Jahrgang 27 Heft 89 März 2007

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben! **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.05.2007.**

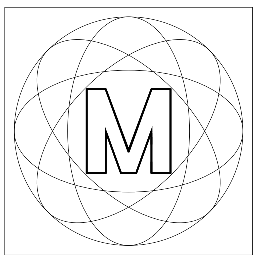
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **rund 50 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: **das Goldene M**.



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Das Wegenetz eines Hamsters

Von Hartwig Fuchs

Das Problem

Der unterirdische Bau eines Hamsters besitzt fünf Ausgänge. Jeden dieser Ausgänge will der Hamster nun mit jedem anderen durch einen oberirdisch verlaufenden Weg so verbinden, dass

(1) auf keinem Weg ein dritter Ausgang liegt,

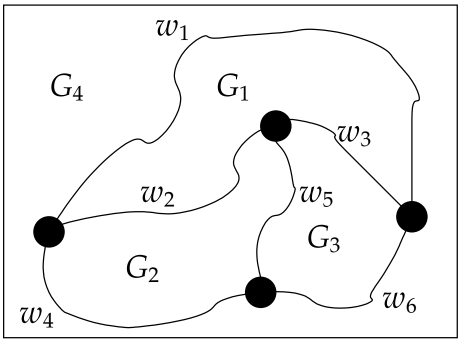
(2) die Wege sich nicht kreuzen.

Kann der Hamster ein Wegenetz so anlegen, dass die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind?

Die Antwort auf diese Frage wollen wir mit einem Umweg über einen schönen Satz von Leonhard Euler (1707-1783) herleiten.

Landkarten

In der Ebene seien Punkte gegeben und Linien (Wege), durch welche Punktepaare so miteinander verbunden sind, dass auf keiner der Verbindungslinien ein dritter der gegebenen Punkte liegt. Das Liniennetz sei zudem so beschaffen, dass man von jedem Punkt zu jedem anderen längs zusammengesetzter Wege gelangen kann. Eine so aus Punkten und Wegen gebildete Figur heißt eine Landkarte. Die von zusammengesetzten Wegen umschlossenen ebenen Bereiche sowie auch deren Außenbereich nennen wir Gebiete.



Eine Landkarte mit
4 Punkten
6 Wegen
4 Gebieten

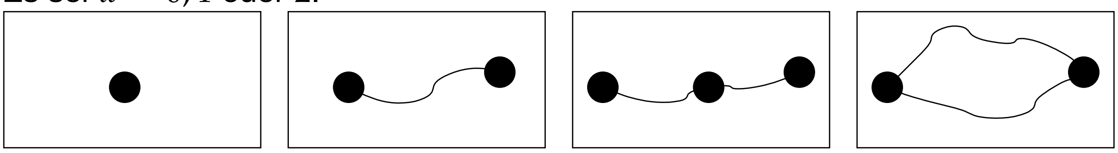
Der Satz von Euler

Die Anzahlen p, w und g von Punkten, Wegen und Gebieten in einer beliebigen Landkarte sind nicht unabhängig voneinander. Vielmehr besteht zwischen ihnen ein einfacher Zusammenhang, den Leonhard Euler als erster entdeckt und bewiesen hat:

(3) Einen Landkarte weise p Punkte, $p \geq 1$, w Wege und g Gebiete auf.
Dann gilt: $g + p = w + 2$

Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl w der Wege.

1. Es sei $w = 0, 1$ oder 2.

   $w = 0$ $w = 1$ $w = 2$ $w = 2$

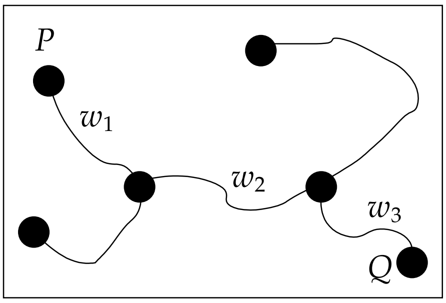
   Für $w = 0$ ist $p = 1$ nach Voraussetzung, also $g = 1$. Für $w = 1$ ist $p = 2$ und dann ist $g = 1$. Für $w = 2$ ist die Landkarte von einem der obenstehenden Typen mit $p = 3$ und $g = 1$ oder mit $p = g = 2$.

   In allen Fällen gilt (3).

   Bemerkung: Als Induktionanfang hätte der Nachweis von (3) für nur einen der Werte $w = 0, 1, 2$ genügt.

2. Wir treffen nun die Induktionsannahme, (3) sei bereits bewiesen für Landkarten mit $0, 1, 2, \dots, w - 1$ Wegen.

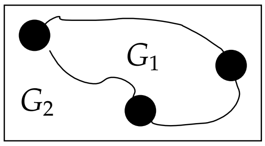
3. Wir zeigen: Aus der Induktionsannahme folgt, dass (3) für eine beliebige Landkarte mit w Wegen gilt.
   Zwei Fälle sind möglich:
   a) Zu jedem Punktepaar gibt es nur eine aus Wegen zusammengesetzte Verbindung.

(4) 

Beispiel: Eine Landkarte mit jeweils nur einer Verbindung zwischen zwei Punkten; z. B. gibt es zwischen P und Q nur die zusammengesetzte Verbindung $w_1w_2w_3$.

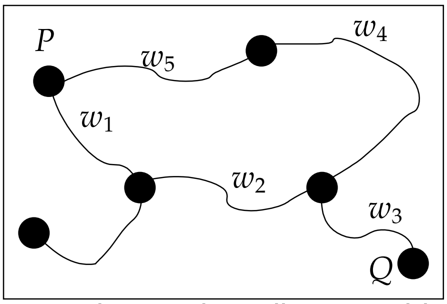
In einer solchen Karte gibt es nur ein Gebiet ($g = 1$).

Gäbe es nämlich zwei oder mehr Gebiete, dann müssten von mindestens einem Punkt zwei Verbindungen zu einem anderen Punkt ausgehen.



Unter den p Punkten der Karte befindet sich ferner mindestens ein Punkt P, der nur zum Weg w_1 gehört. Wir streichen nun diesen Punkt P und den zu ihm führenden Weg aus der Karte. Die neue Karte enthält dann $p - 1$ Punkte, $w - 1$ Wege, 1 Gebiet. Für sie gilt daher nach Induktionsannahme: $g + (p - 1) = (w - 1) + 2$. Dann aber gilt $g + p = w + 2$ für die Karte mit dem Punkt P.

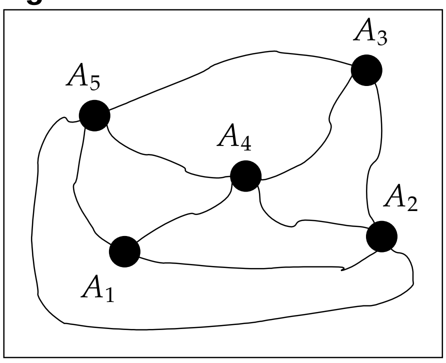
   b) In der Landkarte gibt es ein Punktepaar, zwischen denen es zwei verschiedene aus Wegen zusammengesetzte Verbindungen gibt – vgl. P und Q im Bild.

(5) 

Beispiel: Eine Landkarte mit zwei Verbindungen $w_1w_2w_3$ und $w_5w_4w_3$ zwischen den Punkten P und Q.

Entfernen wir aus einer dieser Verbindungen einen Weg – z. B. den Weg w_1 in Bild (5) – dann verliert die Karte dadurch einen Weg und zusätzlich auch ein Gebiet. Die neue Karte enthält somit p Punkte, $w - 1$ Wege und $g - 1$ Gebiete; für sie gilt nach Induktionsannahme: $(g - 1) + p = (w - 1) + 2$. Dann aber ist $g + p = w + 2$ für die Karte mit w Wegen.

Lösung des Problems des Hamsters

(6) 

Beispiel: Eine Landkarte, in der jeder Weg zwischen den Ausgängen des Hamsterbaus die Bedingungen (1) und (2) erfüllt – mit einer Ausnahme: Wie auch der Weg von A_1 nach A_3 gelegt wird, stets verletzt er die Bedingung (1) oder (2)!

Seine vielen erfolgslosen Versuche, ein kreuzungsfreies Wegenetz anzulegen – einer davon ist in Bild (6) zu sehen – haben den Hamster an den Rand der Verzweiflung getrieben. Und dabei hätte er sich den ganzen Frust sparen können – hätte er nur den Satz von Euler gekannt! Denn dann hätte er unschwer herausgefunden, dass gilt:

(7) Unter den Bedingungen (1) und (2) ist ein Wegenetz mit 5 Punkten nicht möglich.

Zur Begründung von (7) treffen wir die
Annahme: Das Wegenetz ist doch möglich.
An jedem Ausgang beginnen nach Voraussetzung 4 Wege; beachtet man, dass ein Weg von P nach Q zugleich einen Weg von Q nach P darstellt, dann enthält die Landkarte mit dem Wegenetz des Hamsters mit seinen 5 Punkten (Ausgängen) insgesamt $w = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 10$ Wege. Mit (3) und $p = 5$ folgt dann, dass die Karte 7 Gebiete besitzt ($g = 7$).
Da es von einem Ausgang zu einem anderen keine zwei Wege gibt, besteht der Rand eines jeden Gebiets aus mindestens 3 Wegen – und da jeder Weg zum Rand zweier Gebiete gehört, gilt für die Anzahl w der Wege im Wegenetz: $g \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \leq w$; also auch $g \leq \frac{2}{3}w$. Mit $g = 7$ und $w = 10$ folgt daraus $7 \leq \frac{2}{3} \cdot 10$, ein Widerspruch! Damit ist die Annahme widerlegt – es gilt die Behauptung (7).

Zum Leben und Einfluss Leonhard Eulers (1707-1783)

Von David E. Rowe

Vor genau 300 Jahren wurde Leonhard Euler, der produktivste Mathematiker aller Zeiten, am 15. April 1707 in Basel geboren. Dieser Ort und diese Zeit waren besonders günstig für ein einheimisches mathematisches Genie, denn Basel war die Heimatstadt der berühmten Mathematikerfamilie Bernoulli, mit der Eulers Vater gewisse Kontakte hielt. Hinzu kam, dass Euler die Welt im Zeitalter der anbrechenden Aufklärung erblickte – einer Zeit, in der den mathematischen Wissenschaften eine zentrale Rolle zukam. Auch die lokalen Verhältnisse stimmten: Eulers Mutter Margaretha, die Tochter des Basler Spitalpfarrers J. H. Brucker, gehörte einer gebildeten Familie an. Im April 1706 heiratete sie Paul Euler, der damals als Pfarrer am Baseler Waisenhaus wirkte. Ihr Mann war nicht nur fleißig, sondern auch mathematisch begabt; er hatte sogar während seines Theologiestudiums eine Dissertation unter der Leitung von Jakob Bernoulli geschrieben.

Das Geburtshaus ihres ersten Kindes wird vermutlich für immer unbekannt bleiben, denn die junge Familie zog nur ein Jahr nach Leonhards Geburt nach Riehen um, einem kleinen Dorf etwa fünf Kilometer von Basel entfernt. In dieser frommen Umgebung wuchs der Knabe zusammen mit seinen zwei Schwestern auf. Zu Hause brachte ihm sein Vater Mathematik bei, und mit sechs Jahren wurde er in die Lateinschule nach Basel geschickt, wo er bei seiner Großmutter mütterlicherseits wohnte. Damals waren die Schulen in der Schweiz eher rückständig, zumal die Einflüsse von Pädagogen wie Pestalozzi erst später kamen. Mathematik stand gar nicht im Lehrplan der Baseler Lateinschule, aber Leonhards Vater engagierte einen Privatlehrer für seinen Sohn. Dieser Johann Burkhardt war gleich wie er ein Theologe mit leidenschaftlichem Interesse für die Mathematik. Dank seiner Hilfe konnte der Junge 1720 im Alter von 13 Jahren die Universität Basel besuchen, wo er auf Wunsch seines Vaters natürlich Theologie studieren sollte.

Während sich Leonhard mit dem Erlernen von Altgriechisch und Hebräisch mühte, besuchte er nebenbei die Pflichtvorlesungen des Baseler Mathematikprofessors Johann Bernoulli, des damals führenden Mathematikers Europas. Es handelte sich um Vorlesungen für Anfänger, die der Meister täglich um 2 Uhr las, und zwar über Geometrie, theoretische wie auch praktische Arithmetik, höhere Geometrie mit Anwendungen und Astronomie. Euler fand dies alles sehr reizend, aber viel zu wenig. Vor allem wollte er den privaten Vorlesungen Johann Bernoullis beiwohnen, die der Meister nur für einen kleineren Kreis von Auserwählten hielt. Damals war die neue Analysis immer noch eine Art Geheimkunst, die nur langsam Verbreitung fand. Auch an den Spitzenuniversitäten wie Halle und Göttingen wurde die Analysis nicht unterrichtet, da die höhere Mathematik fast ausschließlich an den führenden Akademien betrieben wurde. Die privaten Vorlesungen Johann Bernoullis stellten insofern eine in ganz Europa fast einzigartige Einrichtung dar. Sie zogen eine Reihe von begabten und zugleich ehrgeizigen jungen Männern nach Basel, das zu dieser Zeit als Hort der Forschungsmathematiker des 18. Jahrhunderts galt. Zu Bernoullis Schülern zählten Samuel König, l'Hospital, Maupertuis, Clairaut und Gabriel Cramer, um nur die Bedeutendsten zu nennen.

Der sechzigjährige Bernoulli winkte zunächst ab, aber er empfahl Euler mathematische Werke zum Studium und lud ihn sonnabends ein, um Fragen zu stellen. Dadurch lernte Euler seine zwei älteren Söhne, Nikolaus und Daniel, kennen. Der jüngste Sohn, Johannes II, war ein Kommilitone Eulers und deswegen schon früher mit ihm bekannt. Zusammen bekamen alle vier Aufgaben von Johann Bernoulli, der bald merkte, es handelte sich bei Leonhard um ein außerordentliches Talent. Johann Bernoulli war alles Andere als eine großzügige Persönlichkeit, aber seine Bewunderung für Euler nahm mit den Jahren nur zu, wie sich an den verschiedenen Briefanreden erkennen lässt, die er über die Jahre hinweg verwendete. Schon 1729 adressiert er an Euler als „Dem hochberühmten und gelehrten Mann“ (natürlich lateinisch), dann 1737 „Dem hochberühmten und weitaus scharfsinnigsten Mathematiker“ und endlich 1745 „Dem unvergleichlichen L. Euler, dem Fürsten unter den Mathematikern“.

Eulers weitere mathematische Karriere spielte sich an zwei weiteren Orten in drei Zeitabschnitten ab. Seine unaufhaltsame Produktivität entfaltete sich an den Akademien in St. Petersburg und Berlin zeitlich eingeteilt wie folgt:
- St. Petersburg (1727 – 1741)
- Berlin (1741 – 1766)
- St. Petersburg (1766 – 1783)

Mit zwanzig verließ Euler Basel für immer und übersiedelte nach St. Petersburg, wo er 1730 zum Professor für Physik ernannt wurde. Drei Jahre später folgte er Daniel Bernoulli als Professor für Mathematik. Im gleichen Jahr heiratete er Katharina Gsell. Aus dieser Ehe gingen dreizehn Kinder hervor, von denen aber nur fünf, drei Söhne und zwei Töchter, ihre Eltern überlebten.

In dieser Phase kommt der gewaltige Forscher voll zum Vorschein. Er veröffentlichte Arbeiten über Analysis und Zahlentheorie, aber auch in vielen angewandten Gebieten wie Astronomie, Kartographie, Optik und Schiffsbau. Er machte berühmte Entdeckungen, wie z.B. die Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

und löste das Königsberger Brückenproblem. Selbst die Musiktheorie wurde von Euler in einem Hauptwerk, das *Tentamen*, und mehreren Abhandlungen eingehend analysiert.

Schon 1738 verlor Euler sein rechtes Auge, was seine rastlose Arbeit gar nicht beeinflusste. Er rechnete einfach weiter. Drei Jahre später wurde Euler vom preußischen König Friedrich II. nach Berlin geholt, wo er 1744 zum Direktor der mathematischen Klasse an der Akademie ernannt wurde. Trotz vielfältiger Verpflichtungen fand er immer die Zeit, mathematischen Abhandlungen zu verfassen. Schon im selben Jahr veröffentlichte er eine erste zusammenfassende Darstellung der Variationsrechnung. Noch bedeutender für die Mathematikgeschichte ist sein Lehrbuch von 1748, das zweiteilige *Introductio in analysin infinitorum (Einführung in die Analysis des Unendlichen)*.

