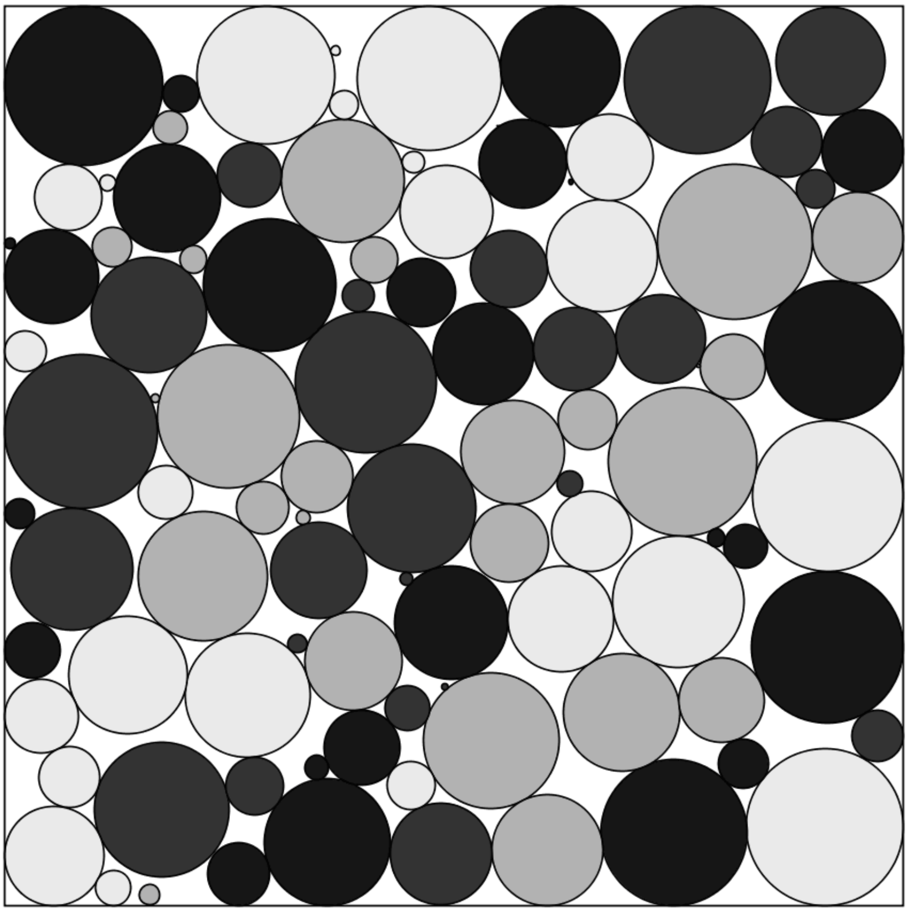
Jahrgang 26 Heft 88 Dezember 2006

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen

1980 begründet von Martin Mettler;

gegenwärtig herausgegeben vom

Institut für Mathematik an der

Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.02.2007.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.

Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:

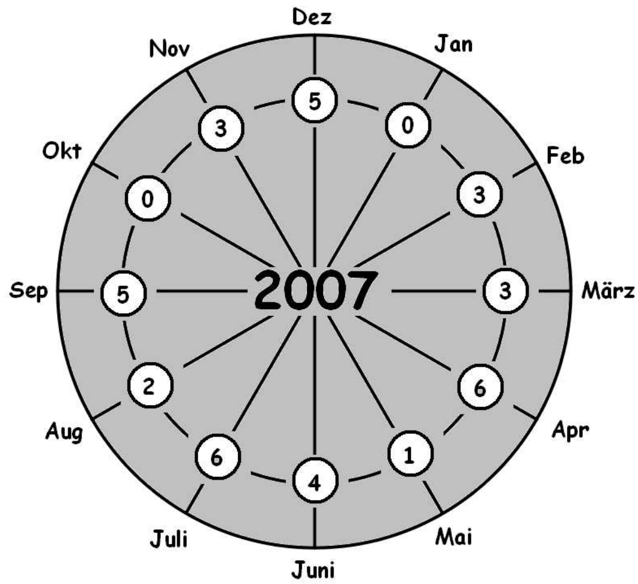
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Eine Kalenderuhr für 2007

Von Heike Winkelvoß

Montag	1
Dienstag	2
Mittwoch	3
Donnerstag	4
Freitag	5
Samstag	6
Sonntag	0



Man kann das Zifferblatt einer Uhr in eine Kalenderuhr für 2007 verwandeln, indem man jeder Stundenzahl der Reihe nach den zugehörigen Monat im Jahr zuordnet und außerdem noch Zahlen von 0 bis 6, wie in der Abbildung gezeigt. Nun ordnen wir den Zahlen von 0 bis 6 entsprechend der Tabelle oben noch die Wochentage zu.

Wozu kann man diese Kalenderuhr verwenden? Nun, man kann für jedes beliebige Datum 2007 den Wochentag herausfinden. Wenn wir z.B. wissen wollen, auf welchen Wochentag der Heiligabend fällt, gehen wir so vor: Heiligabend gehört zum Dezember. Dem Dezember ist die 5 zugeordnet. Wir rechnen

$$5 + 24 = 29 = 4 \cdot 7 + \mathbf{1}$$

Der Rest, den 29 bei Division durch 7 lässt, entspricht dem Montag. Heiligabend fällt also 2007 auf einen Montag.

Aufgaben

1. Auf welchen Wochentag fällt der 3. Oktober 2007?

2. Der „Mathetreff-3456“ des Zentrums für Mathematik findet in Wiesbaden 2007 im März immer freitags statt. Finde mit Hilfe der Kalenderuhr heraus, welches Datum diese Freitage haben.

3. a) Wo kommen die Zahlen für die Monate her?
   b) Baue eine Kalenderuhr für 2008.

Die MONOID–Redaktion wünscht allen unseren Lesern und Lösern ein frohes und erfolgreiches

2007 !

Färbungen von Zerlegungen

Von Tina Kaplan und Stephan Rosebrock

Gleichseitige Vielecke

In Abbildung 1 siehst du drei verschiedene Zerlegungen der Ebene, die wir der Einfachheit

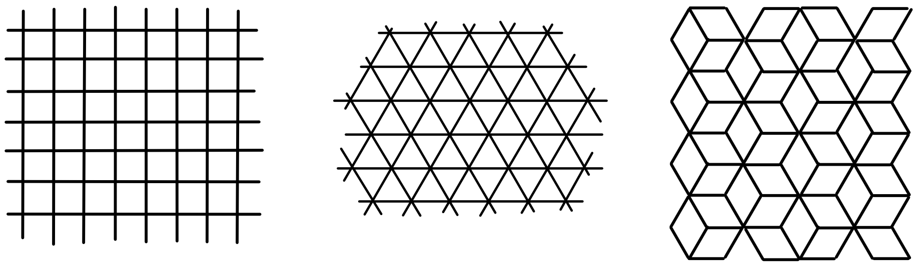


Abbildung 1: Quadratzerlegung, Dreieckszerlegung und Rautenzerlegung

halber Quadratzerlegung, Dreieckszerlegung und Rautenzerlegung nennen wollen. *Zerlegung* heißt, dass die Ebene durch Parkettsteine, die sich nicht überlappen, vollständig bedeckt ist. Die Zerlegungen bedecken also jeweils nicht nur einen endlichen Ausschnitt der Ebene, wie im Bild, sondern gehen unendlich weiter in alle Richtungen. Auf der monoid-homepage findest du diese Zerlegungenin Din A 4 Größe zum Drucken, damit du im Weiteren selber experimentieren kannst.

Wir betrachten verschiedene Färbungen dieser Zerlegungen. Wir wollen also manche Parkettsteine ausmalen. In der Quadratzerlegung kann man 4 Kacheln so färben, dass die Mittelpunkte der gefärbten Kacheln ein gleichseitiges Viereck (also ein Quadrat oder eine Raute) bilden. Eine Möglichkeit dazu siehst du in Abbildung 2 links.

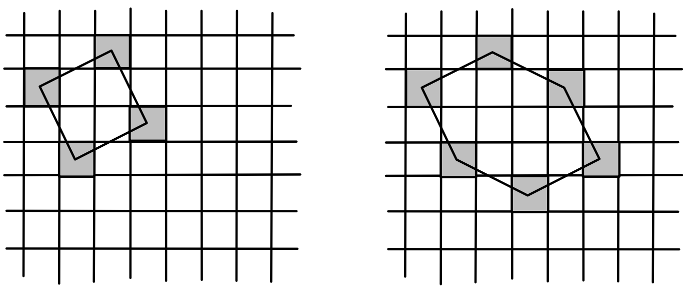


Abbildung 2: Quadratzerlegung mit gefärbtem Quadrat und Sechseck

Ebenso ist es möglich, 6 Kacheln zu färben, so dass man durch Verbinden der Kachelmittelpunkte ein gleichseitiges Sechseck erhält, wie man in Abbildung 2 rechts sehen kann.

Knobelaufgabe 1 *Zeichne in der Quadratzerlegung ein gleichseitiges (nicht unbedingt regelmäßig aussehendes) Achteck, ein gleichseitiges Zehneck und ein gleichseitiges 18-Eck durch Färben von 8, 10, bzw. 18 Kacheln.*

Vielleicht hast du dich schon gewundert, dass wir nur Vielecke mit gerader Anzahl von Ecken gezeichnet haben. Hast du einmal versucht, eines mit ungerader Eckenzahl zu finden? Man kann beweisen, dass das nicht gelingen kann.

Knobelaufgabe 2 *Kann man mit unserer Kachel-Färbe-Methode zu jeder vorgegebenen geraden Anzahl Ecken ein gleichseitiges Vieleck mit dieser Eckenzahl in die Quadratzerlegung einzeichnen? Wie kannst du deine Behauptung begründen?*

Es ist auch nicht schwer, in der Quadratzerlegung Rauten zu finden, die kein Quadrat sind, wenn man die Diagonalen der Raute parallel zu den Geraden der Zerlegung legt. Schwieriger ist das Folgende:

Knobelaufgabe 3 *Zeichne in der Quadratzerlegung eine schräg liegende Raute, die kein Quadrat ist, durch Färben von 4 Kacheln. Wenn du eine Färbung gefunden hast: Wie kannst du sicher sein, dass die Kanten wirklich gleich lang sind? Benutze den Satz des Pythagoras zum Beweis.*

Wir wollen nun dieselben Überlegungen auch für die Dreiecks- und die Rautenzerlegung anstellen. In beiden Zerlegungen findet man zum Beispiel sehr leicht gleichseitige Dreiecke und gleichseitige Sechsecke. Gleichseitige Vierecke, also Rauten, sind schon ein bisschen schwieriger zu finden; besonders in der Rautenzerlegung. Ein Tipp dazu: Zeichne die Raute zuerst so, dass sie nicht Rautenmittelpunkte als Ecken hat, sondern Ecken der Zerlegung. Danach kannst du die Raute parallel verschieben, so dass ihre Ecken auf Rautenmittelpunkten zu liegen kommen.

Knobelaufgabe 4 *Finde heraus, welche gleichseitigen n-Ecke man durch Färben von n Kacheln in die Dreiecks- und die Rautenzerlegung zeichnen kann. Du musst wahrscheinlich am Anfang ein bisschen ausprobieren. Finde dann Strategien, wie man andere Vielecke finden kann.*

Bei 5-Ecken scheint das Problem schwierig zu werden. Wir finden nur gleichseitige 5-Ecke in beiden Zerlegungen, die in einer Ecke einen Winkel von $180°$ haben. Das zählt ja eigentlich nicht als Ecke. Gibt es gleichseitige 5-Ecke ohne $180°$ Winkel?

Symmetrien von gefärbten Zerlegungen

Wenn du noch einmal die ungefärbten Zerlegungen in Abbildung 1 anschaust, siehst du, dass jede Zerlegung bestimmte Symmetrien zulässt, so dass die ganze Zerlegung wieder auf sich selbst abgebildet wird. Mit Symmetrien meinen wir Verschiebungen, Drehungen und Achsenpiegelungen (es gibt auch noch sogenannte Gleitspiegelungen, die wir hier aber nicht betrachten wollen).

Bei der Quadratzerlegung sind $90°$-Drehungen und Vielfache davon um die Kachelmittelpunkte und Eckpunkte möglich, außerdem gibt es 180°-Drehungen um die Seitenmitten. Verschieben kann man die Zerlegung um Vielfache der Seitenlänge und der Diagonale in die jeweiligen Richtungen. Spiegelungen sind an allen Gitterlinien und den Diagonalen möglich, außerdem an den Senkrechten auf den Seitenmitten.

Knobelaufgabe 5 *Finde alle Symmetrien der Dreiecks- und der Rautenzerlegung.*

Nun werden wir die Zerlegungen wieder färben und uns die Symmetrien der gefärbten Zerlegungen genauer anschauen. Eine Symmetrie der gefärbten Zerlegung soll eine Symmetrie der Zerlegung sein, die alle gefärbten Kacheln wieder auf gefärbte Kacheln abbildet. Zum Beispiel sind in Abbildung 2 links nur noch Drehungen möglich und zwar um $90°$ und Vielfache davon um den Quadratmittelpunkt des eingezeichneten Quadrats. In Abbildung 2 rechts geht nur noch eine Drehung um $180°$. Siehst du, um welchen Punkt?

Wenn wir genau ein Dreieck in der Dreieckszerlegung färben, sind nur noch 3 Drehungen und 3 Spiegelungen möglich (wenn wir die Drehung um 0° als Drehung mitzählen). Alle anderen Symmetrien der ungefärbten Zerlegung würden gefärbte Kacheln auf ungefärbte abbilden und umgekehrt.

Knobelaufgabe 6 *Welche Symmetrien haben die anderen beiden Zerlegungen, wenn du jeweils genau eine Kachel färbst?*

Knobelaufgabe 7 *Kannst du dieselben Symmetrien wie in Knobelaufgabe 6 auch durch das Färben von mehreren, sagen wir n, Kacheln erreichen? Welche Zahlen sind für n möglich?*

In der Quadratzerlegung haben wir 4 Kacheln so färben können, dass wir nur noch drehen konnten so wie in Abbildung 2 links. Spiegelungen sind dort nicht mehr möglich. Dabei haben wir auch die maximale Anzahl Drehungen realisiert, nämlich Drehungen um 90° und Vielfache davon.

Knobelaufgabe 8 *Finde in der Dreieckszerlegung eine Färbung, die die maximale Anzahl von Drehungen zulässt, also Drehungen um 60° und Vielfache davon, aber keine anderen Symmetrien. Wie viele Kacheln musst du dazu mindestens färben?*

Knobelaufgabe 9 *Findest du Färbungen der Rautenzerlegung, so dass du nur noch drehen und nicht mehr spiegeln kannst? Finde also beispielsweise ein gleichseitiges Sechseck so dass die einzigen Symmetrien, die gefärbte Kacheln auf gefärbte Kacheln abbilden, Drehungen sind.*

$*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$

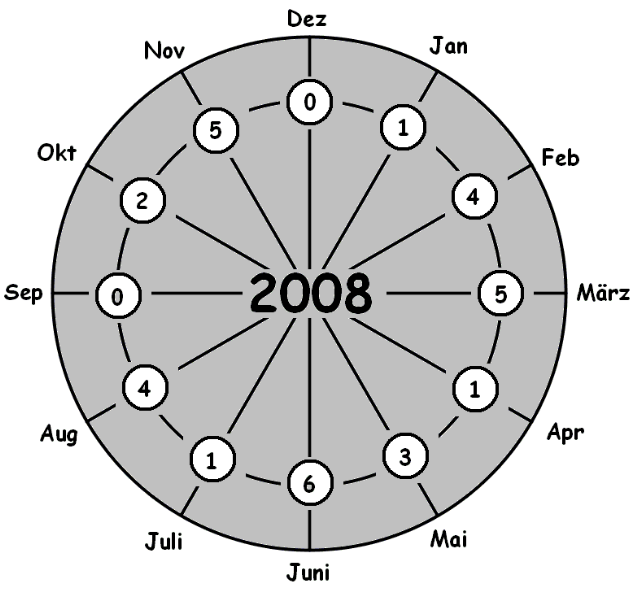
Lösungen der Aufgaben zur Kalenderuhr für 2007

1. Oktober hat die 0, also $0 + 3 = 3 = 0 \cdot 7 + 3$. Der 3.10.2007 ist ein Mittwoch.

2. Dem März entspricht 2007 die Zahl 3. Gesucht sind also alle Zahlen n von 1 bis 31, deren Summe mit 3 bei Division durch 7 den Rest 5 lassen. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Zahlen n selbst bei Division durch 7 den Rest 2 lassen: $n = 2, 9, 16, 23, 30$. Der Mathetreff findet 2007 also am 2.3., 9.3., 16.3., 23.3. und 30.3. statt.

