Jahrgang 27 Heft 90 Juni 2007

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben! **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den „Neuen Aufgaben“ und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-)Termin für Lösungen ist der

31.08.2007.

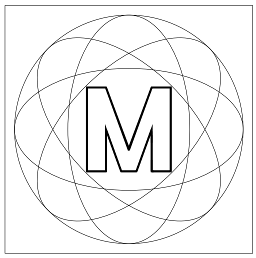
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **rund 50 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: **das Goldene M**.



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Apfelschorle gut gemischt

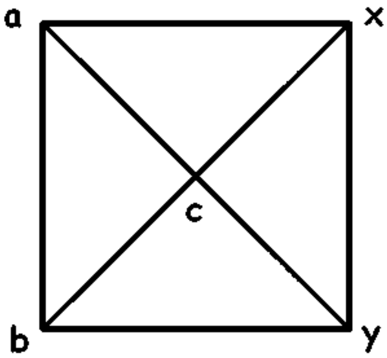
Von Heike Winkelvoß

Es war ein ungewöhnlich warmer April. Tagelang kletterte das Thermometer über die $25°$C-Marke. Mein Appetit auf ein kaltes Glas Apfelschorle war riesig. Im Kühlschrank hatte ich zwei verschiedene Sorten Apfelschorle: eine mit 72% Apfelsaftgehalt, die andere mit einem Apfelsaftgehalt von nur 18%. Die erste Sorte war mir entschieden zu süß, die zweite zu wässrig. „30%ige Schorle wäre genau richtig“, sagte ich mir und überlegte, wie ich rasch ausrechnen könnte, wie viele Teile Apfelschorle von jeder Sorte zum Mischen nötig wären.

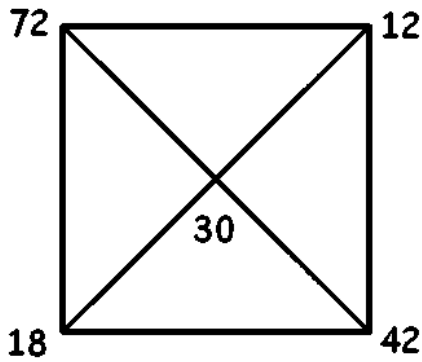
Angenommen, ich mische x Teile einer a-prozentigen Schorle und y Teile einer b-prozentigen Schorle ($b < a$), dann erhalte ich $x + y$ Teile einer c-prozentigen Schorle:

$$(x + y) \cdot c = x \cdot a + y \cdot b$$

Diese Gleichung wird zum Beispiel erfüllt für $x = c - b$ und $y = a - c$. (Rechne dies nach!) Das heißt, wenn ich $c - b$ Teile meiner a-prozentigen Schorle mit $a - c$ Teilen meiner b-prozentigen Schorle mische, erhalte ich die gewünschte Konzentration von c%. Dies kann man sich anhand einer Skizze ganz leicht merken:



Zeichnung 1



Zeichnung 2

Wir zeichnen ein Quadrat mit beiden Diagonalen. An die linke obere Ecke schreiben wir die Konzentration a der stärkeren Lösung, an die linke untere Ecke die Konzentration b der schwächeren Lösung und an den Schnittpunkt der Diagonalen die gewünschte Konzentration c unserer Mischung. Nun berechnen wir die Differenz der Konzentrationen entlang der Diagonale von links oben nach rechts unten und erhalten die Zahl y der Teile der schwächeren Lösung, die wir zur Mischung benötigen: $y = a - c$. Analog berechnen wir die Zahl x der Teile der stärkeren Lösung als Differenz entlang der zweiten Diagonalen: $x = c - b$. Fertig sind wir. In Zeichnung 2 habe ich das für mein dringendes Apfelschorleproblem ausgerechnet: Auf 12 Teile der 72-prozentigen Schorle kommen 42 Teile der 18-prozentigen Schorle. Das selbe Resultat erhalte ich, wenn ich 4 Teile 72-prozentige Schorle mit 14 Teilen 18-prozentiger Schorle mische (warum?).

Aufgaben:

1) Eine Mischung von Rosinen und Nüssen (Studentenfutter) soll 4,50 € je kg kosten. Die Rosinen kosten 2,70 € je kg, die Nüsse 5,10 € je kg. Zu welchen Anteilen müssen Rosinen und Nüsse gemischt werden?
2) Ein Müsli mit 30% Zuckeranteil soll mit einem Müsli mit 60% Zuckeranteil gemischt werden, so dass die Mischung einen Zuckeranteil von 35% hat. Wie viele Teile der beiden Sorten muss man miteinander mischen?
3) Ich möchte meine 30-prozentige Schorle aus einer 72-prozntigeigen Schorle und Wasser mischen. Wie viele Teile Wasser und wie viele Teile Schorle brauche ich?
4) Kann man aus 60-prozentiger und 50-prozentiger Apfelschorle eine 75-prozentige mischen?

Lösungen der Aufgaben auf Seite 16 in diesem Heft.

Ecken, Kanten und Flächen: Die Euler-Formel für die Ebene

– Ein leichter Zugang –

Von Hartwig Fuchs

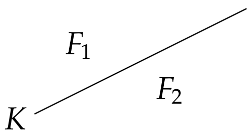


Bild 1

Eine Gerade
Jede Gerade in einer Ebene zerlegt diese in zwei Gebiete F_1 und F_2. Solche Teilstücke nennen wir *Flächen*, die Gerade eine *Kante* zwischen diesen Flächen.

Zwei Geraden
Für zwei Geraden in einer Ebene gibt es zwei Möglichkeiten, welche Lage sie zueinander einnehmen können: Sie sind parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt.
Zwei Geraden liegen daher

so (parallel)

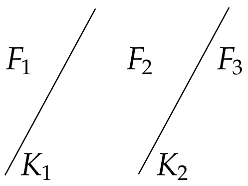


Bild 2

oder so (nicht parallel)

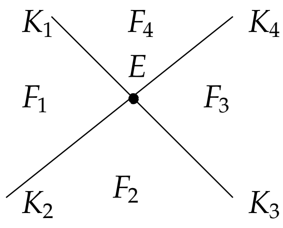


Bild 3

zueinander.

In Bild 2 wird die Ebene durch die beiden Geraden in drei Flächen F_1, F_2, F_3 und in Bild 3 in vier Flächen F_1, F_2, F_3, F_4 zerlegt. In Bild 3 wird außerdem jede der beiden Geraden durch ihren Schnittpunkt E – Schnittpunkte heißen hinfort *Ecken* – in je zwei Segmente K_1, K_3 bzw. K_2, K_4 zertrennt. Die Geradenstücke K_1, K_2, K_3, K_4 bezeichnen wir als *Kanten*. Geraden K_1, K_2 wie in Bild 2 werden ebenfalls als Kanten betrachtet.

Drei Geraden
Bei drei Geraden gibt es bereits vier verschiedene Möglichkeiten, in welcher Lage sie sich zueinander befinden können:

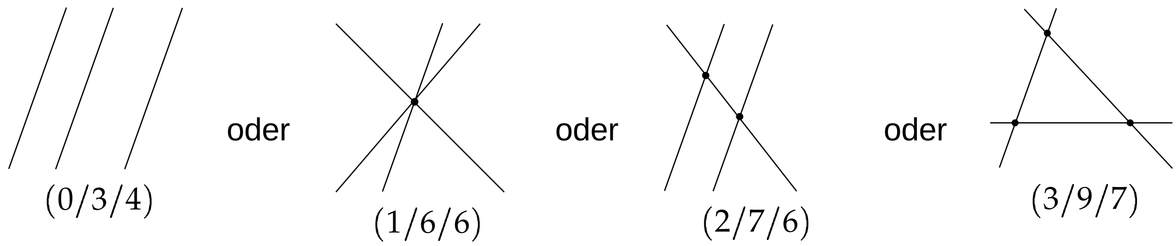


Bild 4

Die Zahlentripel der Form $(e/k/f)$ in Bild 4 geben die Anzahl e der Ecken, die Anzahl k der Kanten und die Anzahl f der Flächen – in dieser Reihenfolge! – der geometrischen Figur an. Überprüfe, ob in Bild 4 alle Zahlentripel richtig bestimmt sind. Welche Zahlentripel gehören zu den Bildern 1 bis 3?*

Vier Geraden

Es bereitet keine großen Schwierigkeiten herauszufinden, welche Lagen vier verschiedene Geraden zueinander haben können – auch wenn man aufpassen muss, dass man keine Möglichkeit übersieht.

Es gibt neun grundlegend verschiedene Positionen für vier Geraden – hier sind sie:

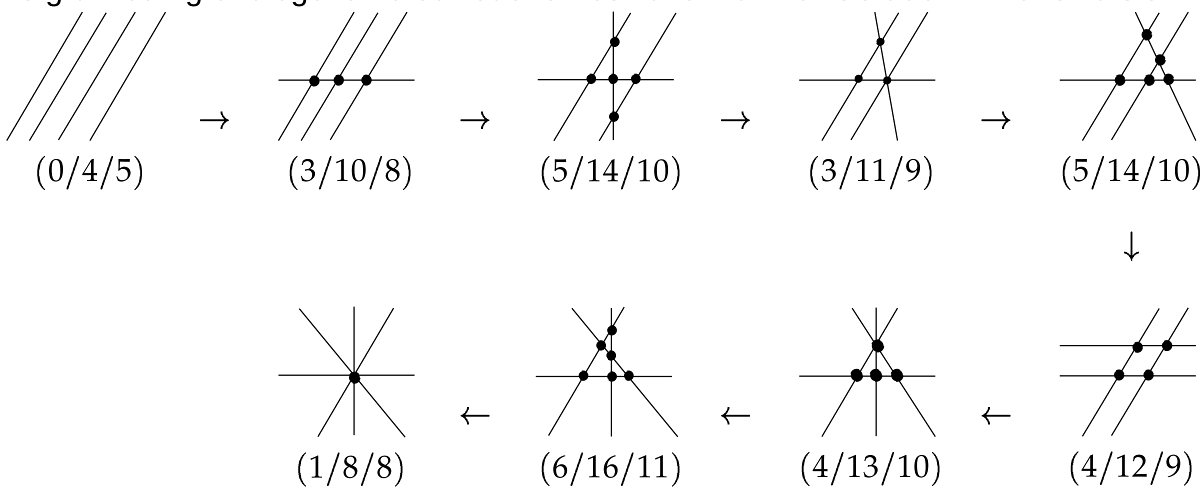


Bild 5

Die Pfeile in Bild 5 weisen darauf hin, dass wir jede Figur (außer der ersten) mit einer bestimmten Systematik aus der vorhergehenden abgeleitet haben. Erkennst Du diese Systematik?

Mit wachsender Zahl der Geraden wächst die Anzahl der Positionen, welche die Geraden zueinander einnehmen können, sehr schnell an, so dass wir bereits den Fall von fünf Geraden Dir zum Austüfteln überlassen wollen.

Die Euler-Formel für 1, 2, 3 und 4 Geraden

Wenn Du Dir die zu den Bildern 1–5 gehörigen Zahlentripel $(e/k/f)$ intensiv anschaust, dann wirst du sicher eine ganz bestimmte Gleichung erkennen, welche die drei Zahlen e, k und f in diesen Tripeln erfüllen. Diese Gleichung wird die *Euler-Formel* für die Ebene genannt – wie lautet sie?

Mehr über die Euler-Formel kannst Du auf den nächsten Seiten erfahren.

---

* Bild 1: $(0/1/2)$, Bild 2: $(0/2/3)$, Bild 3: $(1/4/4)$

Ecken, Kanten und Flächen: Die Euler-Formel für die Ebene

– Etwas Theorie für Fortgeschrittene –

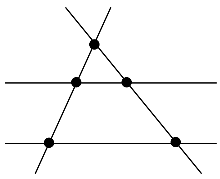
Von Hartwig Fuchs

In einer Ebene bilden mehrere Geraden eine geometrische Figur aus Punkten (die Schnittpunkte der Geraden), aus endlich oder unendlich langen Teilstücken der Geraden (jeweils durch Schnittpunkte voneinander getrennt) sowie aus Gebieten (begrenzt von Geradenstücken) – darunter auch solche, die ins Unendliche reichen (vergleiche Bild 1).

Bei unserer Untersuchung solcher geometrischer Figuren bezeichnen wir aus historischen Gründen die Punkte als *Ecken*, die Geradensegmente als *Kanten* und die Gebiete als *Flächen*.

Leonhard Euler (1707–1783), der bahnbrechende Mathematiker auf allen (!) Teilgebieten der Mathematik des 18. Jahrhunderts, dessen 300. Geburtstag wir dieses Jahr feiern, hat für ebene geometrische Gebilde der oben umrissenen Art eine sehr einfache, zugleich aber auch sehr nützliche Beziehung zwischen der Anzahl e ihrer Ecken, der Anzahl k ihrer Kanten und der Anzahl f ihrer Flächen entdeckt und bewiesen, die ihm zu Ehren die *Euler-Formel* genannt wird.

(1) Euler-Formel für die Ebene
$$\boxed{e - k + f = 1}$$



$e = 5$
$k = 14$
$f = 10$

Bild 1

Zum Nachweis von (1) benutzen wir eine interessante Aussage über die hier betrachteten geometrischen Figuren, nämlich:

(2) In der Ebene seien n Geraden g_1, g_2, ..., g_n, $n \geq 1$, gegeben, und g_{n+1}, g_{n+2}, $\ldots, g_{n+m}$, $m \geq 0$, seien die Geraden, die man erhält, wenn man durch jeweils zwei der Schnittpunkte von $g_1, g_2, \ldots, g_n$ eine Gerade legt.
Es gibt dann eine weitere Gerade g, die zu keiner der Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_{n+m}$ parallel ist.

Nachweis (vergleiche Bild 2):

P sei ein beliebiger Punkt auf g_1, und $g_2^*, \ldots, g_{n+m}^*$ seien die zu $g_2, \ldots, g_{n+m}$ parallelen Geraden durch P. Es seien α_k die Winkel zwischen g_1 und g_k^*, wobei wir die α_k so wählen, dass $0° \leq \alpha_k \leq 90°$ gilt.

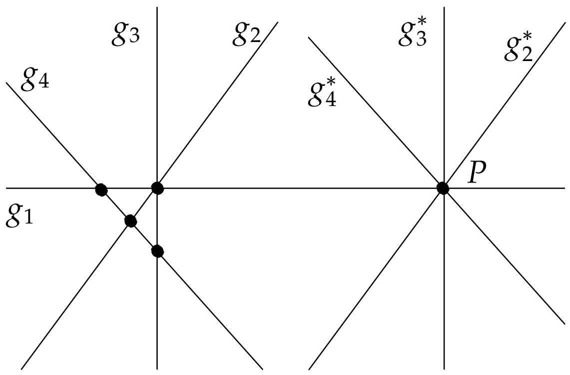


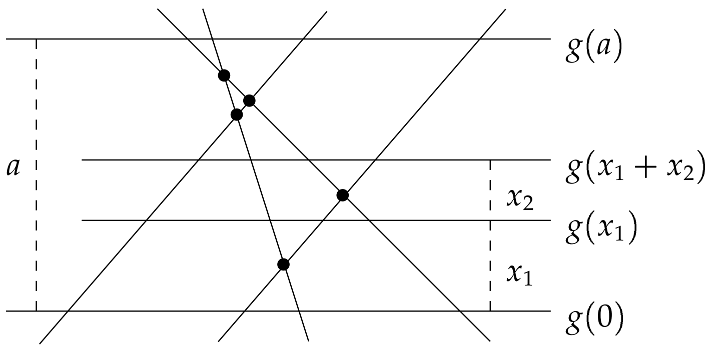
Bild 2

Falls alle $\alpha_k = 0°$ sind, $k = 2, \ldots, n+m$, dann sind alle Geraden g_1, g_2, $\ldots$, g_{n+m} parallel, und g kann jede Gerade sein, die nicht parallel zu g_1 ist.
Sind jedoch einige Winkel $\alpha_k > 0°$, dann gibt es unter ihnen einen kleinsten Winkel – er sei α genannt. Dann kann jede Gerade, welche mit g_1 einen positiven Winkel $< \alpha$ einschließt, als die Gerade g gewählt werden.
Es gilt somit (2).