Im gewissen Sinne beginnt die moderne Analysis mit diesem Werk, in dem Euler den Funktionsbegriff zum ersten Mal als Grundlage für die Theorie einführt. Eine Funktion ist allerdings nach Euler als eine explizite Formel zu verstehen, die gegebenenfalls eine mehrdeutige Zuordnung zulässt. Die heutige Definition von einer Funktion als eine beliebige, aber eindeutige Zuordnung zwischen gegebenen Zahlbereichen findet man erst bei P. L. Dirichlet etwa neunzig Jahre später. Eulers *Einführung in die Analysis des Unendlichen* besteht aus zwei Teilen. Im ersten zeigt er, wie man Funktionen umformen, zerlegen und in unendliche Reihen entwickeln kann. Danach kommt der weniger bekannte zweite Teil, in dem die Geometrie von Kurven zweiter und dritter Ordnung (also Kegelschnitte und Kubiken) samt ihren Tangenten, Normalen, Krümmungen und Singularitäten behandelt wird.

Dieser Zugang zur Analysis war höchst originell, aber Euler folgte dabei einem klaren didaktischen Konzept, wie man direkt aus dem Vorwort entnehmen kann. Dort schreibt er:

> „Der größte Teil der Schwierigkeiten, mit denen gewöhnlich die Jünger der mathematischen Wissenschaft bei der Erlernung der Analysis des Unendlichen zu kämpfen haben, hat nach meiner Erfahrung darin seinen Grund,

> dass man sich bereits an jene höhere Kunst heranwagt, bevor man noch recht die niedere Algebra sich angeeignet hat. Dies hat zur Folge, nicht nur, dass sich von dem Begriffe des Unendlichen ganz verkehrte Ansichten herausbilden. Nun setzt zwar die Analysis des Unendlichen nicht gerade eine vollkommene Kenntnis der niederen Algebra und aller ihrer bisher gefundenen Kunstgriffe voraus; indessen gibt es in letzterer doch so manche Fragen, deren gründliche Beantwortung den Anfänger auf jene höhere Wissenschaft vorzubereiten geeignet ist, und die trotzdem in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Algebra entweder ganz und gar übergangen oder doch nur obenhin behandelt werden. Was ich in dem vorliegenden Werke zusammengestellt habe, dürfte dem erwähnten Mangel, wie ich glaube, vollständig abzuhelfen im Stande sein. Denn ich habe nicht nur das, was die Analysis des Unendlichen durchaus voraussetzen muss, zwar weitläufiger aber strenger, als dies gewöhnlich geschieht, zu begründen gesucht, sondern auch viele Fragen erledigt, durch welche der Leser mit dem Begriff des Unendlichen allmählich und, ohne es selbst zu merken, vertraut wird. Überdies habe ich, um die große Übereinstimmung der beide Wege leichter erkenntlich zu machen, mehrere Gegenstände, die man sonst in der Analysis des Unendlichen zu behandeln pflegt, nach den Regeln untersucht, welche die niedere Algebra an die Hand gibt.“

Der amerikanische Mathematikhistoriker Carl Boyer gab folgende Einschätzung von der Bedeutung dieses Klassikers:

> „The *Introductio* of Euler is referred to frequently by historians, but its significance generally is underestimated. The book is probably the most influential textbook of modern times. It is the work which made the function concept basic in mathematics. It popularized the definition of logarithms as exponents and the definitions of the trigonometric functions as ratios. It crystallized the distinction between algebraic and transcendental functions and between elementary and higher functions. It developed the use of polar coordinates and of the parametric representation of curves. Many of our commonplace notations are derived from it. In a word, the *Introductio* did for elementary analysis what the *Elements* of Euclid did for geometry. It is, moreover, one of the earliest textbooks on college level mathematics which a modern student can study with ease and enjoyment, with few of the anachronisms which perplex and annoy the reader of many a classical treatise.“

Euler schrieb einen zweiten Klassiker während dieser Berliner Periode, aber nicht als Mathematiker sondern als Naturphilosoph. Es handelte sich um seine Briefe an eine deutsche Prinzessin, bestehend aus 234 Briefen, die er zwischen 1760 - 1762 an die 15-jährige Tochter von Friedrich Heinrich, dem Markgrafen von Brandenburg-Schwedt, gerichtet hat. Erst nach seiner Rückkehr nach Petersburg wurden sie veröffentlicht und dann mehrmals. Um 1800 konnte man Eulers *Briefe an eine deutsche Prinzessin* in acht Sprachen lesen: Russisch, Deutsch, Holländisch, Schwedisch, Italienisch, Englisch, Spanisch und Dänisch. Sie wurden von berühmten Gelehrten wie Voltaire, Goethe und Kant zitiert und gelangten zum Ansehen als eines der wichtigsten naturphilosophischen Werke der Aufklärungszeit. Eulers erste zwanzig Jahre in Berlin waren durch allerlei ehrgeizige Pläne für die Akademie gekennzeichnet. Der französische Mathematiker Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, der damalige Präsident der Akademie, wollte diese Institution im großen Stil aufbauen und Friedrich II. schien voll hinter ihm zu stehen. Nachdem Maupertuis 1759 durch einen von Voltaire angeheizten Skandal sein Amt aufgab, stand der verdienstvolle Euler bereit, aufzurücken. Der König schätzte jedoch Eulers Verdienste nicht besonders hoch ein, und es kam langsam zu einem Zerwürfnis zwischen ihnen. Die Präsidentschaft blieb unbesetzt, und Euler fing schon 1762 an, den Weg zurück nach St. Petersburg zu planen. Die Verhandlungen dauerten lange an, aber im Februar 1766 reichte er sein Abschiedsgesuch bei Friedrich ein. Friedrich zögerte, gab aber endlich nach: Euler erhielt die Erlaubnis, wieder nach Russland zu gehen. Als seinen Nachfolger konnte Friedrich II. Joseph Louis Lagrange gewinnen und damit den mathematischen Ruhm seiner Akademie aufrechterhalten.

Als Euler Ende Juli in Petersburg eintraf, wurde er sehr großzügig von Zarin Katherina II. empfangen. Trotz seines hohen Alters blieb er auch während dieser letzten Schaffensphase unglaublich produktiv. 1768 veröffentlichte er seine dreibändige Abhandlung zur Integralrechnung, und zwei Jahre später brachte er einen dritten Klassiker heraus, seine *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Nochmals zeigte Euler seine Begabung als Didaktiker, der möglichst allgemein verständlich sein Thema darlegte.

Um dies zu prüfen, diktierte er das Werk einem ungebildeten Schneidergesellen, der angeblich doch genug davon verstanden hat, um schwierige algebraische Aufgaben lösen zu können. Eulers *Algebra* stellt tatsächlich eine einmalige Leistung dar, denn er bewegt sich ganz langsam von den einfachsten arithmetischen Eigenschaften bis hin zur Spitze der damaligen Gleichungstheorie. Lagrange schenkte dem Lehrbuch Eulers sein Lob, indem er das Buch mit einigen bedeutenden Zusätzen versah. Natürlich wurde auch dieses Buch in alle führenden Fremdsprachen übersetzt, und es steht allein als einziger mathematischen Band in Reclams Universal-Bibliothek.

Aber nicht alles verlief glücklich für Euler in St. Petersburg. 1771 erblindete er vollends, und im gleichen Jahr ging sein Haus in Flammen auf. Nichts davon konnte ihn in seiner wissenschaftlichen Arbeit aufhalten. Mit Unterstützung seiner Gehilfen diktierte er immer weiter. In den letzten acht Jahren seines Lebens verfasste er nicht weniger als 270 Arbeiten, deren Inhalte er sicherlich lange zuvor ausgedacht hatte. Als er am 18. September 1783 an einem Schlaganfall starb, hinterließ er 866 Bücher und Abhandlungen, viele von dauerhafter Bedeutung für die Mathematikgeschichte. Natürlich gab es auch andere sehr produktive Zeitgenossen, aber Euler allein hatte etwa ein Drittel aller Beiträge zur Mathematik, theoretischen Physik und Mechanik zwischen 1726 und 1800 geschrieben! Die Basler Edition seiner *Opera Omnia* umfasst 74 Bände. Man nimmt an, dass er dies nur leisten konnte, weil er ein unglaublich gutes Gedächtnis und ein ungeheuer großes Konzentrationsvermögen besaß. Das muss wohl der Fall gewesen sein, aber das Geheimnis seiner Schaffenskraft wird damit sicherlich kaum erklärt. Euler ähnelt einem gewaltigen Naturwunder, worüber man nur staunen kann.

Ein Blick hinter die Kulissen: Das enthüllte Alter

Von Hartwig Fuchs

Ein Magier behauptet, er könne die Gedanken seiner Zuschauer nicht nur lesen, sondern sogar auch lenken.
„Zum Beweis“ fordert er einen Zuschauer auf, sich eine natürliche zweiziffrige Zahl Z zu denken – die er seinen Nachbarn, nicht aber ihm mitteilen dürfe. Mit der Zahl Z soll er dann folgende Rechnung ausführen:

- Z wird mit 50 multipliziert;
- zum Produkt wird 988 addiert;
- die Summe wird verdoppelt;
- hat der Zuschauer in diesem Jahr schon Geburtstag gehabt, so addiert er 31, wenn nicht, dann addiert er 30;
- schließlich subtrahiert er sein Geburtsjahr.

Nachdem der Zuschauer seine Rechnung beendet hat, verkündet der Magier siegessicher:

Die beiden letzten Ziffern des Ergebnisses geben das Alter des Zuschauers (in ganzen Jahren) an; die beiden ersten Ziffern bilden die gedachte Zahl Z.

Probiere es selber aus: Der Trick des Magiers klappt!

Sein Experiment sei ihm nur deshalb gelungen – behauptet der Magier – weil er das Alter des Zuschauers aus dessen Gedanken erraten und ihn danach dazu bringen konnte, die vom Magier für dieses Alter passende Zahl Z zu wählen.

Verhält es sich tatsächlich so?
Sehen wir uns die Rechnung genauer an. Es sei G das Geburtsjahr des Zuschauers, und der habe in diesem Jahr schon seinen Geburtstag gefeiert. Dann lautet die Rechnung:

$$(Z \cdot 50 + 988) \cdot 2 + 31 - G = Z \cdot 100 + (2007 - G)$$

Die Zahl $Z \cdot 100 + (2007 - G)$ ist vierziffrig; ihre beiden letzten Ziffern, die man aus $2007 - G$ erhält, geben das Alter des Zuschauers an und die beiden ersten Ziffern, die sich aus $Z \cdot 100$ ergeben, bilden die vom Zuschauer gewählte Zahl Z.
Falls der Zuschauer in diesem Jahr noch keinen Geburtstag gehabt hat, rechnet man so:

$$(Z \cdot 50 + 988) \cdot 2 + 30 - G = Z \cdot 100 + (2006 - G)$$

Aus $2006 - G$ erhält man das Alter des Zuschauers und aus $Z \cdot 100$ die von ihm gedachte Zahl Z.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –

Von Martin Mattheis

Kjarta Poskitt: „Mathe voll logisch“.

„Wie unterscheidet man einen Mathematiker von einem richtigen Menschen?“ Die Antwort darauf erfährst du in dem Taschenbuch „Mathe voll logisch“ von Kjartan Poskitt. Dazu lernst du außerdem noch, dass einige der coolsten Typen der letzten 5000 Jahre Mathematiker waren: „Im alten Griechenland war Mathematik so beliebt wie bei uns heute Popmusik oder Fußball. Es herrschte ein heißer Wettbewerb um den Beweis und die Entwicklung grundlegender Theorien. Um 550 v. Chr. wurde Thales, ein Olivenölmagnat, zum Superstar, als er ein paar absolute Grundlagen schuf. Heißt das, er war ein Langweiler? Überhaupt nicht: Um eine seiner Entdeckungen zu feiern, ging er los und opferte den Göttern einen Bullen!“ Wofür das arme Tier sein Leben verlor, könnt Ihr in dem in der Reihe „Wahnsinns Wissen“ des Loewe Verlag erschienenen Buch selbst nachlesen.
Außer Thag, dem Mathemagier, der auf der Burg Rechenstein hilft, eine entführte Prinzessin zu befreien, trifft der Leser auf die Grundrechenarten, Bakterienwachstum und große Zahlen, Römische Zahlen, das Dezimalsystem, Blödsinn aus dem Taschenrechner, Zeiträume, Primzahlen, Winkel, Zauberquadraten, Mathemagie und Symmetrien.
Eine von Mathematik nicht immer begeisterte Schülerin der 9. Klasse kam zu folgender Beurteilung des Buches:
„So macht lernen Spaß! Dieses fantastische Buch vermittelt mit so viel Witz und Spannung Wissen, das Jugendliche und Kinder anspricht. Meist liegt man dank der vielen Cartoons flach vor Lachen, aber wer denkt, dass er ein simples Büchlein vor sich hat, der irrt, denn ob man es glaubt oder nicht, die Fakten, die in diese Cartoons eingelassen sind, entsprechen der Wahrheit. So behält man dieses Wissen gerne für sich.“

Fazit: „Mathe voll logisch“ von Kjartan Poskitt ist in einer vor allem für jüngere Schüler sehr ansprechenden Weise geschrieben. Durch kurze Geschichten werden einige der spannendsten Themen der Mathematik vorgestellt und diese zusätzlich durch witzige Cartoons veranschaulicht. Von der Aufmachung her richtet sich das Buch vor allem an jüngere Schüler, die behandelten Themen übersteigen jedoch gelegentlich den Horizont der 5. und 6. Klasse, weswegen es nur die Gesamtbeurteilung „gut“ ☺☺ erhält.

Angaben zum Buch: Poskitt, Kjartan: Mathe voll logisch; Loewe, 1998, ISBN 3-7855-3304-7, TB, 144 Seiten, 7,50 €

Art des Buches:	Mathematischer Roman
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 11 Jahren
Gesamtbeurteilung:	gut ☺☺

Hättest Du es gewusst: Die Winkeldreiteilung des Achimedes

Von Hartwig Fuchs

Aus der Mathematik der griechischen Antike sind uns drei berühmte geometrische Aufgaben überliefert, deren Lösungen in endlich vielen Schritten allein mit einem Zirkel und einem (unmarkierten) Lineal konstruiert werden sollen.

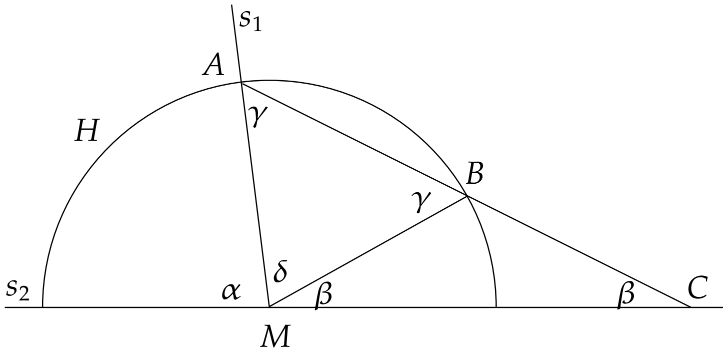
Die Quadratur eines Kreises: Es ist ein zu einem gegebenen Kreis flächengleiches Quadrat zu konstruieren.

Die Verdopplung eines Würfels: Es ist ein Würfel zu konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das Volumen eines gegebenen Würfels.

Die Trisektion eines Winkels: Ein beliebiger Winkel soll in drei gleich große (kongruente) Teilwinkel zerlegt werden.

Von allen drei Aufgaben weiß man seit dem 19. Jahrhundert, dass sie unter Beschränkung auf Zirkel und Lineal als alleinigen Konstruktionsinstrumenten nicht lösbar sind.

Für die Trisektion eines beliebigen Winkels hat aber bereits Archimedes (um 287-212 v. Chr.) die folgende konstruktive Lösung beschrieben:



Gegeben sei der Winkel $\sphericalangle(s_1, s_2) = \alpha$.

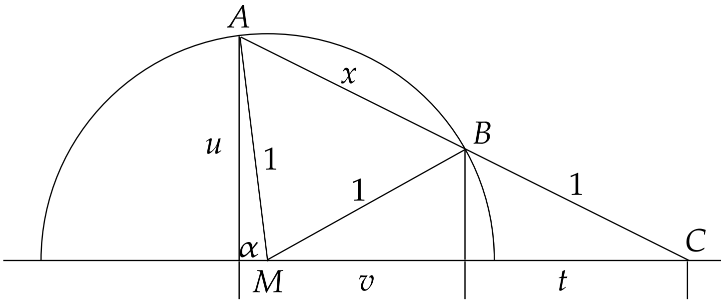
1. Zeichne einen beliebigen Halbkreis H um den Scheitelpunkt M des Winkels; sei $A := H \cap s_1$.
2. Wähle nun auf H den Punkt B so, dass $|\overline{AM}| = |\overline{BC}|$ ist.

