n-$Eck, bei dem keine Ecke nach innen einspringt, bilden die einseitigen Verlängerungen der Seiten mit den nächsten Seiten einen Außenwinkel wie in dem nebenstehenden Fünfeck. Bestimme die Summe dieser n Außenwinkel. (H.F.)

Teiler

a) Eine natürliche Zahl n habe in dezimaler Schreibweise die Form $aaabbb$. Zeige: n besitzt den Teiler 37.

b) Zeige ferner: Jede natürliche Zahl m von der Form $aaaaabbbbb$ hat den Teiler 73. (H.F.)

Ein Teppich-Handel

Der Teppichhändler TH. aus Schilda kauft einen Teppich für genau 1000 €.

Am nächsten Tag – TH. hat gerade den Teppich für 1300 € verkauft – betritt sein Freund den Laden und sagt ihm, er habe unbedingt gerade diesen Teppich erwerben wollen. Es gelingt TH., den Teppich für 1400 € zurückzukaufen. Da er an seinem Freund nichts verdienen will, aber an dem ganzen Handel auch nichts verlieren will, überlässt er seinem Freund den Teppich für 1500 €.

Hat der Teppichhändler richtig gerechnet? (H.F.)

Neues Sudoku

9			1	6				7
			9		7	6		
7	3	6				4	1	
3		7	2			8		6
	4	2	5		6	9		
6			3	7				2
1	2		7		9		6	4
				3	2	7		1
4		9		5		3	2	8

(H.F.)

Teilbarkeit durch 11

Begründe, dass jede Zahl $100\ldots01$ mit n Ziffern 0 zwischen den beiden Ziffern 1, n geradzahlig, durch 11 ohne Rest teilbar ist. (H.F.)

Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 890. Unternehmer Gill Bates hat im Laufe seines Lebens ein beachtliches Vermögen zusammengetragen. Da er keine eigenen Nachkommen hat, soll das Geld nach seinem Tode unter den Mitarbeitern seiner Firma verteilt werden. Hier rechnet er gerade aus, wie viel jeder erhalten soll und stellt erfreut fest, dass die Division glatt aufgeht; jeder Angestellte erhält den gleichen Teil.

Doch der Drucker scheint nicht in Ordnung, statt Zahlen werden nur Kreuze ausgegeben:

$$
\begin{array}{cccccccc l}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \; : \times\times\times \; = \; \times\times\times\times\times\times \\
\times & \times & \times & & & & & & \\
\cline{1-3}
\times & \times & \times & \times & & & & & \\
 & \times & \times & \times & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & \times & \times & \times & \times & & \\
 & & & & \times & \times & \times & & \\
\cline{5-7}
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & \times &
\end{array}
$$

Kann jemand erkennen, wie viel Angestellte die Firma hat?

(Christoph Sievert, Bornheim)

Aufgabe 891. Konstruktion nur mit einem Lineal

Konstruiere allein mit einem Lineal der Länge ℓ den Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC, dessen Seitenlängen sämtlich $< \ell$ sind.

Aufgabe 892. Ein Zaun um drei Kreise

Drei Kreise mit dem gleichen Radius r sind so in die Ebene gezeichnet, dass je zwei dieser Kreise den dritten berühren. Um diese drei Kreise sei ein "Seil" straff gespannt. Begründe, dass für die Länge L des "Seiles" und den Umfang U eines jeden der drei Kreise gilt:

$$1{,}954\, U < L < 1{,}955\, U.$$

(H.F.)

Aufgabe 893.

Ein Flugkörper fliegt auf einem Viertelkreis vom zehnfachen Erdradius vom Äquator zum Nordpol mit einer Geschwindigkeit von $v = 5\,000 \text{ km/h}$. Um Mitternacht fliegt er über Mainz. ($50°$ nördlicher Breite, $8\frac{1}{3}°$ östlicher Länge).

a) Wie lange braucht er vom Äquator zum Nordpol?
b) Wann ist er am Äquator gestartet und wann erreicht er den Nordpol?
c) Wo ist er gestartet?
d) Welche Geschwindigkeit und welche Flugrichtung beobachtet ein Mainzer um Mitternacht?

(WJB)

Aufgabe 894.
Drei Würfe mit einem Spielwürfel ergeben die Augenzahlen x, y und z. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bilden Strecken der Längen x, y und z

a) ein gleichseitiges Dreieck
b) ein rechtwinkliges Dreieck
c) ein Dreieck? (WJB)

Aufgabe 895.
M sei eine Menge aus 100 nicht negativen Zahlen.

a) Für je zwei Zahlen aus M gelte stets: ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Begründe: höchstens eine Zahl aus M ist < 1; sie ist aber $\neq 0$.

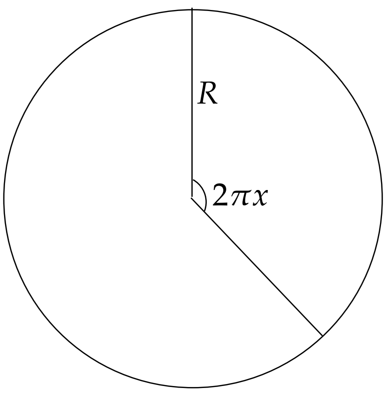
b) Für je vier Zahlen aus M gelte stets: ihr Produkt ist $< \frac{5}{4}$. Dann ist das Produkt aller Zahlen aus M kleiner als 265.

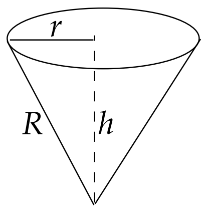
c) Für je sechs Zahlen aus M gelte stets: ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Dann ist das Produkt aller Zahlen aus M größer als 35.

(H.F.)

Aufgabe 882.
Aus einem Blech mit Radius R soll ein Sektor ausgeschnitten und zu einem Kegel mit einem Liter Fassungsvermögen zusammengebogen werden.

a) Für welche R hat diese Aufgabe keine Lösung, eine eindeutige Lösung, zwei Lösungen?
b) Was kann man über den Winkel $2\pi x$ des Sektors sagen?