Wir kommen nun zum Beweis der Euler-Formel (1).
Dazu betrachten wir eine geometrische Figur F, bestehend aus n Geraden, $n \geq 1$, mit e Ecken $P_1, \ldots, P_e$, $e \geq 0$, mit k Kanten und f Flächen.
Falls $e = 0$ ist, dann stimmen die k Kanten von F mit den dann parallelen Geraden $g_1, \ldots, g_n$ überein; es ist also $k = n$ und k ist offenbar um 1 kleiner als f, und folglich gilt die Euler-Formel.

Sei jetzt $e > 0$.
(3) Dann lässt sich wegen (2) eine Gerade g finden, die zu keiner der n Geraden $g_1, \ldots, g_n$, aber auch zu keiner derjenigen Geraden parallel ist, welche durch je zwei der Punkte $P_1, \ldots P_e$ verlaufen.

Wir können damit zwei zu g parallele Geraden $g(0)$ und $g(a)$ vom Abstand a so angeben, dass alle Ecken $P_1, \ldots, P_e$ von F in dem von $g(0)$ und $g(a)$ gebildeten Streifen liegen. Dabei können keine zwei Ecken den gleichen Abstand von $g(0)$ haben wegen (3) – vergleiche Bild 3.



$e(0) = 0$	$k(0) = 4$	$f(0) = 5$
$e(x_1) = 1$	$k(x_1) = 6$	$f(x_1) = 6$
$e(a) = 5$	$k(a) = 14$	$f(a) = 10$

Bild 3

Wir denken uns nun $g(0)$ um x, $x \leq a$, in den Streifen hinein parallel verschoben; $g(x)$ sei die verschobene Gerade. Bei dieser Verschiebung seien $e(x)$ Ecken überstrichen, $k(x)$ Kanten geschnitten und $f(x)$ Flächen durchquert – vergleiche Bild 3 für $x = x_1$ und für $x = a$.
Unser Ziel ist es nachzuweisen, dass $e(a) - k(a) + f(a) = 1$ gilt.
An Bild 3 mache man sich klar:
Für $x = 0$ ist $e(0) = 0$; da $g(0)$ wegen (3) alle Geraden $g_1, \ldots, g_n$ von F schneidet, ist $k(0) = n$ und daher $f(0) = n + 1$.
Die Überlegung gilt entsprechend für eine Verschiebung von $g(x_1)$ um x_2, bei der eine zweite Ecke von F überstrichen wird, dann ist $e(x_1 + x_2) - k(x_1 + x_2) + f(x_1 + x_2) = 1$, usw. bis man schließlich für $x_1 + x_2 + \ldots x_n = a$ findet: $e(a) - k(a) + f(a) = 1$. Wegen $e(a) = e$, $k(a) = k$ und $f(a) = f$ ist damit (1) bewiesen.

Es gibt viele Varianten und Verallgemeinerungen der Euler-Formel; wir geben nur zwei davon an.
Die Euler-Formel für ein konvexes Polygon, in dem keine oder einige oder alle Diagonalen eingezeichnet sind, lautet wie in (1): $e - k + f = 1$ (vergleiche die Aufgabe unten).
Die Euler-Formel für ein konvexes Polyeder dagegen lautet: $e - k + f = 2$.
Überprüfe dies am Tetraeder, am Würfel und am Oktaeder!

Aufgabe:
In einem konvexen Polygon seien keine, einige oder alle Diagonalen gezeichnet. Es sei e die Anzal der Ecken (Eckpunkte des Polygons sowie die Diagonalenschnittpunkte), k sei die Anzahl der Kanten (die Seiten des Polygons und die Diagonalenabschnitte) und f sei die Anzahl der Flächen (Teilgebiete im Inneren des Polygons).
Dann gilt $e - k + f = 1$.
Zeige dies!
Hinweis: Verlängere alle Seitenkanten und die vorkommenden Diagonalen zu Geraden.

Lösung der Aufgabe auf Seite 16 in diesem Heft.

Die besondere Aufgabe
Ungewöhnliche Produkte
Von Hartwig Fuchs

Man prüft leicht nach, dass die folgenden drei Gleichungen zutreffen:

$$\begin{aligned} 91 \cdot 1\,22\,1 &= 111\,111 \\ 90\,91 \cdot 1\,22\,22\,1 &= 11111\,11111 \\ 90\,90\,91 \cdot 1\,22\,22\,22\,1 &= 1111111\,1111111 \end{aligned}$$

Nun bilde man nach dem Muster der linken Seiten der Gleichungen beliebig viele weitere Produkte und rechne diese dann aus.
Ergeben sich dann stets wieder Zahlen aus lauter Ziffern 1?

Lösung:
Eine n-stellige natürliche Zahl, deren n Ziffern sämtlich 1 sind, kürzen wir mit $1[n]$ ab, $n \geq 1$.
Ferner setzen wir

$N_0 = 91$ $\qquad M_0 = 1221$
$N_1 = 9091$ $\qquad M_1 = 122221$
$N_2 = 909091$ $\qquad M_2 = 12222221$

sowie

(1) $N_t = 9 \cdot 10^{2t+1} + N_{t-1},\ t \geq 1$ $\qquad M_t = 121 \cdot 10^{2t+1} + M_{t-1},\ t \geq 1.$

Wir behaupten nun

(2) $N_t \cdot M_t = 1[4t+6], \quad t = 0, 1, 2, \ldots$

Dies gilt offenbar für $t = 0$, 1 und 2, denn
$N_0 M_0 = 1[6],$ $\qquad N_1 M_1 = 1[10],$ $\qquad N_2 M_2 = 1[14].$

Angenommen, (2) sei bereits für $t-1$, $t-1 \geq 0$, bewiesen.
Dann gilt für t:

$$\begin{aligned} N_t \cdot M_t &= (9 \cdot 10^{2t+1} + N_{t-1}) \cdot (121 \cdot 10^{2t+1} + M_{t-1}) \\ &= 9 \cdot 121 \cdot 10^{4t+2} + (121 N_{t-1} + 9 M_{t-1}) \cdot 10^{2t+1} + N_{t-1} M_{t-1} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $N_{t-1} M_{t-1} = 1[4(t-1)+6] = 1[4t+2]$.
Wir werden unten zeigen, dass ferner gilt

(3) $\quad 121 N_{t-1} + 9 M_{t-1} = 22 \cdot 10^{2t+1}, \quad t \geq 1$

Diese Gleichheit vorausgesetzt gilt also

$$\begin{aligned} N_t \cdot M_t &= 1089 \cdot 10^{4t+2} + 22 \cdot 10^{2t+1} \cdot 10^{2t+2} + 1[4t+2] \\ &= \left\{ \begin{array}{rrl} & 1089\,000...000 & \text{mit } 4t+2 \text{ Nullen} \\ + & 22\,000...000 & \text{mit } 4t+2 \text{ Nullen} \\ + & 111...111 & \text{mit } 4t+2 \text{ Einsen} \\ \hline & 1111\,111...111 & \text{mit } 4t+6 \text{ Einsen} \end{array} \right. \\ &= 1[4t+6], \end{aligned}$$

wie behauptet war.

Es ist noch zu zeigen, dass (3) gilt.

Zunächst ist: $121 N_0 + 9 M_0 = 22 \cdot 10^3$,
$121 N_1 + 9 M_1 = 22 \cdot 10^5$,
$121 N_2 + 9 M_2 = 22 \cdot 10^7$.

Angenommen, (3) sei bereits bewiesen für $t-2$, $t-2 \geq 0$.
Dann gilt für $t-1$ unter Beachtung von (1):

$$\begin{aligned} 121 N_{t-1} + 9 M_{t-1} &= 121 \cdot 9 \cdot 10^{2t-1} + 121 N_{t-2} + 9 \cdot 121 \cdot 10^{2t-1} + 9 M_{t-2} \\ &= 2 \cdot 1089 \cdot 10^{2t-1} + (121 N_{t-2} + 9 M_{t-2}) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $121 N_{t-2} + 9 M_{t-2} = 22 \cdot 10^{2t-1}$. Damit folgt:

$$121 N_{t-1} + 9 M_{t-1} = 2178 \cdot 10^{2t-1} + 22 \cdot 10^{2t-1} = 22 \cdot 10^{2t+1}.$$

Also gilt (3).

Insgesamt ist damit (2) bewiesen und daher gezeigt, dass die drei Gleichungen nach dem an ihnen erkennbaren Muster beliebig weit fortgesetzt werden können.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben“

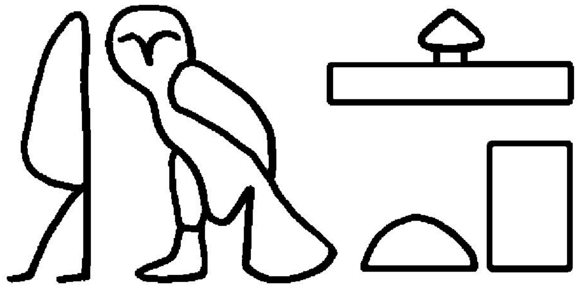
Galileo Galilei
*15.02.1564 in Pisa, †08.01.1642 in Arcetri bei Florenz;
italienischer Mathematiker, Physiker und Astronom

Hättest Du es gewusst: Wer könnte wohl als der erste Mathematiker gelten?

Von Hartwig Fuchs

Mit der Erfindung der Schrift ungefähr am Beginn des 3. Jahrtausends v. Chr. kommt Licht in das Dunkel der frühen Menschheitsgeschichte.
Erstmals erfahren wir Namen und Lebensdaten einzelner Menschen, die vor mehr als 4500 Jahren lebten – sie waren die politisch herausragenden Persönlichkeiten in ihrer Welt: Staatengründer, Herrscher, Eroberer.
Aber – und das ist ganz ungewöhnlich und wohl einmalig in dieser frühen Epoche – es gibt *erstmals* auch schriftliche Zeugnisse von einem Mann, der kein Kaiser, König oder Pharao, sondern ein Gelehrter war, dessen Name nicht im Strom der Zeit verloren ging und dessen Taten nicht vergessen wurden.

(1) Dieser Mann war Imhotep – er lebte um 2650 v. Chr. in Ägypten.



Namenskartusche des Imhotep

Imhotep, obgleich kein Mitglied einer adligen Familie, gelang es allein mit seinen Fähigkeiten, im Laufe seines Lebens zum höchsten Beamten und obersten Priester in Pharao Djosers Reich aufzusteigen. Aber sein Ansehen verdankt er weniger seiner Regierungstätigkeit als vielmehr der Tatsache, dass er seinen Zeitgenossen als ein „Wissender allen Wissens“ galt.

In welchen Wissenbereichen tat er sich hervor?
Imhotep war ein erfolgreicher Arzt, der wohl so umfangreiche medizinische Kenntnisse besaß, dass er irgendwann nach seinem Tod in den Rang eines Schutzgottes der Heilkunst erhoben wurde.
Und wir wissen heute noch von ihm, dass er ein bedeutender Astronom war.
Doch richtig berühmt wurde er als der geniale Architekt des ersten jemals ganz aus Stein errichteten Bauwerkes, der Stufenpyramide des Pharao Djoser bei Sakkara. Der Bau dieser Pyramide ist der unwiderlegbare Beweis für Imhoteps Kompetenz, mit der er hochkomplexe Arbeitsabläufe unter Einsatz zehntausender Fellachen (Bewohner des Niltals) organisieren und durchführen konnte. Aber es ist auch offensichtlich:

(2) Die Konstruktion eines so gewaltigen Bauwerkes ist ohne außerordentliche mathematische und insbesondere geometrische Kenntnisse nicht möglich.

Wir betreten nun das Gebiet der Vermutungen, wenn wir aus dem indirekten Argument (2) und dem Fakt (1) die Aussage aufstellen:

(3) Imhotep war der erste Mathematiker, dessen Namen wir kennen.

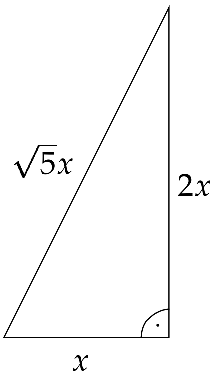
Es gibt allerdings einen für (3) bedeutungsvollen archäologischen Fund vom Anfang des 20. Jahrhunderts, der zu bestätigen scheint, dass Imhotep schon in den Augen seiner Zeitgenossen im Ruf eines hervorragenden Geometers stand. Bei Ausgrabungen in der Nähe seiner Stufenpyramide kam nämlich ein Steinrelief des Imhotep zu Tage, auf dem er in einer Hand zwei verschieden lange Stäbe hält.

Die Bedeutung dieser Stäbe war zunächst nicht klar. Erst als man bemerkte, dass der eine Stab $2{,}24$ mal so lang wie der andere ist und dass $2{,}24$ (oder $2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$ in ägyptischer Darstellung) ein Näherungswert für $\sqrt{5}$ ist, erkennt man:

Die Stäbe sollten wohl auf eine geometrische Entdeckung des Imhotep hinweisen, die für einen damaligen Architekten von größter Wichtigkeit sein musste und zwar auf eine Methode zur Konstruktion von rechten Winkeln.

Wie hat diese Konstruktion funktioniert?

Angenommen, der kurze Stab sei S_1 mit der Länge x und der andere Stab sei S_3 mit der Länge $\sqrt{5}x$. Dann kann man sich mit S_1 leicht einen Stab S_2 der Länge $2x$ beschaffen. Aus den drei Stäben S_1, S_2, S_3 bildet man ein Dreieck. Dieses ist dann rechtwinklig.



Die uns altvertraute Umkehrung des Satzes von Pythagoras:

Ein Dreieck mit den Seiten S_1, S_2 und S_3 ist rechtwinklig, wenn gilt: $|S_1|^2 + |S_2|^2 = |S_3|^2$.

liefert uns die Rechtfertigung für Imhoteps Rechtwinkel-Konstruktion, denn $x^2 + (2x)^2 = (\sqrt{5}x)^2$.

Wenn wir also davon ausgehen, dass es Imhotep war, der die Zwei-Stäbe-Konstruktion gefunden hat, dann kann er nur durch Zufall oder durch Ausprobieren darauf gestoßen sein, denn damals waren der Satz des Pythagoras und erst recht dessen Umkehrung noch nicht bekannt.

Aber das bedeutet nicht, dass Imhotep kein „richtiger Mathematiker" war. Er hat in der Morgendämmerung der Mathematik, als die vier Grundrechenarten noch zum geheimgehaltenen Wissen ägyptischer Priester gehörten, in den komplizierten Prozess der Wechselwirkung von empirisch gefundenen mathematischen Fakten und deren Verallgemeinerung zu einer Theorie – also der Entwicklung der Mathematik – einige typisch mathematische Einsichten eingebracht; etwa diese: Er wusste – seine Zwei-Stäbe-Konstruktion bezeugt es –, dass bestimmte Eigenschaften geometrischer Figuren wie z.B. die Rechtwinkligkeit eines Dreiecks sich durch Zahlenverhältnisse ausdrücken lassen; und es war ihm klar, dass eine unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholte geometrische Konstruktion immer zum gleichen Ergebnis führt – mit dieser Einsicht hat er seine Pyramide gebaut.