Dann gilt:

$\triangle MBA$ und $\triangle MBC$ sind gleichschenklig; also ist $\sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM = \gamma$ und $\sphericalangle CMB = \sphericalangle BCM = \beta$. Wegen $\delta = 180° - 2\gamma$ folgt damit $\alpha + \delta + \beta = \alpha + (180° - 2\gamma) + \beta = 180°$, also $2\gamma = \alpha + \beta$ und $\beta + \beta + (180° - \gamma) = 180°$, so dass $\gamma = 2\beta$. Aus $\alpha + \beta = 2\gamma = 2 \cdot 2\beta$ folgt, dass $\alpha = 3\beta$ und mithin $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ ist.

Mit der archimedischen Konstruktion erhält man also zu einem beliebigen Winkel α, $0° < \alpha < 180°$, den Drittelwinkel $\frac{1}{3}\alpha$.

Dies Ergebnis steht nicht im Widerspruch zu der oben angegebenen Tatsache, dass ein beliebiger Winkel nicht mit Zirkel und Lineal dreiteilbar ist. Das hat den folgenden Grund: Zu der oben mit 2. bezeichneten Konstruktion reichen Zirkel und Lineal allein nicht aus!



In obiger Figur sei der Radius des Halbkreises $r = 1$. Von A und B fällen wir die Lote auf MC. Mit den Bezeichnungen der Figur gilt dann nach dem Strahlensatz:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{v+t}{t},$$

also $t = \frac{v}{x}$. Ferner ist $(x+1)^2 = u^2 + (v+\ t)^2 = u^2 + (v + \frac{v}{x})^2$,

also $x^2(x+1)^2 = u^2x^2 + (vx+v)^2$ und daher

$$x^4 + 2x^3 + (1 - u^2 - v^2)x^2 - 2v^2x - v^2 = 0.$$

Damit die Strecke x als Lösung dieser Gleichung allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, muss sie entweder eine rationale Zahl oder eine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl oder eine rationale Kombination aus rationalen Zahlen und Quadratwurzeln aus solchen Kombinationen sein. Das ist für ein beliebiges u und damit einen beliebigen Winkel α nicht zu erwarten. Die archimedische Winkeldreiteilung erfordert somit mehr oder andere Konstruktionselemente als nur Zirkel und Lineal (vgl. MONOID-Heft Nr. 82, S. 14).

Diese der Algebra entnommene Argumentation wird dort auch noch folgendermaßen durchgeführt: Gäbe es ein allgemeines Konstruktionsverfahren für die Winkeldreiteilung, müsste es insbesondere bei einem Winkel $\alpha = 60°$ funktionieren, also $\beta = 20°$ konstruierbar sein. Dann müsste auch die Strecke $|\overline{MC}| = 2t = 2\cos\beta = 2\cos(20°)$ konstruierbar sein, für die sich mit Hilfe trigonometrischer Umformungen die Gleichung $(2t)^3 - 3(2t) - 1 = 0$ herleiten lässt. Daraus lässt sich algebraisch beweisen, dass dann die Gleichung $x^3 - 3x - 1 = 0$ eine rationale Lösung $\frac{m}{n}$ mit teilerfremdem Zähler $m \in \mathbb{Z}$ und Nenner $n \in \mathbb{N}$ haben müsste, was unmöglich ist; denn nach Multiplikation mit n^3 folgte $m^3 - 3mn^2 - n^3 = 0$. Hieran ist zu sehen, dass m und n wegen ihrer Teilerfremdheit keine Primteiler haben könnten, also $m = \pm 1$ und $n = 1$ sein müsste, was unmittelbar zum Widerspruch führt.

Es gibt immer wieder Hobby-Mathematiker, die sich nicht damit abfinden wollen, dass mit Hilfe *algebraischer* Methoden eine *geometrische* Konstruktion als unmöglich nachgewiesen ist und die unverdrossen geometrische Konstruktionsversuche bei mathematischen Instituten einreichen. Der Hinweis auf den längst erbrachten algebraischen Beweis der Unmöglichkeit wird nicht gerne oder überhaupt nicht angenommen, wie folgende kleine Szene zeigt, die einer wahren Begebenheit nachgestellt ist. In dem dargestellten Fall ist der abgewiesene Winkeldreiteiler bis vor das Gericht gegangen:

Gerichtsszene

(nach einer wahren Begebenheit, entworfen von E. K.)

Personen: Richter Paragraphus
Kläger Zirkulosius, ein Mathematik-Amateur
Angeklagter Dr. Algebraikus, ein Mathematik-Professor
Ort der Handlung: Gerichtssaal

Richter: Kläger, tragen Sie Ihr Begehren vor!

Kläger: Hohes Gericht! Ich habe in nächtelanger Schweißarbeit endlich ein allgemeines Verfahren gefunden, nach dem man allein mit Zirkel und Lineal einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zerlegen kann. Hier *(dabei schwenkt er eine dicke Broschüre mit vielen verwirrenden Zeichnungen durch die Luft)* habe ich alles fein säuberlich aufgeschrieben und bewiesen. *(Hält inne und blättert in seinem Opus.)*

Richter: Kläger, fahren Sie fort!

Kläger: Ich habe dieses wichtige Ergebnis beim Mathematischen Institut der Universität in Unihausen eingereicht mit der Bitte um wohlwollende Prüfung.

Richter: Und wurde diese Ihnen zuteil?

Kläger: Nein! Das ist ja das Empörende! Dieser Herr *(dabei deutet er auf Prof. Dr. Algebraikus)* behauptet, ich könnte das Problem der Winkeldreiteilung garnicht gelöst haben, weil schon lange algebraisch bewiesen sei, dass dies unmöglich sei. Man bedenke algebraisch bewiesen! Wo es doch ein geometrisches Problem ist, wie schon jeder Laie unschwer feststellen kann! *(Bei diesen Sätzen gerät Zirkulosius immer mehr in Erregung.)*
Ich glaube, dass der Professor – bei allem Respekt – meine Arbeit überhaupt nicht gelesen hat. Jedenfalls hat er nicht gezeigt, wo sie einen Fehler enthält, und wenn alles stmmt, dann habe ich eben ein neues Verfahren zur Winkeldreiteilung gefunden, und diese ganzen Algebraiker haben sich eben geirrt! Die sollen doch bei ihrer Algebra bleiben und sich nicht in die Geometrie mischen! Sagt nicht schon Volkesmund: „Schuster bleib bei deinem Leisten!"? *(Bei diesen Sätzen ist Zirkulosius immer lauter geworden.)*

Richter: Kläger, mäßigen Sie sich!

Kläger: Ach, da soll man sich nicht aufregen! Da investiert man so viel Mühe, glaubt der Wissenschaft einen großen Dienst zu tun, indem man ein altes Problem löst, und dann kommt ein so genannter Fachvertreter daher, guckt sich das nicht einmal richtig an und behauptet dann noch in seinem Schreiben *(Zirkulosius hält ein Blatt hoch)*, ich hätte bestenfalls eine gute Näherungslösung gefunden. *(Betont verächtlich:)* Näherungslösung! Wo soll denn meine Arbeit ungenau sein?

Richter: Herr Zirkulosius, überlassen Sie bitte dem Gericht das Schreiben von Professor Algebraikus als Beweisstück!

Kläger: Bitte! *(Übergibt das Schreiben.)*

Richter: *(Richter Paragraphus überfliegt das Schreiben und nickt bedächtig. Er wendet sich dann Prof. Dr. Algebraikus zu, der bisher teils interessiert, teils belustigt zugehört hat.)* Angeklagter, Sie haben die Ausführungen des Klägers gehört. Was haben Sie zu erwidern?

Angeklagter: Hohes Gericht! In der Tat ist die so genannte Winkeltrisektion, also die Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile allein mit Zirkel und Lineal als technische Hilfsmittel, ein altes ungelöstes geometrisches Problem. Aber schließlich ist es ein mathematisches Problem, und die Einteilung der mathematischen Disziplinen ist mehr vom jeweiligen Gegenstand her bestimmt denn von den Methoden. Warum sollte also ein geometrisches Problem nicht mit algebraischen Methoden angegangen werden? Schließlich setzt man in der Geometrie auch analytische Vorgehensweisen ein; ich erinnere hier nur an die Differentialgeometrie, wo...

Richter: Professor, bitte zur Sache!

Angeklagter: Was nun die Winkeltrisektion betrifft, so kann man in jedem guten Algebrabuch im Anschluss an die Galois-Theorie...

Richter: Wie bitte?!

Angeklagter: Die Galois-Theorie ist eine algebraische Theorie, welche die Theorie der Körpererweiterungen in Zusammenhang bringt mit der Gruppentheorie und ihren Namen zu Ehren des französischen Mathematikers Evariste Galois erhalten hat, der von 1811 bis 1832 lebte und in einem Abschiedsbrief vor dem Duell am 30. Mai 1832 noch die Grundzüge seiner Theorie zur Lösung algebraischer Gleichungen angedeutet hat. Als Anwendung ihrer Ergebnisse gestattet die Galois-Theorie unter anderem Aussagen über die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit von Gleichungen, aber eben auch über die Konstruierbarkeit bzw. Nichtkonstruierbarkeit reeller Zahlen. Danach muss eine reelle Zahl, wenn sie als Streckenlänge mit Zirkel und Lineal konstruierbar sein soll, einem Erweiterungskörper des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen angehören, dessen Grad über $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz sein muss.

Richter: Das klingt alles sehr komplizert.

Angeklagter: Ganz einfach ist es auch nicht. Darum habe ich Herrn Zirkularius auch in meinem Schreiben, wie Sie feststellen können, eine Auswahl von Algebra-Lehrbüchern angegeben, mit deren Hilfe er sich selbst kundig machen kann. Auf jeden Fall kann er dort nachlesen, dass gewisse geometrische Probleme wie die Quadratur des Kreises, die Kubusverdopplung und die Trisektion des Winkels unlösbar sind. Daraus ergibt sich, dass seine Lösung bestenfalls nur eine Näherungslösung sein kann.

Kläger: *(Aufgebracht)* Aber wo soll denn, bitteschön, der Fehler sein? Ohne Nachweis eines Fehlers akzeptiere ich nicht, dass meine eingereichte Lösung zur Winkeldreiteilung falsch sein soll – nur weil in irgendsoeiner Theorie von einem Galois steht, dass das nicht gehen soll! Vielleicht enthält diese Theore einen Denkfehler, und ich habe hier den praktischen Gegenbeweis!

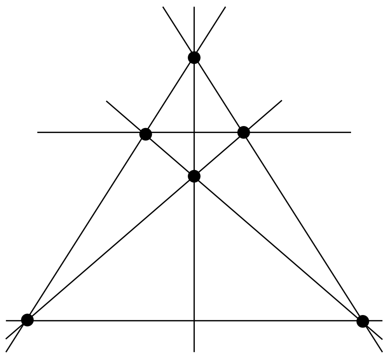
Richter: Angeklagter, haben Sie Ihren Ausführungen noch etwas hinzuzufügen?

Angeklagter: Nein. Ich kann nur wiederholen, dass wegen des allgemeinen Unmöglichkeitsbeweises, an dem auch kein ernstzunehmender Mathematiker zweifelt, die von Herrn Zirkulosius eingereichte Winkeltrisektion einen Fehler enthalten muss.

Richter: Ich komme damit zum Urteil. Ich bitte die Herren, sich zu erheben. *(Alle stehen auf.)*
Im Namen des Volkes!

Der Angeklagte Professor Dr. Algebraikus wird hiermit verurteilt, die vom Kläger Zirkularius eingereichte Arbeit zur Winkeldreiteilung nach wissenschaftlichen Gesichtspunkten auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen und im Falle der Unrichtigkeit dem Kläger den Fehler nachzuweisen.
Zur Begründung:
Es ist dem Kläger nicht zuzumuten, dass seine geometrische Arbeit mit dem Hinweis auf ein Resultat aus einer ganz andersartigen, nämlich algebraischen Theorie, die ihm nicht geläufig ist, und deren Resultate demzufolge für ihn nicht nachvollziehbar sind, als fehlerhaft abgetan wird.
Gegen das Urteil kann binnen eines Monats in der nächsthöheren Instanz Berufung eingelegt werden. Die Verhandlung ist geschlossen.

Die „besondere“ Aufgabe
Das Drei-Punkte-Problem
Von Hartwig Fuchs



Das Problem
n Punkte ($n \geq 4$), die nicht alle auf einer einzigen Geraden liegen dürfen, sollen so in die Ebene gezeichnet werden, dass gilt:
Man kann jeden Punkt mit jedem anderen Punkt derart verbinden, dass jede Gerade durch mindestens drei der n Punkte läuft.

Dieses auf den ersten Blick einfache Problem widerstand jahrzehntelang den Lösungsversuchen der Mathematiker – bis dann ein unerwartet elementarer Weg gefunden wurde, auf dem man ihm zu Leibe rücken konnte.

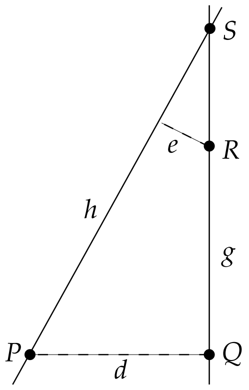
Lösung der Aufgabe
Es sei $\mathbb{M}$ eine Menge von n Punkten, $n \geq 4$, die beliebig in der Ebene verteilt seien – jedoch so, dass sie nicht alle auf einer Geraden liegen. Ferner sei $\mathbb{G}$ die Menge derjenigen Geraden, die einen Punkt aus $\mathbb{M}$ mit mindestens einem anderen Punkt aus $\mathbb{M}$ verbinden.

Jeder Punkt aus $\mathbb{M}$ hat einen Abstand $\neq 0$ von jeder derjenigen Geraden aus $\mathbb{G}$, auf denen er nicht selbst liegt. Unter diesen Abständen gibt es einen kleinsten – er sei d. Dann gilt also:

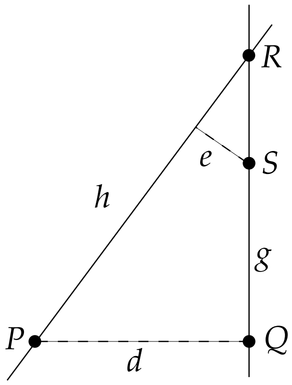
(∗) Es gibt einen Punkt $P \in \mathbb{M}$ und eine Gerade $g \in \mathbb{G}$ so, dass P diesen Minimalabstand $d \neq 0$ eines Punktes von einer Geraden hat.

Nach Voraussetzung verbindet die Gerade g mindestens zwei Punkte Q und R aus $\mathbb{M}$.

Annahme: Auf g liege außer Q und R noch ein dritter Punkt S aus $\mathbb{M}$.



1. Fall: S liege außerhalb der Strecke QR. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Gerade h in $\mathbb{G}$, die P und S verbindet. Für den Abstand e des Punktes R von h gilt dann (vergleiche nebenstehendes Bild): $e < d$.
R liegt also näher bei h als P bei g. Das widerspricht $(*)$, so dass der Punkt S nicht außerhalb der Strecke QR liegen kann.



2. Fall: S liege innerhalb der Strecke QR.
Es gibt dann eine Gerade h in $\mathbb{G}$, welche P und R verbindet, wobei für den Abstand e des Punktes S von der Geraden h wieder $e < d$ gilt – woraus man schließt, dass S nicht innerhalb der Strecke QR liegen kann.

Aus diesen beiden widerlegten Annahmen folgt: Es gibt den Punkt S nicht. Also enthält $\mathbb{G}$ eine Gerade g, auf der keine drei Punkte aus $\mathbb{M}$ liegen. Damit hat sich unerwarteter Weise herausgestellt, dass das Drei-Punkte-Problem keine Lösung besitzt!

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Wir nennen die drei folgenden Rechenvorschriften einen *Algorithmus*:

(1) Wähle eine bliebige ganze Zahl $Z \geq 10$ aus lauter verschiedenen Ziffern.

(2) Bilde durch Umstellung der Ziffern von Z alle überhaupt möglichen neuen Zahlen.
(Dabei dürfen auch Zahlen mit führenden Ziffern 0 entstehen, z. B. $Z = 601 \to 016, 061, 106, 160, 160, 610$.)