(WJB)

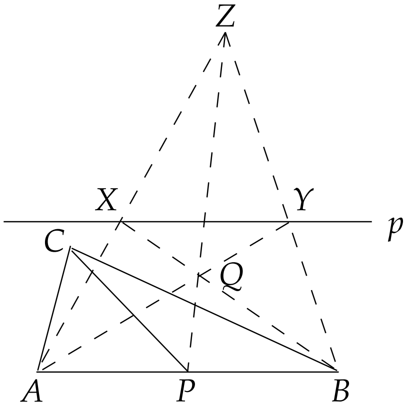
Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 86

Kl. 8-13

Aufgabe 883. Dreieckszerlegung
Kannst Du allein mit einem Lineal der Länge ℓ ein Dreieck, dessen Seitenlängen sämtlich $< \ell$ sind, in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegen? (H.F.)

Lösung:

(vergleiche den Artikel „Konstruktion mit beschränkten Mitteln" in Heft 86)



Zeichne eine Parallele p zu $|\overline{AB}|$. Wähle Z außerhalb des von $\overline{AB}$ und p gebildeten Streifens so, dass $|\overline{AZ}| < \ell$ und $|\overline{BZ}| < \ell$ sind.
Konstruiere nun die Punkte X, Y, Q, P. P ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ (zur Begründung vergleiche MONOID 86, „Konstruktion mit beschränkten Mitteln"). Dann haben die Dreiecke APC und BCP gleiche Basislänge und gleich lange Höhen – sie sind daher flächengleich.

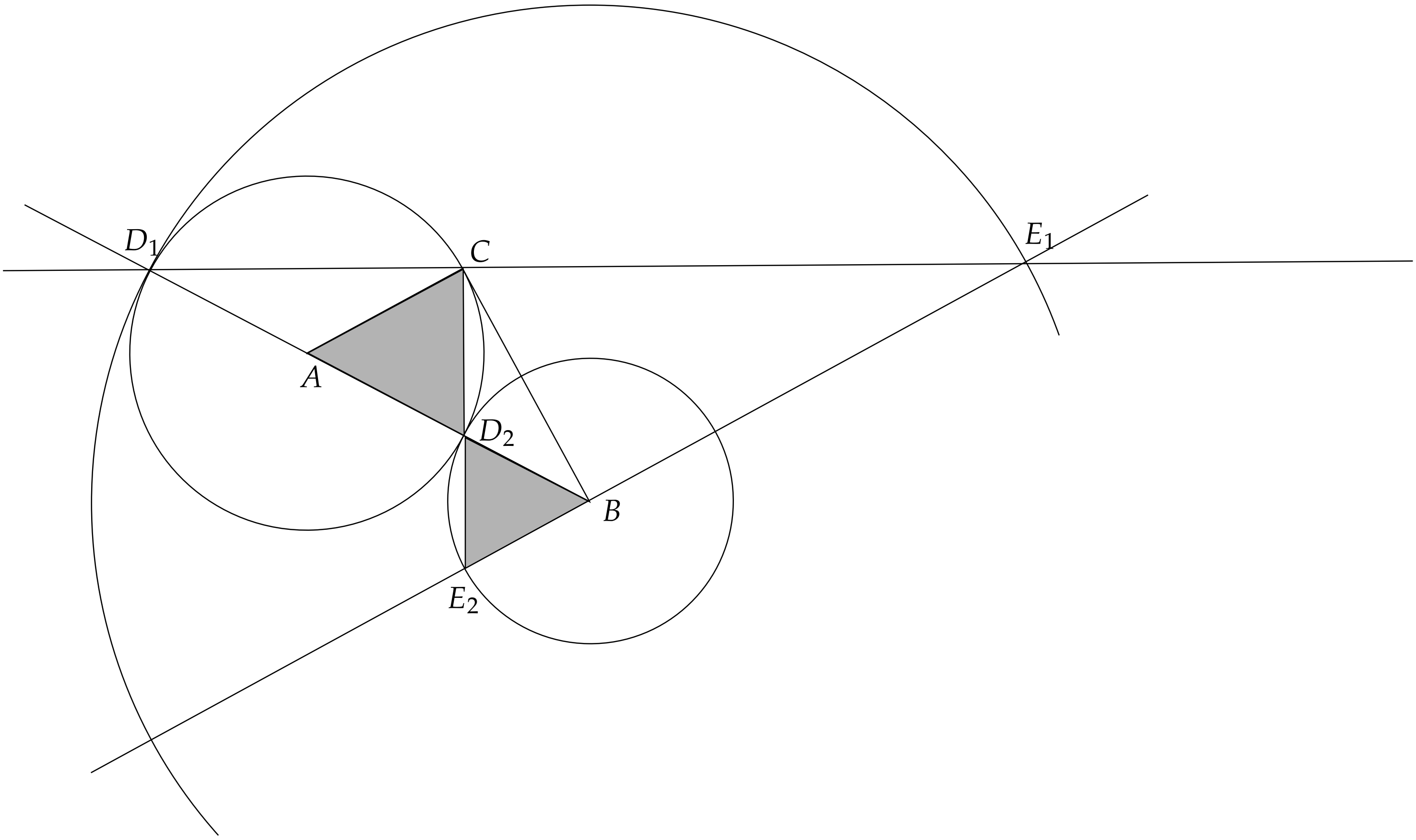
Aufgabe 884.
Welche fünfstelligen Quadratzahlen sind durch 5 und 7 teilbar? (WJB)

Lösung:
Dies sind Zahlen der Form $35^2 n^2 = 1225 n^2$. Fünfstellig sind diese für $n^2 = 9, 16, \ldots, 81$, also die Zahlen $11025, 19600, 30625, 44100, 60025, 78400$ und 99225.

Aufgabe 885.
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Der Kreis um A durch C schneidet die Gerade AB in D_1 und D_2. Die Gerade CD_1 schneidet den Kreis um B durch D_1 nochmals in E_1. Die Gerade CD_2 schneidet den Kreis um B durch D_2 nochmals in E_2.