3. a) Die Zahlen für die Monate bezeichnen stets den Wochentag des Monatsletzten des Vormonats.

b)



2007 2007 Die Seite zum Neuen Jahr 2007 2007

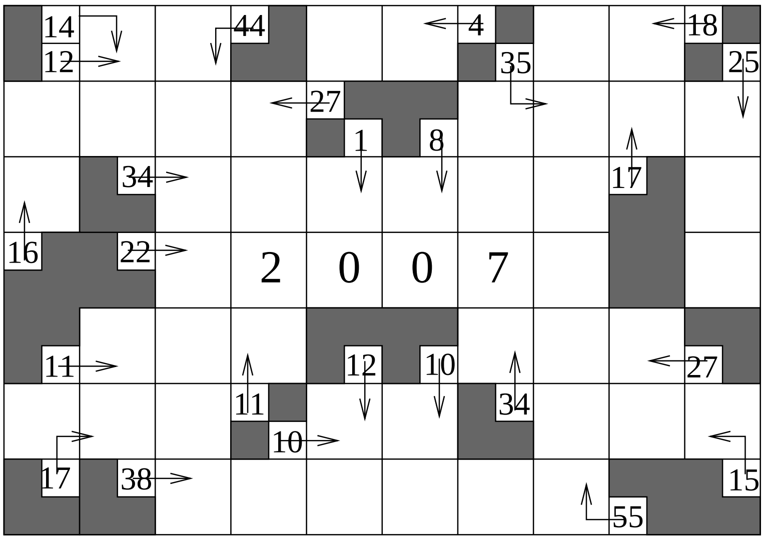
von Hartwig Fuchs

Scherenschnitte im Jahr 2007

Du hast 4 Papierstücke. Mit einer Schere zerschneidest Du eine beliebige Anzahl von ihnen und zwar jedes in 4 Stücke. Von den danach vorhandenen Papierstücken zerschneidest Du erneut eine beliebige Anzahl wiederum jedes in 4 Teile. Wenn Du so weiter machst, kannst Du dann durch irgend eine Zerschneidungstaktik erreichen, dass 2007 Papierstücke vorhanden sind?

Lauter Quersummen

Es stehen 45 Ziffern zur Verfügung: eine Ziffer 1, zwei Ziffern 2, . . ., neun Ziffern 9 – die Ziffern 2,0,0,7 sind nicht mitgezählt. Diese 45 Ziffern sind so in die leeren Felder einzusetzen – pro Feld eine Ziffer – dass die dabei entstehenden Zahlen in Pfeilrichtung gelesen die bei dem jeweiligen Pfeil stehende Zahl als Quersumme besitzen.



Vergessene Rechenzeichen

1 2 3 4 =

2 3 4 5 =

3 4 5 6 =

4 5 6 7 =

Zwischen den 4 Zahlen jeder Zeile fehlen die Rechenzeichen. Es sind ″+″,″ –″ und ″·″ möglich. Die Ziffern rechts von den Gleichheitszeichen ergeben, von oben nach unten gelesen, eine in diesem Jahr häufig vorkommende Zahl.

Kannst Du die vier Gleichungen rekonstruieren?

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –

Abbott, Edwin A.: „Flächenland “.

„Nehmt einmal einen Pfennig und legt ihn mitten auf euren Tisch im Raumland. Wenn ihr ihn von oben betrachtet, wird er als ein Kreis erscheinen. Wenn ihr aber euer Auge immer mehr zum Tischrand hin bewegt, werdet ihr sehen, dass euer Pfennig immer flacher oval erscheint. Wenn ihr schließlich euer Auge genau am Tischrand haltet, seid ihr sozusagen eigentlich schon Flächenländer, und werdet dann ganz von selbst sehen, dass der Pfennig aufgehört hat, oval zu sein. Alles was ihr jetzt sehen könnt, ist eine gerade Linie.“Mit diesen Worten versucht das Quadrat als Bewohner des Flächenlandes dem Leser das Leben in seiner Heimat zu verdeutlichen. Wie man richtig vermutet, findet das Leben im Flächenland nur in zwei Dimensionen statt. Das Quadrat, als lyrisches Ich des Buches, berichtet vom Leben und der Gesellschaftsordnung im Flächenland, wo der gesellschaftliche Status eines Bewohners von der Regelmäßigkeit seiner Figur und der Anzahl seiner Ecken abhängt. Soldaten und Leibeigene sind gleichschenklige Dreiecke, der Mittelstand besteht aus gleichseitigen Dreiecken. Quadrate - wie der Erzähler - und Fünfecke sind Gelehrte; darüber steht der aus gleichseitigen Mehrecken bestehende Adel. Am angesehensten sind jedoch die Priester, die so viele Ecken vorweisen können, dass man sie fast für Kreise halten könnte. Bei einer solchen Gesellschaftsordnung verwundert es nicht, dass Frauen, die nur aus geraden Linien bestehen, nicht sehr hoch angesehen sind. Und diese abwertende Darstellung der Frau, die aus der Entstehungszeit von Abbotts Werk zu Ende des 19. Jahrhunderts zu erklären ist, stellt auch den einzigen Wermutstropfen des ansonsten sehr vergnüglichen Büchleins dar. Die Beurteilung einer Schülerin der 9. Klasse enthält damit die folgende Bewertung: „Ich bewerte das Buch mit „gut“, da es sehr spannend und anschaulich erzählt ist. Von den etwas altmodischen und frauenfeindlichen Ansichten des Autors abgesehen, sind die verschiedenen Dimensionen logisch erklärt und durch Skizzierungen veranschaulicht.“ Dieser Beurteilung kann sich der Rezensent nur anschließen. Die Idee eines Wechsels der Dimension ist so faszinierend, dass sie seit Abbott von drei weiteren Autoren in ähnlicher Weise aufgegriffen wurde: Dionys Burger: „Silvestergespräche eines Sechsecks“, Ian Stewart: „Flacherland. Die unglaubliche Reise der Vikki Line durch Raum und Zeit“ und Hans Borucki: „Online in die vierte Dimension“ (siehe die Rezension in MONOID Heft 79).

Fazit: Die faszinierende Idee eines Wesens - wie des Quadrates im Flächenland -, das es schafft, seinen Blick aus seiner angestammten Dimension hinaus zu erheben ist ein sehr reizvolles Gedankenexperiment. Die Erlebnisse des Quadrates, die dabei gewonnenen Erkenntnisse niemandem, der die Erfahrung nicht selbst gemacht hat, mitteilen zu können ohne für verrückt gehalten zu werden, stimmen traurig.
Auf Grund der Frauen gegenüber abwertenden Darstellung kann jedoch nur die folgende Gesamtbeurteilung vergeben werden: gut ☺☺

Angaben zum Buch: Abbott, Edwin A.: Flächenland. Franzbecker 1982, ISBN 3-88120020-7, TB 160 Seiten, 9,80 €.

Art des Buches:	Mathematischer Roman
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Martin Mattheis

Die „besondere“ Aufgabe

Von Kurt Rosenbaum

Man zeige: Die Zahl $a_n = 10^{2n} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^2 + 1 = 1010\ldots01$ mit $n+1$ Einsen ist für $n > 1$ niemals eine Primzahl.

Bemerkung: Bereits in MONOID 16 vom Dezember 1985 hatte H. Fuchs die folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe: Zeige: Die Zahl 10101 ist in jedem Zahlensystem zusammengesetzt.

Insbesondere ist diese Zahl im Zehnersystem keine Primzahl. Es besteht die Primfaktorzerlegung

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Beweis der erweiterten Behauptung:
Für $n = 1$ ist $a_1 = 101$ eine Primzahl. Es genügt zu zeigen, dass für $n > 1$ stets eine echte Zerlegung der Zahl a_n existiert.

1. Fall: n ist ungerade. Dann besteht die Zerlegung

$$a_n = \left(10^{n-1} + 10^{n-3} + 10^{n-5} + \ldots + 10^2 + 1\right) \times \left(10^{n+1} + 1\right)$$

Wegen $n \geq 3$ ist jeder der Faktoren größer als 1.
2. Fall: n ist gerade. Dann besteht die Zerlegung

$$a_n = \left(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1\right) \times \left(10^n - 10^{n-1} + 10^{n-2} - + \ldots - 10 + 1\right).$$

Wegen $n \geq 2$ ist jeder der Faktoren größer als 1.

Speziell für $n = 2$ ist

$$a_2 = 10101 = \left(10^2 + 10 + 1\right) \times \left(10^2 - 10 + 1\right).$$

Das ist die von H. Fuchs angegebene Zerlegung, aber noch nicht die Primfaktorzerlegung dieser Zahl.

Allgemein gilt: Ist $b \geq 2$ eine natürliche Zahl, so ist die Zahl

$$b_n = b^{2n} + b^{2n-2} + \ldots + b^2 + 1$$

für $n \geq 2$ zerlegbar. Ist n ungerade, so besteht die Zerlegung

$$b_n = \left(b^{n-1} + b^{n-3} + b^{n-5} + \ldots + b^2 + 1\right) \times \left(b^{n+1} + 1\right).$$

Ist n dagegen gerade, so haben wir

$$b_n = \left(b^n + b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1\right) \times \left(b^n - b^{n-1} + b^{n-2} - + \ldots - b + 1\right).$$

Hättest Du es gewusst: Was ist Didos Problem?

Von Hartwig Fuchs

Die Geschichte von Dido, so wie sie uns der römische Dichter Vergil in seinem Epos „Ainëis" berichtet, spielte sich um etwa 800 v. Chr. ab.
Dido war die Tochter des Königs Mutto von Tyros, einem kleinen Reich in der Gegend des heutigen Libanon. Als dieser König Mutto starb, entstand für Dido in den Wirren um die Thronfolge eine lebensbedrohende Situation. Deshalb floh sie mit einigen Getreuen übers Mittelmeer zu Jarbas, einem Herrscher über ein Gebiet an der lybisch-tunesischen Küste.

Von ihm erbat sie sich Land, um darauf für sich und ihre Leute eine Siedlung zu gründen. Jarbas aber wollte ihr nur soviel Land geben, „wie man mit einer Stierhaut umspannen kann."

Wie sollte Dido vorgehen, um möglichst viel Land zu erhalten? Dido hatte eine glänzende Idee:
Sie zerschnitt eine Stierhaut in lauter möglichst schmale Streifen, die sie dann zu einem geschlossenen Band zusammenknotete. Diese Schleife legte sie **kreisförmig** so in eine Ebene, dass sie auch einen dort befindlichen Hügel umgab – das so umgrenzte Gebiet schenkte ihr Jarbas.
Auf den Hügel baute Dido ihre Burg Byrsa (griechisch: byrsa – das Fell, auch: die Stierhaut), die den Kern ihrer Siedlung bildete. So wurde Dido nach der Legende[1] zur Gründerin der späteren Metropole und der sich aus ihr entwickelnden mittelmeerischen Weltmacht Karthago.

Warum hat Dido in der Ebene ein Kreisgebiet und nicht ein Gebiet von anderer Form mit ihrem Band festgelegt?
In dieser Frage steckt eine uralte geometrische Vermutung, die man **Didos Problem** oder auch das **isoperimetrische Problem** nennt:

(1) Welche unter allen ebenen geometrischen Figuren **gleichen Umfangs** hat die größte Fläche?

Eine Antwort auf diese Frage kann nur die Mathematik geben.
Bereits in babylonischer Zeit – möglicherweise auch schon früher – konnte man die Flächen einiger geometrischer Figuren – z. B. eines gleichseitigen Dreiecks, eines Quadrats, eines regelmäßigen Sechsecks sowie eines Kreises aus der Kenntnis ihres jeweiligen Umfangs mehr oder weniger genau berechnen.
Auch die Mathematiker von Tyros – das ja in der Nachbarschaft von Babylon lag – waren wohl dazu in der Lage. Dann aber wäre es für sie eine lösbare Aufgabe gewesen, für Dido die letzte Spalte der folgenden Tabelle (mit den babylonischen Näherungswerten $\sqrt{3} \approx \frac{7}{4}, \pi \approx 3$) für geometrische Figuren F von gegebenem Umfang U anzufertigen:

[1] Tatsächlich aber wurde Karthago von den Phöniziern gegründet.

Figur F	Seitenlänge s bzw. Radius r	Flächeninhalt von F exakter Wert f		Flächeninhalt von F Näherungswert f^*	
gleichs. Dreieck	$s = \frac{U}{3}$	$f = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$	$= \frac{U^2}{36}\sqrt{3}$	$f^* = \frac{U^2}{36} \cdot \frac{7}{4}$	$= \frac{14}{288}U^2$
Quadrat	$s = \frac{U}{4}$	$f = s^2$	$= \frac{U^2}{16}$	$f^* = \frac{U^2}{16}$	$= \frac{18}{288}U^2$
regelm. Sechseck	$s = \frac{U}{6}$	$f = 6 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$	$= \frac{U^2}{24}\sqrt{3}$	$f^* = \frac{U^2}{24} \cdot \frac{7}{4}$	$= \frac{21}{288}U^2$
Kreis	$r = \frac{U}{2\pi}$	$f = \pi r^2$	$= \frac{U^2}{4\pi}$	$f^* = \frac{U^2}{4 \cdot 3}$	$= \frac{24}{288}U^2$

Eine Tabelle wie diese könnte die Begründung sein für Didos Bitte an Jarbas, ihr ein kreisförmiges Gebiet zu schenken: sie erhielt so ein Gebiet größtmöglichen Flächeninhalts f^* – mit dem Hügel Byrsa als willkommene, die Fläche vergrößernde Zugabe.
Didos Entscheidung für ein kreisförmiges Gebiet ist eine – allerdings nur auf geometrischer Erfahrung (z. B. hinsichtlich der Werte von $\sqrt{3}$ und π) beruhende Antwort auf die Frage (1).
Der erste uns überlieferte Versuch eines Beweises, dass der Kreis die Lösung von Didos Problem ist, stammt von Zenodoros, der vermutlich im 2. Jahrhundert v. Chr. in Athen lebte. Sein Beweis ist unvollständig.
Ein strenger vollständiger Beweis wurde erst 1882 von F. Edler erbracht.
Ergänzung: Dido erhält ein doppelt so großes Gebiet, wenn sie – statt einen Kreis in der Ebene auszulegen – einen Halbkreis so platziert, dass sein Durchmesser auf der Küstenlinie liegt.
Sei nämlich der Radius des Kreises $r = 1$; dann hat dieser Kreis die Fläche π und den Umfang 2π. Ein Halbkreis jedoch, dessen Bogen die Länge 2π besitzt, hat wegen
Bogenlänge = $\frac{1}{2} \cdot 2\pi R = 2\pi$ den Radius $R = 2$ und mithin die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi$.
Die Gebietsbegrenzung durch einen Halbkreis und das Meer bedürfte allerdings der Zustimmung des Königs Jarbas, denn seine „Umschließungsbedingung“ ist im wörtlichen Sinne jetzt nicht mehr erfüllt.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Lösungen der Knobelaufgaben zum Artikel: Färbungen von Zerlegungen

Lösung zu Knobelaufgabe 1 *Zeichne in der Quadratzerlegung ein gleichseitiges (nicht unbedingt regelmäßig aussehendes) Achteck, ein gleichseitiges Zehneck und ein gleichseitiges 18-Eck durch Färben von 8, 10, bzw. 18 Kacheln.*

Es gibt viele Lösungen. Eine seht ihr in Abbildung 3. Dabei haben ”Ecken” vom 18-Eck 180° Winkel. Findest du auch ein gleichseitiges 18-Eck ohne 180° Winkel?

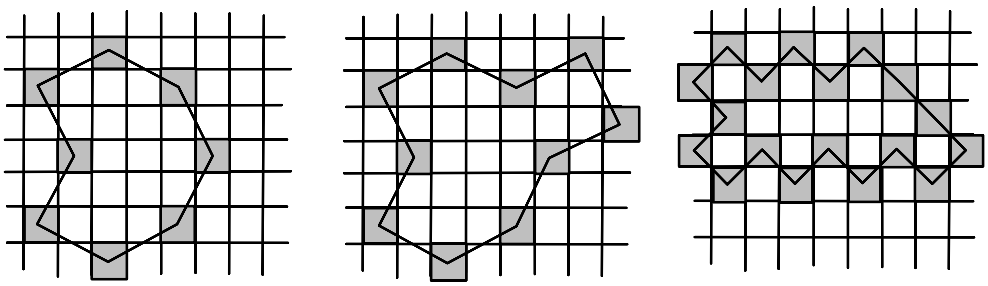


Abbildung 3: Quadratzerlegung mit gefärbtem 8-, 10- und 18-Eck

Lösung zu Knobelaufgabe 2 *Kann man mit unserer Kachel-Färbe-Methode zu jeder vorgegebenen geraden Anzahl Ecken ein gleichseitiges Vieleck mit dieser Eckenzahl in die Quadratzerlegung einzeichnen? Wie kannst du deine Behauptung begründen?*

Für kleine gerade Eckenzahlen haben wir bereits Lösungen angegeben. Für große Eckenzahlen setze man Zickzackmuster aneinander so wie beim gleichseitigen 18-Eck oben.

Lösung zu Knobelaufgabe 3 *Zeichne in der Quadratzerlegung eine schräg liegende Raute, die kein Quadrat ist, durch Färben von 4 Kacheln. Wenn du eine Färbung gefunden hast: Wie kannst du sicher sein, dass die Kanten wirklich gleich lang sind? Benutze den Satz des Pythagoras zum Beweis.*

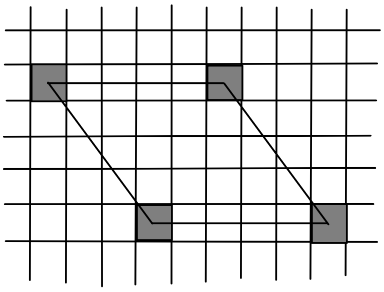


Abbildung 4: Raute in Quadratzerlegung

Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ hat das Viereck aus Abbildung 4 lauter gleich lange Seiten und ist damit eine Raute.

Lösung zu Knobelaufgabe 4 *Finde heraus, welche gleichseitigen n-Ecke man durch Färben von n Kacheln in die Dreicks- und die Rautenzerlegung zeichnen kann. Du musst wahrscheinlich am Anfang ein bisschen ausprobieren. Finde dann Strategien, wie man andere Vielecke finden kann.*

Mit der richtigen Strategie ergibt sich: Alle n-Ecke für $n \geq 3$.