(3) Addiere Z und alle zugehörigen neuen Zahlen auf und dividiere die Summe durch die Quersumme von Z.

Untersuche nun Fragen wie:
Gibt es Gesetzmäßigkeiten bei Anwendung des Algorithmus?
Ist (3) stets ganzzahlig ausführbar?
Hinweis: Untersuche zunächst zweiziffrige, dann dreiziffrige,... Zahlen Z. (H.F.)

Hinweis:
Eure Entdeckungen könnt Ihr bis zum 31. August 2007 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im *übernächsten* Heft werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen; außerdem werden sie bewertet.

Die Seite für den Computer-Fan

Auf Primzahlensuche

Die Zahl $2^3 + 3^2 = 17$ ist eine Primzahl. Lassen sich in der Menge der Potenzsummen $m^n + n^m$ mit natürlichen Zahlen m und n weitere Primzahlen finden?

Untersuche etwa die Bereiche $2 \leq m \leq 11, 1 \leq n \leq 1000$. (nach H.F.)

Lösung der Computer-Aufgaben aus Monoid 87

Wahr oder falsch?

Jede ungerade natürliche Zahl $n > 1$ ist als Summe aus einer Primzahl p und dem Doppelten einer Quadratzahl $t^2, t \geq 0$, darstellbar, also: $n = p + 2 \cdot t^2$ für $n = 3, 5, 7, \ldots$ (gefunden: H.F.)

Lösung:

Die Behauptung ist falsch.

Mit einem C++-Programm hat **Christian Behrens** vom Gymnasium am Römerkastell Alzey herausgefunden, dass 5 777 die erste Zahl ist, bei der die Behauptung falsch wird.

Florian Schweiger vom Gymnasium Marktoberdorf hat mit einem Programm in Visual Basic für alle ungeraden Zahlen bis 19 999 alle existierenden Darstellungen der geforderten Art berechnen lassen, wofür sein Programm etwa eine Viertelstunde benötigte. Dabei zeigte sich, dass die Zahlen 5 777 und 5 993 die einzigen unterhalb 20 000 sind, die keine Darstellung der geforderten Art besitzen.

Auch das C++-Programm von **Martin Reinhardt** vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal stöbert die Zahlen 5 777 und 5 993 als Gegenbeispiele auf, wenn man n nur hoch genug ansetzt.

Hinweis des Aufgabenstellers Hartig Fuchs: Die Zahlen 5 777 und 5 993 sind die einzigen (!) Zahlen unterhalb 120 000, durch die die Behauptung widerlegt wird, da sie eine solche Darstellung nicht besitzen; bleibt die Frage, wie es oberhalb 120 000 aussieht.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen auch bis zum 15. Mai 2007 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als Anhang einer e-Mail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 88

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Der Pendler

Frau Kramer kommt täglich um 14 Uhr zum Bahnhof, um ihren Sohn abzuholen und ihn nach Hause zu fahren. Eines Tages endet die Schule früher und so kommt der Sohn ausnahmsweise eine Stunde früher an; mangels eines Handys beginnt er zu Fuß nach Hause zu gehen. Glücklicherweise wird er unterwegs von seiner Mutter aufgelesen. Sie kommen so 20 Minuten früher nach Hause als üblich. Wie lange ging der Sohn, bevor er seine Mutter traf?

Lösung:

Der Sohn wird täglich um 14 Uhr abgeholt. Diesmal kam er bereits eine Stunde früher, also um 13 Uhr, am Bahnhof an. Da er einen Teil des Weges gelaufen war, ersparte er seiner Mutter insgesamt 20 Minuten (weil sie zuhause 20 Minuten früher ankamen). Die 20 Minuten Ersparnis bedeuten 10 Minuten für jede Richtung. Also traf der Sohn seine Mutter 10 Minuten vor 14 Uhr, also um 13:50 Uhr. Daher muss der Sohn von 13 Uhr bis 13:50 Uhr immerhin bereits **50 Minuten** zu Fuß unterwegs gewesen sein.

Wer lügt denn da?

Lewis Caroll, Autor berühmter Kinderbücher wie etwa Alice im Wunderland, war auch Mathematikprofessor in Oxford. Seine besondere Liebe galt den Denksportaufgaben. Hier eine Kostprobe:

Alice behauptet, dass Betsy lügt. Betsy sagt, dass Cynthia lügt und Cynthia behauptet, dass Alice und Betsy lügen. Wer lügt und wer sagt die Wahrheit?

Lösung:

Wir untersuchen die beiden Annahmen

1. Annahme: Alice (A) sagt die Wahrheit;

2. Annahme: A lügt.

Im Falle der 1. Annahme sagt A die Wahrheit.

> Demnach muss dann Betsy (B) lügen. Das heißt aber, dass Cynthia (C) die Wahrheit sagen muss. Diese behauptet aber, dass A und B lügen. Dies ist aber ein WIDERSPRUCH zur Annahme, dass A die Wahrheit sagt.

Im Falle der 2. Annahme lügt A.

> Dies bedeutet, dass B nicht lügt, sondern die Wahrheit sagt. Folglich lügt C. Dies heißt aber, dass A und B nicht beide lügen. Nach Annahme lügt A, also muss B die Wahrheit sagen (und C lügen).

Resultat:

Betsy sagt die Wahrheit, während Alice und Cynthia lügen.

Wahr oder falsch?

In der unendlichen Zahlenfolge $9, 98, 987, \ldots 987654321, 9876543219, 98765432198, \ldots$ kommen keine Primzahlen vor. Trifft das zu oder nicht? (H.F.)

Lösung:

Alle Zahlen der Folge mit einer geraden Einerziffer oder mit der Einerziffer 5 sind keine

Primzahlen. Alle Zahlen mit der Einerziffer $9, 7, 3$ oder 1 haben eine durch 3 teilbare Quersumme und sind deshalb selbst durch 3 teilbar. Dies folgt daraus, dass jede der Zahlen $9, 987, 9876543$ und 987654321 eine durch 3 teilbare Quersumme hat.

2006
Bestimme für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ jeweils die letzte Ziffer der Zahlen n^{2006} und 2006^n. (WJB)

Lösung:
Die letzten Ziffern der Potenzen von 2 sind $2, 4, 8, 6, 2, 4, \ldots$, wiederholen sich also jeweils alle vier Schritte. 2^{2006} hat also die gleiche Endziffer wie $2^{2006-2004} = 4$.
Die letzten Ziffern der Potenzen von 3 sind $3, 9, 7, 1, 3, \ldots$. Hier ergibt sich entsprechend für 3^{2006} die Endziffer 9. Mit der gleichen Methode findet man für 4 die 6, für 5 die 5, für 6 die 6, für 7 die 9, für 8 die 4 und für 9 die Endziffer 1.

Da 2006 die Endziffer 6 hat, ergibt dies auch Endziffer 6 für 2006^n.

In einer Fischzucht
In einer Fischzucht gibt es ein quaderförmiges Becken von 43 m Länge und 14 m Breite, in dem das Wasser 2 m hoch steht und in dem sich höchstens 1200 (punktförmige) Wasserflöhe befinden.
Begründe: Zu jedem beliebig gewählten Zeitpunkt gibt es mindestens 4 würfelförmige Bereiche von 1 m Kantenlänge im Becken, in welchen sich keine Wasserflöhe aufhalten. (H.F.)

Lösung:
Man denke sich das Wasservolumen des Beckens eingeteilt in $43 \cdot 14 \cdot 2 = 1204$ Wasserwürfel von der Kantenlänge 1 m. Wenn sich in keinem Würfel mehr als ein Wasserfloh aufhält, dann sind von höchstens 1200 Wasserflöhen auch nur höchstens 1200 Würfel besetzt. Es gibt also mindestens 4 Würfel ohne Wasserflöhe.

Kubikzahlen
Die Summen $1^3 + 2^3 + 3^3$, $2^3 + 3^3 + 4^3$, $3^3 + 4^3 + 5^3$ sind durch 3 ohne Rest teilbar.
Gilt die Verallgemeinerung:
Die Summe von 3 aufeinander folgenden Kubikzahlen ist stets durch 3 teilbar? (H.F.)

Lösung:
$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$ und die letzte Summe ist für jede ganze Zahl durch 3 teilbar.

Ein Zahlenkarussell
Jemand wählt eine beliebige Zahl $\neq 0$ als Startzahl – z.B. 10 – und eine zweite beliebige Zahl als Operationszahl – z.B. 13. Er rechnet dann mit 10 und 13 so:

$$10 \xrightarrow{+13} 23 \xrightarrow{\cdot 13} 299 \xrightarrow{-13} 286 \xrightarrow{:13} 22 \xrightarrow{+1} 23 \xrightarrow{-13} 10$$

Anfangszahl und Endzahl stimmen überein! – Zufall?
Oder stimmen Anfangszahl und Endzahl stets überein, wie auch immer man die Startzahl und die Operationszahl wählt? (H.F.)

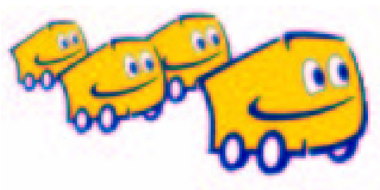
Lösung:
Sei die Startzahl x und die Operationszahl y. Dann ist

$$((x+y)\cdot y-y):y+1-y=(x+y-1)+1-y=x.$$

Neue Mathespielereien

Zwei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Abfahrtszeiten



Vier Busse A, B, C, D verlassen um 6.00 Uhr morgens gleichzeitig den Busbahnhof, um ihre jeweiligen Rundkurse abzufahren. Die Zeit zwischen zwei Abfahrten eines Busses beträgt jeweils A: 30 min, B: 36 min, C: 40 min, D: 60 min. Die Busse fahren täglich bis spätestens 24.00 Uhr.
Gibt es im Laufe des Tages mehr als eine Abfahrtszeit, zu der alle Busse gleichzeitig losfahren? (H.F.)

Auf einem weit entfernten Planeten...
leben Wesen verschiedener Arten. Die Forscher vermuten:

1. Alle Qurz sind Klhx.
2. Alle Jfxs sind Mnbw.
3. Alle Qurz sind Jfxs.
4. Khlx sind die Lebewesen, die Xarq, aber keine Mnbw sind.
5. Ptdc sind nur die, die Klhx, aber nicht Qurz sind.
6. Alle Ptdc sind Hnk.
7. Alle Mnbw sind Xarq.

Einem Forscher fällt auf: Die Vermutung 4. kann nicht stimmen, wenn alle anderen zutreffen. – Warum?

(Connor Röhricht, Klasse 8, Gymnasium Hochrad, Hamburg)

Magisches Quadrat

r	s
t	u

Zeige: Die vier Zahlen r, s, t, u bilden nur dann ein magisches Quadrat, wenn sie alle gleich sind. (H.F.)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Zwei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Großvater, Vater und Kind

Mathis sagt zu Mette: „Das Alter meines Großvaters G, meines Vaters V und meines Bruders B – jeweils in ganzen Jahren – hat das Produkt 31 500 und das Produkt des Alters meines Großvaters und meines Vaters ist das 140-fache des Alters meines Bruders. Wie alt sind mein Großvater, Vater und Bruder?“

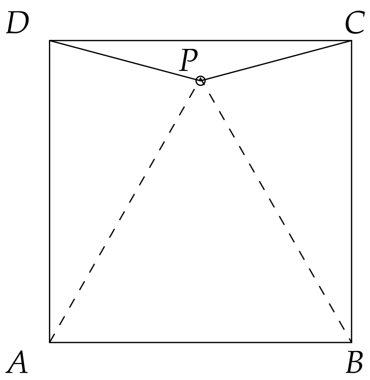
Darauf Mette nach kurzer Überlegung: „Mit diesen Informationen kann ich nur das Alter deines Bruders berechnen.“

Mathis nun zu Mette: „Mein Großvater ist keine 30 Jahre älter als mein Vater. Also frage ich noch einmal: Wie alt sind mein Großvater, Vater und Bruder?“ (H.F.)

Teiler

Es sei z eine Zahl, deren letzte beiden Ziffern 26 sind. Zeige, dass sich $z^2 - z$ durch 50, aber nicht durch 100 teilen lässt. (WJB)

Dreiecke im Quadrat



Im Quadrat $ABCD$ ist ein Punkt P so festgelegt, dass die Winkel $\sphericalangle PDC$ und $\sphericalangle DCP$ beide $15°$ sind.

Dann ist das Dreieck ABP gleichseitig.

Du siehst es! Kannst du es auch beweisen? (H.F.)

Tipp: Konstruiere über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck ABQ und zeige dann, dass die Punkte Q und P identisch sein müssen.

Eine sichere Sache

In einem Behälter befinden sich Kugeln, die nur durch ihre Farbe unterscheidbar sind und zwar: 2 rote, 3 schwarze, 5 blaue, 6 grüne und 11 gelbe Kugeln.

Mathis soll nun mit verbundenen Augen so viele Kugeln aus dem Behälter nehmen, dass sich darunter mit Sicherheit 5 Kugeln von gleicher Farbe befinden. Wie viele Kugeln muss Mathis dazu mindestens aus dem Behälter herausholen? (H.F.)

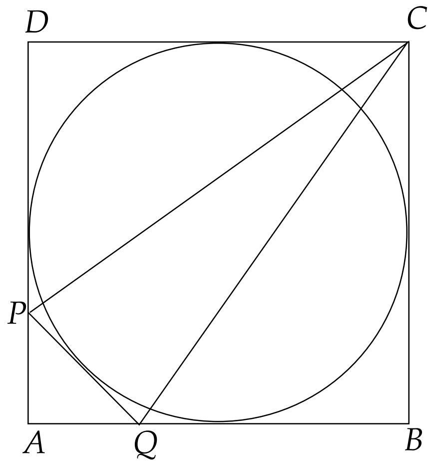
Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

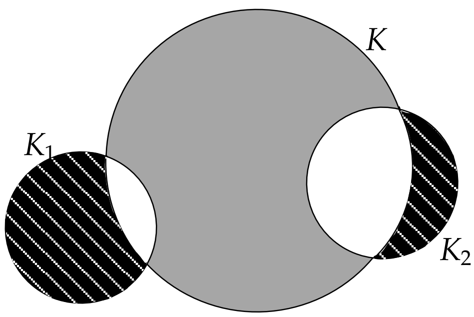
Kl. 8-13

Aufgabe 904. Eine Konstruktion nur mit dem Lineal
In der Ebene sei ein Kreis K mitsamt einem Durchmesser AB und ein Punkt C gegeben, welcher
a) außerhalb
b) innerhalb
der von K bestimmten Kreisscheibe liegt.
Konstruiere dann unter alleiniger Verwendung eines nicht markierten Lineals die Höhe h des Dreiecks ABC, die auf AB senkrecht ist. (H.F.)

Aufgabe 905.
Gesucht ist die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks CPQ in der Abbildung. Die Seitenlänge des Quadrats sei a. (WJB)



Aufgabe 906. Eine krummlinig begrenzte Fläche
In der Ebene sei ein Kreis K mit Radius r gezeichnet.



Zwei weitere Kreise K_1, K_2 – beide mit dem Radius $\frac{1}{2}r$ – seien so gezeichnet, dass sie keinen Punkt gemeinsam haben, aber beide den Kreis K schneiden.

Wie groß ist dann die graue Fläche innerhalb von K im Vergleich zu der Gesamtfläche der beiden schraffierten Gebiete außerhalb von K? (H.F.)

Aufgabe 907.
Aus den Ziffern a, b, c mit $a + b < 10$ und $c + 1 < 10$ bilde die Zahlen $z = ababa(a + b)b, y = 1(c + 1)(c + 1)(c + 1)c$ sowie $x = ab$ derart, dass $z/x^2 = y$. (WJB)

Aufgabe 908.
Es gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, $7^2 + 24^2 = 25^2$. Die ungeraden Zahlen 3, 5, 7 kommen also in pythagoreischen Tripeln vor. Gilt das für alle ungeraden Zahlen (außer der Zahl 1), oder gilt es nur für Primzahlen? (WJB)

Aufgabe 909.
Es sei m eine natürliche Zahl. Wir suchen eine natürliche Zahl n mit folgenden Eigenschaften:
(1) $n^2 + n$ und $n^2 - n$ haben die gleiche Endziffer.
(2) $n^2 - n$ ist durch m teilbar.
(3) Alle Ziffern von n sind gleich.