Zeige: $AC || E_1 E_2$. (Dietmar Viertel, Flörsheim)

Lösung:
Die Dreiecke ACD_2 und BD_2E_2 sind gleichschenklig. Wegen $\sphericalangle(CD_2A) = \sphericalangle(BD_2E_2)$ ist folglich $\sphericalangle(ACD_2) = \sphericalangle(BE_2D_2)$ und somit $AC || BE_2$.



Aufgabe 886.
Bestimme die kleinste natürliche Zahl n sowie die kleinste natürliche Zahl m, für die jeweils gilt:

a) Wenn man n der Reihe nach durch 2, durch 3, $\dots$, durch 11 und durch 12 teilt, dann bleibt stets ein Rest 1.

b) Wenn man m durch 2 teilt, dann bleibt ein Rest 1,
wenn man m durch 3 teilt, dann bleibt ein Rest 2, $\dots$, usw.
wenn man m durch 11 teilt, dann bleibt ein Rest 10 und
wenn man m durch 12 teilt, dann bleibt ein Rest 11. (H.F.)

Lösung:
Die kleinste Zahl k, die *ohne Rest* durch $2, 3, 4, \dots, 12$ teilbar ist, ist $k = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11$.

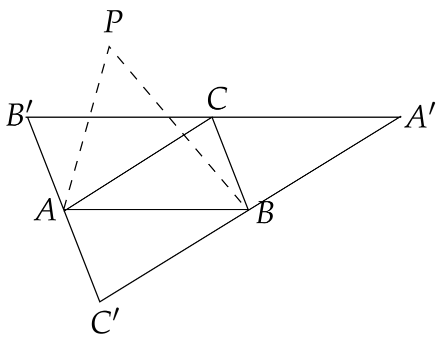
a) Die Zahl $k + 1$ ist der Reihe nach durch $2, 3, 4, \dots, 12$ mit Rest 1 teilbar. Also ist $n = k + 1 = 27721$.

b) Es gilt der Reihe nach:
$k - 2$ ist ohne Rest und daher $k - 1$ mit Rest 1 durch 2 teilbar;
$k - 3$ ist ohne Rest und daher $k - 1$ mit Rest 2 durch 3 teilbar;
$\vdots$
$k - 11$ ist ohne Rest und daher $k - 1$ mit Rest 11 durch 12 teilbar. Folglich ist $m = k - 1 = 27719$.

Aufgabe 887. Punkte im Dreieck

In der Ebene sind n verschiedene Punkte, $n \geq 4$ so gegeben, dass je drei von ihnen ein Dreieck bilden. Das größte dieser Dreiecke habe den Flächeninhalt F. Dann gibt es ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $4F$, das alle n Punkte im Innern oder auf seinem Rand enthält. (H.F.)

Lösung:



Das größt mögliche Dreieck werde von den Punkten A, B, C gebildet. Zeichnet man nun durch A, B, C jeweils die Parallele zur gegenüberliegenden Seite BC, AC, AB, so entsteht das Dreieck A', B', C', dessen Flächeninhalt vier Mal so groß ist wie der Flächeninhalt F des Dreiecks A, B, C.

In A', B', C' sind alle gegebenen n Punkte enthalten. Liegt nämlich ein Punkt P außerhalb von A', B', C', dann befinden sich P und das Dreieck A, B, C auf verschiedenen Seiten von einer der oben gezeichneten drei Parallelen, z.B. von A', B'. Für den Punkt P gilt dann: $F =$ Fläche$(ABC) <$ Fläche(ABP), im Widerspruch zur Definition des Dreiecks ABC.

Aufgabe 888.

1981 kostete das erste MONOID-Heft mit 32 Seiten 1 DM ($\approx$ 0,511 €). 25 Jahre später zahlst Du für ein Abonnement von vier Heften zu je 44 Seiten 8 € inklusive 0,85 € Porto pro Heft.

Wieviel beträgt die durchschnittliche Preissteigerungsrate pro Jahr,

a) wenn man den Preis pro Heft zugrundelegt,

b) wenn man sich auf den Preis pro Seite bezieht? (WJB)

Lösung:

a) Der Preis pro Heft beträgt 2006: $P = 1{,}15$ €, 1981 war er $Q = 0{,}511$ €. Bei einer

Preissteigerung x pro Jahr ergibt sich nach einem Jahr $(1 + x)Q$, nach zwei Jahren $(1 + x)\big((1 + x)\big)Q = (1 + x)^2 Q, \ldots$, nach 25 Jahren $(1 + x)^{25} Q$.

Es ist also $P = (1 + x)^{25} Q$, d.h.

$1{,}15 = (1 + x)^{25} \cdot 0{,}511$, also $(1 + x)^{25} = 1{,}15 : 0{,}511 = 2{,}25$.

Wir logarithmieren:

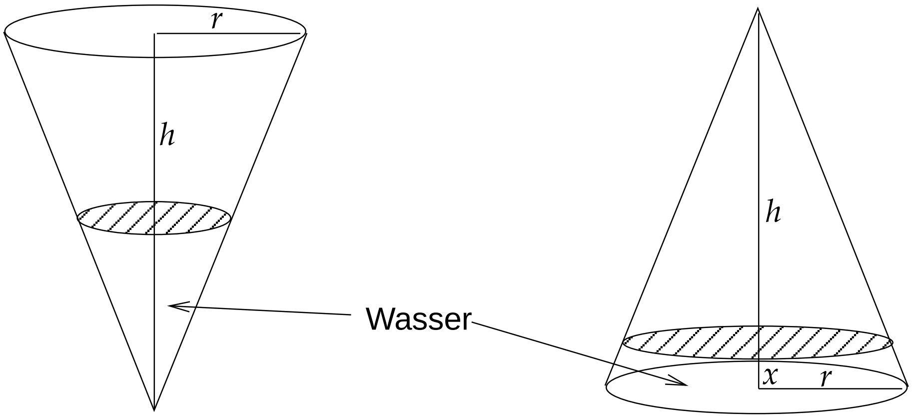
$25 \cdot \lg(1 + x) = \lg 2{,}25$ und somit $\lg(1 + x) = \lg(2{,}25) : 25 = 0{,}014$.