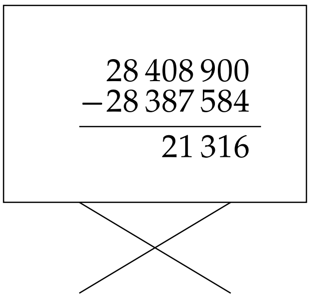
Übrigens hat Imhotep noch einige weitere geometrische Instrumente zur Vermessung von Pyramiden entwickelt, z.B. ein Messholz zur Bestimmung von Neigungswinkeln.

Wer solche Erkenntnisse besitzt, den sollten wir wohl zu den frühen Mathematikern zählen!

Ein Blick hinter die Kulissen: Der Quadrate-Trick

Von Hartwig Fuchs

Für eine Party wurde ein Entertainer engagiert, der die Gäste mit Kabarettstücken, Zaubereien und Tricks unterhalten sollte. Der Entertainer probierte vor seinem Publikum auch den folgenden Rechentrick aus:



Ein Gast, der sich für das Experiment zur Verfügung stellte, erhielt einen Taschenrechner. Dann sollte er sich eine zweistellige ganze Zahl z ausdenken, sie mit dem Taschenrechner zu z^2 quadrieren und dann auch den unteren sowie den oberen Nachbarn von z^2 quadrieren. Von den beiden letzten beiden Zahlen sollte er die Differenz bilden und dann diese drei Zahlen auf eine Tafel schreiben (auf die der Entertainer nicht blicken konnte). Danach sollte er die Differenz bekannt geben.

Der Partygast wählte $z = 73$, berechnete $73^2 = 5\,329$ und danach die Zahlen $5\,328^2 = 28\,387\,584$ und $5\,330^2 = 28\,408\,900$ sowie deren Differenz $21\,316$, die er dann als einzige Zahl dem Entertainer mitteilte.

Und nun geschah das Erstaunliche:
Kaum kannte der Entertainer die Zahl $21\,316$, nannte er auch schon die Zehnerziffer 7 sowie – nach kurzer Pause – auch die Einerziffer 3 der gedachten Zahl z, also $z = 73$. Und das war richtig!

Wie hat der Entertainer $z = 73$ gefunden?

Zunächst: Das Anschreiben der drei Zahlen an der Tafel diente nur dazu, beim Publikum Bewunderung für die angebliche Rechenleistung des Entertainers hervorzurufen. Tatsächlich aber ist sein Trick ganz elementar – nur Kopfrechnen sollte er können.

Es sei z die gedachte Zahl. Dann sind in dieser Reihenfolge zu berechnen: Die Zahl z^2, ihre beiden Nachbarn $(z^2 - 1)^2$ und $(z^2 + 1)^2$ sowie deren Differenz $(z + 1)^2 - (z - 1)^2$. Es zeigt sich nun nach dem Ausrechnen, dass die Differenz $(z^2 + 1)^2 - (z^2 - 1)^2 = z^4 + 2z^2 + 1 - z^4 + 2z^2 - 1 = 4z^2$ ist.
Der Entertainer muss also die ihm genannte Zahl $4z^2$ durch 4 teilen – das kann er! – so dass er z^2 kennt. Dann ist es für ihn eine leichte Übung, daraus z zu bestimmen, etwa in unserem Beispiel so:
Es sei $z^2 = 21316 : 4 = 5329$.
Dann ist die Einerziffer von z eine 3 oder eine 7, wie man unmittelbar sieht; die Zehnerziffer von z ist eine 7, weil $70^2 \approx 5000$, während $60^2 < 4000$ und $80^2 > 6400$ sind.
Also kommen nur die Zahlen 73 und 79 in Betracht. Wegen $79^2 = (80 - 1)^2 = 6400 - 160 + 1 > 6000$ kann der Entertainer die Zahl 79 schnell ausschließen. Also ist $z = 73$ die gedachte Zahl.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

In Heft 87 hatten wir den folgenden Algorithmus aus dem „Reich der Brüche“ vorgeschlagen und seine Untersuchung zur Aufgabe gestellt:

Wähle zwei beliebige Zahlen n_1, n_2, wobei jedoch $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0, n_2 \neq -1$ und $n_1 + n_2 \neq -1$ sein soll. Wir wollen n_1, n_2 ein **Startpaar** nennen. Berechne nun die Zahl n_3 nach der Vorschrift

$$n_3 = \frac{1+n_2}{n_1}. \tag{1}$$

Nun benutze n_2, n_3 als neues Startpaar, um ganz so wie in (1) eine Zahl n_4 zu bestimmen, nämlich

$$n_4 = \frac{1+n_3}{n_2}. \tag{2}$$

Mit dem Startpaar n_3, n_4 berechne wie in (1), (2) neue Zahlen n_5, n_6 usw. Führe diese Rechnungen so lange durch, bis Du auf eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit stößt.

Da nun Dein Ergebnis vielleicht nur dadurch zu Stande gekommen sein könnte, weil Du zufällig ein besonderes Startpaar gewählt hast, führe den ganzen Prozess noch einige Male mit anderen Startpaaren durch.

Findest Du auch dann die gleiche Gesetzmäßigkeit wie beim ersten Versuch? Wie lautet diese Gesetzmäßigkeit? Versuche, diese durch eine formale Bruchrechnung zu beweisen! (H.F.)

Einsendeschluss war der 15.02.2007. Von den Mathis erhielten wir keine Einsendungen; das Problem war vielleicht doch zu schwierig.

Martin Alexander Lange vom Gymnasium am Römerkastell in Alzey (Klasse 11), **Malte Meyn** von der Freien Waldorfschule in Erlangen (Klasse 9) und **Alexey Tyukin** vom Gymnasium Gonsenheim in Mainz (Klasse 11) sind an Hand verschiedener Startpaare zu der Vermutung gelangt, dass sich nach fünf Schritten wieder das Ausgangspaar ergibt. Das haben sie dann auch allgemein bewiesen. Die Bruchrechnung von Malte Meyn sieht mit den Startwerten $n_1 := a$, $n_2 := b$ ($a, b \notin \{0, -1\}, a + b \neq -1$) so aus:

$$n_3 = \frac{1+b}{a}$$

$$n_4 = \frac{1+\frac{1+b}{a}}{b} = \frac{\frac{1+a+b}{a}}{b} = \frac{1+a+b}{ab}$$

$$n_5 = \frac{1+\frac{1+a+b}{ab}}{\frac{1+b}{a}} = \frac{\frac{1+a+b+ab}{ab}}{\frac{1+b}{a}} = \frac{a+a^2+ab+a^2b}{ab+ab^2} = \frac{a(a+1)(b+1)}{ab(b+1)} = \frac{a+1}{b}$$

$$n_6 = \frac{1+\frac{a+1}{b}}{\frac{1+a+b}{ab}} = \frac{\frac{1+a+b}{b}}{\frac{1+a+b}{ab}} = \frac{ab(1+a+b)}{b(1+a+b)} = a = n_1$$

$$n_7 = \frac{1+a}{\frac{a+1}{b}} = \frac{b(a+1)}{a+1} = b = n_2$$

Wie man sieht, ist $n_1 = n_6$ und $n_2 = n_7$; allgemein gilt $n_i = n_{i+5}$.

Herr Prof. Dr. **Günter Pickert**, Universität Gießen, hat uns folgende **Verallgemeinerung der Aufgabenstellung** zugesandt:

Die Folge (n_i), $i = 1, 2, 3, ...$, sei festgelegt durch

$$n_{i+2} := \frac{c + n_{i+1}}{n_i}$$

mit den Startzahlen $n_1 = a$, $n_2 = b$, a, b, c reelle Zahlen, die so gewählt sind, dass $n_i \neq 0$ ist für alle $i \geq 1$.
Such nach Zahlen p mit der Eigenschaft: Die Folge n_1, n_2, n_3,... hat für einen geeigneten c-Wert die Periode p unabhängig davon, wie a und b gewählt sind, abgesehen von $n_i \neq 0$.

Eine Lösung ist uns aus obigem Beweis bekannt, nämlich $p = 5$ für $c = 1$. Andere oder sogar alle p-Werte zu finden, dürfte schwierig sein und ist sicher keine Aufgabe mehr für Mathis, oder?

Übrigens ist es für einen experimentellen Einstieg in die Problemstellung nützlich, ein Computeralgebra-System wie *Derive* zu benutzen. Die Befehlseingabe für *Derive V. 6.1* lautet im Falle $c = 1$:

ITERATES([(1+y)/x, (1+(1+y)/x)/y], [x, y], [a, b], 5)

Derive liefert dann die Lösung:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{b+1}{a} & \frac{a+b+1}{a \cdot b} \\ \frac{a+1}{b} & a \\ b & \frac{b+1}{a} \\ \frac{a+b+1}{a \cdot b} & \frac{a+1}{b} \\ a & b \end{bmatrix}$$

Die Seite für den Computer-Fan

Kleine Ursache – große Wirkung

Die Pellsche* Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$, in der D eine natürliche Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist, hat stets ganzzahlige Lösungen (x, y). Wir bezeichnen das Lösungspaar (x, y) mit dem kleinsten positiven x-Wert bei von 0 verschiedenem y-Wert als die kp-Lösung der Pellschen Gleichung.

Zum Beispiel gilt:

Die Gleichung $x^2 - 10y^2 = 1$ hat die kp-Lösung $(9, 6)$;
die Gleichung $x^2 - 11y^2 = 1$ hat die kp-Lösung $(10, 3)$, und
die Gleichung $x^2 - 12y^2 = 1$ hat die kp-Lösung $(7, 2)$.

Die kp-Lösung kann sich bei geändertem D-Wert aber noch viel drastischer verändern, auch wenn sich der D-Wert nur wenig, z. B. um 1 wie oben, ändert.

Überzeuge Dich davon durch Ermittlung der kp-Lösung in den Fällen $D = 10n + m$ für $1 \leq n \leq 9$, $0 \leq m \leq 2$. (nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen auch bis zum 31. August 2007 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als Anhang einer e-Mail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 88

Befreundete Zahlen

Der griechische Mathematiker Pythagoras nannte zwei Zahlen befreundet, wenn die Summe der echten Teiler der ersten Zahl gleich der zweiten Zahl und die Summe der echten Teiler der zweiten Zahl gleich der ersten Zahl war. War eine Zahl „mit sich selbst befreundet“, galt sie als vollkommen. Eine vollkommene Zahl ist zum Beispiel 28, denn $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Befreundete Zahlen sind beispielsweise 220 und 284, denn $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$ und $1+2+4+71+142 = 220$.

Ermittle alle Zahlenpaare befreundeter Zahlen, die nicht vollkommen sind, soweit Du es mit Deinem Programm schaffst.

Connor Röhricht, Kl. 8 des Gymnasiums Hochrad, Hamburg

Lösung:

Mit einem Java-Programm hat **Cornelie Koop** vom Frauenlob-Gymnasium Mainz alle 13 befreundeten Paare unterhalb 100 000 bestimmt. Diese sind:

$(220, 284)$, $(1184, 1210)$, $(2620, 2924)$, $(5020, 5564)$, $(6232, 6368)$, $(10744, 10856)$, $(12285, 14595)$, $(17296, 18416)$, $(63020, 76084)$, $(66928, 66992)$, $(67095, 71145)$, $(69615, 87633)$, $(79750, 88730)$.

*nach John Pell, *01.03.1611, †12.12.1685, englischer Mathematiker

Florian Schweiger vom Gymnasium Marktoberdorf hat von einem Programm in Visal Basic die ersten 22 befreundeten Paare, die alle noch unterhalb 250 000 liegen, errechnen lassen.

Mit einem C++-Programm hat **Martin Reinhardt** vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal alle befreundeten Paare bis zum 55. Paar $(2\,082\,464, 2\,090\,656)$ ermittelt.

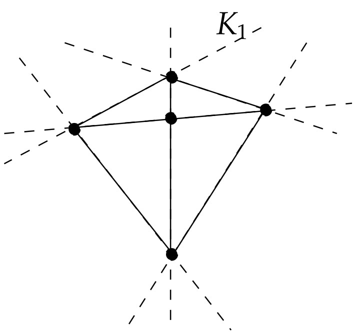
Malte Meyn von der Freien Waldorfschule Erlangen hat mit einem C++-Programm in ca. 33,5 Stunden alle 99 befreundeten Paare bis 10 000 000 errechnet und auch aufgelistet.

Ebenfalls mit einem C++-Programm hat **Christian Behrens** vom Gymnasium am Römerkastell Alzey alle befreundeten Paare zunächst bis 65 535, sodann mit einem weiteren Programm alle Paare bis 4 294 967 295 in entsprechend längerer Laufzeit ermittelt.

Lösungen der Aufgaben zu „Apfelschorle gut gemischt“

1) $x = 4{,}5 - 2{,}7 = \mathbf{1{,}8}$, $y = 5{,}1 - 4{,}5 = \mathbf{0{,}6}$. Auf 1 Teil Nüsse kommen 3 Teile Rosinen.
2) $x = 60 - 35 = \mathbf{25}$, $y = 35 - 30 = \mathbf{5}$. Auf einen Teil zuckerreiches Müsli kommen 5 Teile zuckerarmes Müsli.
3) $x = 30 - 0 = \mathbf{30}$, $y = 72 - 30 = \mathbf{42}$. Auf 5 Teile Schorle kommen 7 Teile Wasser.
4) Natürlich nicht. Die Mischung enthält immer einen Anteil, der zwischen beiden Konzentrationen liegt.

Lösung der Aufgabe zum Artikel über die Euler-Formel

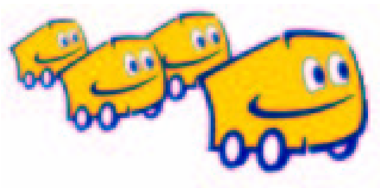


Verlängert man alle Seitenkanten und Diagonalen des Polygons zu Geraden – gestrichelte Linien im nebenstehenden Bild – dann erhält man eine Figur, für die die Euler-Fomel, also $e - k + f = 1$ mit den üblichen Bezeichnungen, gilt.
Nimmt man eine der gestrichelten Kanten weg, z. B. K_1, dann wird die Kantenzahl k um 1 kleiner; zugleich aber wird auch die Flächenzahl f um 1 erniedrigt. Für die neue Figur gilt dann immer noch $e - k + f = 1$. Wir nehmen nun nacheinander alle gestrichelten Kanten weg, wobei nach jeder Wegnahme stets noch $e - k + f = 1$ gilt.
Was danach übrig bleibt, ist das in der Aufgabe gegebene Polygon samt Diagonalen – und dafür gilt dann ebenfalls $e - k + f = 1$.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 89

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Abfahrtszeiten



Vier Busse A, B, C, D verlassen um 6.00 Uhr morgens gleichzeitig den Busbahnhof, um ihre jeweiligen Rundkurse abzufahren. Die Zeit zwischen zwei Abfahrten eines Busses beträgt jeweils A: 30 min, B: 36 min, C: 40 min, D: 60 min. Die Busse fahren täglich bis spätestens 24.00 Uhr.
Gibt es im Laufe des Tages mehr als eine Abfahrtszeit, zu der alle Busse gleichzeitig losfahren? (H.F.)