Löse dazu folgende Teilaufgaben:
a) Für $m = 3$ finde eine solche Zahl n.
b) Gib alle Zahlen n mit diesen Eigenschaften an für $m = 3$.
c) Gib für $m = 11$ alle solchen Zahlen an.
d) Gib für $m = 7$ alle solchen Zahlen an.
e) Löse die Aufgabe für $m = 6$

(WJB)

Aufgabe 910. Eine Teilbarkeitsregel
Beweise, dass für $n \geq 1$ gilt: 3 ist ein Teiler von $2^n + 1$, falls n ungerade ist;
3 ist kein Teiler von $2^n + 1$, falls n gerade ist. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 88

Kl. 8-13

Aufgabe 897. Der 100. Geburtstag
Der Überlieferung nach soll ein Mathematiker an seinem 100. Geburtstag verkündet haben: „Im Jahre x^2 war ich genau x Jahre alt."
Daraufhin stellte einer der geladenen Geburtstagsgäste nach einigem Überlegen fest: „Ich werde meinen 100. Geburtstag in $y^3 + z^3$ Jahren feiern können, wobei $y \neq z$ ist."
Leider verstarb dieser Gast bereits im Jahre 1580.
Wie alt war der Gast zum Zeitpunkt der Geburtstagsfeier und wann wurde der Mathematiker geboren? (Miriam Menzel, Klasse 11, Gymnasium Marienberg Neuss)

Lösung:
Die Geburtstagsfeier muss zwischen den Jahren 1481 und 1579 stattgefunden haben, da der Gast andernfalls nicht von seinem 100. Geburtstag sprechen könnte oder diesen vor seinem Tod erlebt hätte. Demnach liegt das Geburtsjahr des Mathematikers zwischen 1381 und 1479.
Wir vergleichen nun:

x	x^2	Geburtsjahr
37	$37^2 = 1369$	$1369 - 37 = 1332$
38	$38^2 = 1444$	$1444 - 38 = 1406$
39	$39^2 = 1521$	$1521 - 39 = 1482$

Allein $x = 38$ ist also möglich, der Mathematiker wurde also 1406 geboren und die Geburtstagsfeier findet 1506 statt.

Da der Wert $y^3 + z^3$ unter 100 liegen muss, gibt es nur folgende Möglichkeiten hierfür: $1^3 + 2^3 = 9$, $1^3 + 3^3 = 28$, $1^3 + 4^3 = 65$, $2^3 + 3^3 = 35$, $2^3 + 4^3 = 72$ oder $3^3 + 4^3 = 91$. Wären es nur noch 72 oder weniger Jahre bis zum 100. Geburtstag des Gastes, so würde er diesen noch erleben (da $1506 + 72 = 1578 < 1580$ ist), folglich würde der Gast erst in 91 Jahren seinen 100. Geburtstag feiern können und ist daher neun Jahre alt.

Aufgabe 898.
Für welche natürlichen Zahlen n ist die Summe der ersten $2n$ Zahlen durch n teilbar, für welche sogar durch $2n$, für welche durch $3n$?

(H.F.)

Lösung:
$1 + 2 + \ldots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$ ist immer durch n teilbar, aber nie durch $2n$, da $2n + 1$ ungerade ist. Durch $3n$ ist die Summe genau dann teilbar, wenn $2n + 1$ durch 3 teilbar ist, d.h. für $n = 3k - 2, k = 1, 2, \ldots$

Aufgabe 899.
Claudia und Daniela werfen einen Spielwürfel dreimal. Die Augenzahlen nennen wir x, y und z. Ist das Produkt $u \cdot v$ gerade, so gewinnt Claudia, sonst Daniela. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P gewinnt Daniela, wenn

a) $u = x, v = 10y + z$
b) $u = x$, $v = y + z$
c) $u = x + y$, $v = y + z$?
d) Löse die Aufgabe, wenn Daniela dann gewinnt, wenn $u + v$ ungerade ist. (WJB)

Lösung:
Daniela gewinnt, wenn u und v beide ungerade sind.
a) u, v ungerade heißt x, z ungerade. $P = P(x \text{ ungerade}) \cdot P(z \text{ ungerade})) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
b) $P(u \text{ ungerade}) = \frac{1}{2}$,
$P(y + z \text{ ungerade}) = P(y \text{ gerade}, z \text{ ungerade})$ + $P(y \text{ ungerade}, z \text{ gerade})$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
c) u und v sind ungerade, wenn x und z gerade und y ungerade, oder x und z gerade und y ungerade, d.h. $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
d)

a) und c) Es muss x ungerade, z gerade sein oder x gerade, z ungerade
$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

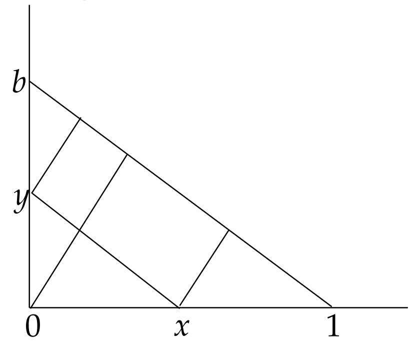
b) $u + v = x + y + z$ ist ungerade, wenn von x, y, z alle ungerade sind oder eines davon ungerade, die anderen beiden gerade, also $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 900.
In ein rechtwinkliges Dreieck mit Ecken $(0|0), (1|0)$ und $(0|b)$ sei ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine seiner Seiten auf der Hypotenuse liegt und die gegenüberliegenden Ecken auf den Koordinatenachsen. Wie muss man die Ecke $(x|0)$ wählen, damit

a) seine Fläche $F(x)$ maximal wird?
b) sein Umfang $U(x)$ maximal wird?

(WJB)

Lösung:



Wir betrachten das kleine Dreieck mit Seiten $x, y = bx$ und $s_1 = cx$ (Ähnlichkeit mit dem großen Dreieck), wobei $c = \sqrt{1+b^2}$ die Hypotenuse des großen Dreiecks ist. h sei im großen, g im kleinen Dreieck die Höhe über der Hypotenuse, F und G die Flächen. Dann ist $F = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}b$ bzw. $g = xh$. Deshalb ist die zweite Rechteckseite $s_2 = h - g = (1-x)h = (1-x)\frac{b}{c}$.

a) $F(x) = s_1 s_2 = \frac{cx(1-x)b}{c} = x(1-x)b$ mit Ableitung $F'(x) = b(1-2x)$. $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Dort ist $F(\frac{1}{2}) = \frac{b}{4} = \frac{F}{2}$, die halbe Fläche des Dreiecks.

b) $U(x) = 2(s_1 + s_2) = 2\left(cx + \frac{b}{c}(1-x)\right) = 2\left(\frac{b}{c} + \frac{c^2-b}{c}x\right)$. Wegen $c^2 > 1 > b$ wächst U von $U(0) = 2\frac{b}{c} = 2h$ bis $U(1) = 2c$, was jeweils den ausgearteten Rechtecken mit $s_1 = 0$ bzw. $s_2 = 0$ entspricht.

Bemerkung: Die Aufgabe ist auch ohne Differentialrechnung lösbar (Scheitel einer Parabel).

Aufgabe 901. Ein Zaun um drei Kreise

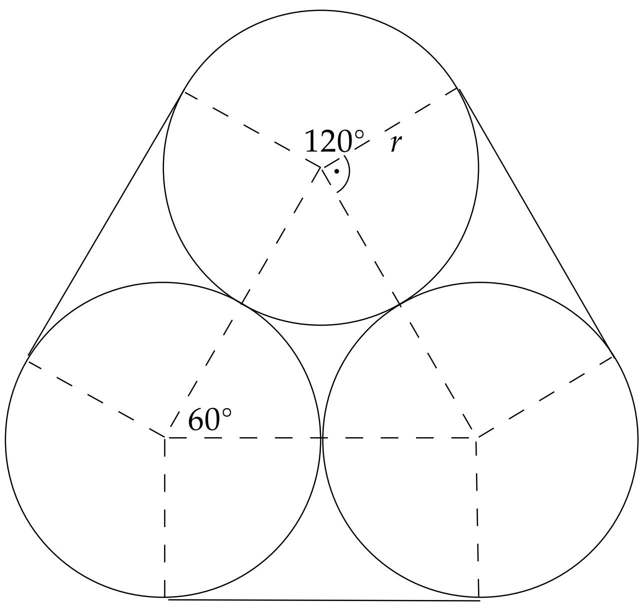
Drei Kreise mit dem gleichen Radius r sind so in die Ebene gezeichnet, dass je zwei dieser Kreise den dritten berühren. Um diese drei Kreise sei ein „Seil" straff gespannt.

Begründe, dass für die Länge L des „Seiles" und den Umfang U eines jeden der drei Kreise gilt:

$$1{,}954\,U < L < 1{,}955\,U.$$

(H.F.)

Lösung:



An der Figur überlegt man sich, dass das Dreieck, dessen Eckpunkte die Kreismittelpunkte sind, gleichseitig ist. Damit folgt: Der Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel $120°$ ist ein Drittelkreis.

Weiter gilt: Die drei Vierecke über den Dreiecksseiten sind kongruente Rechtecke. Damit lässt sich L bestimmen:

$L = 3 \cdot (r + r) + 3\frac{U}{3} = 3 \cdot 2r + U.$

Wegen $2r = \frac{U}{\pi}$ ist dann

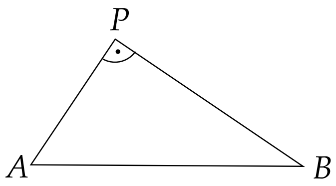
$L = \frac{3}{\pi}U + U = (\frac{3}{\pi} + 1)U.$

Mit $\frac{3}{\pi} + 1 = 1{,}954929\ldots$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 902. — Durch ein Versehen wurde die Aufgabe 898 leider zweimal gestellt.

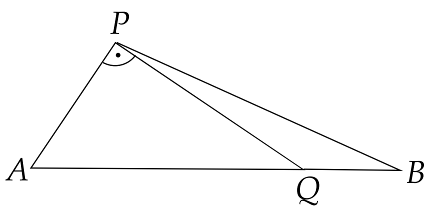
Aufgabe 903.$*$ Abstand eines Punktes von Vierecks-Eckpunkten
In einem konvexen Viereck V hat jede Seite eine Länge $\leq L$. Zeige, dass dann für jeden beliebigen Punkt P im Innern von V die Entfernung zu mindestens einem Eckpunkt $< \frac{3}{4}L$ ist. (H.F.)

Lösung:
Die Ecken des Vierecks seien A, B, C, D. Dann ist $|AB| \leq L, \ldots, |DA| \leq L$.
Annahme: Es gibt einen Punkt P im Innern von V, dessen Entfernung von jedem Eckpunkt $\geq \frac{3}{4}L$ ist.
Verbinde diesen Punkt P mit A, mit B, mit C und mit D. Es entstehen dann vier Dreiecke.
1. Eines der vier Dreiecke habe bei P einen Innenwinkel von $90°$, z. B. $\triangle ABP$.



Dann ist nach Pythagoras: $|AP|^2 + |PB|^2 = |AB|^2$. Weil nach Annahme $|AP| \geq \frac{3}{4}L$ und $|PB| \geq \frac{3}{4}L$ ist, gilt: $|AB|^2 \geq (\frac{3}{4}L)^2 + (\frac{3}{4}L)^2 = \frac{18}{16}L^2$ und daher ist $|AB| > L$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme ist also falsch $\Rightarrow$ es gilt die Behauptung.

2. Keines der vier Dreiecke habe bei P einen Innenwinkel von $90°$. Dann gibt es ein Dreieck, z.B. $\triangle ABP$, bei dem dieser Winkel $> 90°$ ist. (Wären nämlich alle vier Winkel bei $P < 90°$, dann wäre ihre Summe $< 360°$!)



Das Dreieck $\triangle\, ABP$ zerlege man in das rechtwinklige Dreieck AQP und das Dreieck QBP. Dann gilt: $|AQ|^2 = |AP|^2 + |PQ|^2$. Weil nun $|AB| > |AQ|$ und $|PB| > |PQ|$ ist, folgt mit der Annahme: $|AB|^2 > |AP|^2 + |PB|^2 \geq \frac{18}{16}L^2$, also $|AB| > L$. Dieser Widerspruch zeigt, dass auch jetzt die Behauptung zutrifft.

Bemerkung: In der Behauptung kann man den Term $< \frac{3}{4}L$ ersetzen durch $\geq \frac{1}{\sqrt{2}}L$. Überlege selbst, welche Abänderungen dafür in obigem Beweis notwendig sind.

„Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.“

Godfrey Harold Hardy
*07.02.1877 in Cranleigh, †01.12.1947 in Cambridge;
britischer Mathematiker, Arbeitsgebiete Zahlentheorie und Analysis

Wer forscht mit?
Ein Fermat-Problem

Der große Pierre de Fermat (1601 – 1665) hat behauptet, er besitze einen Beweis für die folgende Aussage:

(F) Es gibt nur zwei natürliche Zahlen m und n, für die gilt: Die Quadratzahl m^2 und die Kubikzahl n^3 haben den Abstand 2.

Fermat hat ein Zahlenpaar (m^2, n^3) angegeben, für das diese Aussage zutrifft. Sein Beweis für die Eindeutigkeit ist uns jedoch nicht überliefert.

Untersuche dieses Fermat-Problem und mögliche Verallgemeinerungen (andere Abstände, andere Potenzen,...).

Hinweis: Schon die Wiederentdeckung des Fermat-Paares (m^2, n^3) und der Nachweis, dass es keine weiteren Paare gibt, stellen ein schönes Ergebnis dar. (H.F.)

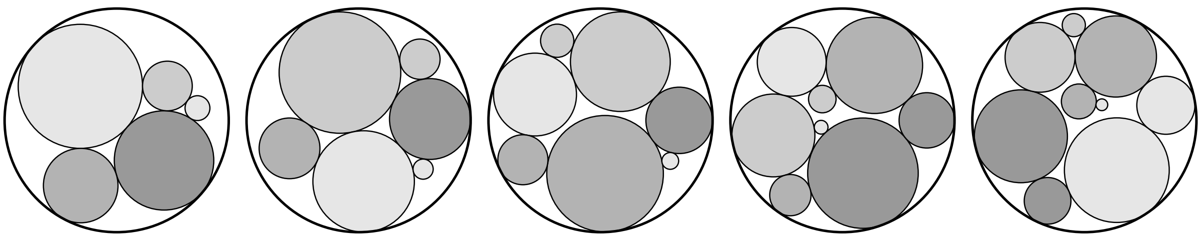
Hinweis: Eure Ergebnisse könnt Ihr bis zum 31. August 2007 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im *übernächsten* Heft werden wir diese veröffentlichen; außerdem erhaltet Ihr auch hierauf Punkte.

Ein Nachtrag zur Forscheraufgabe aus MONOID 85: „Regelmäßige n-Ecke mit Gitterpunkten“.
Auch **Thomas Geiß**, Leibniz-Gymnasium Östringen, gibt für das Quadrat ein konkretes Beispiel durch Vorgabe ganzzahliger Eckpunkt-Koordinaten an und zeigt dann durch Widerspruchsbeweis, dass die Eckpunkte bei einem regelmäßigen 3-, 6- bzw. 8-Eck nicht sämtlich Gitterpunkte sein können.

Packalgorithmen für Kreise

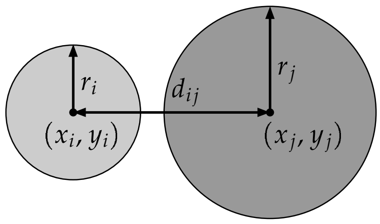
Von Elmar Schömer

Gegeben sei eine Menge von n Kreisen $C_1, C_2, \dots, C_n$ mit $radius(C_i) = r_i = i$ für $1 \leq i \leq n$. Man ordne die Kreise so an, dass sie in einen umschließenden Kreis U mit möglichst kleinem Radius R passen.



$n = 5$, $R \approx 9.0014$ | $n = 6$, $R \approx 11.0570$ | $n = 7$, $R \approx 13.46211$ | $n = 8$, $R \approx 16.2217$ | $n = 9$, $R \approx 19.2332$

Für wenige Kreise ($n \leq 6$) kann man den optimalen Radius R noch leicht von Hand bestimmen, indem man sich alle denkbaren relativen Lagen der beteiligten Kreise anschaut. Bereits für $n \geq 7$ ist eine optimale Packung nicht mehr so leicht zu finden, denn mit wachsender Kreisanzahl steigt die Zahl der möglichen relativen Anordnungen sehr stark an. Zur Zeit ist kein praktikabler Algorithmus bekannt, der für eine gegebene Kreisanzahl n die bestmögliche Kreispackung berechnen könnte. Wir wollen dennoch versuchen, eine heuristische Methode zu entwickeln, mit deren Hilfe man gute Packungen erzeugen kann, auch wenn wir ihre Optimalität nicht garantieren können.