$1 + x = 10^{0{,}014} = 1{,}033$.

Die "Inflationsrate" beträgt demnach $3{,}3\%$.

b) Dies entspricht für 44 Seiten $P = 1{,}15$ € und für 32 Seiten $Q = 0{,}51$ €, somit pro Seite $p = 2{,}61$ Cent, $q = 1{,}60$ Cent. Die Gleichung $p = (1 + x)^{25} q$ hat die Lösung $1 + x = 1{,}020$, also $x = 2\%$.

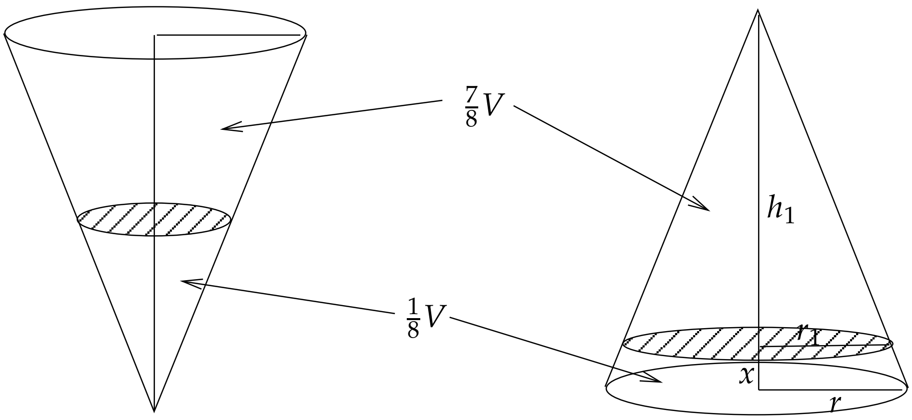
Aufgabe 889.
Ein senkrechter, oben geschlossener Kegel ist bis zur halben Höhe mit Wasser gefüllt. Wie hoch steht das Wasser im Kegel, wenn man ihn umdreht? (Erst schätzen)



Berechne die Höhe des Wasserstandes x in Abhängigkeit von der Höhe h des Kegels.

(Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:
Es lässt sich leicht zeigen, dass das Volumen des Wassers $\frac{1}{8}$ des Volumens des Kegels einnimmt, $V_W : V_{Kegel} = 1 : 8$, $h_W : h_{Kegel} = 1 : 2$ und $A_W : A_{Kegel} = 1 : 4$



Für den Kegel mit r_1 und h_1 (rechtes Bild) gilt:

$$V = \frac{\pi r_1^2 h_1}{3} = \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$8r_1^2 h_1 = 7r^2 h$ | Strahlensatz $r : h = r_1 : h_1$

$$8\left(\frac{r\,h_1}{h}\right)^2 h_1 = 7r^2 h$$

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{7}\,h \approx 0{,}956\,h$$

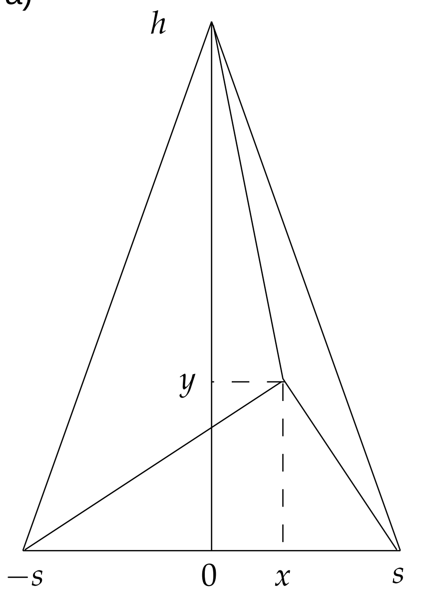
Für die Wasserhöhe gilt:

$x = h - h_1 \approx h - 0{,}956\,h \approx 0{,}044\,h,$

also $x = 0{,}044\,h$.

Aufgabe 890. $*$
Im gleichschenkligen Dreieck mit Grundseite $2s$ und Höhe h suchen wir den Punkt, für den die Summe der Abstände zu den Ecken am kleinsten ist.
a) Zeige, dass der Punkt auf der Mittelsenkrechten liegen muss.
b) Bestimme seine Höhe über der Grundseite. (WJB)

Lösung: (Erinnert man sich an den FERMAT-Punkt aus MONOID 85, ist a) unmittelbar klar und b) folgt $y = \frac{s}{\sqrt{3}}$ aus $\tan 30^\circ = \frac{y}{s}$. Es geht aber auch mit Analysis:)
a)



Für den Punkt mit Koordinaten (x, y) sind die Abstände $a_1(x) = \sqrt{(s+x)^2 + y^2}$,
$a_2(x) = \sqrt{(s-x)^2 + y^2}$ und
$a_3(x) = \sqrt{(h-y)^2 + x^2}$.
$a_3(x)$ ist offensichtlich minimal für $x = 0$. Sei $f(x) = a_1(x) + a_2(x)$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{s+x}{\sqrt{(s+x)^2 + y^2}} - \frac{s-x}{\sqrt{(s-x)^2 + y^2}}.$$

$f'(x) = 0$ ergibt $(s+x)\sqrt{(s-x)^2 + y^2} = (s-x)\sqrt{(s+x)^2 + y^2}$ bzw. nach Quadrieren $(s+x)^2 y^2 = (s-x)^2 y^2$ und somit $x = 0$. Also ist f an der gleichen Stelle $x = 0$ minimal.

b) Für $x = 0$ ist die Summe der Abstände

$$S(y) = 2\sqrt{s^2 + y^2} + \sqrt{(h-y)^2} = 2\sqrt{s^2 + y^2} + |h - y|$$

Für $y > h$ ist $S(y) = 2\sqrt{s^2 + y^2} + y - h$ offensichtlich wachsend. Den kleinsten Wert nimmt $S(y)$ also für ein $y \leq h$ an. Dort gilt

$$S'(y) = \frac{2y}{\sqrt{s^2 + y^2}} - 1.$$

Dies wird 0, wenn $4y^2 = s^2 + y^2$, d.h. wenn $y = \frac{s}{\sqrt{3}}$, falls dieser Wert kleiner als h ist. Sonst ist $S'(y) \neq 0$ für alle $y < h$.