Lösung zu Knobelaufgabe 5 *Finde alle Symmetrien der Dreiecks- und der Rautenzerlegung.*

Zur Dreieckszerlegung: Man kann an den Geraden der Zerlegung und an Geraden durch Ecken von Dreiecken und den gegenüberliegenden Seitenmitten spiegeln. Drehungen gibt es um Ecken der Zerlegung um Vielfache von $60°$ und um Dreiecksmittelpunkte um Vielfache von $120°$. Je zwei Dreiecke, die in dieselbe Richtung zeigen, lassen sich so ineinander verschieben, dass die ganze Zerlegung mit abgebildet wird. Außerdem gibt es noch sogenannte Gleitspiegelungen über die wir hier nicht reden wollen.
Zur Rautenzerlegung: Man kann an den Diagonalen jeder Raute spiegeln. Um die Eckpunkte der Zerlegung lassen sich Drehungen um Vielfache von $60°$ ausführen. Um die Mittelpunkte der Rauten lassen sich Drehungen um $180°$ ausführen. Je zwei Rauten, die gleich ausgerichtet sind, lassen sich so ineinander verschieben, dass die ganze Zerlegung mit abgebildet wird.

Lösung zu Knobelaufgabe 6 *Welche Symmetrien haben die anderen beiden Zerlegungen, wenn du jeweils genau eine Kachel färbst?*

In der Quadratzerlegung sind noch 4 Spiegelungen und Drehungen um Vielfache von 90° möglich. In der Rautenzerlegung kann man noch an den Diagonalen der gefärbten Raute spiegeln und um den Mittelpunkt um 180° drehen.

Lösung zu Knobelaufgabe 7 *Kannst du die selben Symmetrien wie in Knobelaufgabe 6 auch durch das Färben von mehreren, sagen wir n, Kacheln erreichen? Welche Zahlen sind für n möglich?*

In der Quadratzerlegung: $n = 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, \ldots$
In der Dreieckszerlegung: $n = 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, \ldots$
In der Rautenzerlegung: Alle n

Lösung zu Knobelaufgabe 8 *Finde in der Dreieckszerlegung eine Färbung, die die maximale Anzahl von Drehungen zulässt, also Drehungen um 60° und Vielfache davon, aber keine anderen Symmetrien. Wie viele Kacheln musst du dazu mindesten färben?*

Bei der Färbung aus Abbildung 5 sind nur noch Drehungen möglich.

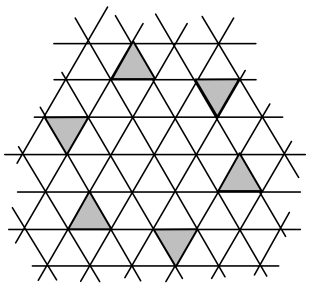


Abbildung 5: 6-Eck in Dreieckszerlegung

Lösung zu Knobelaufgabe 9 *Findest du Färbungen der Rautenzerlegung, so dass du nur noch drehen und nicht mehr spiegeln kannst? Finde also beispielsweise ein gleichseitiges Sechseck so dass die einzigen Symmetrien, die gefärbte Kacheln auf gefärbte Kacheln abbilden, Drehungen sind.*

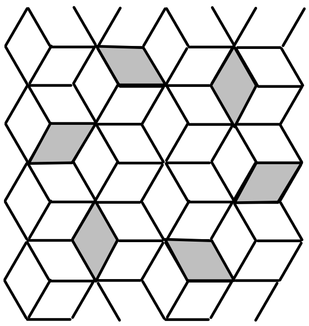


Abbildung 6: Rautenzerlegung mit drehsymmetrischem 6-Eck

2007 **Lösungen der Neujahrsaufgaben** 2007

Scherenschnitte

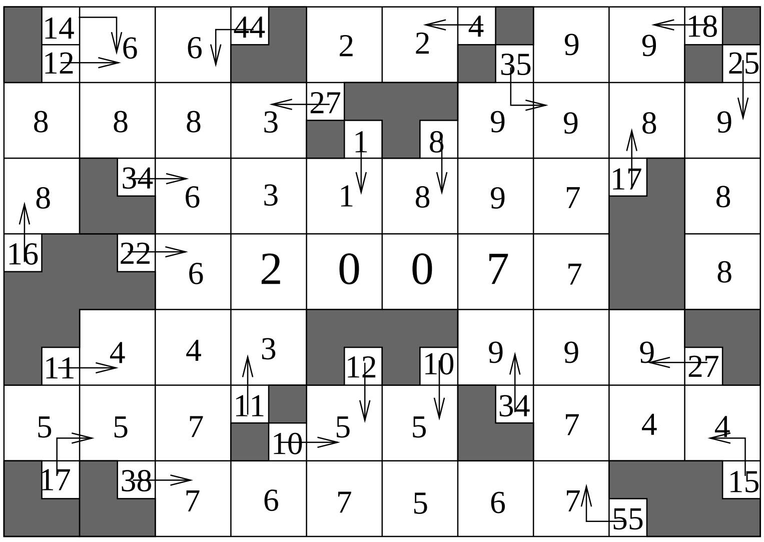
Ursprünglich hattest Du $1 + 3$ Papierstücke. Jedes Mal, wenn ein Papierstück zerschnitten wird, erhöht sich die Anzahl der vorhandenen Papierstücke um 3. Ganz gleich, wie viele Papierstücke Du also zerschneidest, die ursprüngliche Anzahl der Papierstücke erhöht sich dadurch um ein Vielfaches von 3. Die Anzahl der vorhandenen Papierstücke ist also stets $1+$ Vielfaches von 3. Wegen $2007 = 3 \cdot 669$ ist 2007 ein Vielfaches von 3 – so dass man durch den Zerschneidungsprozess niemals 2007 Papierstücke erhalten kann.

Lauter Quersummen

Eine Bezeichnung vorweg: $h27 \to 999$ bedeutet, dass horizontal in Richtung des Pfeils eine Zahl mit der Quersumme 27, hier 999 zu schreiben ist, usw. Entsprechend ist $v25 \to 988$ für vertikale Zahlen zu verstehen; usw.

Sind alle Ziffern i in Felder eingesetzt, dann schreiben wir dafür $[i]$, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Es gilt:

$h27$	$\to$	999	$\Rightarrow$	$v34$	$\Rightarrow$	9799						
$h18$	$\to$	99	$\Rightarrow$	$v17$	$\to$	89	$\Rightarrow$	$h35$	$\Rightarrow$	9989	$\Rightarrow$	$[9]$
$v1$	$\to$	10	$\Rightarrow$	$h4$	$\to$	22					$\Rightarrow$	$[1], [2]$
$v11$	$\to$	3233									$\Rightarrow$	$[3]$
$v16$	$\to$	88	und	$h27$	$\to$	3888	und	$v25$	$\to$	988		
			und	$v8$	$\to$	80					$\Rightarrow$	$[8]$
$v55$	$\to$	7797799	$\Rightarrow$	$h15$	$\to$	447	$\Rightarrow$	$h11$	$\to$	443	$\Rightarrow$	$[4]$
$h34$	$\to$	631897	und	$h22$	$\to$	620077	und					
	$v14$	$\to$	68	$\Rightarrow$	$h12$	$\to$	66	$\Rightarrow$	$v44$	$\Rightarrow$	6866477	usw.



Vergessene Rechenzeichen

$$1 + 2 + 3 - 4 = 2$$

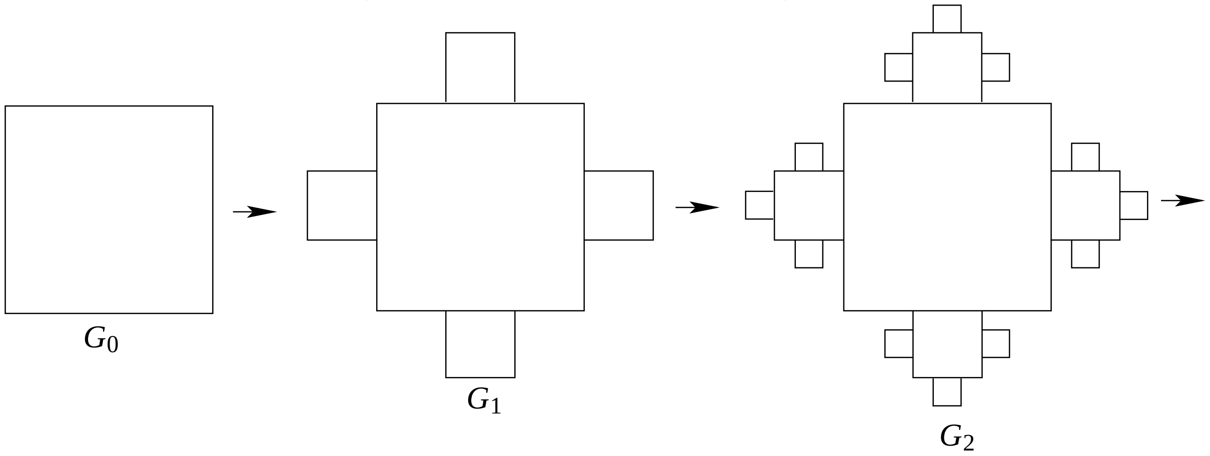
$$2 - 3 - 4 + 5 = 0$$

$$3 - 4 - 5 + 6 = 0$$

$$4 \cdot 5 - 6 - 7 = 7$$

Mathis machen mathematische Entdeckungen

In Heft 85 hatten wir die folgende fraktale Konstruktion vorgestellt:



Die Seitenlängen von G_0 seien 1. (H.F.)

Dazu schreibt **Connor Röhricht, Kl. 8 des Gymnasiums Hochrad, Hamburg:**
Von G_n zu G_{n+1} kommt man, indem man zu den Quadraten, die in dem vorigen Schritt entstanden sind, an jeder freien Seite in der Mitte ein Quadrat mit einer Seitenlänge von einem Drittel der Seitenlänge der Quadrate des vorigen Schrittes anfügt.
Die Fläche, die bis G_n zum Grundquadrat dazu kommt, beträgt

$$\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right).$$

Die Fläche von G_n beträgt damit

$$F_n = 1+\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = \dfrac{5}{3}$.

Der Autor **Hartwig Fuchs** stellt ergänzend fest:

- G_{n+1} hat $4\cdot 3^n$ Quadrate mehr als G_n.
- G_n besteht aus $2\cdot 3^n - 1$ Quadraten.

Weitere Fragen für Entdeckungen könnten sein:

- Wieviele Eckpunkte hat G_n?
- Wie viele Strecken bilden den Rand von G_n?
- Welchen Umfang hat G_n?

Die Seite für den Computer-Fan

Befreundete Zahlen: Der griechische Mathematiker Pythagoras nannte zwei Zahlen befreundet, wenn die Summe der echten Teiler der ersten Zahl gleich der zweiten Zahl und die Summe der echten Teiler der zweiten Zahl gleich der ersten Zahl war. War eine Zahl „mit sich selbst befreundet", galt sie als vollkommen. Eine vollkommene Zahl ist zum Beispiel 28, denn $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Befreundete Zahlen sind beispielsweise 220 und 284, denn $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ und $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Ermittle alle Zahlenpaare befreundeter Zahlen, die nicht vollkommen sind, soweit Du es mit Deinem Programm schaffst.

Connor Röhricht, Kl. 8 des Gymnasiums Hochrad, Hamburg

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 86

Ein Punkte-Wettrennen für Primzahlpotenzen

Wir veranstalten für die Potenzen 2^n und 5^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ein Wettrennen. 2^n und 5^n starten beide mit 0 Punkten. Wenn nun eine Potenz 2^n bereits t Punkte besitzt, dann erhöht sich die Punktezahl von 2^{n+1} genau dann auf $t + 1$, wenn sich in der Dezimaldarstellung von 2^{n+1} mindestens eine Ziffer 0 befindet.

In gleicher Weise erhöhen sich die Punktezahlen der Potenzen von 5. Am Anfang sieht das Rennen so aus, wenn $Z(n)$ die Punktezahl von 2^n und $F(n)$ die von 5^n bezeichnet:

n	1	2	3	$\cdots$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2^n	2	4	8	$\cdots$	128	256	512	1024	2048	4096	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$Z(n)$	0	0	0		0	0	0	1	2	3	3	3	3	3
5^n	5	25	125		78125	390625	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$F(n)$	0	0	0		0	1	1	1	1	2	3	4	5	6

Deutet sich hier vielleicht schon an, dass für $n > 13$ stets 5^n in Führung liegt, d. h. dass $F(n) > Z(n)$ ist für jedes $n > 13$? Wenn das aber nicht zutrifft, dann muss 2^n für irgend ein $n > 13$ wieder mit 5^n gleichziehen, so dass dann $F(n) = Z(n)$ ist. Welches ist in diesem Fall das kleinste $n > 13$ mit $F(n) = Z(n)$? Wir kennen auf keine der beiden Fragen eine Antwort – deshalb geben wir diese Fragen zur Untersuchung an unsere Le(ö)ser weiter. (H.F.)

Dazu schreibt **Stefanie Tiemann**, Kl. 13, vom Gymnasium Marienberg in Neuss:

Bis zum Exponenten 86 führen die Potenzen von 5. Es gilt:

$$Z(86) = 51, F(86) = 71.$$

Ab dem Exponenten 87 bis zum Exponenten 3000 enthält jede Potenz von 2 und jede Potenz von 5 eine Null. Der Vorsprung von 20 Punkten der Potenzen von 5 bleibt deshalb erhalten.

Vermutlich gilt dies auch für Exponenten größer 3000.

Diese Vermutung bestätigt **Florian Schweiger**, Kl. 8, vom Gymnasium Marktoberdorf bis $n = 10\,000$, der ebenfalls mit einem Visual Basic Programm das Wettrennen der Primzahlpotenzen verfolgt hat.

Sein Ergebnis nach einer Viertelstunde Rechenzeit:

$$Z(10\,000) = 9\,965, F(10\,000) = 9\,985.$$

Auch **Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe** vom Institut für Informatik der Universität Leipzig hat sich vom Reiz der Fragestellung anregen lassen und bis $n = 1\,000$ mit dem CAS MuPAD alle n herausgefiltert, für die die Dezimaldarstellung von 2^n bzw. 5^n keine Null enthält und es somit keine Punkte gibt: Bis $n = 86$ sind es bei 2^n 35 Fälle, bei 5^n 15 Fälle, was die Punktdifferenz von 20 ergibt. Danach treten sowohl bei 2^n als auch bei 5^n immer Nullen auf.

Somit kann folgende Vermutung aufgestellt werden:

$$F(n) - Z(n) = 20 \text{ für alle } n \geq 86.$$

Florian Schweiger hat diese Vermutung bis $n = 10\,000$ bestätigt.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

• **Herausgeber und Redaktion begrüßen herzlich alle neuen Leserinnen und Leser**, die mit dem Schuljahr 2006/07 den Weg zu MONOID gefunden haben, und hoffen, dass sich die Schar der treuen „MONOIDaner“ auch im kommenden Kalenderjahr weiter vergrößern wird. Bitte daran denken, den Abo-Beitrag (falls noch nicht geschehen) rechtzeitig auf das MONOID-Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen!

• Am 25. November fand im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey die **MONOID-Feier 2006** statt, in deren Rahmen die Preise für die Leistungen des vergangenen Schuljahres 2005/06 vergeben wurden (s. S. 43). Den Festvortrag von Prof. Dr. **Elmar Schömer** vom Institut für Informatik der Universität Mainz, der beim Publikum sehr viel Anklang fand, könnt Ihr in diesem und dem nächsten Heft nachlesen. Einen Foto-Rückblick wird es im Internet geben (`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`). Redaktion und Herausgeber bedanken sich ganz herzlich bei allen Akteurinnen und Akteuren für das Gelingen dieser schönen Feier. Die MONOID-Feier 2007 wird am 24. November an der Universität Mainz stattfinden.

• Ebenfalls erstmals mit einem Beitrag bei MONOID vertreten sind Frau **Heike Winkelvoß**, deren Töchter Dorothea und Magdalena bereits von der Grundschule aus mit Erfolg ins mathematische Problemlösen eingestiegen sind, und Frau **Tina Kaplan**, die an der PH Karlsruhe mit Ziel Lehramt an Grundschulen studiert, als Koautorin von Stephan Rosebrock.

• Auch in diesem Jahr startete wieder der **digitale mathematische Adventskalender**. Zum ersten Mal dürfen alle Teilnehmer weltweit beim Mathekalender mitmachen und auch gewinnen! Vielleicht schaut Ihr unter `http://www.mathekalender.de` mal rein.

• Die Stiftung „Nordlicht Stipendium“ vergibt für 2007/08 an Schüler(innen) der zehnten Klassen noch Stipendien im Wert von 15.000 Euro für ein Schuljahr im Ausland (USA, Mexiko oder Argentinien; Bewerbungsschluss: 31.12.2006). Entscheidend für die Vergabe eines Stipendienplatzes sind nicht nur die Schulnoten, sondern vor allem das soziale Engagement der Schüler (Aktivitäten zur Förderung der internationalen Verständigung, Mitarbeit in einer Gemeinde, an einer Schülerzeitung, im Altenheim oder aktive Nachbarschaftshilfe). `www.nordlicht-stipendium.de`

Ekkehard Kroll

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 87

Vier Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Acht Gleichungen

	+		:	3	=	
:		+		+		–
	–		+		=	2
:		:		–		+
	·		–		=	
=		=		=		=
1	+		+		=	

Setze natürliche Zahlen ≤ 8 so in die leeren Felder der Figur ein, dass sich horizontal und vertikal jeweils vier richtige Gleichungen ergeben. Dabei soll jede Zahl mindestens einmal verwendet werden, aber so, dass in keiner Zeile und in keiner Spalte eine Zahl mehrfach vorkommt.

Man rechne **ohne** Beachtung der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“ von links nach rechts und von oben nach unten. (H.F.)