$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$
$d_{ij} \geq r_i + r_j$
$\Longrightarrow$ keine Überlappung

Wir wollen das Kreispackungsproblem zunächst als ein kontinuierliches Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen formulieren. Dazu verwenden wir folgende Bezeichnungen: (x_i, y_i) seien die kartesischen Koordinaten des Mittelpunktes von C_i, r_i sei der zugehörige Radius und mit d_{ij} bezeichnen wir den Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise C_i und C_j. Eine Kreispackung ist dann eindeutig durch die Angabe der $2n$ Koordinaten $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ beschrieben. Eine Anordnung bezeichnen wir als zulässig, wenn sich keine Kreise überlappen, d.h. wenn $d_{ij} \geq r_i + r_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.

Wenn wir den Mittelpunkt des Hüllkreises U in den Ursprung legen, können wir für eine vorgegebene Anordnung der Kreise den Radius R berechnen:

$$R(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \max \left\{ \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i \;\middle|\; 1 \leq i \leq n \right\}$$

Durch Variation der Koordinaten $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ versuchen wir nun, $R(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ zu minimieren. Dabei muss die Zulässigkeit der Packung gewährleistet werden.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & R(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \\ & \text{unter den Nebendingungen, dass} \\ & d_{ij} \geq r_i + r_j \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n. \end{array}$$

Wir können auch eine alternative Formulierung dieses Optimierungsproblems angeben, die ohne Nebenbedingungen auskommt. Dazu betrachten wir eine beliebige Packung $\mathbf{P} = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. Wenn $\mathbf{P}$ nicht zulässig ist, können wir die Koordinaten der Mittelpunkte mit einem Skalierungsfaktor $s > 1$ multiplizieren, so dass für alle paarweisen Abstände der Kreismittelpunkte gilt: $s \cdot d_{ij} \geq r_i + r_j$. Wenn $\mathbf{P}$ bereits zulässig ist, können wir die Kreismittelpunkte auf den Ursprung hin schrumpfen lassen ($0 < s \leq 1$), um dadurch den Hüllradius zu verringern. Deshalb bestimmen wir den kleinsten Skalierungsfaktor Z, für den die Packung $\mathbf{P}$ zulässig ist:

$$\begin{aligned} Z &= \min\{s \mid s\, d_{ij} \geq r_i + r_j \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n\} \\ &= \max \left\{ \frac{r_i + r_j}{d_{ij}} \;\middle|\; 1 \leq i < j \leq n \right\} \end{aligned}$$

Das Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen lautet somit:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimiere} & R(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \\ & = \max \left\{ Z \cdot \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + r_i \;\middle|\; 1 \leq i \leq n \right\} \end{array}$$

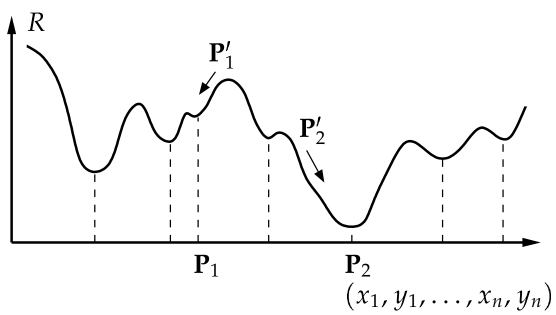
Wir sind nun in der Lage, den Radius R des Hüllkreises als Funktion der Mittelpunktskoordinaten $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ auszudrücken. Als nächsten Schritt wollen wir diese Koordinaten gezielt so verändern, dass R - wenn möglich - abnimmt. Dazu verwenden wir ein einfaches Abstiegsverfahren. Wir untersuchen, wie R sich verändert, wenn wir x_i bzw. y_i leicht variieren. Dazu berechnen wir für ein sehr kleines ε die folgenden Differenzenquotienten:

$$
\begin{aligned}
u_i &= \frac{1}{\varepsilon}(R(\ldots, x_i, y_i, \ldots) - R(\ldots, x_i + \varepsilon, y_i, \ldots)) \\
v_i &= \frac{1}{\varepsilon}(R(\ldots, x_i, y_i, \ldots)) - R(\ldots, x_i, y_i + \varepsilon, \ldots)
\end{aligned}
$$

u_i ist ein Maß dafür, wie stark R fällt, wenn wir x_i um eine Einheit erhöhen. Deshalb werden wir x_i proportional zu u_i erhöhen. Diese Vorgehensweise ist ganz allgemein als Methode des steilsten Abstiegs bekannt. Wir wählen eine geeignete Schrittweite t und berechnen die neuen Koordinaten

$$
(x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n) \quad = \quad (x_1 + t\,u_1, y_1 + t\,v_1, \ldots, x_n + t\,u_n, y_n + t\,v_n)
$$

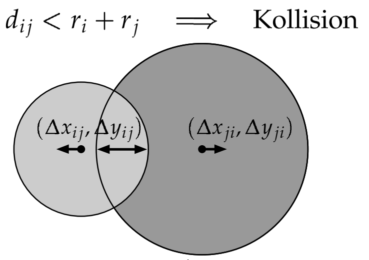
Diesen Prozess wiederholen wir solange $R(x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n) < R(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$.

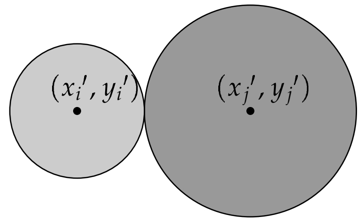


Leider führt uns die Methode des steilsten Abstiegs nur zu einem lokalen Minimum. Wenn wir beispielsweise mit der Packung $\mathbf{P}'_1$ starten, gelangen wir in das lokale Minimum $\mathbf{P}_1$. Wenn wir dagegen in $\mathbf{P}'_2$ starten, finden wir das globale Minimum $\mathbf{P}_2$. (Der Einfachheit halber ist der $2n$-dimensionale Suchraum hier eindimensional dargestellt.)

Wir wollen uns nun noch ein weiteres Verfahren anschauen, mit dessen Hilfe wir eine vorgegebene Packung $\mathbf{P}$ lokal optimieren können. Dazu stellen wir uns die Kreise $C_1, C_2, \ldots, C_n$ als starre Körper vor, die wir in der Ebene gegeneinander verschieben können. Wenn bei der Verschiebung von Kreisen Kontakte auftreten, sollen sogenannte Kontaktkräfte eine gegenseitige Durchdringung verhindern.

Eine einfache Möglichkeit das Kontaktverhalten hinreichend genau zu simulieren, besteht darin, eine leichte kurzzeitige Durchdringung von Kreisen zuzulassen. Wir führen zunächst eine paarweise Betrachtung durch: Wenn sich zwei Kreise C_i und C_j überlappen ($d_{i,j} < r_i + r_j$), korrigieren wir ihre Lage dadurch, dass wir eine „Kraft“ in Richtung der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte wirken lassen. Die minimalen Verschiebungen $(\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij})$ und $(\Delta x_{ji}, \Delta y_{ji})$, die notwendig sind, um die Kreise wieder zu trennen, lassen sich leicht berechnen (siehe folgende Skizze).

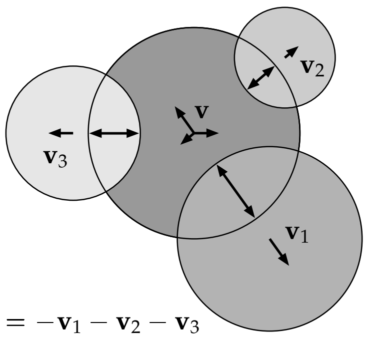




$$\Delta x_{ij} = \frac{r_i + r_j - d_{ij}}{2} \, \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} = -\Delta x_{ji}$$
$$\Delta y_{ij} = \frac{r_i + r_j - d_{ij}}{2} \, \frac{y_i - y_j}{d_{ij}} = -\Delta y_{ji}$$

$$x_i' = x_i + \Delta x_{ij}, \quad x_j' = x_j + \Delta x_{ji}$$
$$y_i' = y_i + \Delta y_{ij}, \quad y_j' = y_j + \Delta y_{ji}$$

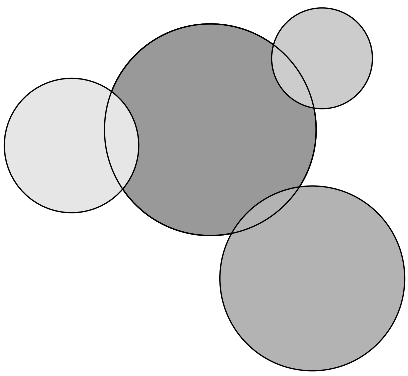
Wenn wir eine unzulässige Packung aus mehreren Kreisen vorliegen haben, berechnen wir alle paarweisen Korrekturverschiebungen und summieren diese zu einer Gesamtverschiebung für jeden der beteiligten Kreise.

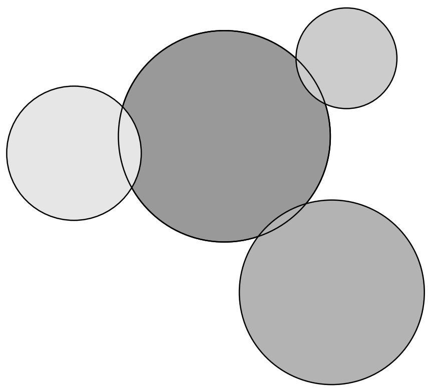


$\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$

Für alle Kreise C_i mit $1 \leq i \leq n$
$\quad x_i' = x_i, \quad y_i' = y_i$
Für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$
$\quad$ Wenn $d_{ij} < r_i + r_j$
$\quad\quad x_i' = x_i' + \Delta x_{ij}, \quad x_j' = x_j' + \Delta x_{ji}$
$\quad\quad y_i' = y_i' + \Delta y_{ij}, \quad y_j' = y_j' + \Delta y_{ji}$
Für alle Kreise C_i mit $1 \leq i \leq n$
$\quad x_i = x_i', \quad y_i = y_i'$

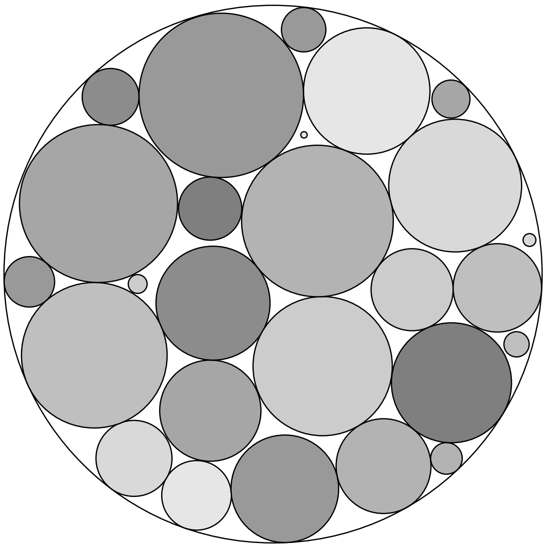
Diesen Prozess wiederholen wir solange, bis alle gegenseitigen Überlappungen eine hinreichend kleine Toleranzschwelle unterschreiten. Die folgenden beiden Abbildungen zeigen, wie sich die obige Situation aus vier Kreisen weiterentwickelt.





Dieses Prinzip der Kontaktsimulation können wir benutzen, um zu versuchen, eine vorgegebene Packung $\mathbf{P}$ zu verbessern. Zu diesem Zweck ermitteln wir einen Kreis C_i, der den Hüllkreis berührt. Wir schubsen ihn ein kleines Stück in Richtung des Ursprungs und sorgen durch die Kontaktsimulation dafür, dass die entstehende Packung überlappungsfrei bleibt. Wenn wir diesen Prozess immer mit den „außenliegenden" Kreisen wiederholen, wird die Ausgangspackung dadurch komprimiert und damit einem lokalen Minimum zugeführt.

Sowohl die Methode des steilsten Abstiegs als auch die Kontaktsimulation sind lediglich in der Lage, lokale Minima zu erreichen. (Dabei wird die relative Lage sich berührender Kreise zueinander in der Regel nur wenig verändert.) Da die zu optimierende Funktion $R(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ jedoch eine ungeheuere Zahl solcher lokaler Minima aufweist, und die Dimensionalität des Suchraumes mit der Kreisanzahl wächst, hat man nur eine kleine Chance, das globale Minimum zu finden, wenn man von einer zufälligen Konfiguration startet. Aus dem Forschungsgebiet der stochastischen Optimierung sind jedoch eine Vielzahl von Techniken bekannt, um die Erfolgsquote bei der Suche nach dem globalen Optimum zu steigern. (Dazu zählen zum Beispiel: Simulated Annealing, Threshold Accepting, Genetische Algorithmen, etc.) Diese Techniken haben gemeinsam, dass sie sich des Zufalls bedienen, um eine gegebene Packung $\mathbf{P}$ zu verändern. Wir wollen kurz erläutern, wie man durch wiederholte zufällige Vertauschungen von zwei Kreisen eine deutliche Verbesserung der Packqualität erzielen kann. Dazu wählen wir zufällig zwei ähnlich große Kreise C_i und C_j mit $|i - j| \leq 2$, tauschen ihre Mittelpunktskoordinaten und überführen die so entstandene Packung (mittels der Methode des steilsten Abstiegs oder der Kontaktsimulation) in einen zulässigen Zustand, der einem lokalen Minimum entspricht. Wenn wir uns dadurch verschlechtern, verwerfen wir diese Veränderung und versuchen unser Glück erneut. Wenn eine Verbesserung des Hüllradius eintritt, akzeptieren wir diese Veränderung und wiederholen den Vorgang.



Die nebenstehende Abbildung zeigt die zur Zeit beste bekannte Anordnung von 26 Kreisen mit den Radien $1, 2, \ldots, 26$. Der Radius des umschließenden Kreises beträgt 85.07640122. Diese Packung wurde im Verlauf eines internationalen Wettbewerbs [1] von Studenten der Uni Mainz mit den zuvor beschriebenen Methoden erzeugt. Im Rahmen des Wettbewerbs sollten die besten Packungen für $n = 1, 2, \ldots, 50$ ermittelt werden. Der Sieger [2] des Wettbewerbs war eine italienische Forschergruppe, die zuvor schon sehr gute Ergebnisse für das Packen gleich großer Kreise erzielt hatte.

Die vorgestellten Packalgorithmen wurden im Rahmen eines studentischen Projektes am Institut für Informatik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz entwickelt. Mitgewirkt haben: Tobias Baumann, Gösta Kroll, Pavel Metelitsyn, René Pickardt, Philipp Roos, Dr. Johannes Schneider und Kai Werth. Ein Demo-Programm in Java zum Packen von Kreisen (in kreisförmige und quadratische Containern) findet man unter `www.staff.uni-mainz.de/schoemer/PackIt/PackIt.html`.

Literatur:

[1] Al Zimmermann: Al Zimmerman's Circle Packing Contest. in: Al Zimmerman's Programming Contests, `http://www.recmath.org/contest/CirclePacking/index.php`, 2005

[2] B. Addis and M. Locatelli and F. Schoen: Efficiently packing unequal disks in a circle: a computational approach which exploits the continuous and combinatorial structure of the problem, Optimization Online, 1343, 2006

Figuren mit konstanter Breite

Von Edzard Salow

Unter der Breite einer geometrischen Figur versteht man den Abstand von zwei parallelen Geraden, welche die Figur auf gegenüber liegenden Seiten berühren, so dass die Figur dazwischen liegt. Im Allgemeinen ist diese Breite von der Richtung der Parallelen abhängig. Figuren mit konstanter Breite sind dadurch ausgezeichnet, dass die Breite in jeder Richtung gleich ist. Sie sind also überall gleich dick. Man kann dann ein Quadrat so um die Figur herum drehen, dass stets jede Quadratseite berührt wird. Kreise haben diese Eigenschaft, aber auch das so genannte Reuleaux-Dreieck (sprich: Rölo) in Abb.1, das sich aus drei Kreisbögen zum Mittelpunktswinkel $60°$ zusammensetzt, die die Punkte A, B und C verbinden. Technische Verwendung hat es im Wankel-Motor gefunden.

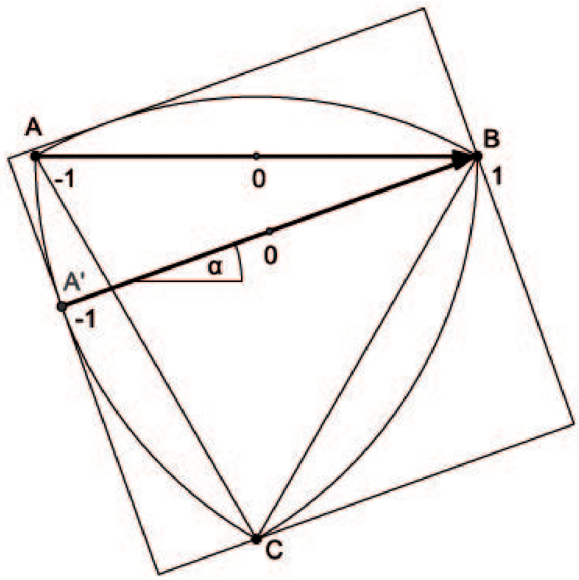


Abb. 1

Um weitere Beispiele zu finden, sehen wir uns das Konstruktionsprinzip des Reuleaux-Dreiecks genauer an. Wir stellen uns vor, dass ein Pfeil, *Zeichenpfeil* genannt, sich über die Zeichenfläche bewegen kann und mit Stiften an beiden Enden eine Spur zeichnet. Die Richtung des Pfeils wird durch die Größe α eines Winkels beschrieben, der zwischen dem Pfeil und irgendeiner horizontalen Strecke liegt (siehe Pfeil $A'B'$ in Abb. 1). Wir nennen α *Richtungswinkel*. Die Anfangsstellung von unserem Zeichenpfeil soll AB sein. Dann ist sein Richtungswinkel also $0°$. Er dreht sich dann um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn, wobei B der Drehpunkt ist, also bei der Drehung fest bleibt. Danach hat der Zeichenpfeil den Bogen AC gezeichnet, seine Endpunkte liegen bei C und B, und sein Richtungswinkel beträgt $60°$. Weiter dreht er sich um C bis zum Richtungswinkel $120°$ und zeichnet den Bogen BA. Schließlich dreht er sich um A bis zum Richtungswinkel $180°$ und zeichnet den Bogen CB.

Wir wollen diesen Vorgang durch eine Funktion f beschreiben, die sowohl die Richtungswinkel als auch die Lage der Drehpunkte erfasst. Dazu denken wir uns auf dem Zeichenpfeil einen Maßstab befestigt, der am Ende die Zahl -1 zeigt, in der Mitte des Pfeils 0 und an der Spitze 1. Der Definitionsbereich von f ist die Menge der Winkelgrößen zwischen $0°$ und $180°$. Für jeden Richtungswinkel α ist $f(\alpha)$ die Zahl, die auf dem Maßstab dort steht, wo sich bei diesem Richtungswinkel α gerade der Drehpunkt befindet. Wir nennen die Werte von f *Drehpunkt-Parameter* und f selbst *Drehpunkt-Funktion*. Für das Reuleaux-Dreieck ist dann

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0° \leq \alpha < 60° \\ -1 & \text{für } 60° \leq \alpha < 120° \\ 1 & \text{für } 120° \leq \alpha < 180° \end{cases}.$$

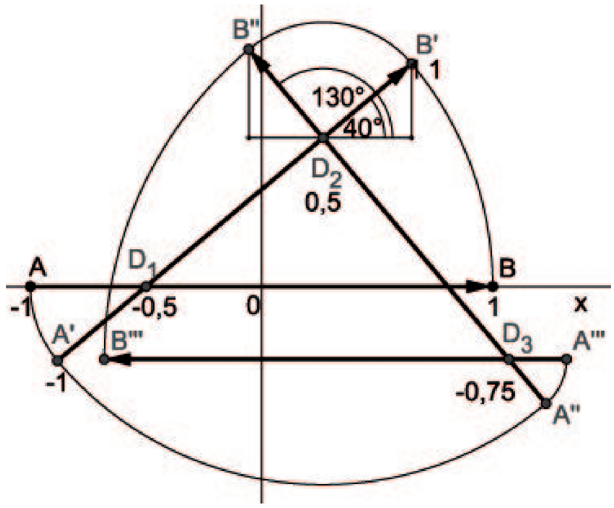


Abb. 2

Man kann nun versuchen, diese Funktion zu variieren. Wir setzen willkürlich z. B.

$$f(\alpha) = \begin{cases} -0{,}5 & \text{für } 0° \leq \alpha < 40° \\ 0{,}5 & \text{für } 40° \leq \alpha < 130° \\ -0{,}75 & \text{für } 130° \leq \alpha < 180° \end{cases}.$$

Mit der Freeware GeoGebra (`www.geogebra.at`) haben wir dazu das Bild in Abb. 2 gezeichnet.

Es zeigt, dass bei der Wahl von f offenbar etwas schief gelaufen ist. Die Breite ist zwar z. B. zwischen $\alpha = 40°$ und $\alpha = 130°$ wegen der festen Länge des Zeichenpfeils konstant. Damit die Breite aber überall gleich ist, müsste eigentlich B''' mit A und B mit A''' zusammenfallen, was hier offenbar nicht der Fall ist.

An Hand der Drehung um D_2 sollen nun Bedingungen gefunden werden, unter denen B''' auf A fällt. Wir führen ein Koordinatensystem ein, bei dem auf der x- und der y-Achse der gleiche Maßstab verwandt wird wie auf dem Zeichenpfeil. Der Radius des Kreisbogens $B'B''$ beträgt $1 - 0,5 = 0,5$, die Differenz der x-Werte von B' und D_2 also $0,5 \cdot \cos 40°$. Für B'' und D_2 ist die Differenz $0,5 \cdot \cos 130°$. Die Differenz der x-Werte von B'' und B' beträgt darum

$$0,5 \cdot \cos 130° - 0,5 \cdot \cos 40° = 0,5 \cdot (\cos 130° - \cos 40°).$$

Dies ist eine negative Zahl, da B'' eine kleinere x-Koordinate hat als B'. Führt man diese Überlegung auch für die anderen Drehungen durch, so erhält man die Differenz der x-Werte von B''' und B, nämlich $(1 - (-0,5))(\cos 40° - \cos 0°) + (1 - 0,5)(\cos 130° - \cos 40°) + (1 - (-0,75))(\cos 180° - \cos 130°)$.

Verallgemeinert man f zu $f(\alpha) = \begin{cases} d_1 & \text{für } 0° \leq \alpha < \alpha_1 \\ d_2 & \text{für } \alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2 \\ d_3 & \text{für } \alpha_2 \leq \alpha < 180° \end{cases}$ mit Zahlen d_1, d_2, d_3 zwischen -1 und 1, so erhält man

$$(1 - d_1)(\cos \alpha_1 - \cos 0°) + (1 - d_2)(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) + (1 - d_3)(\cos 180° - \cos \alpha_2).$$

Wenn man in diesem Ausdruck die linken Klammern auflöst und $\cos 0° = 1$ und $\cos 180° = -1$ bedenkt, ergibt sich daraus $-2 - \Delta x$ mit

$$\Delta x = d_1(\cos \alpha_1 - \cos 0°) + d_2(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) + d_3(\cos 180° - \cos \alpha_2).$$

Die Differenz der x-Werte von B und A ist gleich -2. Darum fällt B''' genau dann mit A zusammen, wenn Δx gleich 0 ist.
Sieht man sich statt der x-Werte die y-Werte an, so folgt, dass ein entsprechender Wert

$$\Delta y = d_1(\sin \alpha_1 - \sin 0°) + d_2(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + d_3(\sin 180° - \sin \alpha_2).$$

gleich 0 sein muss. Für $\alpha_1 = 40°$ und $\alpha_2 = 130°$ führt dies zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(\cos 40° - 1)d_1 + (\cos 130° - \cos 40°)d_2 + (-1 - \cos 130°)d_3 &= 0\\ \sin 40° \cdot d_1 + (\sin 130° - \sin 40°)d_2 - \sin 130° \cdot d_3 &= 0\end{aligned}$$

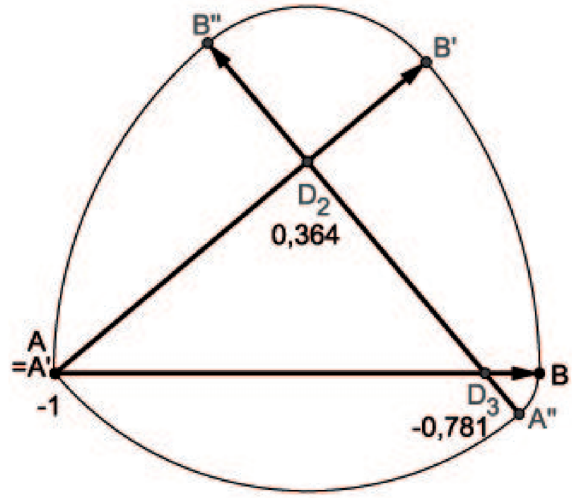


Abb. 3

Es hat eine Lösung $d_1 = -1$, $d_2 = 0{,}364$ und $d_3 = -0{,}781$. Abb. 3 zeigt das Ergebnis.

Unser Verfahren lässt sich für beliebige Anzahlen n von Drehpunkten verallgemeinern. Es gilt

Satz 1: Eine Drehpunkt-Funktion mit n Werten d_i zwischen -1 und 1 und einer wachsenden Folge von Winkeln α_i mit $\alpha_0 = 0°$ und $\alpha_n = 180°$ ergibt genau dann eine Figur mit konstanter Breite, wenn $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$ gelten.

Die Umfangslänge der Figur in Abb. 3 zeigt eine Besonderheit, die sie mit allen Figuren mit konstanter Breite gemeinsam hat.

Wir sehen die Bögen $B'B''$ und $A'A''$ an. In dem Maßstab unseres Zeichenpfeils haben sie die Längen $(1 - d_2)(\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\pi}{180°}$ bzw. $(1 + d_2)(\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\pi}{180°}$. Ihre Summe ist demnach $2(\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\pi}{180°}$, also unabhängig vom Drehpunkt-Parameter. Die Summation über alle Bögen ergibt 2π. Die Umfangslänge der Figur stimmt also mit der eines gleich dicken Kreises überein.

Das Konstruktionsverfahren des Reuleaux-Dreiecks soll nun noch in einer anderen Hinsicht verallgemeinert werden. In Abb. 4 muss man sich den Zeichenpfeil als Stab vorstellen, den auf seiner linken Seite ein Kreiszylinder in D_1 berührt. Der Zeichenpfeil wird jetzt nicht um D_1 gedreht, sondern am Kreiszylinder abgerollt ohne zu rutschen. Die von den Enden aufgezeichneten Kurven sind dann keine Kreisbögen, denn die Krümmung des Bogens BB' nimmt zu und die von AA' ab. Man nennt die Kurven *Evolventen*. Bei diesem Vorgang wechselt der Drehpunkt nicht wie bisher sprunghaft von D_1 nach D_2, sondern in einem gleichmäßigen Übergang. In Abb. 4 ist die Strecke $D_1'D_2$ stets genauso lang wie der Kreisbogen D_1D_2.

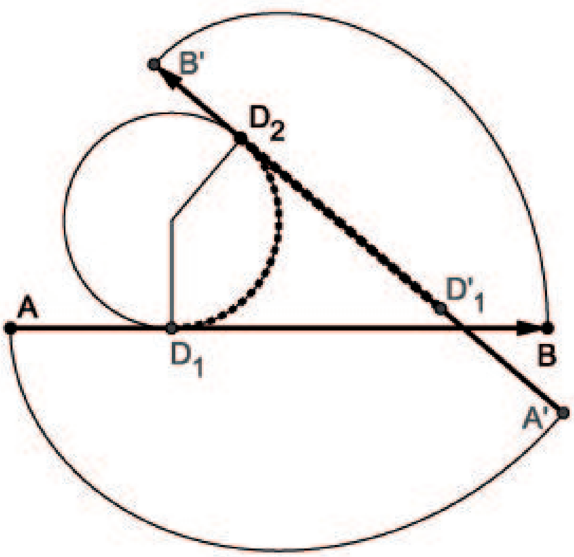


Abb. 4

Die Drehpunkt-Funktion f hat hier nicht nur endlich viele Werte. Denn bei diesem Abrollvorgang wächst $f(\alpha)$ proportional mit der Zunahme des Richtungswinkels α an. Um zu erreichen, dass $f(\alpha)$ bei wachsendem α abnimmt, muss man den Kreiszylinder auf der rechten Seite des Zeichenpfeils ansetzen.

Die Evolvente ist für die Konstruktion von Figuren mit konstanter Breite geeignet, weil sie folgende wichtige Eigenschaft mit dem Kreisbogen gemeinsam hat: *Der Zeichenpfeil ist in A' und B' stets senkrecht zur Kurve gerichtet.*

Das ist eine notwendige Bedingung bei allen Figuren mit konstanter Breite. Die Figur mit konstanter Breite in Abb. 5 setzt sich aus sechs Evolventenbögen zusammen, die durch Abrollen des Zeichenpfeils an drei Kreisbögen zum Mittelpunktswinkel $60°$ entstehen. Der Zeichenpfeil hat die gleiche Länge wie die Kreisbögen. Die zugehörige Drehpunkt-Funktion zeigt Abb. 6.

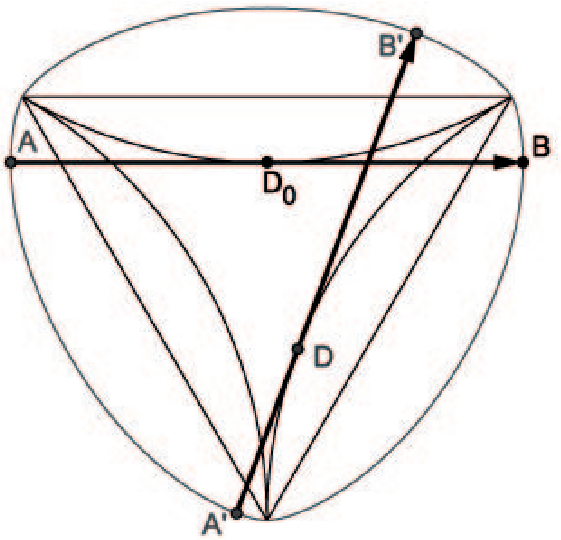


Abb. 5

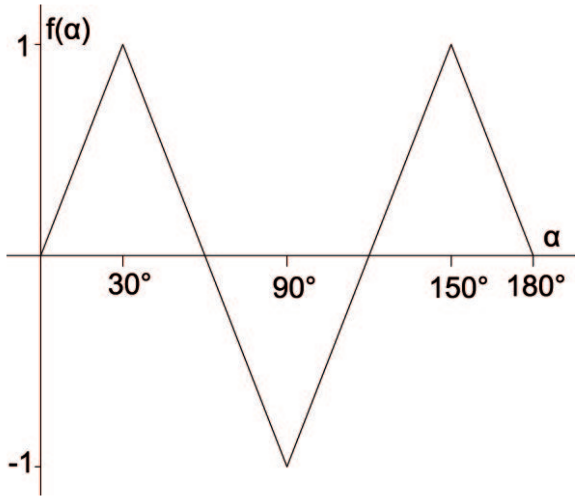


Abb. 6

Wir wollen zum Schluss der Frage nachgehen, inwieweit es möglich ist, irgendeine Funktion f vorzugeben und dazu eine Figur mit konstanter Breite zu finden.

Nehmen wir z. B. die Funktion $f(\alpha) = \sin(3\alpha)$, deren Graph dem in Abb. 6 ähnelt. Wir wissen jetzt zunächst nicht, an welcher Kurve der Zeichenpfeil abrollen soll. Darum brauchen wir ein neues Verfahren.

Wir starten mit einem nach rechts gerichteten Zeichenpfeil, dessen Drehpunkt in der Mitte liegt, weil der Drehpunktparameter $f(0°) = \sin 0° = 0$ ist. Den Pfeil drehen wir um einen sehr kleinen Winkel $\Delta\alpha$, z. B. um $\Delta\alpha = 1°$. Da der Richtungswinkel jetzt geändert ist, hat der Drehpunktparameter jetzt den Wert $f(1°) = \sin(3°) = 0{,}0523$. Der Drehpunkt muss in den zugehörigen Punkt auf dem Zeichenpfeil verrückt werden. Um diesen neuen Drehpunkt drehen wir erneut um $\Delta\alpha = 1°$ und verschieben dann den Drehpunkt in die Stelle, die zu $f(2°) = \sin(6°) = 0{,}1045$ gehört, usw.