$S(y)$ nimmt also seinen kleinsten Wert an für
$y = \frac{s}{\sqrt{3}}$, falls $\frac{s}{\sqrt{3}} < h$,
$y = h$, falls $\frac{s}{\sqrt{3}} \geq h$.

Bemerkenswert ist, dass die Lage des Punktes für $h > \frac{s}{\sqrt{3}}$ von der Höhe des Dreiecks nicht mehr abhängt.

Das Jones-Polynom zur Unterscheidung von Knoten

Von Cynthia Hog-Angeloni

Nichtmathematiker glauben oft, dass wir Mathematiker nur versuchen, ein paar zusätzliche Millionen Dezimalstellen der Zahl π zu berechnen. Vielen ist nicht bekannt, dass heute mehr mathematische Resultate erzielt werden als zu jeder anderen Zeit der Menschheitsgeschichte.

Besonders wirksam begegnet man diesem Missverständnis, wenn man das Anliegen der **Knotentheorie** erläutert. Seit mehr als hundert Jahren ist sie der Gegenstand von Forschungen, deren aufsehenerregendsten Resultate in den letzten 25 Jahren erzielt wurden. Offene Probleme sind leicht zu formulieren und noch zahlreich vorhanden. Man erhält eine Ahnung davon, was das Wesen der Forschung ausmacht.

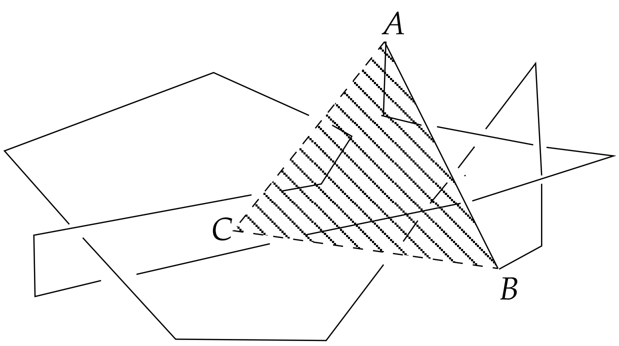
Ein **Knoten** ist ein in sich verschlungener Kreis. Um „wilde" Knoten, die Häufungspunkte von Verknotungen haben können, auszuschließen, setzen wir fest:

Definition:

a) Ein *Knoten* ist ein geschlossener Polygonzug mit endlich vielen Kanten im Raum.

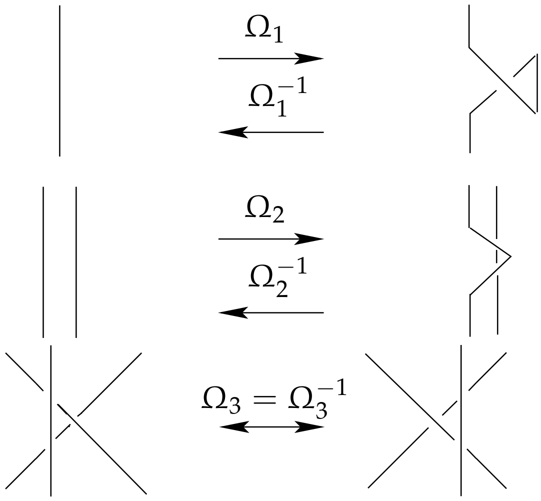
b) Zwei Knoten sind *äquivalent*, wenn sie sich durch elementare Deformationen ineinander überführen lassen.

c) Wähle eine Strecke $\overline{AB}$ auf dem Knoten sowie den Punkt C außerhalb, so dass das Dreieck $\triangle ABC$ nur die Strecke $\overline{AB}$ mit dem Knoten gemeinsam hat. Das Ersetzen der Strecke $\overline{AB}$ durch die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sowie der umgekehrte Prozess wird als *elementare Deformation* bezeichnet.



In Wirklichkeit zeigt das Bild natürlich eine *ebene Knotenprojektion*, bei der an jedem Punkt die Überkreuzung markiert ist. Wir nennen dies ein *Knotendiagramm*; aus diesem kann der Knoten eindeutig rekonstruiert werden. Das *triviale Diagramm* besteht aus der Randlinie eines Dreiecks in der Zeichenebene; der zugehörige Knoten heißt *trivialer Knoten*, oder (aus der englischsprachigen Literatur) *Unknoten*.

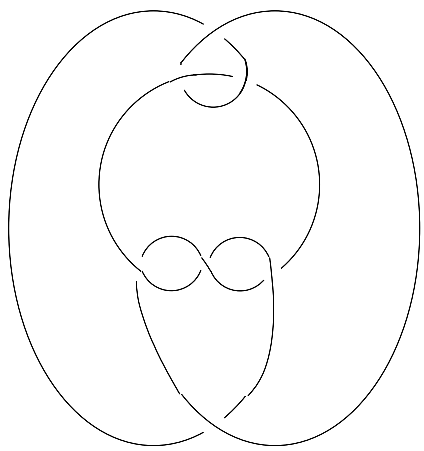
Man macht sich leicht klar, dass die folgenden drei, von KURT REIDEMEISTER (1893-1971) eingeführten Ω-*Prozesse* an Knotendiagrammen den Knoten in seiner Äquivalenzklasse belassen.



Umgekehrt bewies REIDEMEISTER, dass Diagramme zu äquivalenten Knoten stets durch eine Folge von $\Omega^{\pm 1}$-Prozessen auseinander hervorgehen.

Schon früh stellten Mathematiker Knoten*tabellen* nach aufsteigender Überkreuzungszahl auf, s. z.B. `http://www.math.toronto.edu/~drorbn/KAtlas/Knots/index.html`. Die schwierigste Aufgabe ist es dabei, die Liste zu minimieren, d.h. Knoten, die zweimal mit verschiedenen Projektionen in der Liste vorkommen, aufzuspüren und zu eliminieren.