Lösung:

Es wurden zwei korrekte Lösungen gefunden:

8	+	7	:	3	=	5
:		+		+		–
4	–	8	+	6	=	2
:		:		–		+
2	·	5	–	7	=	3
=		=		=		=
1	+	3	+	2	=	6

8	+	7	:	3	=	5
:		+		+		–
4	–	8	+	6	=	2
:		:		–		+
2	·	5	–	4	=	6
=		=		=		=
1	+	3	+	5	=	9

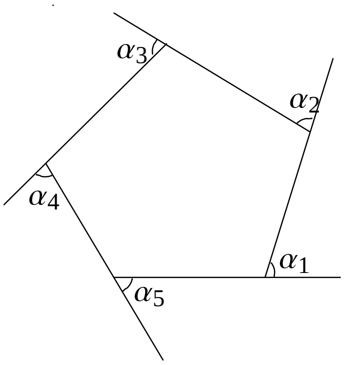
Variation von Aufgabe 874

Zeige: Die Summe aus vier unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen ist niemals eine Quadratzahl. (Malte Meyn, 8. Kl., Freie Waldorfschule Otterberg)

Lösung:

Die vier Zahlen seien $x, x+1, x+2, x+3$. Dann ist $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x + 6$ und also gerade, aber nicht durch 4 teilbar. Quadrate von ungeraden Zahlen sind aber ungerade, und Quadrate von geraden Zahlen sind durch 4 teilbar. Also gilt die Behauptung der Aufgabenstellung.

Außenwinkel am n–Eck



In einem n–Eck, bei dem keine Ecke nach innen einspringt, bilden die einseitigen Verlängerungen der Seiten mit den nächsten Seiten einen Außenwinkel wie in dem nebenstehenden Fünfeck. Bestimme die Summe dieser n Außenwinkel. (H.F.)

Lösung 1 (anschaulich):

Die Eckpunkte des n–Ecks seien mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bezeichnet. Stelle dir vor, du stehst im Punkt P_1 und deine Nase ist zum Punkt P_2 gerichtet. Nun gehst du ohne nach rechts und links zu schauen bis zum Punkt P_2; dort drehst du deinen Körper so, dass deine Nase nach Punkt P_3 zeigt. Das machst du so lange, , bis du wieder in P_1 angelangt bist und deine Nase wieder nach P_2 zeigt. Da jede einzelne Drehung deines Körpers einem Außenwinkel entspricht, ist deren Summe $360°$, weil dein Körper eine volle Drehung gemacht hat.

Lösung 2 (rechnerisch):

In jeder Ecke bilden Innenwinkel mit dem angrenzenden Außenwinkel zusammen einen Winkel von $180°$. Da die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck stets $(n-2) \cdot 180°$ beträgt und es an den Ecken n Winkel mit $180°$ gibt, beträgt die Summe der Außenwinkel

$$A = \text{Gesamtwinkel} - \text{Innenwinkel} = (n \cdot 180°) - ((n-2) \cdot 180°) = 2 \cdot 180° = 360°$$

(Alexander Rettkowski, 8d, Winckelmann-Gymnasium, Stendal;
Connor Röhricht, 8b, Gymnasium Hochrad, Hamburg)

Teiler

a) Eine natürliche Zahl n habe in dezimaler Schreibweise die Form $aaabbb$. Zeige: n besitzt den Teiler 37.

b) Zeige ferner: Jede natürliche Zahl m von der Form $aaaaabbbbb$ hat den Teiler 73.

(H.F.)

Lösung:

a) $n = aaabbb = 100000a + 10000a + 1000a + 100b + 10b + b = (100 + 10 + 1) \cdot 1000a + (100 + 10 + 1) \cdot b = 111 \cdot 1000a + 111b = 111(1000a + b)$. Aus dem letzten Term folgt: 111 ist Teiler von n. Wegen $111 = 3 \cdot 37$ ist auch 37 ein Teiler von n.

b) Wie den Meisten von euch aufgefallen ist, ist die Aufgabe falsch gestellt, zum Beispiel ist 1111122222 nicht durch 73 teilbar. Die einzige Zahl, für welche die Aussage zutrifft, ist $8888877777 = 73 \cdot 121765449$.

Einige gaben Korrekturen an, beispielsweise, dass die Zahlen von dieser Form durch 41 teilbar sind:

$$\begin{aligned} m &= aaaaabbbbb \\ &= a \cdot 10^9 + a \cdot 10^8 + a \cdot 10^7 + a \cdot 10^6 + a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + b \cdot 10 + b \\ &= (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 1) \cdot 10^5 a + (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 1) b \\ &= 11111 \cdot 10^5 a + 11111 \cdot b = 11111(10^5 a + b) \end{aligned}$$

Wegen $11111 = 41 \cdot 271$ hat der letzte Term den Teiler 41; damit ist 41 auch ein Teiler von m.

Connor Röhricht (8, Gymnasium Hochrad, Hamburg) bemerkte zusätzlich ohne Beweis, dass jede natürliche Zahl von der Form $aaaaaaabbbbbbb$ durch 73 teilbar wäre. Dies ist richtig, der Beweis läuft ähnlich zu den beiden anderen.

Ein Teppich-Handel

Der Teppichhändler TH. aus Schilda kauft einen Teppich für genau 1000 €.

Am nächsten Tag – TH. hat gerade den Teppich für 1300 € verkauft – betritt sein Freund den Laden und sagt ihm, er habe unbedingt gerade diesen Teppich erwerben wollen.

Es gelingt TH., den Teppich für 1400 € zurückzukaufen. Da er an seinem Freund nichts verdienen will, aber an dem ganzen Handel auch nichts verlieren will, überlässt er seinem Freund den Teppich für 1500 €.

Hat der Teppichhändler richtig gerechnet? (H.F.)

Lösung:

Der folgende naheliegende „Lösungsvorschlag“ ist falsch! TH. verdient beim ersten Verkauf 300 €. Beim Rückkauf verliert er nicht nur diesen Gewinn vollständig, sondern zusätzlich noch 100 €. Um diesen Verlust auszugleichen, sollte sein Freundschaftspreis um genau diese 100 € höher sein als der Rückkaufspreis, also 1500 € betragen.

Falsch!

Warum?

TH kauft den Teppich zwei Mal; seine Ausgaben: $1000 + 1400$ € $=2400$ €; er verkauft den Teppich zwei Mal; seine Einnahmen: $1300 + 1500$ € $=2800$ €.

TH erzielt also tatsächlich einen Gewinn von 400 €; sein Freundschaftspreis von 1500 € ist also viel zu hoch.

Wie sieht die Rechnung aus, wenn man berücksichtigt, dass auch in Schilda jeder Händler – nicht aber ein Privatmann – von seinem Verkaufspreis 16% Mehrwertsteuer an das Finanzamt abzuführen hat? TH kauft den Teppich zwei Mal; seine Ausgaben $1000 + 1400$ € $=2400$ €. Seine Einnahmen aus den beiden Verkäufen abzüglich Steuern sind: $1300 + 1500$ € minus 16% Steuer $= 2800 - 448$ € $= 2352$ €. Falls also der Teppichhändler TH. ein korrekter Steuerzahler ist, dann hat er seinem Freund sogar 48 € geschenkt – und sein Freundschaftspreis von 1500 € ist mehr als fair!

Lösung des Sudoku:

9	5	4	1	6	3	2	8	7
2	8	1	9	4	7	6	3	5
7	3	6	8	2	5	4	1	9
3	1	7	2	9	4	8	5	6
8	4	2	5	1	6	9	7	3
6	9	5	3	7	8	1	4	2
1	2	3	7	8	9	5	6	4
5	6	8	4	3	2	7	9	1
4	7	9	6	5	1	3	2	8

Teilbarkeit durch 11

Begründe, dass jede Zahl $100\ldots01$ mit n Ziffern 0 zwischen den beiden Ziffern 1, n geradzahlig, durch 11 ohne Rest teilbar ist. (H.F.)

Lösung 1:

Wir schreiben für geradzahliges n:

$$\begin{aligned} 100\ldots001 \ (n \text{ Nullen}) &= (99\ldots990 + 10) + 1 \ (n \text{ Neunen}) \\ &= 99\ldots990 + 11 \qquad (n \text{ Neunen}) \end{aligned}$$

Nun ist $99\ldots990$ (geradzahlig viele Neunen) stets durch 11 teilbar. Also ist auch $99\ldots990 + 11$ und damit $100\ldots01$ ohne Rest durch 11 teilbar.

Lösung 2:

Die kleinste Zahl der gegebenen Form ist $1001 = 91 \cdot 11$.

Die Zahlen können wir auch schreiben als $1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ Nullen}}1 = 10^{n+1} + 1$. Die allgemeine Differenz zwischen zwei solchen aufeinanderfolgenden Zahlen mit n und $n+2$ Nullen ist:

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n+2 \text{ Nullen}}1 - 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ Nullen}}1$$

$$= 10^{n+3} + 1 - (10^{n+1} + 1) = 10^{n+3} - 10^{n+1} = 100 \cdot 10^{n+1} - 10^{n+1} = 99 \cdot 10^{n-1}$$

Wenn eine Zahl (hier 1001) durch 11 teilbar ist und die Differenz durch 11 teilbar ist, dann sind auch alle so folgenden Zahlen durch 11 teilbar.

(Anna Arendt, 7b, Peter Wust-Gymnasium, Wittlich;
Carlo Trockel, 8, Georg Christoph Lichtenberg-Schule, Ober-Ramstadt)

Lösung 3:

Die Teilbarkeit durch 11 ist durch die alternierende Quersumme nachweisbar. Die alternierende Quersumme von $1000\ldots01$ mit n Nullen, wobei n gerade ist, ist $1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + 0 - 1 = 0$. Daraus folgt, dass solche Zahlen durch 11 teilbar sind.

(Alexander Rettkowski, 8d, Winckelmann-Gymnasium, Stendal)

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Der Pendler

Frau Kramer kommt täglich um 14 Uhr zum Bahnhof, um ihren Sohn abzuholen und ihn nach Hause zu fahren. Eines Tages endet die Schule früher und so kommt der Sohn ausnahmsweise eine Stunde früher an; mangels eines Handys beginnt er, zu Fuß nach Hause zu gehen. Glücklicherweise wird er unterwegs von seiner Mutter aufgelesen. Sie kommen so 20 Minuten früher nach Hause als üblich. Wie lange ging der Sohn, bevor er seine Mutter traf?

Wer lügt denn da?

Lewis Caroll, Autor berühmter Kinderbücher wie etwa Alice im Wunderland, war auch Mathematikprofessor in Oxford. Seine besondere Liebe galt den Denksportaufgaben. Hier eine Kostprobe:

Alice behauptet, dass Betsy lügt. Betsy sagt, dass Cynthia lügt und Cynthia behauptet, dass Alice und Betsy lügen. Wer lügt und wer sagt die Wahrheit?

Wahr oder falsch?

In der unendlichen Zahlenfolge $9, 98, 987, \dots 987654321, 9876543219, 98765432198, \dots$ kommen keine Primzahlen vor. Trifft das zu oder nicht? (H.F.)

2006

Bestimme für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ jeweils die letzte Ziffer der Zahlen n^{2006} und 2006^n.
(WJB)

In einer Fischzucht

In einer Fischzucht gibt es ein quaderförmiges Becken von 43 m Länge und 14 m Breite, in dem das Wasser 2 m hoch steht und in dem sich höchstens 1200 (punktförmige) Wasserflöhe befinden.

Begründe: Zu jedem beliebig gewählten Zeitpunkt gibt es mindestens 4 würfelförmige Bereiche von 1 m Kantenlänge im Becken, in welchen sich keine Wasserflöhe aufhalten. (H.F.)

Kubikzahlen

Die Summen $1^3 + 2^3 + 3^3$, $2^3 + 3^3 + 4^3$, $3^3 + 4^3 + 5^3$ sind durch 3 ohne Rest teilbar.
Gilt die Verallgemeinerung:
Die Summe von 3 aufeinander folgenden Kubikzahlen ist stets durch 3 teilbar? (H.F.)

Ein Zahlenkarussell

Jemand wählt eine beliebige Zahl $\neq 0$ als Startzahl – z.B. 10 – und eine zweite beliebige Zahl als Operationszahl – z.B. 13. Er rechnet dann mit 10 und 13 so:

$$10 \xrightarrow{+13} 23 \xrightarrow{\cdot 13} 299 \xrightarrow{-13} 286 \xrightarrow{:13} 22 \xrightarrow{+1} 23 \xrightarrow{-13} 10$$

Anfangszahl und Endzahl stimmen überein! – Zufall?

Oder stimmen Anfangszahl und Endzahl stets überein, wie auch immer man die Startzahl und die Operationszahl wählt? (H.F.)

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 897. Der 100. Geburtstag

Der Überlieferung nach soll ein Mathematiker an seinem 100. Geburtstag verkündet haben: „Im Jahre x^2 war ich genau x Jahre alt."

Daraufhin stellte einer der geladenen Geburtstagsgäste nach einigem Überlegen fest: „Ich werde meinen 100. Geburtstag in $y^3 + z^3$ Jahren feiern können, wobei $y \neq z$ ist." Leider verstarb dieser Gast bereits im Jahre 1580.

Wie alt war der Gast zum Zeitpunkt der Geburtstagsfeier und wann wurde der Mathematiker geboren? (Miriam Menzel, Klasse 11, Gymnasium Marienberg Neuss)

Aufgabe 898.

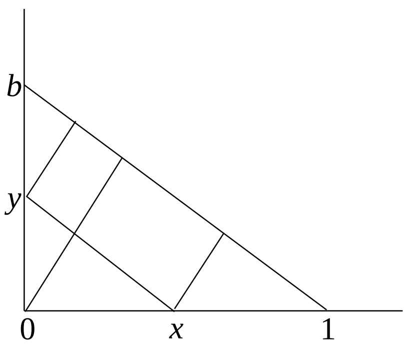
Für welche natürlichen Zahlen n ist die Summe der ersten $2n$ Zahlen durch n teilbar, für welche sogar durch $2n$, für welche durch $3n$? (H.F.)

Aufgabe 899.

Claudia und Daniela werfen einen Spielwürfel dreimal. Die Augenzahlen nennen wir x, y und z. Ist das Produkt $u \cdot v$ gerade, so gewinnt Claudia, sonst Daniela. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P gewinnt Daniela, wenn

1. $u = x, v = 10y + z$
2. $u = x,\ v = y + z$
3. $u = x + y,\ v = y + z$?
4. Löse die Aufgabe, wenn Daniela dann gewinnt, wenn $u + v$ ungerade ist. (WJB)

Aufgabe 900.

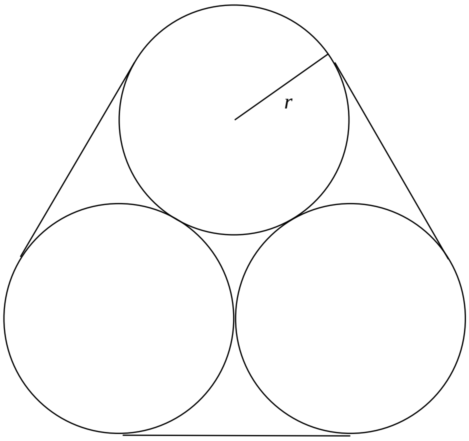


In ein rechtwinkliges Dreieck mit Ecken $(0|0), (1|0)$ und $(0|b)$ sei ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine seiner Seiten auf der Hypotenuse liegt und die gegenüberliegenden Ecken auf den Koordinatenachsen. Wie muss man die Ecke $(x|0)$ wählen, damit

a) seine Fläche $F(x)$ maximal wird?

b) sein Umfang $U(x)$ maximal wird? (WJB)

Aufgabe 901. Ein Zaun um drei Kreise



Drei Kreise mit dem gleichen Radius r sind so in die Ebene gezeichnet, dass je zwei dieser Kreise den dritten berühren. Um diese drei Kreise sei ein "Seil" straff gespannt.

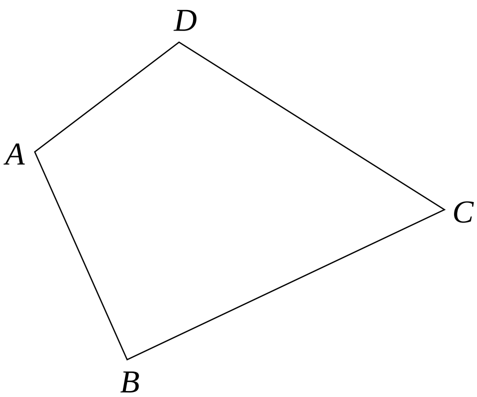
Begründe, dass für die Länge L des "Seiles" und den Umfang U eines jeden der drei Kreise gilt:

$$1,954\,U < L < 1,955\,U.$$

(H.F.)

Aufgabe 902.
Für welche natürlichen Zahlen n ist die Summe der ersten $2n$ Zahlen durch n teilbar, für welche sogar durch $2n$, für welche durch $3n$? (H.F.)

Aufgabe 903. $*$ **Abstand eines Punktes von Vierecks-Eckpunkten**



In einem konvexen Viereck V hat jede Seite eine Länge $\leq L$. Zeige, dass dann für jeden beliebigen Punkt P im Innern von V die Entfernung zu mindestens einem Eckpunkt $< \frac{3}{4}L$ ist. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 87

Kl. 8-13

Aufgabe 890.
Unternehmer Gill Bates hat im Laufe seines Lebens ein beachtliches Vermögen zusammengetragen. Da er keine eigenen Nachkommen hat, soll das Geld nach seinem Tode unter den Mitarbeitern seiner Firma verteilt werden. Hier rechnet er gerade aus, wie viel jeder erhalten soll und stellt erfreut fest, dass die Division glatt aufgeht; jeder Angestellte erhält den gleichen Teil.

Doch der Drucker scheint nicht in Ordnung, statt Zahlen werden nur Kreuze ausgegeben:

$$
\begin{array}{cccccccc l}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \quad : \times \times \times \quad = \quad \times \times \times \times \times \times \\
\times & \times & \times & & & & & & \\
\cline{1-3}
\times & \times & \times & \times & & & & & \\
 & \times & \times & \times & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & \times & \times & \times & \times & & \\
 & & & & \times & \times & \times & & \\
\cline{5-7}
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & \times &
\end{array}
$$

Kann jemand erkennen, wie viel Angestellte die Firma hat?

(Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:

Die fünfte Zeile muss mit einer 1 anfangen, damit (Zeilen 5 bis 7) eine vierstellige Zahl minus einer dreistelligen Zahl eine dreistellige Zahl ergibt.

Die Differenz zwischen einer vierstelligen und einer dreistelligen Zahl ist aber nur gleich 1, wenn dort $1000 - 999$ steht:

$$
\begin{array}{cccccccc l}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \quad : \times \times \times \quad = \quad \times \times \times \times \times \times \\
\times & \times & \times & & & & & & \\
\cline{1-3}
1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 1 & \times & \times & \times & & \\
 & & & & \times & \times & \times & & \\
\cline{5-7}
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & \times &
\end{array}
$$

Für den Divisor kommen dann nur $111, 333$ bzw. 999 in Frage.

999 ist nicht möglich, da die erste gebildete Differenz 100 ist; wäre der Divisor 999, müsste die Differenz 0 sein.

111 ist ebenfalls nicht möglich, da der Divisor mit der letzten Ziffer des Ergebnisses multipliziert eine vierstellige Zahl ergeben muss.

Die Firma hat also 333 Angestellte. (Das Vermögen des Herrn Bates lässt sich allerdings nicht eindeutig bestimmen).

Aufgabe 891.

a) Gibt es pythagoreische Tripel (a, b, c) mit $c^2 = a^2 + b^2$, in denen a, b und c Primzahlen sind?

b) Gibt es solche Tripel, in denen a, b und c Quadrate von Primzahlen sind?

c) Im Tripel $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ sind a und c Primzahlen. Gibt es auch Tripel, in denen a und b Primzahlen sind? (WJB)

Lösung:

a) Nein, das gibt es nicht. Die Gleichung lässt sich umstellen zu $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b) \cdot (c - b)$. Wäre a eine Prmzahl, so hätte a^2 nur die Teiler 1, a und a^2 selbst.
Damit nun aber die Gleichung richtig ist, müsste entweder $(c + b) = (c - b) = a$ sein (was nur für $b = 0$ ginge) oder $c + b = a^2$ und $c - b = 1$ gelten. Für $c - b = 1$ mütte $b = 2$ und $c = 3$ sein. Dann wäre $a^2 = c^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, aber 5 hat keine ganzzahlige Wurzel.

(Cornelie Koop, 12, Frauenlob-Gymnasium, Mainz)

b) Wenn $a = p_1^2$, $b = p_2^2$ und $c = p_3^2$ wäre, dann wäre $(p_1^2)^2 + (p_2^2)^2 = (p_3^2)^2$, also $p_1^4 + p_2^4$

$= p_3^4$. Die einzige ganzzahlige Lösung für diese Gleichung ist aber $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ (großer Satz von Fermat).

(Laura Biroth, 12, Humboldtschule, Bad Homburg
Charlotte Capitain, 11, Peter-Wust-Gymnasium, Wittlich;
Florian Schweiger, 9, Gymnasium Marktoberdorf.)

c) Nein. Es sei $c = b + n$. Dann ist $a^2 = c^2 - b^2 = b^2 + 2nb + n^2 - b^2$, also $a^2 = 2nb + n^2 = n(2b + n)$ mit $n < 2b + n$, also nicht Quadrat einer Primzahl.

Bemerkung: Aus der Antwort zu c) ergibt sich auch die zu a).

Aufgabe 892.
Ein Flugkörper fliegt auf einem Viertelkreis vom zehnfachen Erdradius vom Äquator zum Nordpol mit einer Geschwindigkeit von $v = 5\,000$ km/h. Um Mitternacht fliegt er über Mainz (50° nördlicher Breite, $8\frac{1}{3}^\circ$ östlicher Länge).

a) Wie lange braucht er vom Äquator zum Nordpol?

b) Wann ist er am Äquator gestartet und wann erreicht er den Nordpol?

c) Wo ist er gestartet?

d) Welche Geschwindigkeit und welche Flugrichtung beobachtet ein Mainzer um Mitternacht? (WJB)

Lösung:

a) Der Erdumfang beträgt ungefähr $40\,000$ km. Der Flugkörper fliegt auf einem Kreis vom zehnfachen Erdradius, also auch zehnfachem Erdumfang. Ein Viertel davon, also 100 000 km legt er in $\frac{100\,000}{5\,000}$ Stunden $= 20$ Stunden zurück.

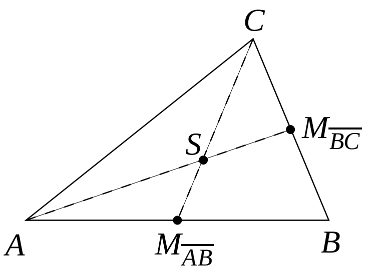
b) Bis zum 50. Breitengrad hat er $20 \cdot \frac{50}{90}$ Stunden $= \frac{100}{9}$ Stunden = 11 Std. 6 min 40 sec gebraucht, muss also um $12:53:20$ Uhr gestartet sein und erreicht den Pol 20 Stunden später, also um $8:53:20$ Uhr am Folgetag.

c) Während der Zeit von $\frac{100}{9}$ Stunden hat sich die Erde um $\frac{\frac{100}{9}}{24} \cdot 360^\circ = \left(\frac{500}{3}\right)^\circ$ weitergedreht. Der Startort liegt also bei $\left(\frac{25}{3} + \frac{500}{3}\right)^\circ = 175^\circ$ östlicher Breite, also mitten im Pazifik.

d) Der Radius des 50. Breitengrades ist $\cos 50^\circ = 0,6428$ mal dem Erdradius. Also ist seine Länge $0,6428 \cdot 40\,000 \text{ km} = 25\,712 \text{ km}$. Die (scheinbare) Ost-West Komponente der Geschwindigkeit des Flugkörpers ist über Mainz also $w = \frac{10 \cdot 25712}{24}\text{km/h} = 10\,713 \text{ km/h}$. Wir beobachten also die Geschwindigkeit $v_b = \sqrt{v^2 + w^2} = 11\,800 \text{ km/h}$. Der Winkel β gegenüber der Nordrichtung ist bestimmt durch $\tan\beta = \frac{w}{v} = 2,143$, d.h. $\beta = 65^\circ$.

Aufgabe 893. Konstruktion nur mit einem Lineal
Konstruiere allein mit einem Lineal der Länge ℓ den Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC, dessen Seitenlängen sämtlich $< \ell$ sind.

Lösung:



1. Man konstruiert die Mittelpunkte $M_{\overline{AB}}$ und $M_{\overline{BC}}$ der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ – wie das allein mit dem Lineal geht, steht im vorletzten Heft MONOID 86 auf Seite 37.

2. Man zeichne die Strecken $\overline{A\,M_{\overline{BC}}}$ und $\overline{C\,M_{\overline{AB}}}$. Ihr Schnittpunkt S ist der Schwerpunkt des Dreiecks (= Schnittpunkt der Seitenhalbierenden durch die gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiecks). (H.F.)

Aufgabe 894.
Drei Würfe mit einem Spielwürfel ergeben die Augenzahlen x, y und z. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bilden Strecken der Längen x, y und z

a) ein gleichseitiges Dreieck
b) ein rechtwinkliges Dreieck
c) ein Dreieck? (WJB)

Lösung:
Es gibt $6^3 = 216$ verschiedene Ausgänge des Experiments.

a) $x = y = z$ ist auf sechs verschiedene Arten möglich; die Wahrscheinlichkeit ist also $6 : 6^3 = \frac{1}{36}$
b) Hier gibt es wieder sechs Möglichkeiten $(3, 4, 5), (4, 3, 5), \ldots$ also ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.
c) Damit ein Dreieck gebildet wird, muss die längste Seite kürzer sein als die Summe der beiden anderen Seiten, z.B. $x \leq y \leq z < x + y$. Zum Abzählen unterscheiden wir folgende Fälle:
   1) $x = y = z$
   2) $x < y = z,\ y < x = z,\ z < x = y$
   3) $x = y < z < 2x,\ x = z < y < 2x,\ y = z < x < 2y$
   4) $x < y < z < x + y, \quad y < x < z < x + y, \quad y < z < x < y + z,$
   $z < y < x < y + z, \quad z < x < y < x + z, \quad x < z < y < x + z$

   Die unter 2), 3), 4) aufgeführten Teilfälle sind jeweils gleichartig. Es reicht also, den jeweils ersten abzuzählen:

   2) $x < y = z$: 5 Fälle mit $x = 1, 4$ Fälle mit $x = 2, \ldots, 1$ Fall mit $x = 5$, also 15 Fälle
   3) $x = y < z < 2x$: $(2, 2, 3), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (4, 4, 5), (4, 4, 6), (5, 5, 6)$, also 6 Fälle
   4) $x < y < z < x + y$: $(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (4, 5, 6), (3, 5, 6)$, also 7 Fälle

Insgesamt haben wir also $6 + 3 \cdot 15 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 111$ Möglichkeiten und somit die Wahrscheinlichkeit $\frac{111}{216} = \frac{37}{72} \approx 0,514$.

Aufgabe 895. Vielfache von 3

Die Zahlen $2^5 + 5^2, 2^7 + 7^2, 2^{11} + 11^2, 2^{13} + 13^2$ sind jeweils durch 3 teilbar. Gilt dies auch für die verallgemeinerten Terme $2^{3n+2} + (3n + 2)^2$ und $2^{3n+4} + (3n + 4)^2$ für jedes ungerade n, $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$? (H.F.)

Lösung:
Zunächst gilt: $2^n =$ (Vielfaches von 3) $+ 2$ für ungerade n, denn $2^1 = 0 \cdot 3 + 2$ und wenn die Behauptung für n gilt, dann ist
$2^{n+2} = 2^n \cdot 4 =$ ((Vielfaches von 3) $+ 2) \cdot (3 + 1) =$ (Vielfaches von 3) $+ 2$.
Weiter gilt:

$$(3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + (3 + 1) = \text{(Vielfaches von 3)} + 1$$
$$(3n + 4)^2 = 9n^2 + 24n + (15 + 1) = \text{(Vielfaches von 3)} + 1$$

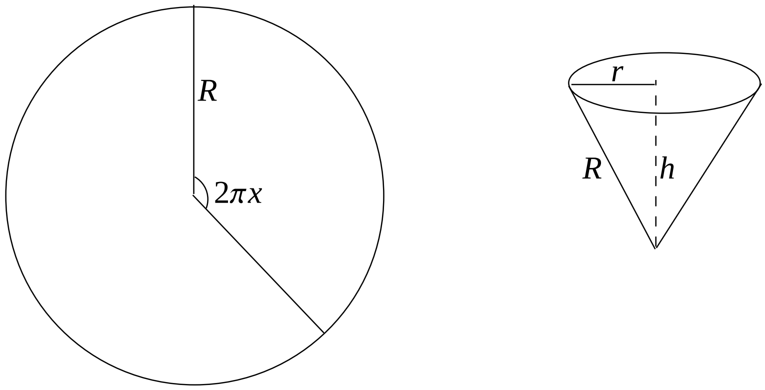
Damit ist

$$2^{3n+2} + (3n + 2)^2 = \text{(Vielfaches von 3)} + 2 + 1$$
$$2^{3n+4} + (3n + 4)^2 = \text{(Vielfaches von 3)} + 2 + 1$$

Also gelten diese beiden Gleichungen für jedes ungerade n, $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$

Aufgabe 896. $*$

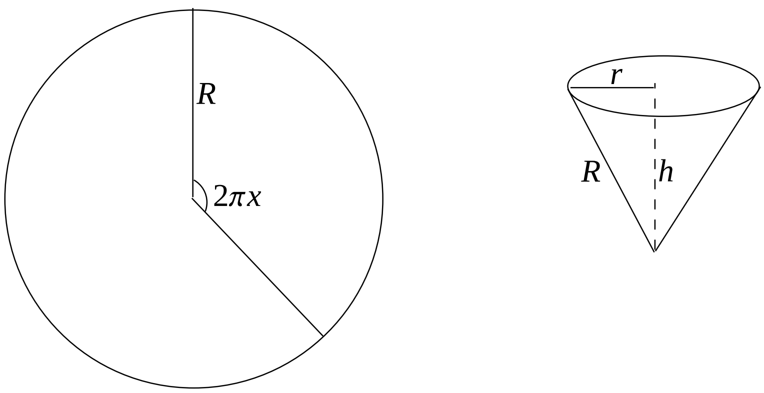
Aus einem kreisrunden Blech mit Radius R soll ein Sektor ausgeschnitten und zu einem Kegel mit einem Liter Fassungsvermögen zusammengebogen werden.



a) Für welche R hat diese Aufgabe keine Lösung, eine eindeutige Lösung, zwei Lösungen?

b) Was kann man über den Winkel $2\pi x$ des Sektors sagen? (WJB)

Lösung:



Das Volumen des Kegels ist $V = \frac{\pi}{3} h r^2$ mit $2\pi r = 2\pi x R$, d. h. $r = xR$ und $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, also $V = \frac{\pi}{3} R^2 x^2 \sqrt{R^2 - R^2 x^2}$. Wir bestimmen zunächst den Wert von x, für den V maximal wird.

Dazu sei $z = x^2$ und $f(z) = V^2 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 z^2 R^6 (1 - z)$. $f'(z) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 R^6 (2z - 3z^2)$ hat Nullstellen $z_0 = 0, z_1 = \frac{2}{3}$. Offenbar entspricht $x_0 = \sqrt{z_0} = 0$ dem Minimum $V = 0$ und $z_1 = \frac{2}{3}, x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ dem maximalen Wert $V(x_1) = \frac{\pi}{3} R^3 \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} R^3$.

a) Die Aufgabe ist nicht lösbar, wenn $V(x_1) < 1$, d. h. $R < \sqrt[3]{\frac{27}{2\pi\sqrt{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi\sqrt{3}}} = R_0$.

b) Die Aufgabe hat die einzige Lösung $x = x_1$, wenn $R = R_0$

c) V wächst, wenn x von 0 nach x_1 wächst und fällt zwischen x_1 und 1. Ist $R > R_0$, so gibt es somit zwei Winkel $x_2 < x_1$ und $x_3 > x_1$, für die $V = 1$ wird. Dabei sind x_2^2 und x_3^2 Lösungen der kubischen Gleichung $f(z) = 1$.

Wer forscht mit?

Die Forscheraufgabe aus MONOID 85: Regelmäßige n-Ecke mit Gitterpunkten

Untersuche, welche regelmäßigen n-Ecke, $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, so in ein ganzzahliges Gitter gelegt werden können, dass die Eckpunkte sämtlich Gitterpunkte sind. Hierbei ist ein *ganzzahliges Gitter* die Menge aller Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten. (H.F.)

Lösung von Stefanie Tiemann, Gymnasium Marienberg Neuss:

Für $n = 4$ ist durch die Punkte $(0|0), (0|1), (1|1)$ und $(1|0)$ ein Quadrat mit ganzzahligen Gitterpunkten beschrieben.

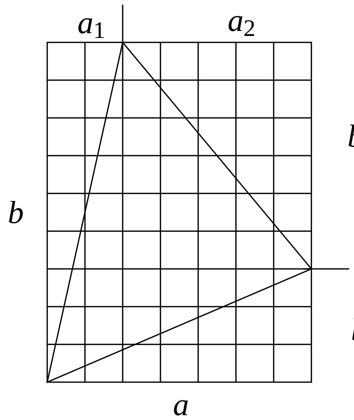
Behauptung: Für $n \neq 4$ ist es nicht möglich, im kartesischen zweidimensionalen Koordinatensystem ein regelmäßiges n–Eck zu zeichnen, bei dem alle Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben.

Beweis: Der Fall $n = 3$ wird indirekt, der Fall $n \geq 5$ mit der Methode des unendlichen Abstiegs gezeigt.

1. Fall: $n = 3$

Seien $P_1 = (x_1|y_1), P_2 = (x_2|y_2)$ und $P_3 = (x_3|y_3)$ mit $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}$ die Eckpunkte eines regelmäßigen Dreiecks mit der Seitenlänge c. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras: $c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. c^2 ist also eine ganze Zahl. Die Höhe des Dreicks ist $\frac{1}{2}c\sqrt{3}$. Damit ist die Fläche A irrational ($A = \frac{1}{4}c^2\sqrt{3}$).

Andererseits ist die Fläche jedes 3-Ecks mit ganzzahligen Koordinaten rational, wie die nebenstehende Abbildung veranschaulicht. Die Fläche A eines Dreiecks mit ganzzahligen Koordinaten berechnet sich wie folgt:



$$A = ab - \frac{1}{2}ab_2 - \frac{1}{2}ba_1 - \frac{1}{2}a_2b_1$$

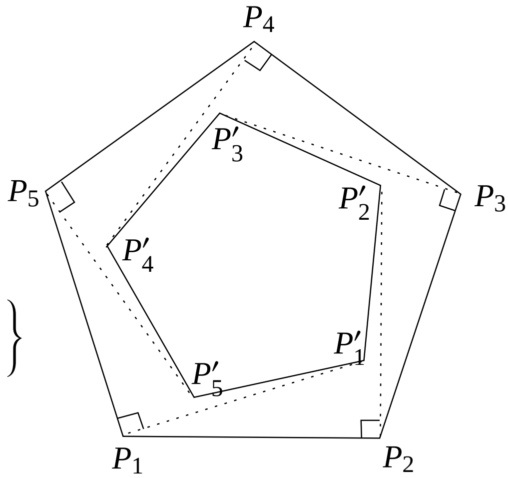
mit $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$

Mit diesem Widerspruch ist die Behauptung für $n = 3$ gezeigt.