Bei diesem Verfahren hat man eigentlich eine andere Funktion als f benutzt, nämlich die Funktion $f_1(\alpha) = \sin(3 \cdot \mathrm{int}(\alpha))$, wobei $\mathrm{int}(\alpha)$ die nächstkleinere ganze Zahl zu α ist. Der dadurch gemachte Fehler wird aber beliebig klein, wenn man den Drehwinkel $\Delta\alpha$ genügend verkleinert.

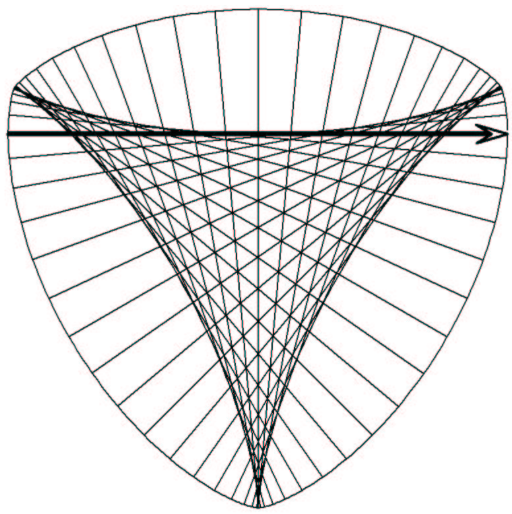


Abb. 7

Ein Computerprogramm liefert zu $f(\alpha) = \sin(3\alpha)$ die in Abb. 7 gezeigte Figur mit konstanter Breite. Sie sieht der Figur in Abb. 5 sehr ähnlich, hat aber doch besondere Eigenschaften. Die eingezeichneten Strecken geben die Lage des Zeichenpfeils in Abständen von jeweils $5°$ wieder. Bemerkenswert ist, dass jeder Schnittpunkt von zwei dieser Strecken noch auf genau einer dritten liegt. Bei der Figur von Abb. 5 gibt es diese Besonderheit nicht.
Die Drehpunktkurve in Abb. 7 ähnelt nur oberflächlich den Kreisbögen in Abb. 5.

Man kann sie auf andere Art als in Abb. 7 folgendermaßen erzeugen (Abb. 8): Im Innern eines Kreiszylinders rollt ein Rad ab. Ein Markierungspunkt P auf dem Rand des Rades bewegt sich dann auf einer Kurve, die *Zykloide* genannt wird. Wenn der Radius des Rades $\frac{2}{3}$ vom Innenradius des Zylinders beträgt, dann erhält man die Drehpunktkurve von Abb. 7. Diese spezielle Zykloide wird *Steiner-Zykloide* genannt, nach dem schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1796-1863). Bei ihr liegt auch der Gegenpunkt Q von P auf der Kurve. Das ist deshalb bemerkenswert, weil der Abstand von P und Q in jeder Stellung des Rades gleich ist. Die Gerade PQ ist Tangente der Zykloide. Der Zeichenpfeil in Abb. 7 ist $\frac{4}{3}$-mal so lang wie die Strecke PQ.

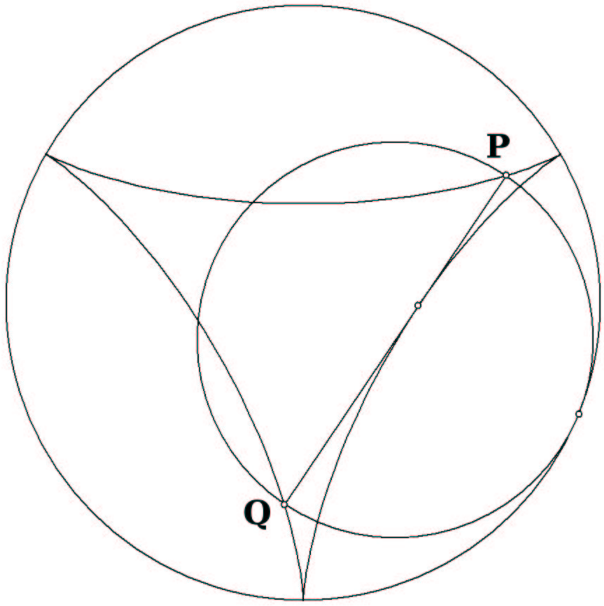


Abb. 8

Welche Eigenschaften muss nun die Drehpunkt-Funktion f haben, damit eine Figur mit konstanter Breite entsteht? Die Funktionswerte müssen sicherlich zwischen -1 und 1 liegen. Bei einer endlichen Wertemenge müssen aber nach Satz 1 auch $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$ sein. Wenn man folglich den Funktionsterm $f(\alpha)$ durch z. B. $f(\text{int}(\alpha))$ ersetzt, muss diese Bedingung zumindest nahezu erfüllt sein; und wenn man den Drehwinkel $\Delta\alpha$ weiter verkleinert, müssen Δx und Δy gegen 0 gehen. Δx und Δy sind Summen von Produkten aus Funktionswerten $f(\alpha)$ und jeweils einer Differenz von $\cos$- bzw. $\sin$-Werten. Wenn diese Summen für $\Delta\alpha$ gegen 0 einen Grenzwert haben, bezeichnet man sie mit $\int_0^\pi f(\alpha) d\cos\alpha$ bzw. $\int_0^\pi f(\alpha) d\sin\alpha$. Wie in der Integralrechnung üblich, haben wir dabei Winkelgrößen im Bogenmaß bestimmt. In anderer Form lassen sich die Integrale auch durch $\int_0^\pi -f(\alpha)\sin\alpha \; d\alpha$ und $\int_0^\pi f(\alpha)\cos\alpha \; d\alpha$ angeben.

Satz 2: Eine stetige Drehpunkt-Funktion f mit Werten zwischen -1 und 1 ergibt genau dann eine Figur mit konstanter Breite, wenn gilt:

$$\int_0^\pi f(\alpha)\sin\alpha \; d\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^\pi f(\alpha)\cos\alpha \; d\alpha = 0.$$

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

• **Herausgeber und Redaktion begrüßen herzlich alle neuen Leserinnen und Leser**, die mit dem **Kalenderjahr 2007** den Weg zu Monoid gefunden haben. Bitte daran denken, den Abo-Beitrag (falls noch nicht geschehen) rechtzeitig auf das MONOID-Konto Nr. 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen!

• MONOID erhalten ab diesem Heft auch 54 Preisträger aus der ersten Runde des **Landeswettbewerbs Mathematik in Baden-Württemberg**, die hiermit ebenfalls herzlich begrüßt seien.

• **2007 ist das „Euler-Jahr“:** Am 15. April jährt sich zum 300. Mal der Geburtstag des großen Mathematikers Leonhard Euler, dessen Leben und mathematisches Wirken Prof. **David E. Rowe**, Ph.D., in seinem Beitrag vorstellt (`rowe@mathematik.uni-mainz.de`).

• Im Heft 88 behandelte Prof. Dr. **Elmar Schömer** (`schoemer@informatik.uni-mainz.de`) das Problem der Berechnung des kleinsten Kreises, der eine Anzahl gegebener Kreise einschließt. Der Frage, wie man diese Kreise optimal packt, damit sie in einen kleinstmöglichen Kreis passen, geht er in seinem Beitrag *Packalgorithmen für Kreise* in diesem Heft nach. – Auch Dr. **Edzard Salow** (`Edzard-Salow@gmx.de`) ist den MONOID-Leser(inne)n längst kein Unbekannter mehr. In seinem Beitrag *Figuren mit konstanter Breite* in diesem Heft behandelt er so genannte *Gleichdicks*, die im *Mathematikum* in Gießen sowie in der Ausstellung *Mathematik be-greifen* in der Funktion von Rädern zu bestaunen sind.

• **Malwettbewerb: Kalender von Kindern mit Behinderung**
Für Kinder im Alter von vier bis 14 Jahren, die ein körperliches Handicap haben und gerne malen, veranstaltet der Bundesverband Selbsthilfe Körperbehinderter (BSK) e.V. wieder einen Malwettbewerb. Das Thema in diesem Jahr lautet: „Mein größter Wunsch“. Das Bild muss im DIN A4 Hochformat gemalt sein, möglichst nicht mit Holzbuntstiften und auch keine Collagen. Unter allen Einsendungen verlost der BSK e.V. drei wertvolle Sachpreise. Eine Jury wählt die zwölf Monatsbilder und das Titelbild aus. Der Kalender wird im Oktober 2007 in einer Auflage von ca. 20 000 Exemplaren bundesweit verbreitet. Alle Bilder und die Gewinner der Verlosung werden ab Juli 2007 auf der Seite `www.bsk-ev.org` veröffentlicht. Einsendungen an: BSK e.V., Altkrautheimer Straße 20, 74238 Krautheim. Einsendeschluss ist der 25. April 2007. Weitere Infos unter der Email-Adresse: `galerie@bsk-ev.org` oder telefonisch unter: 06294 - 4281-12.

Ekkehard Kroll

Bilder der MONOID-Preisträger 2006

Die Preise 2006 wurden am 25. November 2006 im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey vergeben. Wegen des nahen Redaktionsschlusses des Heftes 88 war es uns leider nicht möglich, in diesem von der Feier zu berichten. Nun möchten wir euch ein paar Impressionen zeigen, aufgenommen von unserem Leser Gregor Angeloni.

Sonderpreis für Florian Schweiger

Goldenes M für Thomas Geiß

Die anwesenden Preisträger des 1. Preises

Aus nachvollziehbaren Gründen ist es den Schülerinnen der Deutschen Schule der Baromäerinnen in Kairo nicht möglich gewesen, an der Feier in Alzey teilzunehmen. Daher wurde an dieser Schule eine eigene Feier durchgeführt. Freundlicherweise wurden uns auch Fotos zur Veröffentlichung bereitgestellt.

Die erfolgreichen Teilnehmerinnen 2006
mit ihrem Lehrer Herrn Straub

...und während einer Nilfahrt

Diese und weitere Fotos gibt es auch zu sehen auf unserer Internetseite
`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`.

Wir gratulieren nochmals allen Preisträgern.

Auch dieses Jahr gibt es wieder viele Preise zu gewinnen. Dazu wünschen wir Euch viel Erfolg und natürlich viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!

Rubrik der Löser und Löserinnen
(Stand neu nach Heft 87)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Laura Tabea Galkowski 10, Anne Hofmacher 2, Philipp Langer 9, Julia Scherner 7, Jakob Waldmann 6;
Kl. 6: Lara Bergjohann 6, Andreas Pitsch 5, Freya Roth 8;
Kl. 7: Elisabeth Kopf 10, Kevin Schmitt 10, Anne Vorherr 8;
Kl. 8: Alexander Gerharz 10, Philipp Mayer 9;
Kl. 10: Janina Braun 4.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 9: Lena Baum 18, Désirée Schalk 12;
Kl. 10: Felix Liebrich 29, Martin Reinhardt 34.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Samia Mohamed 3; **Kl. 8:** Ossama Basent 22.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Kl. 10: Lennart Adam 25, Julia Müller 22;
Kl. 11: Christian Behrens 30, Martin Alexander Lange 17.

Bad Bergzabern, Alfred-Grasser-Gymnasium:
Kl. 7: Max Broda 7, David Wander 8.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 12: Laura Biroth 25.

Bad Homburg, Kaiserin-Friedrich-Gymnasium: Kl. 8: Gregor Angeloni 8.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium: Kl. 6: Frank Schindler 19.

Erlangen, Freie Waldorfschule Erlangen: Kl. 9: Malte Meyn 21.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Mustafa Albay 3, Maurice Paul Arbelt 10, Marc Dinges 9, Benedikt Franz 17, Isabell Hölzer 3, Elena Müller 6, Felix Rohde 3, Aylin Yildiz 3;
Kl. 7: Marius Burkardt 7, Rolf Niedenthal 9, Florian Orschel 7, Julian Roth 7, Monja Schütz 8, Philipp Wenzel 11;
Kl. 8: Lara Czarnetzki 6, Kai Roth 5.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 8: Connor Röhricht 14.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 9: Freya Leuwer 5, Francesco Monteleone 2.

Lahnstein, Johannes-Gymnasium: Kl. 9: Kathrin Stark 16.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 11: Katharina Kober 17.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 5: Julia Braunschädel 5, Nihal Eken 10, Theodora Tsoutsouli 8;
Kl. 7: Ann-Kathrin Hientzsch 19;
Kl. 8: Felix Steins 11, Ersan Tokcan 5, Malik Wagner 8, Thimo-Simon Wieber 10;
Kl. 10: Anna Becken 4, Maike Hickmann 9;
Kl. 12: Cornelie Koop 5.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 11: Alexey Tyukin 18.

Mainz, Maria-Ward-Schule: Kl. 12: Patricia Uthmann 9.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 7: Michelle Hangel 3, Simon Heinzmann 19, Tim Lutz 22, Natalie Müller 3, Sascha Scheu 10, Marcel Schulz 6, Tobias Soldan 19.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 9: Florian Schweiger 43.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 8: Vivien Kohlhaas 19; **Kl. 9:** Madeline Kohlhaas 21; **Kl. 12:** Annika Kohlhaas 18.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium: Kl. 8: Bettina Wiebe 20.

Ober-Ramstadt, Georg Christoph Lichtenberg-Schule:
Kl. 6: Janina Freitag 9, Marielle Fröhlich 12, Aylin Ilhan 3, Mero Kaya 12, Catharina Oeber 7, Maura Preiß 3, Kim Schneider 10, Tobias Thomas 15, Justine Wirth 4, Eva Zöllner 7;
Kl. 8: Kay Ackermann 10, Rica Altrock 5, Sandra Burkhardt 6, Sebastian Hiller 7, Julian Hotter 5, Jana Lauth 11, Sarah Merz 3, Jannik Metzler 5, Manja Mörl-Kreitschmann 7, Patrick Plößer 5, Amber Pra 7, Mareike Silbereis 3,Carlo Trockel 11, Jennifer Wagner 4, Melanie Wagner 7.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Vivien Lorey 4;
Kl. 6: Lorlana Altvater 12, Laura Barowski 7, Tobias Braun 13, Niklas Haupt 9, Jannis Heil 10, Elisabeth Koch 11, Janina Köhler 10, Katharina Kuhlmann 12, Valentin Kuhn 11, Lara Lechner 6, Miriam Lindert 8, Anna-Katharina Löw 8, Franziska Matern 5, Merlin Oster 3, Nils Rehm 8, Mai-Britt Rosengarten 7, Jemina Schwab 3, Lukas Zajonz 10;
Kl. 7: Aline Endreß 10.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 7: Simone Marquard 14; **Kl. 10:** Thomas Geiß 24.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 8: Alexander Rettkowski 13.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 5: Sabrina Hartmann 9, Noah Klein 5, Jonatham Kreilaus 6, Julian Merkel 5, Lorea Ritzmann 6, Paul Schädrich 6, Laura Stilgenbauer 6, Julia Sundheimer 6;
Kl. 7: Joel Jung 6.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Elisabeth Maringer):
Kl. 7: Anna Arendt 22, Jennifer Peifer-Weiß 17; **Kl. 11:** Charlotte Capitain 20.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

„Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als zehn normale mathematische Aufgaben."

John Littlewood
*09.06.1885 in Rochester (Kent), †06.09.1977 in Cambridge;
britischer Mathematiker

Redaktion

Herausgeber

Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, D-55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107,
Fax: 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

Zum Vormerken:

MONOID-Feier 2007

Die MONOID-Feier mit der Preisvergabe 2007 wird

am Samstag, den 24. November 2007,
an der Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

stattfinden.

Weitere Informationen werden noch rechtzeitig im Heft und auf der MONOID-Homepage www.mathematik.uni-mainz.de/monoid folgen.

Inhalt

Abonnementbestellungen

Abonnementbestellungen sind per Post oder über die MONOID-Homepage (Adressen für beides stehen auf Seite 43) möglich.
Damit die Hefte (Erscheinungsmonate: März, Juni, September, Dezember) zugesendet werden, muss der Preis für das gesamte Kalender- resp. Schuljahr im Voraus gezahlt werden. Das sind nur 8 € (für vier Ausgaben pro Jahr, inkl. Porto). Dieses Geld bitte auf das Konto

MONOID
Konto-Nr. 505 948 018
BLZ 551 900 00
bei der Mainzer Volksbank
Stichwort: „MONOID + Bestelljahr/-nummer“

überweisen.
Adresse nicht vergessen!
Außerdem kann auf gleiche Weise noch das Buch „Spiel und Spaß mit Mathe“ zum Preis von 8 € bestellt werden, sowie verschiedene Einzelhefte (nicht alle sind noch vorrätig!) zum Preis von 2 € pro Heft.