Die Versuchung ist groß, nach einem Algorithmus zu suchen, der für zwei vorgelegte Diagramme entscheidet, ob sie denselben Knoten bestimmen, indem man eine Schranke für die notwendige Kreuzungszahl angibt. Eine solche Schranke ist aber nicht bekannt und zumindest kann es nicht das Maximum der Kreuzungszahlen in den zu vergleichenden Diagrammen sein: Das folgende Diagramm[3] beschreibt den trivialen Knoten, aber beim Anwenden der Ω-Prozesse wird die Kreuzungszahl zunächst steigen, weil das Diagramm nur die Prozesse $\Omega_1^{+1}, \Omega_2^{+1}$ zulässt, welche die Kreuzungszahl erhöhen.



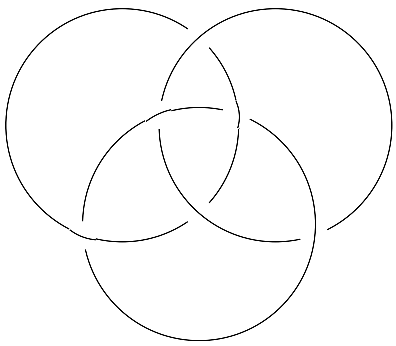
Wenn zwei Diagramme äquivalente Knoten beschreiben, kann man i.a. durch Herumprobieren den einen in den anderen überführen. Wie aber kann man bei zwei offenkundig verschiedenen Knoten die Verschiedenheit *beweisen*?

[3] Aus ästhetischen Gründen stellt man Knoten häufig „abgerundet" dar. Der Leser stelle sich einen approximierenden Kantenzug mit gleichem Kreuzungsverhalten vor.

Hierzu ordnet man jedem Knoten eine *Invariante* zu, z.B. ein Polynom $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, so dass *äquivalente Knoten dasselbe Polynom* bestimmen.
Wenn es gelingt, ein invariantes Polynom zu finden, braucht man nur noch die Polynome der zu vergleichenden Knoten auszurechnen; wenn diese verschieden sind, können die Knoten nicht äquivalent gewesen sein.

Wir wollen hier das JONES-Polynom untersuchen, das 1984 von VAUGHAN F. R. JONES entdeckt wurde und einen wahren Erdrutsch in der Knotentheorie verursacht hat. Für seine Arbeit wurde VAUGHAN JONES 1990 die Fieldsmedaille verliehen, die als Nobelpreis für Mathematik (den es nicht gibt), angesehen wird.

Dabei werden wir den von LOUIS KAUFFMAN entwickelten einfacheren Weg über das *Klammerpolynom* beschreiten. Dies ist nicht ganz wie oben beschrieben, sondern ein LAURENT-Polynom der Gestalt $a_{-m}x^{-m} + \ldots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, in dem die Variable x also mit positiven *und* mit negativen Exponenten auftreten darf. Beide Polynome sind nicht nur für Knoten, sondern allgemeiner für *Verkettungen* definiert, die nicht nur aus einem, sondern i.A. aus mehreren, in sich und untereinander verschlungenen Kreisen bestehen dürfen.



Für die Definition des JONES-Polynoms wird später dann noch ein Korrekturfaktor hinzutreten.

Ein zentrales Merkmal des Klammerpolynoms $\langle V \rangle$ einer Verkettung V besteht darin, dass es berechnet werden kann, indem man an einer Kreuzung von V die beiden *Umschaltungen* vornimmt, die Kreuzung also lokal ersetzt einmal durch die *positive* Umschaltung , bei der der vormals unterkreuzende Bogen nun rechts abbiegt und einmal durch die *negative* Umschaltung , bei der der vormals unterkreuzende Bogen nun links abbiegt.

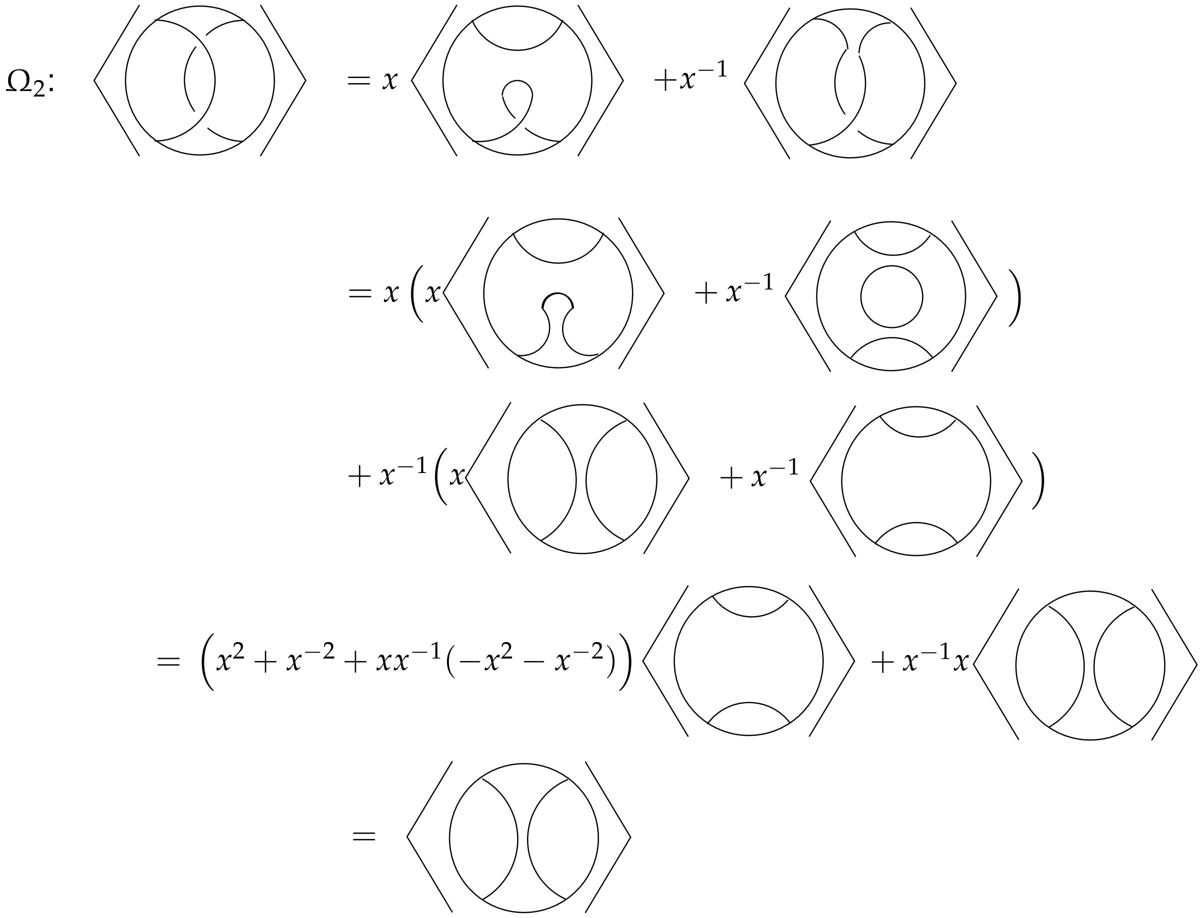
Eine konkrete Berechnungsvorschrift (Definition) für das Klammerpolynom $\langle V \rangle$ das Klammerpolynom einer Verkettung V findet man in dem Buch von Livingstone. Uns genügt es hier, drei Eigenschaften von $\langle V \rangle$ aufzulisten:

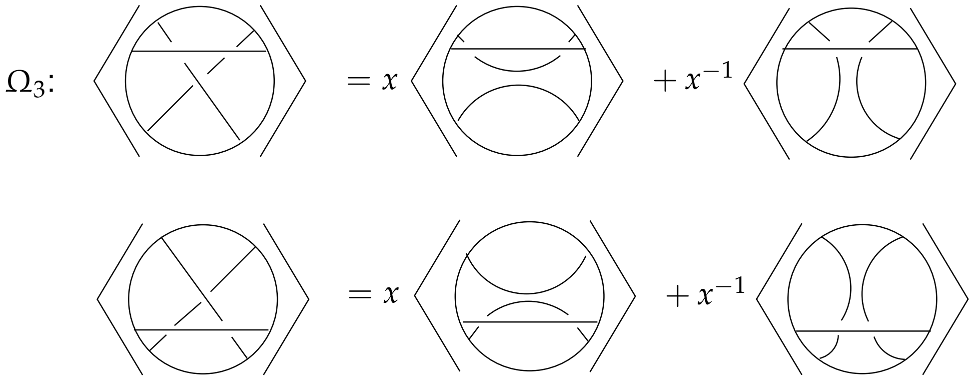
a) $\langle \bigcirc \rangle = 1$: Das Klammerpolynom des trivialen Knotens ist 1.

b) $\langle V \bigcirc \rangle = -(x^{-2} + x^2)\langle V \rangle$: Wenn zu einer Verkettung ein trivialer Knoten hinzugefügt wird, ohne dass dieser mit der Verkettung verschlungen ist, wird das Klammerpolynom mit $-(x^{-2} + x^2)$ multipliziert.

c) $\langle \; \rangle = x\langle \; \rangle + x^{-1}\langle \; \rangle$: Das Klammerpolynom einer Verkettung lässt sich aus den Klammerpolynomen der an einer Kreuzung umgeschalteten Verkettung berechnen.

Satz 1: Das Klammerpolynom ist invariant unter $\Omega_2^{\pm 1}$ und $\Omega_3^{\pm 1}$.
Beweis:

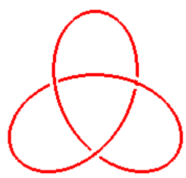




Dass die jeweils linken Summanden gleich sind, folgt aus der eben bewiesenen Invarianz unter Ω_2.

□

Aufgabe: Man bestimme das Klammerpolynom der *Kleeblattschlinge*.



Allerdings ist das Klammerpolynom *nicht* invariant unter $\Omega_1^{\pm 1}$. Um Abhilfe zu schaffen, wollen wir unseren Knoten oder unsere Verkettung V orientieren, d.h. jeden Kreis (jede Komponente) von V mit einem Durchlaufssinn versehen. Wir weisen dann einer Kreuzung den Wert $+1$ zu, wenn der unterkreuzende Strang von rechts kommt und den

Wert -1, wenn der unterkreuzende Strang von links kommt. Die Summe dieser Zahlen über alle Kreuzungen heißt die *Windungszahl* $\omega(V)$ der orientierten Verkettung.

Satz 2: Die Windungszahl ist invariant unter $\Omega_2^{\pm 1}$ und $\Omega_3^{\pm 1}$.

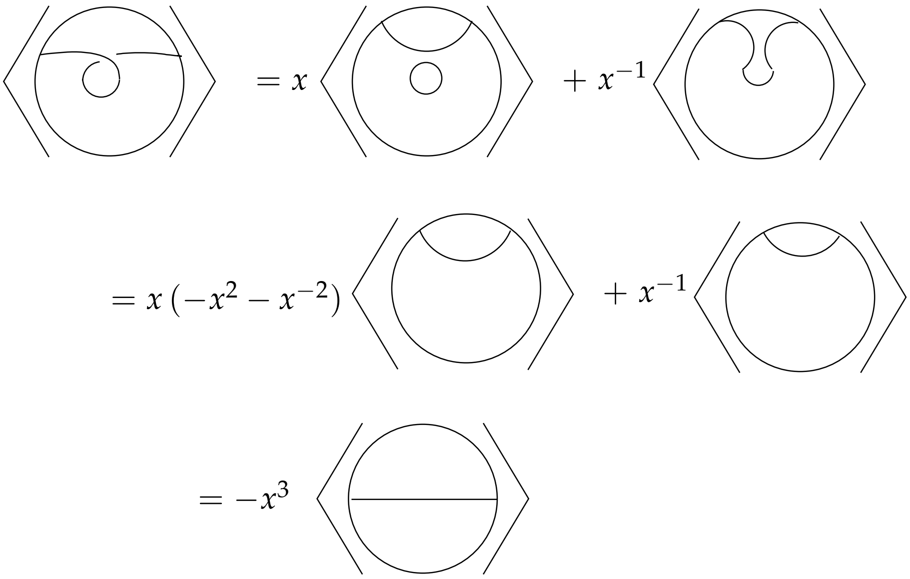
Der **Beweis** besteht in bloßem Aufzeichnen mit Fallunterscheidungen und sei dem Leser überlassen. $\square$