2. Fall: $n \geq 5$

Seien $P_i = (x_i|y_i)$ $x_i, y_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n$ die Eckpunkte eines regelmäßigen n–Ecks im Koordinatensystem.

Jetzt lässt sich ein kleineres regelmäßiges n–Eck wie folgt konstruieren (vgl. nebenstehende Abbildung):



$$\left\{ \begin{array}{ll} P'_i = (x_i + (y_n - y_i) \,|\, y_i + (x_i - x_n)) & \text{für } i = 1 \\ P'_i = (x_i + (y_{i-1} - y_i) \,|\, y_i + (x_i - x_{i-1})) & \text{für } 2 \leq i \leq n \end{array} \right\}$$

Alle neu konstruierten Punkte P'_i haben ganzzahlige Koordinaten (da alle $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$) und bilden im Inneren des ursprünglichen n–Ecks $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ein kleineres regelmäßiges n–Eck $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. Sei p die Anzahl der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im Inneren von $P_1, P_2, \ldots, P_n$, p' die entsprechende Anzahl in $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. p ist um mindestens n größer als p', nämlich um die Punkte $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. Auf gleiche Weise lassen sich immer kleinere n–Ecke konstruieren. Es gilt $p > p' > p'' > \ldots$ mit natürlichen Zahlen $p, p', p'', \ldots$ Dies ist aber nicht möglich.

$*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$

Laura Biroth, Humboldtschule Bad Homburg, gibt ebenfalls für $n = 4$ zeichnerisch ein konkretes Quadrat an, dessen Ecken Gitterpunkte sind, und verwendet im Falle $n = 5$ und $n = 7$ ebenfalls die indirekte „Methode des kleinsten Verbrechers“. Im Falle $n = 3, 6$ bzw. $n = 8$ gibt auch bei ihr die Irrationalität von $\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2}$ den Ausschlag für die Nicht-Existenz solcher regelmäßiger n–Ecke mit Gitterpunktecken.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Für die erste Aufgabe aus den Mathespielereien in Heft 86 „Magisches Quadrat mit Jahreszahlen“, mit vorgegebener Diagonale $2006, 2007, 2008$ hat **David Feiler** vom Gymnasium Nonnenwerth in Remagen folgende schöne Lösung mit fortlaufenden Jahreszahlen von 2003 bis 2011 vorgeschlagen:

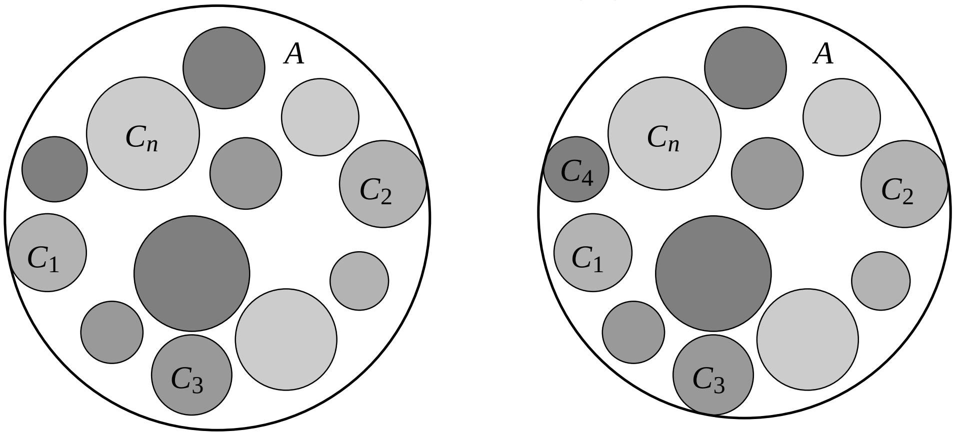
2007, nochmals auf magische Art

2006	2005	2010
2011	2007	2003
2004	2009	2008

Das Problem des kleinsten einschließenden Kreises

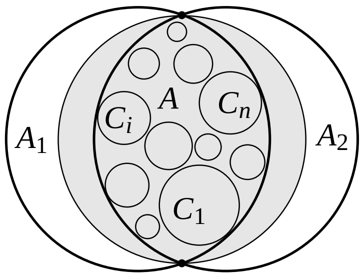
Von Elmar Schömer

Gegeben sei eine Menge von n Kreisen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ in der Ebene. Wir wollen für diese Kreise den kleinsten Kreis A berechnen, der alle vorgegebenen Kreise beinhaltet.

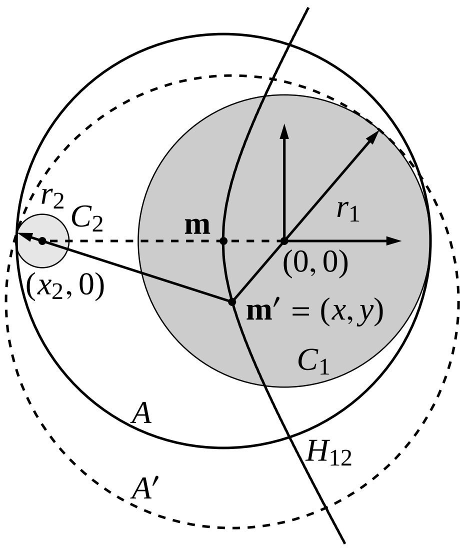


In der linken Anordung bestimmen C_1 und C_2 den kleinsten umschließenden Kreis A. Die rechte Anordung unterscheidet sich von der linken nur in der Position von C_1. Hier wird A durch die Kreise C_2, C_3 und C_4 bestimmt.

Wir zeigen zunächst, dass der kleinste einschließende Kreis für die Kreise $C_1, C_2, \ldots, C_n$ eindeutig ist: Angenommen es gäbe zwei kleinste Kreise A_1 und A_2, die alle Kreise einschließen. Dann gilt, $C_i \subseteq A_1 \cap A_2$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wir konstruieren einen Kreis A, bei dem die beiden Schnittpunkte von A_1 und A_2 auf dem Durchmesser liegen. A hat offensichtlich einen kleineren Radius als A_1 und A_2 und enthält alle Kreise. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von A_1 und A_2.



Wir betrachten nun zwei Kreise C_1 mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r_1 und C_2 mit Mittelpunkt $(x_2, 0)$ und Radius r_2. Für diese beiden Kreise wollen wir die Ortskurve H_{12} bestimmen, auf der die Mittelpunkte $\mathbf{m}' = (x, y)$ der Kreise A' liegen, die C_1 und C_2 enthalten und berühren. Der Radius von A' sei R'.



Für die gesuchten Punkte (x, y) gilt:

$$R' = \sqrt{x^2 + y^2} + r_1 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2} + r_2$$

Sei $\Delta r = r_1 - r_2 \geq 0$. Durch Auflösen der obigen Gleichung nach y^2 erkennt man, dass H_{12} ein Ast einer Hyperbel ist, der durch folgende Gleichung gegeben ist:

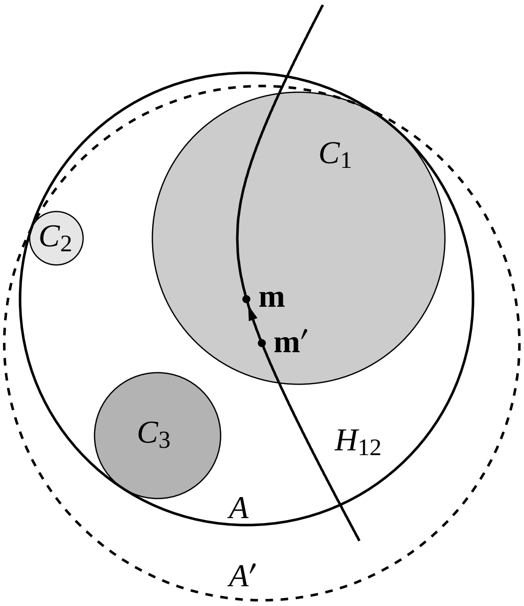
$$y = \pm \sqrt{\frac{x_2^2 - \Delta r^2}{4\Delta r^2}((2x - x_2)^2 - \Delta r^2)}$$

$$\text{für} \quad x \geq \frac{1}{2}(x_2 + \Delta r)$$

Fasst man R' als Funktion von x auf, so erkennt man, dass der Radius des umschließenden Kreises A' monoton in x wächst und minimal wird, wenn $x = \frac{1}{2}(x_2 + \Delta r)$. Der Mittelpunkt $\mathbf{m}$

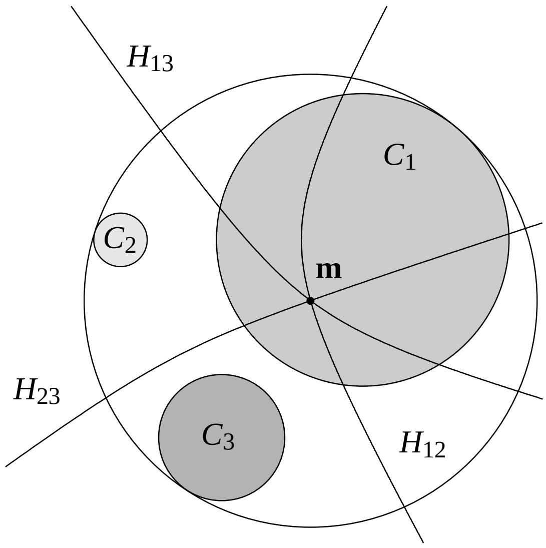
des kleinsten einschließenden Kreises A für zwei Kreise liegt also auf der Verbindungsstrecke der beiden Mittelpunkte von C_1 und C_2.

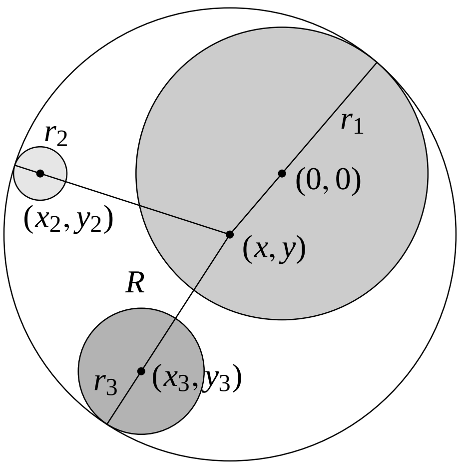
Der kleinste einschließende Kreis A für eine Menge von Kreisen berührt mindestens zwei dieser Kreise, denn sonst könnte man seinen Mittelpunkt verschieben und seinen Radius verkleinern, ohne dass einer der einzuschließenden Kreise A verlassen würde.



Wenn ein einschließender Kreis A' nur zwei Kreise C_1 und C_2 berührt, so können wir seinen Mittelpunkt $\mathbf{m}'$ auf dem Ast der Hyperbel H_{12} solange verschieben und dabei seinen Radius verkleinern bis ein dritter Kreis C_3 berührt wird, oder bis $\mathbf{m}'$ auf der Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten von C_1 und C_2 zu liegen kommt. Ein Kreis A, der drei vorgegebene Kreise C_1, C_2 und C_3 enthält und berührt, wird Apollonius-Kreis genannt. Die Frage nach der Konstruktion von Berührkreisen für drei Kreise (Punkte oder Geraden) wird Apollonius von Perge (262 v. Chr. - 190 v. Chr.) zugeschrieben.

Nach unseren bisherigen Überlegungen könnten wir einen umschließenden Apollonius-Kreis dadurch konstruieren, dass wir die drei Ortskurven H_{12}, H_{23} und H_{31} zum Schnitt bringen. Ein gemeinsamer Schnittpunkt $\mathbf{m}$ hat nämlich die Eigenschaft, dass er alle drei vorgegebenen Kreise gleichzeitig enthält und berührt. Anstatt Schnittpunkte zwischen Hyperbeln zu berechnen, wollen wir einen direkteren Weg wählen.





Der gesuchte Apollonius-Kreis mit Mittelpunkt (x, y) und Radius R kann durch Lösung der folgenden drei quadratischen Gleichungen auch direkt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (R - r_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= (R - r_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 &= (R - r_3)^2 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten bzw. dritten Gleichung von der ersten erhält man:

$$\begin{aligned} 2x_2\, x - x_2^2 + 2y_2\, y - y_2^2 &= 2R\,(r_2 - r_1) + r_1^2 - r_2^2 \\ 2x_3\, x - x_3^2 + 2y_3\, y - y_3^2 &= 2R\,(r_3 - r_1) + r_1^2 - r_3^2 \end{aligned}$$

Wir können diese beiden Gleichungen als ein lineares Gleichungssystem in x und y auffassen.

$$\begin{aligned} x_2\,x + y_2\,y &= R\,(r_2 - r_1) + \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 + x_2^2 + y_2^2) \\ x_3\,x + y_3\,y &= R\,(r_3 - r_1) + \frac{1}{2}(r_1^2 - r_3^2 + x_3^2 + y_3^2) \end{aligned}$$

Die Lösungen für x und y hängen linear von R ab. Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke für x und y in die quadratische Gleichung $x^2 + y^2 = (R - r_1)^2$ liefert eine quadratische Gleichung $\alpha R^2 + \beta R + \gamma = 0$ für den gesuchten Radius R.

Die Koeffizienten α, β und γ können durch folgende Rechenschritte leicht bestimmt werden:

$$c_2 = r_1 - r_2, \quad c_3 = r_1 - r_3, \quad d_2 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 + x_2^2 + y_2^2), \quad d_3 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_3^2 + x_3^2 + y_3^2),$$

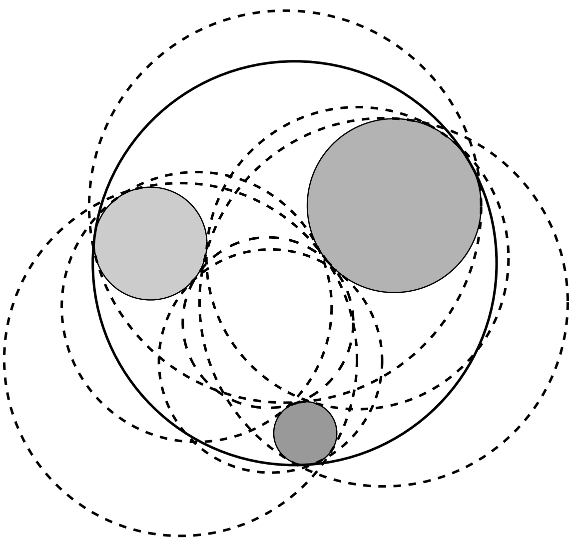
$$w = x_2 y_3 - x_3 y_2,\ u_1 = d_2 y_3 - d_3 y_2,\ v_1 = y_2 c_3 - y_3 c_2,\ u_2 = x_2 d_3 - x_3 d_2,\ v_2 = c_2 x_3 - c_3 x_2,$$

$$\alpha = v_1^2 + v_2^2 - w^2, \quad \beta = 2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + r_1 w^2), \quad \gamma = u_1^2 + u_2^2 - r_1^2 w^2$$

Die quadratische Gleichung $\alpha R^2 + \beta R + \gamma = 0$ kann keine, eine oder zwei positive reelle Lösungen für R besitzen. (Frage: Wie liegen die drei beteiligten Kreise relativ zueinander, wenn diese verschiedenen Fälle auftreten?) Für $R > 0$ und $w \neq 0$ ergibt sich für den Mittelpunkt des umschließenden Apollonius-Kreises:

$$x = \frac{u_1 + v_1 R}{w}, \qquad y = \frac{u_2 + v_2 R}{w}$$

(Frage: Wie können wir diese Methode zur Bestimmung des gesuchten Apollonius-Kreises von Dimension 2 auf Dimension 3 (oder Dimension d) übertragen?)



Wir können die oben beschriebene Methode auch anwenden, um weitere Apollonius-Kreise zu bestimmen, die sich alle dadurch auszeichnen, dass sie die drei vorgegebenen Kreise berühren. Wenn der Kreis C_i den Apollonius-Kreis A innen berühren soll, wählen wir ein negatives Vorzeichen für den Radius r_i, für Berührungen von außen ein positives Vorzeichen. Die drei resultierenden quadratischen Gleichungen können wir in analoger Weise lösen.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (R \pm r_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= (R \pm r_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 &= (R \pm r_3)^2 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass nicht mehr als acht Apollonius-Kreise existieren. Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) konnte sogar eine Konstruktion dieser Kreise mit Zirkel und Lineal angeben. Für den Spezialfall, dass die drei Kreise sich gegenseitig berühren, konnte Frederick Soddy (1877-1956) zeigen, dass nur ein innerer und ein äußerer Berührkreis existiert. David Eppstein [1],[2] hat hierfür 2001 eine elegante Konstruktion mit Zirkel und Lineal angegeben.
Kehren wir zurück zu der Frage, wie man für eine Menge von n Kreisen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ den kleinsten einschließenden Kreis berechnen kann. Wir wissen inzwischen, dass der gesuchte kleinste einschließende Kreis zwei oder drei Kreise berührt. Wenn er nur zwei Kreise berührt, ist er dadurch eindeutig bestimmt, dass sein Mittelpunkt auf der Strecke zwischen den beiden berührten Kreisen liegt. Wenn er drei Kreise berührt, handelt es sich um einen umschließenden Apollonius-Kreis.

$R = \infty$
Für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$:
    $A = ApolloniusKreis(C_i, C_j)$
    Wenn $radius(A) < R$
        Wenn $C_l \subseteq A$ für alle $1 \leq l \leq n$
            $R = radius(A)$
Für alle Tripel (i, j, k) mit $1 \leq i < j < k \leq n$:
    $A = ApolloniusKreis(C_i, C_j, C_k)$
    Wenn $radius(A) < R$
        Wenn $C_l \subseteq A$ für alle $1 \leq l \leq n$
            $R = radius(A)$

Im nebenstehenden Algorithmus benutzen wir Funktion *ApolloniusKreis* mit zwei bzw. drei Argumenten, um die jeweiligen umschließenden Kreise zu berechnen. Für jeden dieser Apollonius-Kreise testen wir, ob er alle vorgegebenen Kreise enthält. Unter diesen wählen wir den einschließenden Kreis mit kleinstem Radius. Die Laufzeit dieses Algorithmus ist proportional zu n^4. Es gibt aber einen Algorithmus, dessen Laufzeit nur linear in n wächst (siehe [4]). Eine Implementierung (für Dimension $d \geq 2$) dieser sehr viel effizienteren Methode findet man in der **C**omputational **G**eometry **A**lgorithms **L**ibrary (CGAL) [1].