Lösung:
Wegen der Abfahrtszeiten von Bus D kommen nur volle Stunden als gemeinsame Startzeiten aller vier Busse in Frage. Diese Startzeiten sind für
A: 6.00 Uhr, 7.00 Uhr, 8.00 Uhr,. . . , 23.00 Uhr;
B: 6.00 Uhr, 9.00 Uhr, 12.00 Uhr,. . . , 21.00 Uhr;
C: 6.00 Uhr, 8.00 Uhr, 10.00 Uhr,. . . , 22.00 Uhr.
Somit starten nur um 6.00 Uhr, um 12.00 Uhr und um 18.00 Uhr alle vier Busse gleichzeitig. Um 24.00 Uhr startet kein Bus mehr.

Alternativ: Das kleinste gemeinsame Vielfache von 30, 36, 40 und 60 ist 360. Die vier Busse starten also gleichzeitig um 6.00 Uhr, um 6.00Uhr + 360 min = 12.00 Uhr sowie um 6.00 Uhr + 2·360 min = 18.00 Uhr.

Auf einem weit entfernten Planeten...
...leben Wesen verschiedener Arten. Die Forscher vermuten:

1. Alle Qurz sind Klhx.
2. Alle Jfxs sind Mnbw.
3. Alle Qurz sind Jfxs.
4. Klhx sind die Lebewesen, die Xarq, aber keine Mnbw sind.
5. Ptdc sind nur die, die Klhx, aber nicht Qurz sind.
6. Alle Ptdc sind Hnk.
7. Alle Mnbw sind Xarq.

Einem Forscher fällt auf: Die Vermutung 4. kann nicht stimmen, wenn alle anderen zutreffen. – Warum?

(Connor Röhricht, Klasse 8, Gymnasium Hochrad, Hamburg)

Lösung:
Beweis durch Widerspruch: Laut 2. und 3. müssen alle Qurz auch Mnbw sein und nach 7. sind alle Mnbw Xarq, also nach 4. keine Klhx – im Widerspruch zu 1. Wenn alle anderen Vermutungen zutreffen, muss also 4. falsch sein.

Magisches Quadrat

r	s
t	u

Zeige: Die vier Zahlen r, s, t, u bilden nur dann ein magisches Quadrat, wenn sie alle gleich sind. (H.F.)

Lösung:
Bilden die vier Zahlen r, s, t, u ein magisches Quadrat, dann folgen aus den Eigenschaften eines magischen Quadrats die Gleichungen:
$r + s = r + t \Rightarrow s = t, \quad r + s = s + u \Rightarrow r = u, \quad r + t = r + u \Rightarrow t = u.$
Es gilt daher $r = s = t = u$.

Großvater, Vater und Kind
Mathis sagt zu Mette: „Das Alter meines Großvaters G, meines Vaters V und meines Bruders B – jeweils in ganzen Jahren – hat das Produkt 31 500, und das Produkt des Alters meines Großvaters und meines Vaters ist das 140-fache des Alters meines Bruders. Wie alt sind mein Großvater, Vater und Bruder?“
Darauf Mette nach kurzer Überlegung: „Mit diesen Informationen kann ich nur das Alter deines Bruders berechnen.“
Mathis nun zu Mette: „Mein Großvater ist keine 30 Jahre älter als mein Vater. Also frage ich noch einmal: Wie alt sind mein Großvater, Vater und Bruder?“ (H.F.)

Lösung:
Aus $G \cdot V \cdot B = 31500$ und $G \cdot V = 140B$ folgt: $B^2 = 225$. Mathis Bruder ist also 15 Jahre alt.
Wegen $G \cdot V = 140 \cdot 15 = 2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ erhalten wir folgende abgekürzte Teilertabelle (G und V sind Teiler von 2100):

V	1	$\dots$	20	21	25	28	30	35	42
G	2100	$\dots$	105	100	84	75	70	60	50
$G - V$	> 30	$\dots$	> 30	> 30	> 30	> 30	> 30	25	8

Wegen $G < V + 30$ kommen zunächst nur $G = 60$, $V = 35$ und $G = 50$, $V = 42$ in Frage. Da aber offensichtlich $G = 50$, $V = 42$ entfallen muss, gilt: Der Großvater ist 60 und der Vater 35 Jahre alt.

Teiler
Es sei z eine Zahl, deren letzte beiden Ziffern 26 sind. Zeige, dass sich $z^2 - z$ durch 50, aber nicht durch 100 teilen lässt. (WJB)

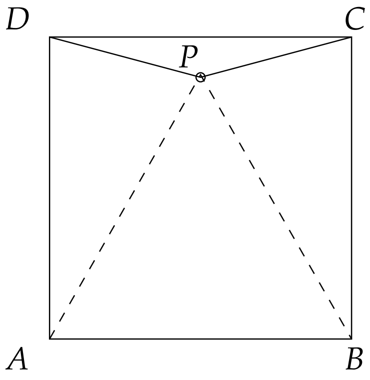
Lösung 1:

z ist offensichtlich durch 2, aber nicht durch 4 teilbar, $z - 1$ hat als letzte Ziffern 25 und ist somit durch 25 teilbar. $z^2 - z = z(z - 1)$ ist also teilbar durch $2 \cdot 25 = 50$, aber nicht durch $4 \cdot 25 = 100$.

Lösung 2:

$z^2 = (100x + 26)^2 = 100 \cdot (100x^2 + 2 \cdot 26) + 26^2 = 100(100x^2 + 52) + 676$ hat letzte Ziffern 76; $z^2 - z$ hat also als letzte Ziffern 50.

Dreiecke im Quadrat

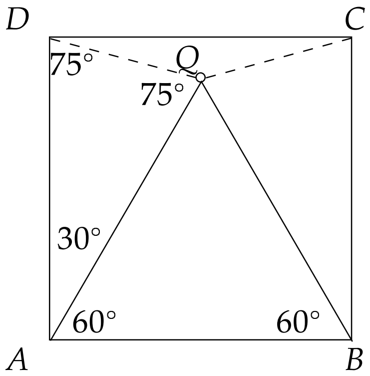


Im Quadrat $ABCD$ ist ein Punkt P so festgelegt, dass die Winkel $\sphericalangle PDC$ und $\sphericalangle DCP$ beide $15°$ sind.
Dann ist das Dreieck ABP gleichseitig.

Du siehst es! Kannst du es auch beweisen? (H.F.)

Tipp: Konstruiere über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck ABQ und zeige dann, dass die Punkte Q und P identisch sein müssen.

Lösung:
Sei Q der dritte Eckpunkt des von $\overline{AB}$ aus nach innen konstruierten gleichseitigen Dreiecks.
Da das Dreieck $\triangle ABQ$ gleichseitig ist, gilt $|AD| = |AB| = |AQ|$. DAher ist das Dreieck $\triangle AQD$ gleichschenklig und hat damit zwei gleiche Basiswinkel. Es folgt:



$$\begin{aligned}\sphericalangle QDC &= 90° - \sphericalangle ADQ\\ &= 90° - \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle QAD)\\ &= 90° - \frac{1}{2}(180° - (90° - \sphericalangle BAQ))\\ &= 15°\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt auch $\sphericalangle DCQ = 15°$.
Die Dreiecke $\triangle PCD$ und $\triangle QCD$ sind nach den Kongruenzsätzen (WSW) kongruent. Da die Dreiecke die Punkte C und D gemeinsam haben und auch dieselbe Orientierung besitzen, fallen P und Q zusammen.
Deshalb sind die Dreiecke $\triangle ABQ$ und $\triangle ABP$ gleich, weshalb das Dreieck $\triangle ABP$ wirklich gleichseitig ist. (Florian Schweiger, Klasse 9d, Gymnasium Marktoberdorf)

Eine sichere Sache

In einem Behälter befinden sich Kugeln, die nur durch ihre Farbe unterscheidbar sind und zwar: 2 rote, 3 schwarze, 5 blaue, 6 grüne und 11 gelbe Kugeln.
Mathis soll nun mit verbundenen Augen so viele Kugeln aus dem Behälter nehmen, dass sich darunter mit Sicherheit 5 Kugeln von gleicher Farbe befinden. Wie viele Kugeln muss Mathis dazu mindestens aus dem Behälter herausholen? (H.F.)

Lösung:
Wir nehmen den ungünstigsten Fall an: Mathis hat aus dem Behälter 2 rote, 3 schwarze, 4 blaue, 4 grüne und 4 gelbe Kugeln, also insgesamt 17 Kugeln entnommen, unter denen sich keine 5 Kugeln gleicher Farbe befinden. In dem Behälter liegen dann nur noch 1 blaue, 2 grüne und 7 gelbe Kugeln. Wenn er nun noch eine weitere Kugel nimmt, dann muss diese blau, grün oder gelb sein. Dann aber befindet sich unter den herausgenommenen Kugeln fünf von dieser Farbe.
Mathis muss also mindestens 18 Kugeln nehmen, um die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

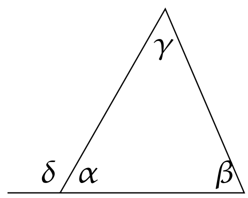
Blumensträuße
Ein Blumenhändler bestellt 216 rote und 312 weiße Astern. Wie viele identische Sträuße kann er daraus höchstens binden, wenn keine Blumen übrig bleiben sollen? (H.F.)

Zerlegung eines Quadrates
Ein Quadrat der Seitenlänge 4 soll so in zwölf Dreiecke und vier Quadrate zerlegt werden, dass alle 16 Teilfiguren den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Gib eine solche Aufteilung an – wenn sie möglich ist. (H.F.)

Zahlen-Steckbrief
Kannst Du die natürliche Zahl z bestimmen, die alle nachfolgenden Bedingungen erfüllt?
(1) z ist vierstellig;
(2) alle Ziffern von z sind ungerade und verschieden von einander;
(3) die Einerziffer von z ist dreimal so groß wie die Tausenderziffer von z;
(4) die Hunderterziffer von z ist größer als die Zehnerziffer von z;
(5) von allen Zahlen, die (1) bis (4) erfüllen, liegt die Lösungszahl z am nächsten bei 2744. (H.F.)

Innenwinkel und Außenwinkel eines Dreiecks
Wenn man eine Seite eines Dreiecks $\triangle ABC$ verlängert, dann ist der dabei entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden ihm gegenüberliegenden Innenwinkel des Dreiecks; z. B. ist in der Figur $\delta > \beta$ und $\delta > \gamma$.
Du siehst es! Kannst Du es auch begründen? (H.F.)



Eine wichtige Ungleichung
Bestimme alle natürlichen Zahlen x und y, $x \leq y$, für welche die Ungleichung

$$xy > x + y$$

gilt und für welche sie nicht gilt. (H.F.)

Wortgleichung
Für welche drei Ziffern a, b, c gilt $\left(ababab/ab\right)/ab = ccc$? (WJB)

Lösungen dreier Gleichungen?
Gibt es Zahlen x und y, welche die Gleichungen
(1) $x + y = 1$ (2) $x^2 + y^2 = 2$ (3) $x^3 + y^3 = 3$
gleichzeitig erfüllen? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 8 – 13

Aufgabe 911. Gleichseitiges Dreieck in gleichseitigem Dreieck
In einem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge a seien ein Punkt P auf der Seite $\overline{AB}$ und ein Punkt Q auf der Seite $\overline{AC}$ so gewählt, dass $\overline{AP} \neq \overline{AQ}$ und zugleich $|\overline{AP}| + |\overline{AQ}| = a$ ist.

Kann man auf der Seite $\overline{BC}$ einen Punkt R so festlegen, dass dann auch das Dreieck PQR gleichseitig ist? (H.F.)

Aufgabe 912.
Bestimme alle natürlichen Zahlen, die sich als $\sqrt{15n-2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben lassen. (WJB)

Aufgabe 913. Zwei besondere Würfel
Bei zwei verschieden großen Würfeln mit ganzzahligen Kantenlängen sei die Summe ihrer Volumen genau so groß wie die Summe aller ihrer Kantenlängen.
Bestimme sämtliche solcher Würfelpaare! (H.F.)

Aufgabe 914. Regentropfen im Quadrat
Auf einen quadratischen Platz von 49 m^2 Fläche fallen 5000 (punktförmige) Regentropfen.
Dann gibt es mindestens 100 Tropfen, von denen jeder einen Abstand von weniger als 15 cm zu einem anderen Tropfen hat. (H.F.)

Aufgabe 915. Natürliche Zahlen als Summen natürlicher Zahlen
Mathis behauptet, dass man 5 auf 16 verschiedene Arten als eine Summe aus natürlichen Zahlen schreiben kann. Man überprüft schnell, dass er Recht hat, wenn er z. B. $4+1$ und $1+4$ als verschieden betrachtet und auch Summen aus einem Summanden, z. B. $4=4$, zulässt.

a) Was hältst Du von der Aussage: ‚11 kann auf mehr als 1000 Arten als eine Summe dargestellt werden.‘?
b) Auf wie viele Arten kannst Du eine beliebige natürliche Zahl $n > 1$ als eine Summe schreiben? (H.F.)

Aufgabe 916. Ungewöhnliche Vielfache von 10
Trifft es zu, dass alle Zahlen $9^k + 1$ mit $k = 1, 3, 5, 7, \ldots$ Vielfache von 10 sind? (H.F.)

Aufgabe 917.

a) Die Kanten von der Spitze S einer Pyramide über dem Dreieck ABC bilden mit der Grundfläche den gleichen Winkel δ. Wo liegt der Fußpunkt F des Lotes von S auf die Grundfläche?

b) Gibt es auch Pyramiden über Vierecken, bei denen alle Kanten zur Spitze den gleichen Winkel mit der Grundfläche bilden?

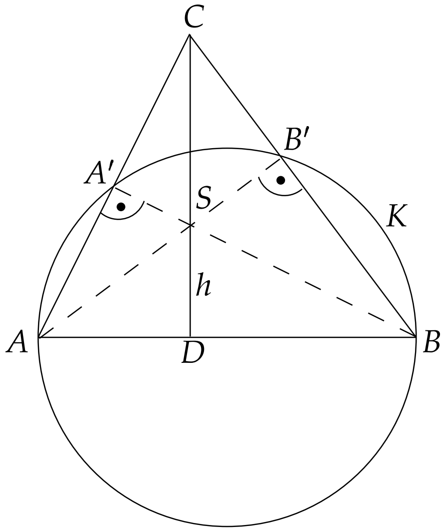
c) Die Seitenflächen einer Pyramide über dem Dreieck ABC bilden mit der Grundfläche jeweils den gleichen Winkel ε. F sei der Fußpunkt des Lotes von der Spitze S auf die Grundfläche. Wo liegt F ? (WJB)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 89

Klassen 8 – 13

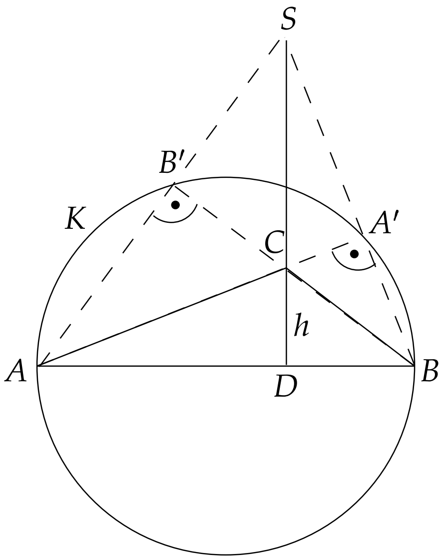
Aufgabe 904. Eine Konstruktion nur mit dem Lineal
In der Ebene sei ein Kreis K mitsamt einem Durchmesser AB und ein Punkt C gegeben, welcher
a) außerhalb
b) innerhalb
der von K bestimmten Kreisscheibe liegt.
Konstruiere dann unter alleiniger Verwendung eines nicht markierten Lineals die Höhe h des Dreiecks ABC, die auf AB senkrecht ist. (H.F.)