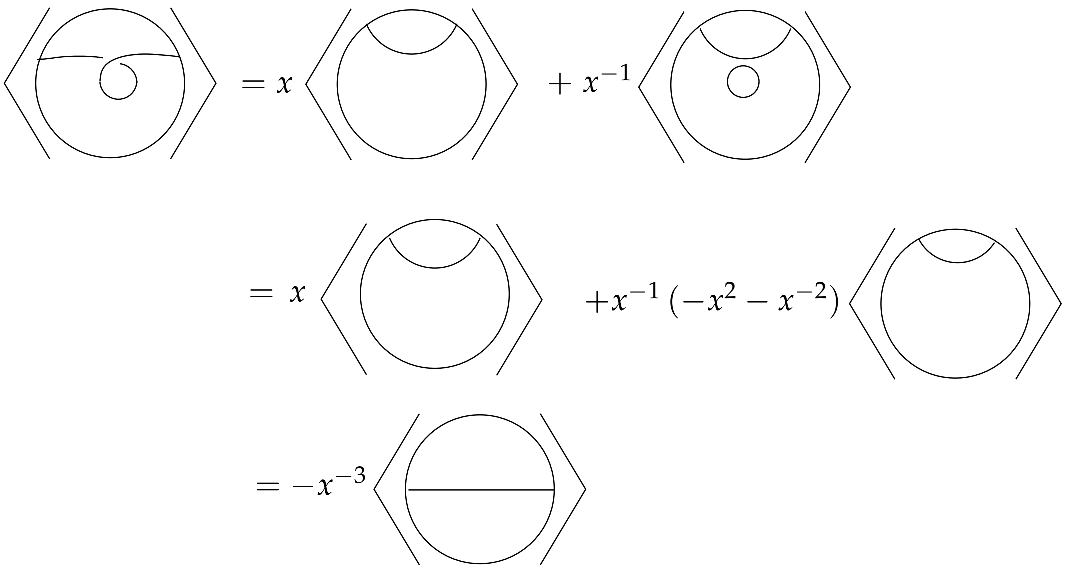
Definition:
Das JONES-Polynom einer orientierten Verkettung V ist gegeben durch $P(V) = (-x^3)^{-\omega(V)}\langle V\rangle$.

Satz 3: Das JONES-Polynom einer orientierten Verkettung V ist invariant unter allen Ω-Prozessen.

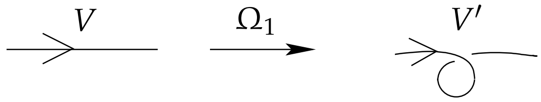
Beweis: Die Prozesse $\Omega_2^{\pm 1}$ und $\Omega_3^{\pm 1}$ verändern weder $\omega(V)$ noch $\langle V\rangle$, also auch nicht $P(V)$.

Untersuchen wir zunächst die Wirkung einer Reidemeister-Bewegung vom Typ 1 auf das Klammerpolynom.





Mit diesen Gleichungen können wir die Invarianz des JONES-Polynoms unter $\Omega_1^{\pm 1}$ beweisen:



Es gilt $\omega(V') = \omega(V) + 1$. Somit ist

$$\begin{aligned}
P(V') &= (-x^3)^{-\omega(V')}\langle V'\rangle \\
&= (-x^3)^{-(\omega(V)+1)}\langle V'\rangle \\
&= (-x^3)^{-(\omega(V)+1)}\Big((-x^3)\langle V\rangle\Big) \\
&= (-x^3)^{-\omega(V)}\langle V\rangle \\
&= P(V).
\end{aligned}$$

Ähnlich sieht man auch bei den anderen Varianten von Ω_1, dass das JONES-Polynom unverändert bleibt. $\square$

Das originale JONES-Polynom erhält man, indem man in $P(V)$ die Variable x durch $t^{-\frac{1}{4}}$ ersetzt; es hat also i.a. nicht mehr ganzzahlige Exponenten.

Kann man nun mit Hilfe des JONES-Polynoms **jeden** nichttrivialen Knoten vom trivialen unterscheiden? Dies ist ein ungelöstes Problem: Bisher hat niemand einen nichttrivialen Knoten mit JONES-Polynom gleich 1 gefunden, es konnte aber auch noch niemand beweisen, dass es einen solchen Knoten nicht gibt.

Allerdings gibt es *Verkettungen* mit dieser Eigenschaft, (dasselbe JONES-Polynom wie die triviale Verkettung zu haben); diese wurden von LOUIS KAUFFMANN und PAUL THISTLEWAITE gefunden. Auch gibt es verschiedene (nichttriviale) Knoten mit gleichem JONES-Polynom.

Selbst mit modernsten Computern lassen sich die Polynome nur für „kleine“ Knoten berechnen; ab etwa 250 Kreuzungen würden alle bekannten Programme monatelang an dem Polynom eines einzigen Knotens rechnen.

Literatur

C. C. Adams: *Das Knotenbuch*. Spektrum-Verlag 1995

G. Burde und H. Zieschang: *Knots*. de Gruyter 2003

C. Livingston: *Knotentheorie für Einsteiger*. vieweg

M. Michaelis: *Knotentheorie*. In: C. Hog-Angeloni und W. Metzler: *Dokumentation der Ersten Hessischen Schülerakademie*. `www.hsaka.de`

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe
Monoidaner: Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Alexander Gerharz, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Philipp Mayer und Rebecca Zimmer
Zusammenstellung und Layout: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Internet: Marcel Gruner mit Unterstützung durch Jens Mandavid

MONOID Jahrgang 26 Heft 87 September 2006

Inhalt

Abonnementbestellungen über die MONOID-Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', zu überweisen; **Adresse nicht vergessen** (oder Bestellung über Internet).
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
D-55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107
Fax: 06131/39-24389

e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`