Demo-Programme (in Java) zur Berechnung von Apollonius-Kreisen und von kleinsten einschließenden Kreisen findet man unter der Internet-Adresse `www.staff.uni-mainz.de/schoemer/PackIt/PackIt.html`.

Die Berechnung kleinster einschließender Kugeln für Mengen von einzelnen Punkten oder Kugeln spielt eine wichtige Rolle beim Aufbau von Datenstrukturen zur effizienten Erkennung von Kollisionen zwischen komplexen geometrischen Objekten. Diese Algorithmen werden beispielsweise bei der Programmierung von Computerspielen eingesetzt.

Literatur:

[1] CGAL. `www.cgal.org`.

[2] D. Eppstein. Tangencies: Apollonian circles. `www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/tangencies/apollonian.html`.

[3] D. Eppstein. Tangent spheres and triangle centers. *The American Mathematical Monthly*, 108:63–66, 2001.

[4] Kaspar Fischer and Bernd Gärtner. The smallest enclosing ball of balls: combinatorial structure and algorithms. In *SCG '03: Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 292–301, New York, NY, USA, 2003. ACM Press.

Bundeswettbewerb Mathematik 2006

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben der zweiten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1
Ein Kreis sei in $2n$ kongruente Sektoren eingeteilt, von denen n schwarz und die übrigen n weiß gefärbt sind. Die weißen Sektoren werden, irgendwo beginnend, im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, \ldots, n$ nummeriert. Danach werden die schwarzen Sektoren, irgendwo beginnend, gegen den Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, ..., n$ nummeriert. Man beweise, dass es n aufeinander folgende Sektoren gibt, in denen die Zahlen 1 bis n stehen.

Lösung Wir legen zunächst die folgende Bezeichnung fest: Ist eine Einfärbung und Nummerierung der Kreissektoren gemäß Aufgabenstellung gegeben, so heiße eine Menge A aufeinanderfolgender Sektoren des Kreises *gutartig*, wenn

- die Menge A mindestens einen weißen und einen schwarzen Sektor enthält und
- keine zwei Sektoren in A die gleiche Zahl enthalten.

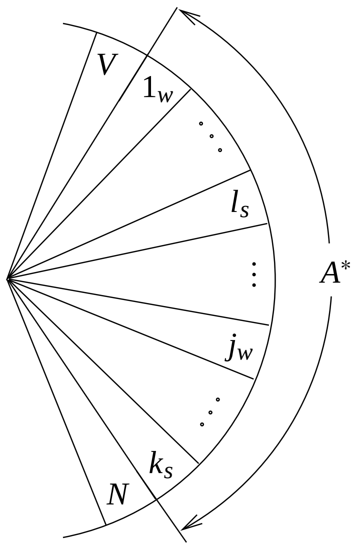
Unter *zyklischem Umnummerieren* aller Sektoren verstehen wir die Ausführung der Umnummerierung $n \to (n-1) \to (n-2) \to \cdots \to 3 \to 2 \to 1 \to n$ bei allen Sektoren. Wir beobachten:

1. Unter zyklischem Umnummerieren bleiben wesentliche Eigenschaften der Sektoren erhalten: Die weißen (bzw. schwarzen) Sektoren sind im (bzw. gegen den) Uhrzeigersinn in aufsteigender Reihenfolge nummeriert. Ist eine Menge von Sektoren gutartig bzw. nicht gutartig, so gilt dies jeweils auch nach zyklischem Umnummerieren.
2. Haben wir, wie in der Aufgabenstellung gefordert, n aufeinander folgende Sektoren gefunden, in denen die Zahlen 1 bis n stehen, so behalten die n Sektoren diese Eigenschaft auch nach zyklischem Umnummerieren.
3. Haben wir eine gegebene Nummerierung der Kreissektoren durch j-faches zyklisches Umnummerieren verändert, so gelangen wir durch nochmaliges, $(n-j)$-faches zyklisches Umnummerieren wieder zur ursprünglichen Nummerierung der Sektoren.

Wir unterscheiden für eine gegebene Einfärbung und Nummerierung der Kreissektoren nun zwei Fälle. Dabei bezeichnen wir jeden Sektor durch seine Nummer und Farbe (w = weiß, s = schwarz), also mit $1_w, 1_s, 2_w, 2_s, \ldots, n_w, n_s$.

1. Fall: Es gibt gutartige Mengen von Sektoren.
Da es überhaupt nur endlich viele Teilmengen der $2n$ Kreissektoren gibt, gibt es eine gutartige Menge A^* mit einer maximalen Anzahl von Sektoren. (A^* ist in der Regel nicht eindeutig bestimmt.) A^* enthält höchstens n Sektoren. Wir betrachten zunächst die Konstellation, dass der im Uhrzeigersinn erste Sektor in A^* weiß ist. Durch zyklisches Umnummerieren können wir erreichen, dass dieser erste weiße Sektor in A^* der Sektor 1_w ist. Gemäß Beobachtung 1 bleiben wesentliche Eigenschaften der Nummerierung erhalten; insbesondere ist A^* weiterhin eine maximal große gutartige Menge von Sektoren.
A^* enthalte die j weißen Sektoren $1_w, 2_w, \ldots, j_w$. Da A^* auch schwarze Sektoren enthält, gilt $j < n$. Die Zahlen, die in den schwarzen Sektoren von A^* enthalten sind, sind alle größer

als j, da A^* gutartig ist. Wenn A^* die schwarzen Sektoren $k_s, (k+1)_s, \ldots, l_s$ enthält, gilt also insgesamt



$$1 \le j < k \le l \le n.$$

Die Aufgabe ist bewiesen, wenn wir $k = j+1$ und $l = n$ nachweisen (im Folgenden durch Widerspruch). Hierzu betrachten wir den zu A^* im Uhrzeigersinn benachbarten Sektor N und den zu A^* im Gegenuhrzeigersinn benachbarten Sektor V. Es ist nach Konstruktion $N \in \{(j+1)_w, (k-1)_s\}$. Unter der Annahme $k \ge j+2$ ist keine der beiden Zahlen $j+1$ oder $k-1$ auf einem Sektor in A^* enthalten, so dass auch $A^* \cup \{N\}$ gutartig ist, im Widerspruch zur Maximalität von A^*. Unter der Annahme $l \le n-1$ ist keine der beiden Zahlen $1+l$ oder n auf einem Sektor in A^* enthalten. Da nach Konstruktion $V \in \{(1+l)_s, n_w\}$, ist auch $A^* \cup \{V\}$ gutartig, im Widerspruch zur Maximalität von A^*.

Damit ist bewiesen, dass A^* die Sektoren $1_w, 2_w, \ldots, j_w$ und $(j+1)_s, (j+2)_s, \ldots, n_s$ enthält. A^* enthält gemäß Beobachtung 2 weiterhin alle Zahlen von 1 bis n, wenn wir, wie in Beobachtung 3, durch eventuell mehrfaches zyklisches Umnummerieren die ursprüngliche Nummerierung der Kreissektoren wiederherstellen.
Die Konstellation, dass der im Uhrzeigersinn erste Sektor in A^* schwarz ist, wird analog bewiesen. (Durch zyklisches Umnummerieren können wir erreichen, dass der erste schwarze Sektor beim Durchlaufen von A^* *gegen* den Uhrzeigersinn 1_s ist.)

2. Fall Es gibt keine gutartige Mengen von Sektoren.
Es gibt in jeder Einfärbung mindestens ein Paar direkt benachbarter Sektoren mit unterschiedlichen Farben; wir wählen solch ein Paar aus. Im hier untersuchten Fall müssen diese beiden Sektoren die gleiche Zahl enthalten (denn sonst existierte eine gutartige Menge). In dem Paar folge, im Uhrzeigersinn gesehen, ein weißer (schwarzer) Sektor auf einen schwarzen (weißen). Dann müssen, weil in der Einfärbung keine gutartigen Mengen von Sektoren existieren, alle $n-1$ Sektoren, die auf das Paar im Uhrzeigersinn folgen, weiß (schwarz) sein. Wir haben also eine Kreishälfte gefunden, in der die Zahlen 1 bis n stehen (und sogar dieselbe Farbe haben). ◻

Aufgabe 4
Eine positive ganze Zahl heißt *ziffernreduziert*, wenn in ihrer Dezimaldarstellung höchstens neun verschiedene Ziffern vorkommen. (Dabei werden führende Nullen nicht berücksichtigt.)
Es sei M eine endliche Menge ziffernreduzierter Zahlen.
Man beweise, dass die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus M kleiner als 180 ist.

Beweis
Für eine Menge A von positiven ganzen Zahlen kürzen wir die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus A mit $\Sigma(A)$ ab. Für eine unendliche Menge A ist dabei jeweils nachzuweisen, dass $\Sigma(A)$ eine endliche Zahl bezeichnet. Im Folgenden werden wir hierfür auf die Summenformel für die *geometrische Reihe* Bezug nehmen: Für jede reelle Zahl x mit $|x| < 1$ ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k \ge 0} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{4.1}$$

Wir gruppieren die Zahlen in M nach der Anzahl der verschiedenen Ziffern, die in ihrer Dezimaldarstellung vorkommen, und beweisen Abschätzungen über die Summe der Kehrwerte zunächst für diese Teilgruppen. Wir führen hierzu zunächst weitere Bezeichnungen ein: Wir nennen eine ziffernreduzierte Zahl *k-ziffernreduziert*, wenn in ihrer Dezimaldarstellung k verschiedene Ziffern vorkommen. Jede ziffernreduzierte Zahl ist k-ziffernreduziert mit einem $k \in \{1, \dots, 9\}$. Eine k-ziffernreduzierte Zahl a heiße *minimal*, wenn in der Dezimaldarstellung von a die Ziffer der Einerstelle von allen anderen Ziffern verschieden ist, das heißt äquivalent, wenn a einstellig ist oder wenn $\lfloor a/10 \rfloor$, die Zahl, die durch Streichen der Einerstelle von a entsteht, $(k-1)$-ziffernreduziert ist. Zu jeder k-ziffernreduzierten Zahl a gibt es genau ein $m \geq 0$, so dass $\lfloor a/10^m \rfloor =: p_k(a)$ minimal k-ziffernreduziert ist. Wir bezeichnen mit P_k die Menge der minimalen k-ziffernreduzierten Zahlen.
Enthält für $a \in P_k$ die Dezimaldarstellung von a alle Ziffern der Menge $Z(a) = \{z_1, \dots, z_k\}$, so entstehen durch (ein- oder mehrfaches) Anhängen von Ziffern aus $Z(a)$ an a weitere k-ziffernreduzierte Zahlen b, für die stets $p_k(b) = a$ gilt. Wir definieren für eine minimale k-ziffernreduzierte Zahl a dementsprechend rekursiv

$$Q_{k,0}(a) := \{a\} \text{ und } Q_{k,n+1}(a) := \{10 \cdot b + z;\ b \in Q_{k,n}(a), z \in Z(a)\} \text{ für alle } n \geq 0 \tag{4.2}$$

und weiter

$$Q_k(a) := \bigcup_{n \geq 0} Q_{k,n}(a) = \{b; b \text{ ist } k\text{-ziffernreduziert und } p_k(b) = a\} \tag{4.3}$$

sowie $Q_k := \bigcup_{a \in P_k} Q_k(a)$. Mit Q_k bezeichnen wir also die Menge aller k-ziffernreduzierten Zahlen.

Beispiel: 455464 ist 3-ziffernreduziert, aber nicht minimal. Es ist $p_3(455464) = 45546$, $(p_2 \circ p_3)(455464) = p_2(p_3(455464)) = 45$ und $(p_1 \circ p_2 \circ p_3)(455464) = 4$, wobei $\circ$ wie üblich das Hintereinanderausführen von Funktionen bezeichnet. Außerdem ist $Q_{3,1}(455464) = \{4554644, 4554645, 4554646\}$.

Kernideen des Beweises sind, neben der offensichtlichen Abschätzung

$$\Sigma(M) \leq \sum_{k=1}^{9} \Sigma(Q_k) \tag{4.4}$$

sowie der leicht nachzurechnenden Gleichung

$$\Sigma(P_1) = \sum_{r=1}^{9} \frac{1}{r} = \frac{7129}{2520} \tag{4.5}$$

die folgenden beiden Abschätzungen:

$$\Sigma(Q_k) \leq \frac{10}{10-k} \cdot \Sigma(P_k) \text{ für } 1 \leq k \leq 9; \tag{4.6}$$

$$\Sigma(P_k) \leq \frac{11-k}{10} \cdot \Sigma(Q_{k-1}) \text{ für } 2 \leq k \leq 9. \tag{4.7}$$

Denn mit ihnen folgt (Details weiter unten!), dass

$$\Sigma(M) \leq 10 \cdot \left(\sum_{r=1}^{9} \frac{1}{r} \right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{7129}{2520} \right)^2 < 10 \cdot \left(\frac{7140}{2520} \right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{17}{6} \right)^2 < 81, \tag{4.8}$$

und dies beweist die Aufgabe. Es bleibt also noch, die Abschätzungen (4.6), (4.7) und (4.8) zu beweisen.

Wir beweisen (4.6): Für eine minimal k-ziffernreduzierte Zahl a, das heißt $a \in P_k$, lässt sich die Summe $\Sigma(Q_k(a))$ der Kehrwerte der Zahlen aus $Q_k(a)$ durch ein kleines Vielfaches von $\frac{1}{a}$ abschätzen, nämlich

$$\Sigma(Q_k(a)) \le \frac{10}{10-k} \cdot \frac{1}{a}. \tag{4.9}$$

Denn für $n \ge 0$ ist gemäß (4.2) und wegen $|Z(a)| = k$

$$\Sigma(Q_{k,n+1}(a)) = \sum_{b\in Q_{k,n}(a)} \sum_{z\in Z(a)} \frac{1}{10\cdot b+z} \le \sum_{b\in Q_{k,n}(a)} \sum_{z\in Z(a)} \frac{1}{10\cdot b} = \sum_{b\in Q_{k,n}(a)} \frac{k}{10\cdot b} = \frac{k}{10}\cdot\Sigma(Q_{k,n}(a)),$$

womit sich induktiv $\Sigma(Q_{k,n}(a)) \le \left(\frac{k}{10}\right)^n \cdot \Sigma(Q_{k,0}(a)) = \left(\frac{k}{10}\right)^n \cdot \frac{1}{a}$ ergibt. Aus (4.3) folgt zusammen mit (4.1) für $x = \frac{k}{10} < 1$

$$\Sigma(Q_k(a)) \le \sum_{n\ge0} \Sigma(Q_{k,n}(a)) \le \sum_{n\ge0}\left(\frac{k}{10}\right)^n \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{1-\frac{k}{10}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{10}{10-k} \cdot \frac{1}{a}.$$

Das beweist (4.9), woraus wegen $\Sigma(Q_k) = \sum_{a\in P_k} \Sigma(Q_k(a))$ die Ungleichung (4.6) folgt.

Wir beweisen (4.7): Für $a \in P_k, 2 \le k \le 9$, ist nach Definition $\lfloor\frac{a}{10}\rfloor \in Q_{k-1}$. Umgekehrt sind für $b \in Q_{k-1}$ die $10-(k-1) = 11-k$ Zahlen $10\cdot b+z$ mit $z \in \{0,1,\dots,9\} - Z(b)$ genau diejenigen Elemente a von P_k, für die $\lfloor\frac{a}{10}\rfloor = b$ gilt. Damit folgt

$$\Sigma(P_k) = \sum_{b\in Q_{k-1}} \sum_{0\le z\le9,\, z\notin Z(b)} \frac{1}{10\cdot b+z} \le \sum_{b\in Q_{k-1}} \sum_{0\le z\le9,\, z\notin Z(b)} \frac{1}{10\cdot b} = \sum_{b\in Q_{k-1}} \frac{11-k}{10\cdot b} = \frac{11-k}{10}\cdot\Sigma(Q_{k-1}).$$

Wir beweisen (4.8), indem wir schrittweise für alle k mit $9 \ge k \ge 1$ die Abschätzung

$$\Sigma(M) \le \Sigma(Q_1) + \cdots + \Sigma(Q_{k-1}) + 10\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10-k}\right)\cdot\Sigma(P_k) \tag{4.10}$$

zeigen. Die Induktionsverankerung ($k = 9$) folgt direkt aus (4.4) und (4.6) wegen $10-9 = 1$. Der Induktionsschluss ($k \to k-1 \ge 1$) folgt aus der Induktionsvoraussetzung (4.10) mit Hilfe von (4.7) und (4.6):

$$\begin{aligned}
&\Sigma(M)\\
&\le \Sigma(Q_1) + \cdots + \Sigma(Q_{k-2}) + \Sigma(Q_{k-1}) + 10\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10-k}\right)\cdot\Sigma(P_k)\\
&\le \Sigma(Q_1) + \cdots + \Sigma(Q_{k-2}) + \frac{10-(k-1)}{10-(k-1)}\cdot\Sigma(Q_{k-1}) + (10-(k-1))\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10-k}\right)\cdot\Sigma(Q_{k-1})\\
&\le \Sigma(Q_1) + \cdots + \Sigma(Q_{k-2}) + 10\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10-(k-1)}\right)\cdot\Sigma(P_{k-1}).
\end{aligned}$$

Setzen wir $k = 1$ in (4.10) ein, so ergibt sich wegen (4.5) gerade die erste Ungleichung in (4.8). □

Aufgabe 3

Gegeben seien ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks. Die Lotfußpunkte von P auf die Seiten AB, BC und CA seien C', A' bzw. B'.