Lösung:
a)



- Zeichne $\triangle ABC$;
- AC schneidet K in A', und BC schneidet K in B';
- im Thaleskreis über AB sind die Winkel $\sphericalangle AA'B$ und $\sphericalangle AB'B$ beide rechte Winkel;
- folglich sind AB' und BA' Höhen im $\triangle ABC$, und ihr Schnittpunkt S ist daher der Höhenschnittpunkt;
- die durch S verlaufende Strecke CD ist dann die gesuchte Höhe h des $\triangle ABC$.

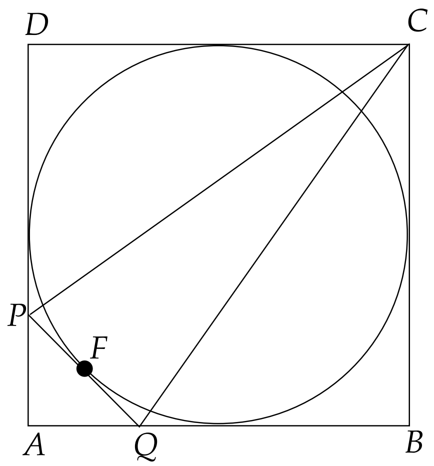
b)



- Zeichne $\triangle ABC$;
- die Verlängerung von AC schneidet K in A' und die Verlängerung von BC schneidet K in B';
- konstruiere nun den Punkt S als Schnittpunkt der Verlängerungen von AB' und BA';
- im Dreieck $\triangle ABS$ sind dann AA' und BB' jeweils Höhen;
- damit ist C der Höhenschnittpunkt, und die Höhe SD des $\triangle ABS$ verläuft duch C;
- also ist die Strecke CD orthogonal zur Strecke AB und ist folglich die gesuchte Höhe h.

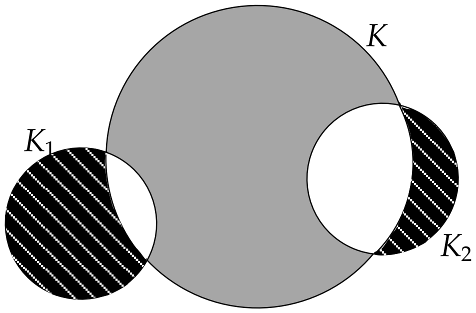
Aufgabe 905.
Gesucht ist die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle CPQ$ in der Abbildung. Die Seitenlänge des Quadrats sei a.

(WJB)



Lösung:
Es bezeichne M den Mittelpunkt des Quadrats und damit seines Inkreises, und F den Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ mit dem Inkreis. Dann ist $|\overline{MC}| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $|\overline{MF}| = \frac{a}{2}$; also hat das Dreieck die Höhe $|\overline{CF}| = \frac{a}{2}(\sqrt{2}+1)$ über $\overline{PQ}$.
Andererseits ist $|\overline{QF}| = |\overline{AF}| = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2}$, die Grundseite $|\overline{PQ}| = a(\sqrt{2}-1)$. Als Fläche ergibt sich für das gleichschenklige Dreieck $\triangle CPQ$
$\frac{1}{2}|\overline{PQ}| \cdot |\overline{CF}| = \frac{1}{4}a^2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{4}a^2$, also ein Viertel der Quadratfläche.

Aufgabe 906. Eine krummlinig begrenzte Fläche
In der Ebene sei ein Kreis K mit Radius r gezeichnet.



Zwei weitere Kreise K_1, K_2 – beide mit dem Radius $\frac{1}{2}r$ – seien so gezeichnet, dass sie keinen Punkt gemeinsam haben, aber beide den Kreis K schneiden.

Wie groß ist dann die graue Fläche innerhalb von K im Vergleich zu der Gesamtfläche der beiden schraffierten Gebiete außerhalb von K? (H.F.)

Lösung:

Das Innengebiet von K ohne die beiden weißen Teilgebiete, deren Gesamtfläche mit g bezeichnet sei, ist $\pi r^2 - g$. Die beiden schraffierten Gebiete außerhalb von K haben die Gesamtfläche $\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 - g$. Daraus folgt: Die graue Fläche innerhalb von K ist stets um $\frac{1}{2}\pi r^2$ größer als die schraffierte Fläche außerhalb des Kreises K.

Aufgabe 907.
Aus den Ziffern a, b, c mit $a + b < 10$ und $c + 1 < 10$ bilde die Zahlen $z = ab0aba(a + b)b$, $y = 1(c + 1)(c + 1)(c + 1)c$ sowie $x = ab$ derart, dass $z/x^2 = y$. (WJB)

Lösung:
Anders geschrieben lautet die Gleichung
$z = (10a + b)(1001011)$, $y = 1111(10 + c)$, also
$1001011 = \frac{z}{x} = x \cdot y = (10 + c) \cdot x \cdot 1111$, also
$(10 + c) \cdot x = \frac{1001011}{1111} = 901 = 17 \cdot 53$ und deshalb $c = 7$, $a = 5$, $b = 3$.

Im Heft hatte sich ein Druckfehler eingeschlichen. Dort war die Zahl $z = ababa(a + b)b$ gefordert. Dann gilt:
Die entsprechende Rechnung wie oben liefert $(10a + b) \cdot (10 + c) = \frac{101011}{1111} \approx 90{,}92$.
Auf der linken Seite steht offenbar eine natürliche Zahl, denn alle drei Variablen und damit auch das Produkt sind natürliche Zahlen. Auf der rechten Seite dagegen ergibt sich keine natürliche Zahl.
Es ist also nicht möglich, die Zahlen wie gefordert zu bilden!

(Laura Biroth, Klasse 12, Humboldtschule, Bad Homburg;
Stephan Böhmer-Horländer, Klasse 8d, Theodor-Heuss-Gymnasium, Ludwigshafen;
Martin Reinhardt, Klasse 10, Karolinen-Gymnasium, Frankenthal;
Connor Röhricht, Klasse 8, Gymnasium Hochrad, Hamburg;
Florian Schweiger, Klasse 9d, Gymnasium Marktoberdorf.)

Aufgabe 908.
Es gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, $7^2 + 24^2 = 25^2$. Die ungeraden Zahlen 3, 5, 7 kommen also in pythagoreischen Tripeln vor. Gilt das für alle ungeraden Zahlen (außer der Zahl 1), oder gilt es nur für Primzahlen? (WJB)

Lösung:
Die Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen n^2 und $(n + 1)^2$ ist $n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. Diese Differenz kann also den Wert aller ungerader Zahlen ≥ 3 annehemen, darunter natürlich auch alle ungeraden Quadratzahlen.
In pythagoreeischen Tripeln der Form $n^2 + m^2 = (n + 1)^2$ kann m^2 somit den Wert jeder ungeraden Quadrazahl ≥ 9 annehmen, also m den jeder ungeraden Zahl ≥ 3.
Die Behauptung gilt also für alle ungeraden Zahlen außer 1.

(Laura Biroth, Klasse 12, Humboldtschule, Bad Homburg)

Aufgabe 909.
Es sei m eine natürliche Zahl. Wir suchen eine natürliche Zahl n mit folgenden Eigenschaften:
(1) $n^2 + n$ und $n^2 - n$ haben die gleiche Endziffer.
(2) $n^2 - n$ ist durch m teilbar.
(3) Alle Ziffern von n sind gleich.

Löse dazu folgende Teilaufgaben:
a) Für $m = 3$ finde eine solche Zahl n.
b) Gib alle Zahlen n mit diesen Eigenschaften an für $m = 3$.
c) Gib für $m = 11$ alle solchen Zahlen an.
d) Gib für $m = 7$ alle solchen Zahlen an.
e) Löse die Aufgabe für $m = 6$ (WJB)

Lösung:
a) und b): Wegen (1) hat $(n^2 + n) - (n^2 - n) = 2n$ die Endziffer 0, folglich muss n wegen (3) die Endziffer 5 haben. Also ist n von der Form $n = 55\dots5$. (2) bedeutet, dass $n(n-1)$ durch 3 teilbar ist, also entweder n durch 3 teilbar – das ist der Fall, wenn die Anzahl der Ziffern ein Vielfaches von 3 ist – oder $n - 1$ durch 3 teilbar, d.h. $n - 1 = 54$, $n - 1 = 555554, \dots$ (Anzahl der Fünfen vor der 54 Vielfaches von 3).
c) Keine der Zahlen $n - 1 = 55\dots54$ kann durch 11 teilbar sein. Die Zahlen n (und damit $n(n-1)$) sind durch 11 teilbar, wenn die Anzahl der Ziffern gerade ist.
d) Keine der Zahlen $n - 1 = 55\dots54 = 2 \cdot 277\dots77$ ist durch 7 teilbar, ebenfalls keine der Zahlen $n = 5, 55, 555, 5555, 55555$. Jedoch ist $555555 = 7 \cdot 79365$. Jede Zahl, die aus lauter Ziffern 5 besteht, lässt sich schreiben als ein Vielfaches von 555555 plus eine der nicht durch 7 teilbaren Zahlen $5, 55, 555, 5555, 55555$. Also ist n teilbar durch 7, wenn die Anzahl der Ziffern ein Vielfaches von 6 ist.
e) $n(n-1)$ ist immer durch 2 teilbar. Teilbarkeit durch 6 ist somit genau dann gegeben, wenn $n(n-1)$ durch 3 teilbar ist. (siehe dazu a) und b)).

Aufgabe 910. Eine Teilbarkeitsregel
Beweise, dass für $n \geq 1$ gilt: 3 ist ein Teiler von $2^n + 1$, falls n ungerade ist;
3 ist kein Teiler von $2^n + 1$, falls n gerade ist. (H.F.)

Lösung:
Für $n = 1$ ist $2^1 + 1 = 3$ und $3|3$ – d. h. 3 teilt 3.
Für $n = 2$ ist $2^2 + 1 = 5$ und $3 \nmid 5$ – d. h. 3 teilt nicht 5.
Für die Zahlen $2^n + 1$ und $2^{n+2} + 1$ gilt: $2^{n+2} + 1 = 2^2 \cdot 2^n + 1 = 4 \cdot (2^n + 1) - 3$.
Ist nun $2^n + 1$ durch 3 teilbar, so ist auch $2^{n+2} + 1 = 4 \cdot (2^n + 1) - 3$ durch 3 teilbar. Da für $n = 1$ $2^n + 1$ ein Vielfaches von 3 ist, und mit $n + 2$ alle ungeraden Zahlen duchlaufen werden, sind auch alle weiteren Zalen $2^n + 1$ für ungerades n durch 3 teilbar.
Ist hingegen $2^n + 1$ nicht durch 3 teilbar, so auch nicht $2^{n+2} + 1 = 4 \cdot (2^n + 1) - 3$. Da für $n = 2$ $2^n + 1$ kein Vielfaches von 3 ist, und mit $n + 2$ alle geraden Zahlen duchlaufen werden, sind auch alle weiteren Zalen $2^n + 1$ für gerade n nicht durch 3 teilbar.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
Von Martin Mattheis

George G. Szpiro: „Mathematik für Sonntagmorgen“.

War es noch vor einigen Jahren so, dass man auf jeder Party mit dem Satz „In Mathe war ich immer schlecht“ punkten konnte, so scheint sich das Blatt mittlerweile zu wenden. Eines der Kennzeichen dieses Bewusstseinswandels betrifft auch die veröffentlichte Meinung: So gibt es in immer mehr Zeitungen und Zeitschriften Berichte mit Themen aus bzw. über Mathematik – und dies nicht nur in Spektrum der Wissenschaft oder P.M., sondern auch in ganz normalen Tageszeitungen. Einzelne Zeitungen gehen sogar so weit, mathematische Themen in einer regelmäßigen Kolumne zu bringen.
Seit März 2002 erscheint in der „Neuen Zürcher Zeitung am Sonntag“ mit *George Szpiros kleinem Einmaleins* eine solche monatliche Kolumne, welche versucht, der Leserschaft einen Einblick in die Mathematik zu vermitteln. Unter dem Titel „Mathematik für Sonntagmorgen“ sind die ersten 50 dieser Kolumnen seit 2004 auch in Buchform erhältlich.
Wie der Titel bereits erahnen lässt, handelt es sich dabei nicht um ein Buch, welches man in einem Zug von vorne nach hinten durchlesen sollte. Vielmehr bietet es sich an, immer wieder einmal – häppchenweise – darin zu schmökern, es muss ja nicht nur sonntagmorgens sein. . .
Inhaltlich geht es bei „Mathematik für Sonntagmorgen“ um Historisches, ungelöste Vermutungen, gelöste Probleme, Persönlichkeiten, Konkretes und Abstraktes sowie Interdisziplinäres.
Für seine die Mathematik populärer machende Kolumne wurde George Szpiro zu Recht am 10. November 2006 mit dem zum dritten Mal verliehenen Medienpreis der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ausgezeichnet.

Fazit: Szpiro ist es gut gelungen, Themen, die man mit Fug und Recht zur mathematischen Allgemeinbildung rechnen kann, verständlich, kurz und für ein breiteres Publikum spannend aufzubereiten.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Szpiro, George G.: Mathematik für Sonntagmorgen; Neue Zürcher Zeitung, 2007[5], ISBN 978-303823353-4, geb., 238 Seiten, 26,– €

Art des Buches:	Geschichten aus und über Mathematik
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Wer forscht mit?
Zur Aufgabe für Zahlenjäger aus dem Umfeld der Goldbach-Vermutung aus Heft 87

In Heft 87 hatten wir folgende Variante der Goldbach-Vermutung* zur Untersuchung vorgeschlagen:

> Jede gerade Zahl > 4 ist die Summe zweier Primzahlen aus der Folge der Primzahlzwillinge (PZ-Folge).

Da viele Primzahlen in der PZ-Folge nicht vorkommen (z. B. fehlen $23, 37, 47, 53, \ldots$), scheint es möglich, Ausnahmezahlen zu finden, für die es keine derartige Summendarstellung gibt. Die Aufgabe lautete daher (Einsendeschluss war der 15.02.2007):

▼ Gibt es Ausnahmezahlen $< 10^n$ (z. B. für $n = 4$)?
Falls Du Ausnahmezahlen entdeckst, kannst Du Regelmäßigkeiten in der Folge dieser Zahlen erkennen?

Bereits unterhalb 100, also für $n = 2$, gibt es die Ausnahmezahlen 94, 96 und 98. Damit ist unsere Variante der Goldbach-Vermutung bereits widerlegt.

Das haben **Christian Behrens** und **Martin Alexander Lange** vom Gymnasium am Römerkastell in Alzey, **Malte Meyn** von der Freien Waldorfschule in Erlangen, **Martin Reinhardt** vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal und **Florian Schweiger** vom Gymnasium Marktoberdorf erkannt. Darüberhinaus haben Florian Schweiger unterhalb 10 000 mit einem Visual Basic-Programm, Martin Reinhardt unterhalb 500 000 und Malte Meyn unterhalb 10 000 000 jeweils mit C++-Programmen alle Ausnahmezahlen bestimmt; hier ihre Liste, für die Maltes Programm ca. 45 Minuten benötigte:

94	96	98
400	402	404
514	516	518
784	786	788
904	906	908
1114	1116	1118
1144	1146	1148
1264	1266	1268
1354	1356	1358
3244	3246	3248
4204	4206	4208

Auffällig ist dabei, dass die Ausnahmezahlen in Dreiergruppen (also jeweils drei direkt aufeinander folgende gerade Zahlen) mit den Endziffern 4, 6 und 8 (ausgenommen die Dreierfolge 400, 402, 404) auftreten, die alle von der Form $3n + 1$, $3n + 3$, $3n + 5$ sind bzw. (die Dreierfolge 400, 402, 404 wieder ausgenomme) sogar von der Form $30n + 4$, $30n + 6$, $30n + 8$. Bemerkenswert ist auch, dass es in dem relativ großen Bereich zwischen 4 210 und 10 000 000 keine Ausnahmezahlen gibt.

*Christian Goldbach, *18.03.1690 in Königsberg, †20.11.1764 in Moskau (in manchen Quellen steht 01.12.1764 in St. Petersburg); seine berühmte Vermutung formulierte er 1742 in einem Brief an Leonhard Euler (!)

Bundeswettbewerb Mathematik 2007

Wer forscht mit? – Aufgabe 1 der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1
Gegeben sei ein regelmäßiges 2007-Eck.
Die natürlichen Zahlen $1, 2, ..., 4014$ sollen so auf seine Eckpunkte und Seitenmittelpunkte verteilt werden, dass für jede Seite die Summe der drei Zahlen, die an den Eckpunkten und am Mittelpunkt der Seite stehen, den gleichen Wert hat. Man zeige, dass eine solche Verteilung möglich ist.

Das ist typisch für die erste Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik: Die Aufgabe 1 fordert unmittelbar zum Ausprobieren auf. Wir laden alle Leserinnen und Leser ein, mit uns gemeinsam über die Aufgabe nachzudenken. Es wird sich zeigen, dass diese Aufgabe über eine konkrete Lösung hinaus viele interessante Fragen aufwirft. Daher: **Wer forscht mit?**

Schon vor Beginn unserer eigentlichen Lösungsversuche drängen sich Fragen auf, zum Beispiel: Gibt es eine einzige Lösung, die wir suchen müssen, oder zumindest einen eindeutigen Summenwert, den wir in der Verteilung der Zahlen erreichen müssen? Existieren Verteilungen wie in der Aufgabenstellung nur für 2007-Ecke, weil sie besondere Eigenschaften der Zahl 2007 ausnutzen, oder sind Lösungen für das 2007-Eck nur Spezialfälle eines allgemeineren Sachverhalts?

Welche Summenwerte sind überhaupt möglich?
Der Übersichtlichkeit halber formulieren wir die Aufgabenstellung allgemeiner, nämlich für ein n-Eck, $n \geq 3$, auf dessen Eckpunkte und Seitenmittelpunkte die Zahlen 1, 2, ..., $2n$ zu verteilen sind. Wir erinnern vorab an die bekannte Formel

$$1 + 2 + \cdots + (m-1) + m = \frac{m(m+1)}{2}, \qquad (1.1)$$

die für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ gilt und die induktiv bewiesen werden kann. Für eine beliebige Verteilung wie in der Aufgabenstellung bezeichne E die Summe der Zahlen, die den Eckpunkten, M die Summe der Zahlen, die den Seitenmittelpunkten zugeteilt wurden. Für jede Seite mögen die drei Zahlen, die an den Eckpunkten und dem Mittelpunkt der Seite stehen, die Summe S ergeben. Dann gilt, weil alle Zahlen von $1, 2, ..., 2n$ genau einmal zugeteilt wurden und wegen (1.1),

$$E + M = 1 + 2 + \cdots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1).$$

Summieren wir für alle n Seiten die drei Zahlen, die den Eckpunkten und dem Mittelpunkt der Seite zugeteilt wurden, so folgt, weil alle Seiten genau einmal, alle Eckpunkte genau zweimal addiert werden,

$$2E + M = n \cdot S.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$E = n(S - 2n - 1),$$

zudem gelten für E die Ungleichungen

$$1 + 2 + \cdots + n \leq E \leq (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n,$$

die sich aus der Verteilung der n kleinsten bzw. größten der zur Verfügung stehenden Zahlen auf die Eckpunkte ergeben. Durch Anwendung von (1.1) folgt

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq E = n(S - 2n - 1) \leq n \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

Daraus folgt als Abschätzung für den Summenwert S

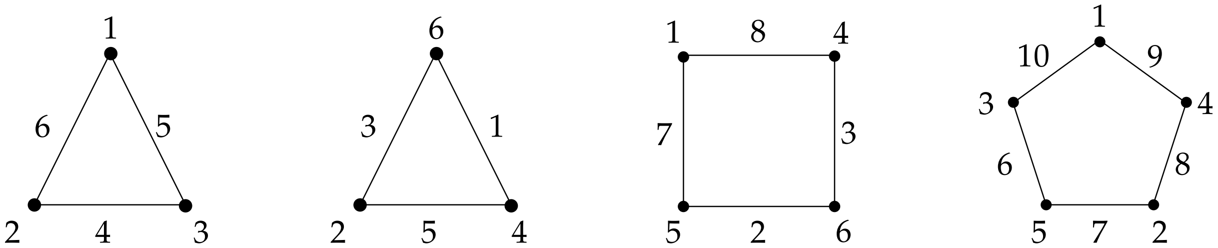
$$2n + 1 + \frac{(n+1)}{2} = \frac{(5n+3)}{2} \leq S \leq \frac{(7n+3)}{2} = 2n + 1 + \frac{(3n+1)}{2}. \qquad (1.2)$$

Ist n ungerade, so sind die Intervallgrenzen in (1.2), in denen der Summenwert S liegen kann, ganzzahlig, so dass es in diesem Fall höchstens $\frac{(7n+3)}{2} - \frac{(5n+3)}{2} + 1 = n + 1$ mögliche verschiedene Werte gibt, die S annehmen kann. Ist n gerade, so sind die Intervallgrenzen in (1.2) nicht ganzzahlig, so dass es in diesem Fall höchstens $\left\lfloor \frac{(7n+3)}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{(5n+3)}{2} \right\rceil + 1 = n$ mögliche verschiedene Werte für S gibt. Wir haben mit der Ungleichung (1.2) eine Bedingung gefunden, die der Summenwert S notwendig erfüllen muss. Im Folgenden werden wir untersuchen, für welche Werte aus dem Intervall in (1.2) tatsächlich eine Verteilung wie in der Aufgabenstellung existiert. Vor der Suche nach konkreten Verteilungen sollten wir uns als **erste Forschungsfrage** stellen, ob sich präzisere notwendige Bedingungen für S finden lassen:

- Für welche Werte in dem Intervall aus (1.2) können wir ausschließen, dass es eine Verteilung wie in der Aufgabenstellung gibt, die diesen Summenwert hat (für spezielle Werte von n oder sogar für allgemeine)?

Zwei Verteilungen für n-Ecke mit ungeradem n

Mit konkreten Verteilungen wollen wir zunächst in den überschaubareren Situationen eines Dreiecks (oder Vierecks bzw. Fünfecks) experimentieren, auf deren Ecken und Seitenmitten die Zahlen von 1 bis 6 (oder bis 8 bzw. bis 10) wie in der Aufgabenstellung zu verteilen sind. Nach einigem Ausprobieren kann man für alle drei Situationen Lösungen finden:



($n = 3$, $S = 9$) ($n = 3$, $S = 11$) ($n = 4$, $S = 13$) ($n = 5$, $S = 14$)

Abb. 1: Beispiele für die gesuchten Verteilungen im Fall $n = 3, 4, 5$

Was lernen wir aus diesen Lösungen für den allgemeinen Fall eines n-Ecks oder zumindest für den konkreten Fall $n = 2007$? Bei genauer Betrachtung des ersten und letzten Beispiels lässt sich eine Regelmäßigkeit entdecken, und tatsächlich können wir beweisen: Eine Verteilung wie in der Aufgabenstellung ist für alle regelmäßigen n-Ecke möglich, wenn n ungerade ist. Wir beschreiben eine Verteilung im Folgenden für ein ungerades n, das beliebig, aber fest gewählt ist. (Eine Lösung der Aufgabe ergibt sich, wenn $n = 2007$ gesetzt wird.)

Die Ecken des n-Ecks seien, um die eigentliche Verteilung der Zahlen besser beschreiben zu können, im Uhrzeigersinn mit E_1, E_2, ..., E_n fortlaufend nummeriert. Die Seiten können wir entsprechend über E_nE_1, E_1E_2, ..., $E_{n-1}E_n$ als Tupel der beiden zugehörigen Ecken beschreiben, das heißt, die Seite E_kE_{k+1} verbindet die Ecken E_k und E_{k+1}.

Die eigentliche Verteilung legen wir wie folgt fest: Wir beginnen mit der Zuteilung der Zahl 1 zur Ecke E_1. Wir setzen dies fort, indem wir der im Uhrzeigersinn jeweils übernächsten Ecke fortlaufend die Zahlen $2, 3, ..., n$ zuteilen: Weil n ungerade ist, wird auf diese Weise der Ecke E_k, wenn $1 \leq k \leq n$ ungerade ist, die Zahl $(k+1)/2$ zugeteilt; und nach Ecke E_n setzen wir die Zuteilungen an der übernächsten Ecke, nämlich Ecke E_2, fort, wobei allgemein der Ecke E_k, wenn $2 \leq k \leq n-1$ gerade ist, die Zahl $\frac{k}{2} + \frac{(n+1)}{2}$ zugeteilt wird.

Wir zeigen nun, dass sich die verbleibenden Zahlen $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ so auf die Seitenmittelpunkte verteilen lassen, dass für jede Seite die Summen der drei Zahlen, die an den Eckpunkten und dem Mittelpunkt der Seite stehen, den gleichen Wert, nämlich $\frac{(5n+3)}{2}$ haben. Denn für die einzelnen Seiten stellen wir fest:

Seite	E_nE_1	E_kE_{k+1}, $k < n$ ungerade	E_kE_{k+1}, k gerade
Summe der Zahlen an den Eckpunkten	$\frac{n+1}{2} + 1$	$2 \cdot \frac{k+1}{2} + \frac{n+1}{2}$	$\frac{k}{2} + \frac{k+2}{2} + \frac{n+1}{2}$
$(5n+3)/2$ – Summe der Zahlen an den Eckpunkten	$2n$	$2n - k$	$2n - k$

In der letzten Zeile der Tabelle ergibt sich der kleinste Eintrag für die Seite $E_{n-1}E_n$, nämlich die Differenz $2n - (n-1) = n+1$. Damit ist bewiesen, dass wir eine Verteilung wie in der Aufgabenstellung haben. Für $n = 2007$ ergibt sich bei der beschriebenen Verteilung 5019 als Wert der Summe.

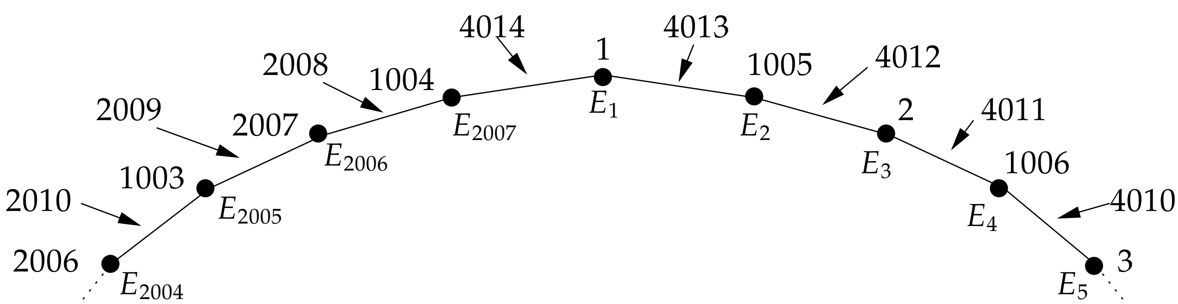


Abb. 2: Eine Verteilung für das 2007-Eck mit $S = 5019$

Die in dem obigen Beweis beschriebene Verteilung realisiert den minimalen Summenwert, den wir in (1.2) ermittelt hatten. Wir geben eine weitere allgemeine Verteilung an. Wir beschriften hierfür die Ecken mit den n ungeraden Zahlen 1, 3, ..., $2n-1$, und zwar fortlaufend die im Uhrzeigersinn jeweils übernächste Ecke. Weil n ungerade ist, hat man damit am Ende alle Ecken nummeriert. Die Summen der Zahlen, die auf diese Weise benachbarten Eckpunkten zugeteilt wurden, sind in aufsteigender Reihenfolge $n+1$, $1+n+2=n+3$, ..., $2n-1+n=3n-1$. Wenn wir den entsprechenden Seiten die geraden Zahlen $2n$, $2n-2$, ..., 2 zuordnen, erhalten wir für alle Seiten $3n+1$ als Summe derjenigen drei Zahlen, die Eckpunkten und Mittelpunkt der Seite zugeordnet sind. Für $n = 2007$ ergibt sich bei der beschriebenen Verteilung 6022 als Wert der Summe.

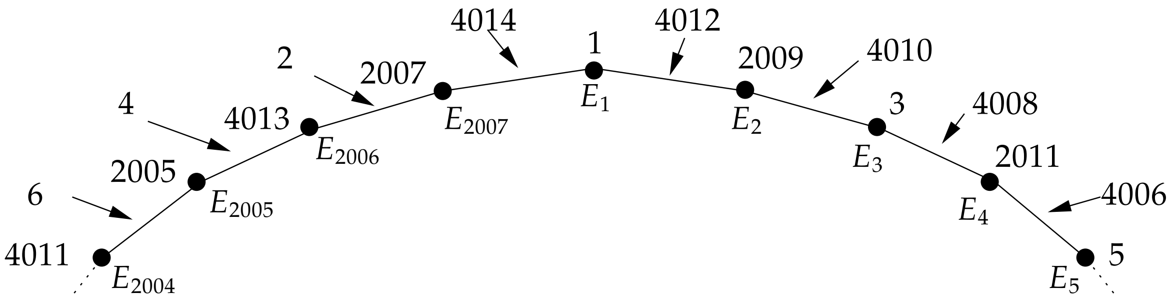
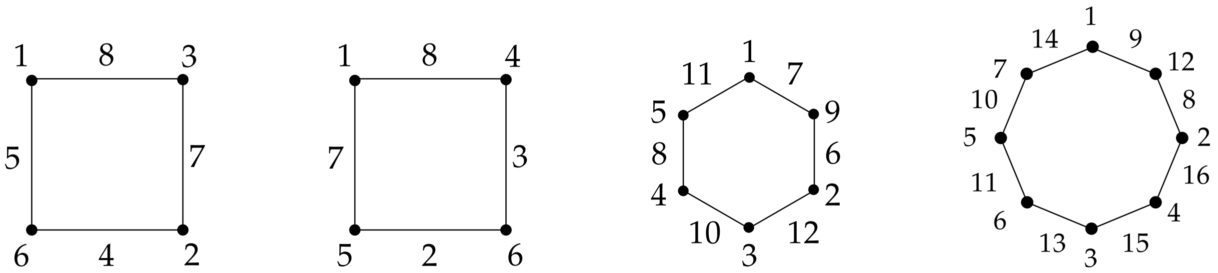


Abb. 3: Eine Verteilung für das 2007-Eck mit $S = 6022$

Für alle n-Ecke, bei denen n ungerade ist, werden wir später noch zwei weitere Verteilungen beschreiben, die den maximalen Summenwert $\frac{(7n+3)}{2}$ oder den Summenwert $3n+2$ annehmen.

Einige (wenige) Verteilungen für n-Ecke mit geradem n

Wir hatten oben schon gesehen, dass es auch für n-Ecke, bei denen n gerade ist, Verteilungen wie in der Aufgabenstellung gibt. Es gibt weitere Beispiele:



($n = 4$, $S = 12$) ($n = 4$, $S = 13$) ($n = 6$, $S = 17$) ($n = 8$, $S = 22$)

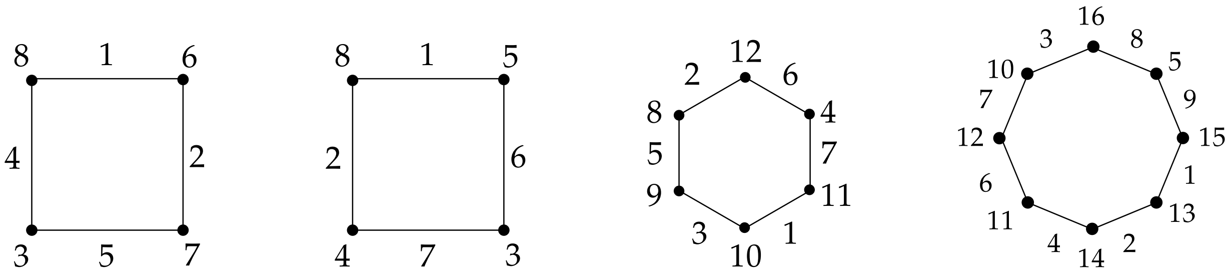
Abb. 4

Die einzigen Beispiele, die wir darüber hinaus in den Fällen $n \in \{4, 6, 8\}$ kennen, zeigen wir in Abb. 5. Das ist nicht viel! Insbesondere funktionieren alle Verteilungen nicht, die wir für n-Ecke, bei denen n ungerade ist, beschreiben können. Also, **weitere Forschungsfragen**:

- Wer findet für Vielecke mit gerader Eckenanzahl weitere Beispiele für Verteilungen, die nicht denen in den Abbildungen 4 und 5 entsprechen?
- Gibt es sogar Verteilungen, die sich allgemein für alle n-Ecke, bei denen n gerade ist, beschreiben lassen?

Wie man weitere Verteilungen finden kann

Wir erinnern uns an unsere anfänglichen Überlegungen. Für ein n-Eck gibt es, abhängig davon, ob n ungerade oder gerade ist, $n+1$ bzw. n theoretisch mögliche Summenwerte. Damit sind wir mit den bisher gefundenen Verteilungen noch weit davon entfernt, uns einen vollständigen Überblick über alle möglichen Verteilungen zu verschaffen. Die folgenden Überlegungen helfen uns, neue Verteilungen zu konstruieren, sobald wir eine Verteilung gefunden haben. Zu jeder Verteilung existiert eine weitere,„duale" Verteilung, in der jede Beschriftung z (Ecke oder Seitenmittelpunkt) durch $2n+1-z$ ersetzt wird. Damit erhält man wieder eine zulässige Verteilung! (Wieso?) Aus den schon beschriebenen Verteilungen für n-Ecke mit ungerader Eckenanzahl ergeben sich Verteilungen mit den Summenwerten $3 \cdot (2n+1) - \frac{(5n+3)}{2} = \frac{(7n+3)}{2}$ bzw. $3 \cdot (2n+1) - 3n - 1 = 3n + 2$. Für die oben angegebenen Verteilungen für Vier-, Sechs- und Achtecke ergibt sich auf diese Weise:



($n=4$, $S=15$) ($n=4$, $S=14$) ($n=6$, $S=22$) ($n=8$, $S=29$)

Abb. 5: Die dualen Verteilungen zu den Verteilungen aus Abb. 4

Im Dokument des Bundeswettbewerbs Mathematik*, das Aufgaben und Lösungen der ersten Runde des Bundeswettbewerbs 2007 enthält, wird noch eine weitere Methode beschrieben: Aus Verteilungen, in denen alle Zahlen an den Ecken ungerade und alle Zahlen an den Seitenmittelpunkten gerade sind (oder umgekehrt), lassen sich weitere Verteilungen ableiten, indem man jede Beschriftung z (Ecke oder Seitenmittelpunkt) durch $z+1$ ersetzt, falls z ungerade ist, und durch $z-1$ ersetzt, falls z gerade ist. Damit erhält man wieder eine zulässige Verteilung! (Wieso?) Der Summenwert der Verteilung, von der wir ausgehen, erhöht (oder vermindert) sich um 1. Diese Methode bringt uns aber im Moment nicht weiter, da wir damit nur Verteilungen erzeugen können, die wir schon kennen. Also **weitere Forschungsfragen**:

- Wie lassen sich weitere Verteilungen für das n-Eck „bauen", wenn wir Verteilungen für das n-Eck kennen?
- Kann aus einer Verteilung, die wir für ein n-Eck gefunden haben, eine Verteilung für ein n'-Eck, $n' > n$, konstruiert werden? Oder umgekehrt, eine Verteilung für ein n'-Eck mit $n' < n$?

Hinweis: Wer forscht mit? Bei Beispielen für Verteilungen sollte auch nachgewiesen werden, dass sie die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen. Eure Ergebnisse könnt Ihr bis zum 15. November 2007 an die Monoid-Redaktion einsenden; sie gehen auch mit in die Bewertung ein. In einem der nächsten Hefte werden wir die besten Forschungsantworten veröffentlichen.

* Siehe `http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de/aufgaben/aufgaben.htm`, dort Dokument „Lösungen 2007.1"

Bundeswettbewerb Mathematik 2007

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben 2, 3 und 4 der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 2
Jede positive ganze Zahl soll entweder rot oder grün so gefärbt werden, dass folgende Eigenschaften bestehen:
• Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener roter Zahlen ist eine rote Zahl.
• Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener grüner Zahlen ist eine grüne Zahl.
• Es gibt sowohl rote als auch grüne Zahlen.
Man finde alle derartigen Färbungen.

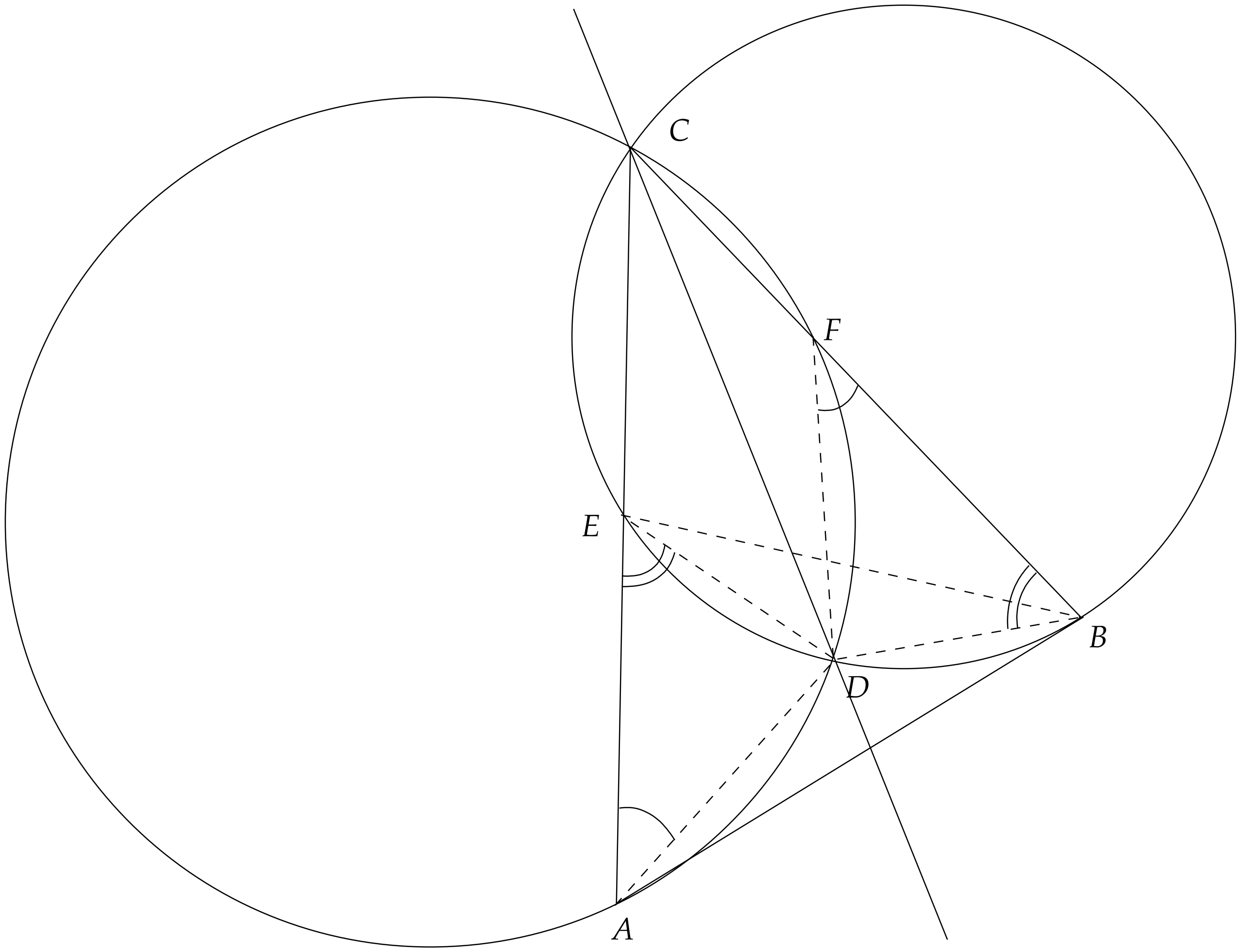
Lösung:
Es gibt genau zwei derartige Färbungen der positiven ganzen Zahlen, nämlich die beiden, in denen alle ungeraden Zahlen mit einer Farbe (entweder rot oder grün) und alle geraden Zahlen mit der anderen Farbe gefärbt sind.

Beweis: Die beiden angegebenen Färbungen haben die in der Aufgabenstellung genannten Eigenschaften, weil die Summe dreier ungerader Zahlen wieder ungerade und weil die Summe dreier gerader Zahlen wieder gerade ist. Außerdem existieren in beiden Färbungen sowohl rote als auch grüne Zahlen.
Wir zeigen umgekehrt, dass genau eine Färbung mit den in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften existiert, wenn wir die Farbe der Zahl 1 festgelegt haben. Ohne Einschränkung nehmen wir im Folgenden an, dass die Zahl 1 rot gefärbt ist. Wir beweisen die folgenden Teilschritte:

1. Alle ungeraden Zahlen $2k-1, k \geq 1$, sind rot gefärbt. Beweis durch vollständige Induktion: Die Induktionsverankerung ($k=1$) ist klar. Für den Induktionsschluss $k \to k+1$ sei schon bewiesen, dass die ungeraden Zahlen $1, 3, \dots, 2k-1$ rot gefärbt sind. Dann ist auch $2(k+1)-1 = 2k+1$ als Summe der drei roten Zahlen $2k-1, 1$ und 1 selbst rot gefärbt (Eigenschaft 1).
2. Haben die Zahlen 2 und 4 dieselbe Farbe, so sind alle geraden Zahlen mit dieser Farbe gefärbt. Beweis durch vollständige Induktion für die geraden Zahlen $4k-2$ bzw. $4k$, $k \geq 1$: Die Induktionsverankerung ($k=1$) ist klar. Für den Induktionsschluss $k \to k+1$ sei schon bewiesen, dass die geraden Zahlen $2, 4, 6, \dots, 4k-2, 4k$ dieselbe Farbe haben. Dann haben auch $4(k+1)-2 = (4k-2)+2+2$ und $4(k+1) = 4k+2+2$ als Summen von drei identisch gefärbten Zahlen dieselbe Farbe (Eigenschaften 1 oder 2).
3. Die Zahlen 1 und 2 haben eine unterschiedliche Farbe, das heißt, 2 ist grün gefärbt. Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass auch die Zahl 2 rot gefärbt ist. Dann ist auch $4 = 2+1+1$ rot gefärbt (Eigenschaft 1). Nach Teilschritt 2 sind damit alle geraden Zahlen rot gefärbt; zusammen mit Teilschritt 1 folgt, dass alle positiven ganzen Zahlen rot gefärbt sind. Dem widerspricht, dass sowohl rote als auch grüne Zahlen existieren (Eigenschaft 3).

4. Auch 4 ist grün gefärbt. Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass die Zahl 4 rot gefärbt ist. Dann ist auch $6 = 4 + 1 + 1$ als Summe dreier roter Zahlen rot gefärbt (Eigenschaft 1). Aus Teilschritt 3 und Eigenschaft 2 folgt jedoch, dass $6 = 2 + 2 + 2$ als Summe dreier grüner Zahlen grün gefärbt ist – ein Widerspruch.
5. Dass alle geraden Zahlen grün gefärbt sind, folgt nun direkt aus den Teilschritten 3, 4 und 2. □

Aufgabe 3
Im Inneren der Seiten AC und BC eines Dreiecks $\triangle ABC$ liegen die Punkte E und F so, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind und sich die Kreise durch A, C und F bzw. B, C und E außer in C in einem weiteren Punkt schneiden.
Man beweise, dass die Gerade (CD) den Winkel $\measuredangle ACB$ halbiert.



Lösung:
Der Beweis fußt auf der Beobachtung (die wir im nächsten Absatz beweisen), dass die Dreiecke $\triangle EAD$ und $\triangle BFD$ kongruent sind, wobei $ED = BD$. Damit lässt sich die Aufgabe schnell beweisen: Die Gerade durch C und D ist die Winkelhalbierende von $\measuredangle ACB$, wenn $\measuredangle ACD = \measuredangle DCB$. Diese Gleichung kann folgendermaßen bewiesen werden: Aus dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel folgen

$$\measuredangle DCB = \measuredangle DEB \tag{3.1}$$

und

$$\measuredangle ACD = \measuredangle ECD = \measuredangle EBD. \tag{3.2}$$

Das Dreieck $\triangle BED$ ist gleichschenklig, weil (auf Grund der oben erwähnten Kongruenz) die Schenkel ED und BD gleich lang sind. Damit stimmen auch die Basiswinkel $\measuredangle DEB$ und $\measuredangle EBD$ überein und somit, wegen (3.1) und (3.2), auch $\measuredangle DCB = \measuredangle ACD$.

Da laut Aufgabenstellung die Strecken AE und BF gleich lang sind, folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle EAD$ und $\triangle BFD$ aus dem Kongruenzsatz WSW, wenn wir sowohl

$$\measuredangle DAE = \measuredangle DFB \tag{3.3}$$

als auch

$$\measuredangle FBD = \measuredangle AED \tag{3.4}$$

zeigen. Aus der so nachgewiesenen Kongruenz folgt insbesondere auch $ED = BD$. Wir betrachten zum Beweis der Winkelbeziehungen zum einen das Sehnenviereck $\square CADF$ (das nicht überschlagen ist, dazu in den nächsten Absätzen mehr): Dort sind $\measuredangle DAC = \measuredangle DAE$ und $\measuredangle CFD$ gegenüberliegende Winkel, sie ergänzen sich also zu $180°$ (Eigenschaft des Sehnenvierecks). Demnach gilt $\measuredangle DAC = 180° - \measuredangle CFD = \measuredangle DFB$ (Nebenwinkel); das beweist (3.3). Zum Anderen betrachten wir das (ebenfalls nicht überschlagene) Sehnenviereck $\square BCED$, in dem $\measuredangle CBD = \measuredangle FBD$ und $\measuredangle DEC$ gegenüberliegende Winkel sind. Also $\measuredangle CBD = 180° - \measuredangle DEC = \measuredangle AED$; das beweist (3.4).

Damit ist der Beweis der Aufgabe noch nicht abgeschlossen! Es ist nämlich noch zu diskutieren, ob die Punkte auch im Allgemeinen wie in der Skizze liegen: Ist stets gewährleistet, dass der Punkt D mit keinem der anderen Punkte zusammenfällt? Ist überhaupt stets gewährleistet, dass D im Inneren des Winkelfeldes $\measuredangle ACB$ liegt, das heißt, dass die Punkte A und B auf unterschiedlichen Seiten der durch die Punkte C und D bestimmten Geraden (CD) liegen? Und ist stets gewährleistet, dass die oben angesprochenen Sehnenvierecke $\square CADF$ bzw. $\square BCED$ nicht überschlagen sind, das heißt, dass auf dem Kreis K_{AFC} durch A, F und C der Punkt D zwischen A und F liegt bzw. dass auf dem Kreis K_{BEC} durch B,E und C der Punkt D zwischen B und E liegt?

Nach Aufgabenstellung schneiden sich die Kreise K_{AFC} und K_{BEC} in den beiden verschiedenen Punkten C und D. Die Kreise sind also weder identisch noch berühren sie sich ausschließlich in einem Punkt. Fiele der Punkt D mit A bzw. E zusammen, so lägen die drei nach Aufgabenstellung verschiedenen Punkte A, E und C alle sowohl auf der Geraden durch A und C als auch, falls $D = A$, auf dem Kreis K_{BEC} bzw., falls $D = E$, auf dem Kreis K_{AFC} – beides ein Widerspruch, da Gerade und Kreis höchstens zwei Punkte gemeinsam haben. Analog ist der Punkt D auch von B bzw. F verschieden. Die Strecke AC ist Sehne in K_{AFC}, liegt also, bis auf die Endpunkte, vollständig innerhalb dieses Kreises; insbesondere liegt auch der Punkt E im Inneren von K_{AFC}. Der Punkt A liegt außerhalb von K_{BEC}, da er nach Konstruktion auf der Geraden durch C und E, nicht aber zwischen diesen beiden Punkten liegt. Analog liegt der Punkt F im Inneren von K_{BEC}, und der Punkt B liegt außerhalb von K_{AFC}.

Weil sich die Kreise K_{AFC} und K_{BEC} in zwei verschiedenen Punkten schneiden, gilt für einen Punkt P, der sich, beginnend in C, auf K_{AFC} so bewegt, dass P zunächst das Äußere von K_{BEC} durchläuft: Genau dann, wenn P den Punkt D passiert, wechselt er vom Äußeren des Kreises K_{BEC} in dessen Inneres bzw. von der einen Halbebene, die durch die Gerade (CD) bestimmt wird, in die andere. Also passiert P bei diesem Durchlauf die Punkte C, A, D und F in dieser Reihenfolge. Das Sehnenviereck $\square CADF$ ist also nicht überschlagen; außerdem liegen A und F in unterschiedlichen Halbebenen bezüglich (CD). Analog weist man nach, dass auch das Sehnenviereck $\square BCED$ nicht überschlagen ist und dass B und E in unterschiedlichen Halbebenen bezüglich (CD) liegen. Weil der Punkt C auf der Geraden (CD) liegt, verläuft die Strecke AC mit Ausnahme von C vollständig in einer der beiden Halbebenen bezüglich (CD). Insbesondere liegen die Punkte A und E in einer, die Punkte B und F in der anderen durch (CD) bestimmten Halbebene. □

Aufgabe 4
Es sei a eine positive ganze Zahl.
Wie viele nicht-negative ganzzahlige Lösungen x hat die Gleichung $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right]$?
Erläuterung: Für jede reelle Zahl z wird mit $[z]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als z ist.

Lösung:
Die Gleichung in der Aufgabenstellung hat $a(a+1)/2$ nicht-negative ganzzahlige Lösungen.

Beweis: Es sei wie in der Aufgabenstellung eine positive ganze Zahl a beliebig, im Folgenden aber fest, gewählt. Jede nicht-negative ganze Zahl x lässt sich für dieses vorgegebene a eindeutig als $x = k_0 \cdot a + r_0$ mit $k_0 \geq 0$ und $0 \leq r_0 \leq a - 1$ bzw. als $x = k_1 \cdot (a+1) + r_1$ mit $k_1 \geq 0$ und $0 \leq r_1 \leq a$ schreiben.

Es ist in diesen Schreibweisen $[x/a] = k_0$ bzw. $[x/(a+1)] = k_1$. Die Zahl x ist also genau dann Lösung der Gleichung $[x/a] = [x/(a+1)]$, wenn $k_0 = k_1 = k$. Wegen $x = k \cdot (a+1) + r_1 = k \cdot a + k + r_1$ können Lösungen nur für solche k existieren, für die $0 \leq r_0 = k + r_1 \leq a - 1$ gilt. Dies ist wegen $k, r_1 \geq 0$ äquivalent dazu, dass gleichzeitig $0 \leq k \leq a - 1$ und $0 \leq r_1 \leq a - 1 - k$ gelten, das sind für ein k im zulässigen Intervall $a - k$ verschiedene Werte von r_1. Wegen

$$\sum_{k=0}^{a-1} a - k = a + (a-1) + \cdots + 1 = a(a+1)/2$$

existieren also $a(a+1)/2$ verschiedene Tupel (k, r_1) und damit verschiedene Lösungen x der Aufgabenstellung. □

* * * * *

„Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist, exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.“

Lazare Nicolas Marguerite Carnot
*13.05.1753 in Nolay (Frankreich), †2. August 1823 in Magdeburg
französischer Politiker, Wissenschaftler und Leutnant

„Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher.“

Albert Einstein
*14.03.1879 in Ulm, †18. April 1955 in Princeton, USA;
deutscher Physiker, 1921 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet

Rubrik der Löser und Löserinnen
(Stand: einschließlich Heft 88)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Laura Tabea Galkowski 10, Anne Hofmacher 2, Philipp Langer 9, Julia Scherner 7, Jakob Waldmann 6;
Kl. 6: Lara Bergjohann 13, Maximilian Haist 11, Andreas Pitsch 12, Freya Roth 8, Benedikt Schneider 5;
Kl. 7: Elisabeth Kopf 10, Kevin Schmitt 16, Anne Vorherr 8;
Kl. 8: Alexander Gerharz 10, Philipp Mayer 18, Sybille Mayer 13;
Kl. 10: Janina Braun 8, David Spies 20;
Kl. 11: Patricia Kastner 12.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 5: Sina Tischbierek 1;
Kl. 9: Lena Baum 18, Désirée Schalk 12;
Kl. 10: Felix Liebrich 29, Martin Reinhardt 48.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Samia Mohamed 3; **Kl. 8:** Ossama Basent 22.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 14;
Kl. 10: Lennart Adam 48, Julia Müller 34;
Kl. 11: Christian Behrens 45, Martin Alexander Lange 30.

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum:
Kl. 7: Katharina Albert 15, Max Broda 13, Kevin Kübel 3, David Wander 18;
Kl. 10: Anselm Schäfer 8.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 12: Laura Biroth 48.

Bad Homburg, Kaiserin-Friedrich-Gymnasium: Kl. 8: Gregor Angeloni 8.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium: Kl. 6: Frank Schindler 49.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium: Kl. 8: Maximilian Stocker 4.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 5: Paula Heimroth 8; **Kl. 6:** Katharina Bröhm 6;
Kl. 7: Katharina Busold 5, Paulina Hauser 24, Antonia Kalb 5, Nina Münkel 13, Lena Vogel 24, Lukas Vogel 10.

Erlangen, Freie Waldorfschule Erlangen: Kl. 9: Malte Meyn 53.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Mustafa Albay 3, Maurice Paul Arbelt 19, Marc Dinges 13, Benedikt Franz 17, Isabell Hölzer 3, Elena Müller 12, Felix Rohde 3, Thorsten Roth 28, Aylin Yildiz 3;
Kl. 6: Tristan Hof 5, Dominik Jung 13;
Kl. 7: Marius Burkardt 29, Rolf Niedenthal 9, Florian Orschel 28, Julian Roth 7, Monja Schütz 8, Philipp Wenzel 25;
Kl. 8: Lara Czarnetzki 10, Kai Roth 29.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 8: Connor Röhricht 34.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuender Lehrer: Christoph Straub):
Kl. 6: Sheima’a Ahmed Doma 27, Nada Zaghloul 12;

Kl. 9: Alia'a Ahmed Doma 52, Karen Emil 21, Heba Mamdouh 6, Marina Morad 30;
Kl. 10: Ghada Hesham 7, Hayat Selim 17, Noha Wahab 7;
Kl. 11: Alia'a el Bolock 29, Mariam und Selma el Sayyad/Ismail 29, Mariam Emad 16.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 9: Freya Leuwer 5, Francesco Monteleone 2.

Lahnstein, Johannes-Gymnasium: Kl. 9: Kathrin Stark 41.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 11: Katharina Kober 36.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 5: Niklas Braun 13, Julia Braunschädel 7, Melina Cappel 11, Nihal Eken 10, Lucas Hippchen 9, Hanin Mohammed 5, Inga Stablo 8, Theodora Tsoutsouli 13, Sara Widmer 9;
Kl. 7: Ann-Kathrin Hientzsch 40;
Kl. 8: Felix Steins 17, Ersan Tokcan 5, Malik Wagner 8, Thimo-Simon Wieber 10;
Kl. 10: Anna Becken 14, Meike Hickmann 20;
Kl. 12: Cornelie Koop 19.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 11: Alexey Tyukin 39.

Mainz, Maria-Ward-Schule: Kl. 12: Patricia Uthmann 9.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 4: Magdalena Winkelvoß 11.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 7: Kristin Beez 1, Michelle Hangel 3, Simon Heinzmann 36, Steffen heller 3, Tim Lutz 43, Natalie Müller 3, CHristian Sagara 3, Sascha Scheu 10, Marcel Schulz 6, Tobias Soldan 32, Carmen Tomczak 2.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 9: Florian Schweiger 63.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 8: Vivien Kohlhaas 33; **Kl. 9:** Madeline Kohlhaas 40;
Kl. 11: Miriam Menzel 4; **Kl. 12:** Annika Kohlhaas 32.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium: Kl. 8: Bettina Wiebe 20.

Ober-Ramstadt, Georg Christoph Lichtenberg-Schule:
Kl. 6: Janina Freitag 9, Marielle Fröhlich 16, Aylin Ilhan 5, Mero Kaya 14, Catharina Oeber 7, Maura Preiß 3, Kim Schneider 18, Tobias Thomas 19, Justine Wirth 4, Eva Zöllner 7;
Kl. 8: Kay Ackermann 24, Rica Altrock 8, Sandra Burkhardt 6, Sebastian Hiller 7, Julian Hottes 11, Jana Lauth 11, Sarah Merz 3, Jannik Metzler 5, Manja Mörl-Kreitschmann 12, Patrick Plößer 13, Amber Pra 8, Mareike Silbereis 6, Carlo Trockel 11, Jennifer Wagner 5, Melanie Wagner 14.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Benjamin Gockeln 14, Yuecan Li 19, Vivien Lorey 4;
Kl. 6: Lorlana Altvater 12, Laura Barowski 7, Tobias Braun 26, Niklas Haupt 9, Jannis Heil 10, Elisabeth Koch 11, Janina Köhler 10, Katharina Kuhlmann 12, Valentin Kuhn 23, Lara Lechner 6, Miriam Lindert 8, Anna-Katharina Löw 8, Franziska Matern 5, Camilla Metz 8, Merlin Oster 3, Nils Rehm 8, Mai-Britt Rosengarten 7, Jemina Schwab 3, Daniel Worring Pozo 7, Julia Yeo-Peters 2, Lukas Zajonz 10;
Kl. 7: Aline Endreß 29, Christina Stein 8, Nathan Valenti 18.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 7: Simone Marquard 14; **Kl. 10:** Thomas Geiß 42.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: Caroline Alfter 6, Eric Amann 3, Ulf Floßdorf 5, Alina Gillrath 9, Jana Gillrath 9, Simon Löhr 3, Felix Perschen 6, Jonathan Rochert 9, Simon Wegmann 3;
Kl. 7: David Feiler 40.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 8: Alexander Rettkowski 30.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 6: Dorothea Winkelvoß 23.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 5: Sabrina Hartmann 20, Noah Klein 5, Jonatham Kreilaus 7, Julian Merkel 5, Lorea Ritzmann 22, Paul Schädrich 26, Laura Stilgenbauer 6, Julia Sundheimer 15;
Kl. 7: Joel Jung 12.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (betreuende Lehrerin Frau Elisabeth Maringer):
Kl. 7: Anna Arendt 45, Jennifer Peifer-Weiß 17; **Kl. 11:** Charlotte Capitain 39.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

• Die Kettenbruchentwicklung der **Euler-Zahl**

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696 76...$$

auf der Titelseite erinnert an das Euler-Jahr 2007 und ist ein Vorgriff auf einen Artikel im nächsten Heft. Im vorliegenden Heft gibt es noch mehr Bezüge zu Leonhard Euler (15.04.1707–18.09.1783).

• Die Redaktion gratuliert ganz herzlich Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. **Günter Pickert**, einem langjährigen Freund und Förderer von MONOID, zur Vollendung des 90. Lebensjahres am 23. Juni 2007 und wünscht ihm Gesundheit und Kraft zu weiterem mathematischen Wirken.

• Neuerscheinung: „***FüMO - Das Buch***. *Aufgaben und Lösungen aus 14 Jahren Fürther Mathematik-Olympiade*“ (ISBN: 978-3-86504-187-6; Preis: 14,80 €) enthält alle Aufgaben und Lösungen aus 14 Wettbewerbsjahren für die Klassenstufen 5 bis 8. Kostproben im nächsten Monoid-Heft!

• „**Brücken verbinden 2007**“ ist der Titel des Südwest-Kreativ-Schülerwettbewerbs der Ingenieurkammer Baden-Württemberg in Kooperation mit Hessen, Rheinland-Pfalz und Saarland. (Näheres unter `www.ingkbw.de`)

• Die **MONOID-Feier 2007** findet am 24. November in Mainz statt (allgemeine Einladung mit weiteren Informationen im nächsten Heft).

• ...und nun **schöne Sommerferien**! Damit es nicht eventuell zu langweilig wird, findet Ihr in diesem Heft genügend Anregungen; darum: viel Spaß mit Mathematik!

Ekkehard Kroll

MONOID Jahrgang 27 Heft 90 Juni 2007

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung, Satz, Korrektur der eingesandten Lösungen und Internet: Marcel Gruner, Juliane Gutjahr
Monoidaner: Alexander Gerharz, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Philipp Mayer

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; **Adresse nicht vergessen** (oder Bestellung über Internet).
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift:	Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, D-55099 Mainz
Telefon:	06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
e-Mail:	`monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage:	`http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`