Bei welchen Lagen von P gelten $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle CBA = \measuredangle C'A'B'$?

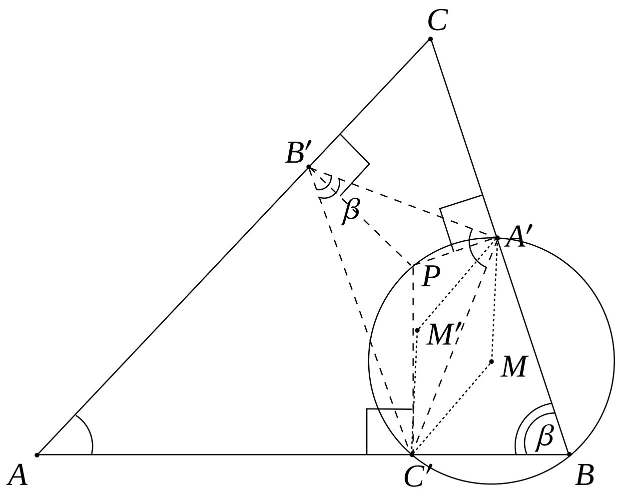
Lösung

Es gelten die Winkelbeziehungen der Aufgabenstellung genau dann, wenn P der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist.

Beweis:

Wenn P der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist, dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von AB. Damit fällt der Fußpunkt des Lotes von P auf die Seite AB (also C') mit dem Mittelpunkt dieser Dreiecksseite zusammen. Analog folgert man, dass B' die Mitte von Seite CA und dass A' die Mitte von Seite BC ist. Damit ist das Dreieck $\triangle A'B'C'$ das Mittendreieck von $\triangle ABC$. Bekanntlich sind das Mittendreieck eines Dreiecks und das Dreieck selbst ähnlich; insbesondere sind dann auch entsprechende Innenwinkel gleich; dies war zu zeigen.

Im Folgenden beweisen wir, dass aus den Voraussetzungen der Aufgabenstellung notwendig folgt, dass P der Umkreismittelpunkt ist. Aus der Umkehrung des Satzes von Thales folgt, dass A', B, C' und P auf einem Kreis mit dem Durchmesser PB liegen. Es sei M der Mittelpunkt dieses Kreises, das heißt insbesondere ist $\overline{MC'} = \overline{MA'} = \frac{1}{2}\overline{PB}$.



Der Punkt M ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle A'C'B$, das spitzwinklig ist. (Denn $A'C'$ ist Diagonale im konvexen Sehnenviereck $\square A'PC'B$, also sind $\measuredangle BC'A' < 90°$ und $\measuredangle C'A'B < 90°$.) Der Punkt M liegt deshalb im Inneren des Dreiecks $\triangle A'C'B$.

Nach dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel ist

$$\measuredangle A'MC' = 2\measuredangle A'BC' =: 2\beta.$$

Durch Spiegelung an der Gerade durch A' und C' gehe M in M' über. Es ist dann

$$\measuredangle C'M'A' = \measuredangle A'MC' = 2\beta.$$

Außerdem ist nach Aufgabenstellung

$$\measuredangle C'B'A' = \measuredangle CBA = \measuredangle A'BC' = \beta.$$

Aus der Umkehrung des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel folgt wegen $\measuredangle C'M'A' = 2\measuredangle C'B'A'$, dass B' auf dem Kreis um M' mit Radius $\overline{M'C'} = \overline{MC'} = \overline{MA'} = \overline{M'A'} =: r$ liegt; der Punkt M' ist also Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$. Es folgt:

$$\overline{PB} = 2\overline{MC'} = 2\overline{M'C'} = 2r$$

Laut Aufgabenstellung ist nicht nur $\measuredangle C'B'A' = \measuredangle CBA$ sondern auch $\measuredangle B'A'C' = \measuredangle BAC$. Aufgrund der Winkelsumme im Dreieck gilt also auch $\measuredangle A'C'B' = \measuredangle ACB$. Daher können wir analog zu oben

$$\overline{PA} = 2r \text{ und } \overline{PC} = 2r$$

nachweisen.

Der Punkt P ist also notwendig der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$. □

Die Autoren danken Herrn Fegert für seine hilfreichen Anmerkungen zur Darstellung.

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: einschließlich Heft 86)

Die Klassenangaben beziehen sich auf das Schuljahr 2005/06.

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Lara Bergjohann 21, Désirée Jochem 4, Jacqueline Machemer 3, Jonas Petzold 34, Andreas Pitsch 7, Benedikt Schneider 4, Alexandra Reisbeck 4, Charlotte Seiter 2, Tim Siebecker 8;
Kl. 6: Elisabeth Kopf 33, Kevin Schmitt 51, Anne Vorherr 37;
Kl. 7: Alexander Gerharz 52, Philipp Mayer 51, Sybille Mayer 12;
Kl. 8: Lisa Simon 15, Julia Zech 16, Max de Zoeten 2;
Kl. 9: Janina Braun 33, Keno Krewer 6, Sabine Oßwald 12;
Kl. 10: Patricia Kastner 42.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 8: Lena Baum 68, Désirée Schalk 14;
Kl. 9: Silvana-Maria Clotan 97, Felix Liebrich 107, Martin Reinhardt 106, Jessica Tischbierek 28, Bettina Zimmermann 7.

Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 10: Marco Scheid 3

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Samia Mohamed Roubaa 4; **Kl. 6:** Soheila Hesham 10, Yassin Basama 8, Amr May 3, Caroline Pierre 14, Aya Mohames 1, Marina Markus 7;
Kl. 7: Ossama Basent 22, Rahaf Moustafa 11.
Kl. 8: Yomna Awadalla 4, Nada Nabil 4

Altötting, König-Karlmann Gymnasium: Kl. 11: Amelie Hüttner 6.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Kl. 9: Lennart Adam 82;
Kl. 10: Christian Behrens 101, Martin Alexander Lange 78.

Amberg, Max Reger Gymnasium: Kl. 11: Thomas Weiß 22.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 11: Laura Biroth 85.

Bad Homburg, Kaiserin-Friedrich-Gymnasium: Kl. 7: Gregor Angeloni 78.

Beselich, Grundschule: Kl. 4: Marc Dinges 22.

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium: Kl. 6: Marcella Beck 17; **Kl. 9:** Christian Beck 7.

Darmstadt, Eleonorenschule: Kl. 12: Moritz Egert 20.

Daun, Geschwister-Scholl-Gymnasium:
Kl. 5: Bernadette Mauren 5, Corinna Mayer 3.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:
Kl. 5: Christian Geiger 6, Florian Salamat 18, Chakan Tektas 6, Frederik Träuble 13, Kai Werner 9.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 5: Dominik Möller 10;
Kl. 6: Lukas Giebel 10, Sebastian Giebel 7; Paulina Hauser 18, Franziska Kircher 4, Tom Andre Maczkowiecz 8, Lena Sophie Triesch 9, Lena Vogel 13; **Kl. 7:** Anna-Lena Herrmann 5, Dominik Hildenbrand 1, Theresa Isert 8, Jennifer Jost 9, Julian Jost 6, Hannah Lenk 6, Alexander Möller 51, Christian Most 16, Larissa Wiegand 5, Melanie Willhardt 10.

Erlangen, Freie Waldorfschule Erlangen: Kl. 4: Thore Meyn 5; **Kl. 8:** Malte Meyn 92.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Niklas Hannappel und Marvin Salewski 4, Timo Kremer 4, Alice Rudersdorf 2, Helen Schneider 3; **Kl. 6:** Marius Burkardt 6, Dennis Hofmann 12, Rolf Niedenthal 16, Julian Roth 1, Monja Schütz 20, Philipp Wenzel 45;
Kl. 7: Lara Czarnetzki 29, Renate Eckenberger 7, Timo Nattermann 7, Kai Roth 36, Julian Zabel 9;
Kl. 8: Corinna Dinges 29, Hannah Meilinger 28, Andreas Weimer 7, Johannes Weimer 7.

Halberstadt, Martineum: Kl. 9: Robert Hesse 47.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 9: Christoph Tietz 22.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 7: Connor Röhricht 54.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Christoph Straub, Gerd Weber):
Kl. 5: Sheima'a Ahmed Doma 54, Ragia Rami 9;
Kl. 8: Alia'a Ahmed Doma 98, Karen Emil 47, Heba Mamdouh 6, Marina Morad 59;
Kl. 9: Ghada Hesham 32, Gina Mamdouh 30, Marina Milad 22, Hayat Selim 57, Noha Wahab 52;
Kl. 10: Alia'a el Bolock 41, Mariam und Selma el Sayyad/Ismail 65, Mariam Emad 13, Marwa Talal 12;
Kl. 11: Nadine Adel 15, Lauren Emil 18, Riham Amr Falchry 11, Monika Fares 6, Miriam Morad 12, Iman Tarek 13.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 9: Kathrin Becker 6, Ilja Birmann 3, Artur Grylla 9, Steffen Hirth 5, Alexander Linn 3, Sina Spangenberger 14, Johannes Vetter 3, Patric van Zwamen 8.

Klausen: Annika Meyer 7.

Gymnasium Korschenbroich: Kl. 10: Pascal Cremer 93.

Kusel, Gymnasium:
Kevin Schiffer 14;
Kl. 6: Michelle Shania Bemme 12, Julia Brell 15, Mike Brüchner 11, Lars Cerentz 5, Marvin Derzt 6, Lukas Dietrich 5, Daniel Heil 10, Mischa Helfenstein 9, Philipp Jahn 9, Nico Süs 7, Dominik Wilson 16, Alexander Wobedo 4.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 11: Maximilian Mühlbacher 32.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 6: Aleksandra Ratković 1; **Kl. 10:** Katharina Kober 37.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 9: Anna Becken 9; **Kl. 11:** Cornelie Koop 65.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 3: Magdalena Winkelvoß 26.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Stefanie Grünwald 52, Katharina Irmscher 52; **Kl. 10:** Maike Bäcker 1.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 8: Florian Schweiger 156.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 11: Bernhard Saumweber 8.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 7: Kira Godehardt 1, Julia Hennig 21, Kirsten Hubert 16, Marelina Kaules 11, Vivien Kohlhaas 68, Nora Mollner 44;
Kl. 8: Madeline Kohlhaas 77; **Kl. 10:** Miriam Menzel 87;
Kl. 11: Annika Kohlhaas 64; **Kl. 12:** Stefanie Tiemann 118.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:
Niklas Fietz 8; **Kl. 5:** Christian Voigt 14; **Kl. 6:** Anne Bach 12.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium: Kl. 7: Natalie Fischbach 20.

Nürnberg, Gymnasium Stein: Marion Heublein 13.

Ober-Ramstadt, Georg Christoph Lichtenberg-Schule:
Daniel Gerschermann 5, Nico Häfner 12, Amber Pra 12, Jennifer Wagner 9;
Kl. 5: Mero Kaya 19, Tobias Thomas 26;
Kl. 7: Kay Ackermann 29, Rica Altrock 29, Sandra Burkhardt 23, Sebastian Hiller 37, Julian Hotter 22, Felix und Kevin Karn 4, Jana Lauth 23, Christian Marx 9, Jannik Metzler 24, Manja Mörl-Kreitschmann 29, Patrick Plößer 26, Mareike Silbereis 17, Matthias Tieman 12, Carlo Trockel 28, Melanie Wagner 25.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Vanessa Kappuss 7, Joshua Mayer 6;
Kl. 5: Lars Behr 15, Tobias Braun 38, Tobias Eckinger 20, Tobias Feick 9, Leonie Herzog 16, Carina Jensen 3, Tim Kinkel 17, Daniel Klewinghau 3; Carla Koch 9, Elisabeth Koch 4, Janina Köhler 8, Inessa Komandirova 1, Valentin Kuhn 43, Viktoria Kunz 3, Miriam Lindert 5, Anna-Katharina Löw 21, Franziska Matern 2, Jeanne Merswolken 16, Camilla Metz 5, Ann-Kathrin Oster 2, Franziska Peterka 2, Elias Petry 5, Nils Rehm 9, Mai-Britt Rosengarten 23, Uwe Schulz 22, Jemina Schwab 7, Nikola Trivicevic 13, Agnes Valenti 10, David Vargas, Bernd von Wehden 7, Alina Wietschorke 11, Daniel Worring Pozo 9, Manuel Wörth 8, Julia Yeo-Peters 3;
Kl. 6: Markus Bauch 15, Jan Biersack 3, Aline Endreß 55, Veronika Finke 17, Philipp Krosien 10, Romina Röpke 6, Nathan Valenti 17, Antje Weicker 16;
Kl. 7: Stephan Ausbüttel 13, Hannah Braun 27, Philipp Kalte 9, Sabrina Kopp 21, Markus Walter 10;
Kl. 8: Eva-Lotte Andereya 8, Larissa Habbel 19, Sophia Waldvogel 6;
Kl. 9: Sarah Rosengarten 7, Valentin Walther 4, Annkatrin Weber 90. **Kl. 10:** Ricarda Zimmermann 6.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 9: Thomas Geiß 129.

Otterberg, Freie Waldorfschule Westpfalz: Lukas Bunsen 2.

Pfinztal, Ludwig-Marum-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Pfeifle):
Nicola Hüholt 2;
Kl. 6: Dominik Kim 6, Holger Körner 2, Michael Mutschler 1, Julian Zimmer 2;
Kl. 7: Sophia Herrscher 9, Tristan Keller 4; **Kl. 9:** Finn Lanzendorfer 3;
Kl. 12: Robin Roth 22.

Planegg, Feodor Lynen Gymnasium: Kl. 12: Franziska Baus 22.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 6: Verena Bauch 8, Barbara Bücker 13, Susanne Damm 3, Raphael Eisenbeis 4, Carmen Engels 5, David Feiler 55, Jana Klaes 32, Sebastian Kramer 23, Nikola Lübbering 3, Lisa Rohrwasser 4, Alina Schäfer 6, Selina Weich 15, Nadia Wester 18, Korbinian Wester 15, Charlotte Wittenius 3.

Speyer, Kolleg (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):
Kl. 12: Viktor Eberhardt 10, Patrick Heist 7.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 7: Alexander Rettkowski 94; **Kl. 11:** Tobias Grunwald 30.

Tegernsee, Gymnasium: Kl. 11: Juliane Oberwieser 12.

Trier, Auguste Viktoria-Gymnasium: Kl. 7: Julia Ambre 11, Laur Geib 7, Laura Herbst 3, Henriette Kratz 2, Laura Lehnertz 5, Helena Leonards 3, Anna Schell 5, Jan Schmitz 8, Ida Stapf 5, Raphael Werner 12, Celine Wilson 2, Lena Wirz 2, Clara Wolf 5.

Walldorf, Gymnasium Walldorf
Kl. 5: Alexander Rutz 8; **Kl. 7:** Sebastian Rutz 14.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 5: Dorothea Winkelvoß 40.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 6: Joel Jung 50, Emily Linn 17; **Kl. 10:** Julia Jung 9.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Elisabeth Manger):
Kl. 10: Charlotte Capitain 80.

Worms, Eleonoren-Gymnasium: Kl. 10: Moritz Maurer 17.

Moritz Hahn 11.

MONOID-Preisträger 2006

Sonderpreis: Florian Schweiger

Das „Goldene M“: Thomas Geiß

1. Preis: Alia'a Ahmed Doma, Christian Behrens, Silvana-Maria Clotan, Felix Liebrich, Malte Meyn, Martin Reinhardt, Alexander Rettkowski, Stefanie Tiemann, Annkatrin Weber.

2. Preis: Lennart Adam, Gregor Angeloni, Laura Biroth, Charlotte Capitain, Pascal Cremer, Madeline Kohlhaas, Martin Alexander Lange, Miriam Menzel.

3. Preis: Lena Baum, Sheima'a Ahmed Doma, Mariam und Selma el Sayyad/Ismail, Aline Endreß, David Feiler, Alexander Gerharz, Stefanie Grünewald, Katharina Irmscher, Joel Jung, Annika Kohlhaas, Vivien Kohlhaas, Cornelie Koop, Philipp Mayer, Alexander Möller, Marina Morad, Connor Röhricht, Kevin Schmitt, Hayat Selim, Noha Wahab.

MONOID-Jahresabonnement 2007:
Tobias Braun, Alia'a el Bolock, Karen Emil, Robert Hesse, Sebastian Hiller, Patricia Kastner, Katharina Kober, Valentin Kuhn, Nora Mollner, Kai Roth, Anne Vorherr, Philipp Wenzel, Dorothea Winkelvoß.

Knobelpreise für unsere jüngsten Löser und Löserinnen als Ansporn und Anerkennung erhalten:
Lara Bergjohann, Marc Dinges, Tobias Eckinger, Jana Klaes, Elisabeth Kopf, Sebastian Kramer, Anna-Katharina Löw, Jonas Petzold, Mai-Britt Rosengarten, Uwe Schulz, Monja Schütz, Tobias Thomas, Magdalena Winkelvoß.

Das „Goldene M“ sowie die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet. Der Sonderpreis in Form eines Voyage 200 wurde von Texas Instruments *zur Verfügung gestellt.*

MONOID Jahrgang 26 Heft 88 Dezember 2006

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe Dr. Stefan Kermer
Monoidaner: Alexander Gerharz, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Philipp Mayer
Zusammenstellung und Layout: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Internet: Marcel Gruner mit Unterstützung durch Juliane Gutjahr

Abonnementbestellungen über die MONOID-Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', zu überweisen; **Adresse nicht vergessen** (oder Bestellung über Internet).
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, D-55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid