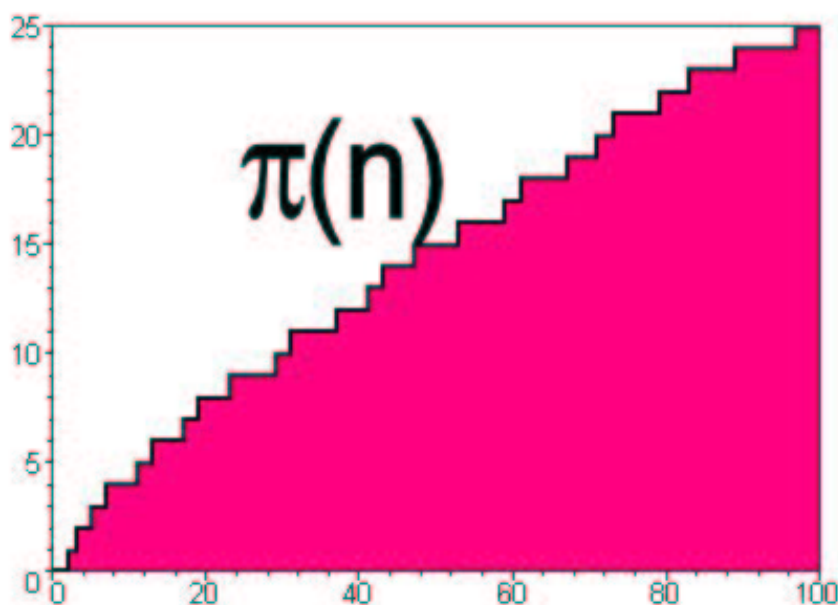


MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz



Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!



Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben! **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (**mit Lösungsweg!**) zu den „Neuen Aufgaben“ und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.11.2007.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107

Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

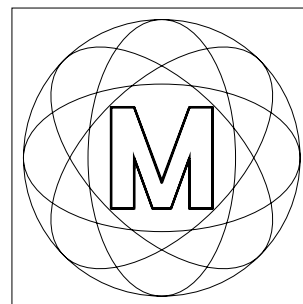
Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden **rund 50 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: **das Goldene M**.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.



Und nun wünschen wir euch viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Über die Verteilung der Primzahlen

von Heike Winkelvoß

Als *Primzahl* bezeichnet man eine natürliche Zahl größer als 1, die genau zwei Teiler hat, nämlich 1 und die Zahl selbst. Dies habt Ihr im Schulunterricht bereits gelernt. Alle anderen Zahlen heißen *zusammengesetzte Zahlen*, weil man sie (sogar eindeutig!) als Produkt von Primzahlen darstellen kann. In diesem Sinne sind Primzahlen also etwas ganz Besonderes: Sie sind die Bausteine für alle natürlichen Zahlen. Der griechische Mathematiker Euklid (um 300 v. Chr.) hat bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aber wie ist die Folge der Primzahlen verteilt? Wie häufig trifft man Primzahlen in der Folge der natürlichen Zahlen? Wie groß ist die Anzahl der Primzahlen, die nicht größer sind als eine (beliebig gewählte) feste Zahl n ?

Damit wollen wir uns im Folgenden beschäftigen. Du findest hin und wieder Fragen in den Text eingestreut. Versuche, sie zu beantworten, während du liest. Die Lösungen stehen auf Seite 9.

Wie groß kann der Abstand zwischen zwei benachbarten Primzahlen sein?

Zunächst betrachten wir alle Primzahlen, die nicht größer sind als 100. Am Anfang dieser Folge stehen die direkt benachbarten Zahlen 2 und 3. Es gibt keine weiteren aufeinanderfolgenden Zahlen, die beide Primzahlen sind!

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,
19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59,
61, 67, 71, 73, 79,
83, 89, 97

Frage 1: Kannst Du das begründen?

Alle Primzahlen mit Ausnahme der 2 sind ungerade. Schauen wir weiter! Es folgen die Primzahlen 3 und 5 mit dem Abstand 2. Primzahlpaare mit Abstand 2 nennt man *Primzahlzwillinge*. Den gleichen Abstand haben die 5 und die 7. Aber schon zwischen 7 und 11 gibt es drei zusammengesetzte Zahlen.

Doch bevor wir zu schnell weiterschauen, bleiben wir doch kurz bei den drei Primzahlen 3, 5, 7. Analog zu den Primzahlzwillingen nennt man sie einen *Primzahltrilling*, denn der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen beträgt ebenfalls jeweils 2.

Frage 2: Kannst Du beweisen, dass es außer 3, 5 und 7 keine weiteren drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen gibt, die Primzahlen sind?

Außer den recht häufig vorkommenden Primzahlzwillingen und dem einzigen Primzahltrilling 3, 5, 7 gibt es keine weiteren Primzahlmehrlinge.

Nach 7 und 11 folgt wieder ein Primzahlzwillingpaar, dann ein Paar mit Abstand 4 und so geht es ohne erkennbare Regel weiter.

Die am weitesten voneinander entfernten Primzahlen in unserer Liste sind 89 und 97. Zwischen ihnen gibt es sieben zusammengesetzte Zahlen. Sie haben also den Abstand 8. Wenn wir die Primzahlfolge über die 100 hinaus fortsetzen, finden wir Primzahlpaare, zwischen denen es mehr als 7 aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen gibt, zum Beispiel die 113 und die 127 mit dem Abstand 14 oder die 139 und die 149 mit dem Abstand 10.

Da drängt sich doch die Frage auf: Wie groß kann der Abstand zwischen zwei benachbarten Primzahlen eigentlich werden?

Wir nehmen zum Beispiel die Zahl 100 und werden zeigen, dass es 100 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, unter denen keine einzige Primzahl zu finden ist. Hierzu multiplizieren wir alle aufeinanderfolgenden Zahlen von 2 bis 101 einschließlich und bezeichnen dieses Produkt mit P :

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 101$$

Diese Zahl P ist durch alle Zahlen von 2 bis 101 teilbar. Nun betrachten wir die folgenden 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen:

$$P + 2, P + 3, P + 4, P + 5, \dots, P + 100, P + 101$$

Unter diesen gibt es *keine* Primzahl! Tatsächlich: Die erste Zahl ist durch 2 teilbar (warum?), die zweite durch 3, die dritte durch 4 usw. Auf diese Weise haben wir also 100 aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen gefunden, wobei wir diese Zahlen nicht wirklich ausgerechnet haben. Entscheidend ist dies: Wir haben die Zahl 100 ganz willkürlich gewählt. Genauso hätten wir auch beweisen können, dass es 10 000 oder 100 000 000 000 aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen gibt. Daher gilt:

Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen kann beliebig groß werden.

Frage 3: Kannst Du acht aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen berechnen, indem Du das eben beschriebene Verfahren anwendest?

Wie dicht liegen die Primzahlen?



Wir wollen auf dem Zahlenstrahl eine beliebige Zahl einzeichnen, zum Beispiel 10, und alle Primzahlen mit Punkten markieren, die kleiner oder gleich dieser Zahl, also kleiner oder gleich 10, sind. In unserem Beispiel müssen wir also die Zahlen 2, 3, 5 und 7 markieren.

Nun zählen wir, wieviele Primzahlen wir markiert haben. Im Fall von $n = 10$ sind das vier Stück. Hätten wir $n = 20$ gewählt, dann hätten wir acht Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19) markiert.

Wenn wir genügend Zeit hätten, könnten wir jeder Zahl n eine solche Anzahl zuordnen. Da diese Anzahl immer von der gewählten Zahl n abhängt, schreibt man als Bezeichnung $\pi(n)$ (gesprochen „pi von n“).^{*} $\pi(n)$ ist also die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich n sind. Für kleinere n ist $\pi(n)$ klein, für große n groß.

Frage 4: Kannst du für die Zahlen $n = 1, 2, \dots, 10$ die Anzahlen $\pi(n)$, also $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(10)$ bestimmen?

Falls Du die Frage 4 noch nicht selbst beantwortet hast, schau Dir jetzt einmal die Antwort zu dieser Frage an. Auf dem Titelbild siehst Du einen Graphen der Verteilung für den Bereich der natürlichen Zahlen bis 100. Du stellst vielleicht fest, dass die Folge $\pi(n)$ keiner Regel zu genügen scheint. Das ist nicht erstaunlich, weil ja die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen auch keiner Regel genügen. Tatsächlich gibt es keine Formel, aus der man für jede Zahl n , z.B. $n = 6239$, den Wert $\pi(n)$ berechnen könnte. Trotzdem kann man eine interessante Entdeckung machen:

Wir berechnen für verschiedene Werte von n die Quotienten $\pi(n) : n$ und schreiben dies als Tabelle auf. Dabei lassen wir n sehr schnell anwachsen, wählen also zuerst kleine und dann sehr große Werte für n . In der linken Spalte stehen die Werte n , in der Mitte die zugehörigen Anzahlen $\pi(n)$ und ganz rechts die „Dichte“ der Primzahlen, also der Quotient $\frac{\pi(n)}{n}$ (etwas gerundet).

n	$\pi(n)$	$\frac{\pi(n)}{n}$
10	4	0,4
1000	168	0,17
1000000	78498	0,078
1000000000	50847534	0,051

Leonard Euler (1707–1783) hat als Erster bewiesen, dass die Quotienten (also die Zahlen in der rechten Spalte) mit wachsendem n immer kleiner werden. Sie werden also beliebig klein. Man sagt auch, sie gehen gegen 0.

Das bedeutet nichts Anderes, als dass die Folge $\pi(n)$ langsamer wächst als die Folge der natürlichen Zahlen. Wandert man den Zahlenstrahl von 1 beginnend bis Unendlich, dann trifft man anfangs noch sehr häufig auf Primzahlen, je weiter man wandert aber immer seltener.

^{*} π ist der griechische Buchstabe für p und soll an das Wort Primzahl erinnern.

Die Primzahlenvermutung von Gauß und einige Vor- und Nachspiele dazu

von Hartwig Fuchs

Carl Friedrich Gauß (1777–1855), der unbestritten zu den größten Mathematikern zählt, war fasziniert von den einfachsten Bausteinen der Mathematik, den natürlichen Zahlen und ganz besonders von ihren (multiplikativen) „Atomen“ – den *Primzahlen*.

Sein Leben lang beschäftigte er sich gerade mit den Letzteren. So versuchte er etwa, ein uraltes Primzahlen-Problem endlich zu lösen, nämlich eine *Formel* zu finden, mit der man auf rechnerischem Weg alle Primzahlen und nur diese aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ herausfiltern kann. Es glückte ihm nicht!

Das Problem ist so komplex, dass es erst 1977 nach über 150 Jahren zahlentheoretischer Vorarbeiten einer Gruppe von Mathematikern* gelang, eine Formel zu konstruieren – ein Polynom vom Grad 25 mit 26 Variablen, dessen positiven Werte genau alle Primzahlen sind, wenn seine 26 Variablen die ganzen Zahlen durchlaufen.

Aber mit seinem etwas weniger anspruchsvollen Versuch scheiterte Gauß ebenfalls: Eine Formel zu entdecken, die – wenn schon nicht alle – so doch wenigstens ausschließlich nur Primzahlen liefern sollte. Auch dieses Problem ist so dornig, dass man sehr lange keine Lösung dafür angeben konnte.

Pierre de Fermat (1601–1665) zum Beispiel glaubte, mit $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, eine nur Primzahlen F_n erzeugende Formel gefunden zu haben. Er irrte sich, wie bereits $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ zeigt!

Erst vor wenigen Jahren konnte H. W. Mills eine solche Formel angeben. Er zeigte, dass es eine reelle Zahl $r > 0$ gibt, so dass die Werte der Formel $p_n = \left[r^{n^3} \right]**$ für $n \in \mathbb{N}$ Primzahlen p_n sind. Leider kennt man diese Zahl r nicht – man weiß nur: Es gibt sie!

Es hat natürlich einen guten Grund, weshalb es so schwierig ist, Primzahlen in das Korsett einer Formel zu zwängen: Sie sind Gesellen, die ganz und gar „chaotisch“ in der Menge $\mathbb{N}$ verteilt sind.

So wird man z. B. erwarten: Wenn man in immer höhere Bereiche von $\mathbb{N}$ vordringt, trifft man dort immer seltener auf Primzahlen. Tatsächlich gilt ja auch:

* James P. Jones, Daihachiro Sato, Hideo Wada und Douglas Wiens

** $\left[r^{n^3} \right]$ ist die größt ganze Zahl $\leq r^{n^3}$ (Gauß-Klammer)

Es gibt in $\mathbb{N}$ beliebig große von Primzahlen freie Intervalle.

Sei nämlich m eine beliebig große Zahl, z. B. $m = 10^{10000}$ und sei n das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m$. Dann ist 2 ein Teiler von $n + 2$, 3 ein Teiler von $n + 3, \dots$ und m ein Teiler von $n + m$. Mithin ist das Intervall $[n + 2, n + 3, \dots, n + 10^{10000}]$ der Länge $10^{10000} - 1$ frei von Primzahlen.

Aber es kann auch – möglicherweise unendlich oft – vorkommen, dass zwei sehr große Primzahlen nur den Abstand 2 haben.

Obgleich also Primzahlen in ganz unvorhersehbarer Weise in $\mathbb{N}$ auftreten, konnte Gauß doch eine qualitative Gesetzmäßigkeit ihrer Verteilung in $\mathbb{N}$ angeben – seinen berühmten *Integrallogarithmus* $Li(n)$.

Die Vermutung von Gauß über die näherungsweise Primzahlen-Verteilung

Es sei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen im Intervall $[2, 3, 4, \dots, n]$.

Dann gibt die Funktion

$$Li(n) := \int_2^n \frac{dt}{\ln t}$$

mit dem natürlichen Logarithmus $\ln^{***}$ näherungsweise die Werte von $\pi(n)$, $n \geq 2$, an.

Die gute Übereinstimmung von $Li(n)$ und $\pi(n)$ für kleine n ist bemerkenswert – wie in der Tabelle die (absoluten) Abweichungen $[Li(n)] - \pi(n)$ der geschätzten Werte $[Li(n)]$ von den wahren Werten $\pi(n)$ zeigen.

n	$\pi(n)$	$[Li(n)]$	$[Li(n)] - \pi(n)$	Abweichung
1000	168	178	10	5,952
10000	1229	1246	17	1,383
100000	9592	9630	38	0,396
1000000	78498	78628	130	0,166
10000000	664579	664918	339	0,051
1000000000	50847534	50849235	1701	0,003

Gauß selbst war allerdings davon überzeugt, dass $Li(n)$ keine uneingeschränkt verwendbare Näherung von $\pi(n)$ darstellt.

Die Vermutung der überschätzten Primzahlen-Verteilung

Gauß besaß wahrscheinlich eine Liste aller Primzahlen unter 3000000. Mit ihr konnte er die Güte seiner Näherungsfunktion $Li(n)$ testen, indem er für sehr viele $n < 3000000$ die Differenz $Li(n) - \pi(n)$ berechnete. Dabei stellte er fest – vergleiche die vierte Spalte der Tabelle –, dass $Li(n)$ die wahre Verteilung der Primzahlen stets überschätzte. Er vermutete daher:

*** Der natürliche Logarithmus ist der zur Basis e , wobei e die Eulersche Zahl ist. Vergleiche den Artikel auf Seite 31.

(1) Die Differenz $\text{Li}(n) - \pi(n)$ ist positiv für jedes $n > 1$.

Seine Berechnung von $\text{Li}(n) - \pi(n)$ brachten ihn aber auch zu der Überzeugung:

(2) $\text{Li}(n)$ und $\pi(n)$ driften mit wachsendem n in einem Maße auseinander, dass schließlich $\text{Li}(n)$ untauglich wird zur Abschätzung von $\pi(n)$.

Weil Gauß die Beweise für seine Vermutungen schuldig blieb, wurden sie in dem folgenden Jahrhundert zu einer Herausforderung für viele der besten Mathematiker. Auch sie blieben jedoch zunächst erfolglos.

Erst 1896 gelang es den beiden Mathematikern Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) sowie Charles de la Vallée Poussin (1866–1962) – und zwar unabhängig voneinander – der Durchbruch.

Sie konnten zeigen, dass die Gaußsche Näherung mit $\text{Li}(n)$ zutrifft. Ihr Ergebnis, das man heute den *Primzahlsatz* nennt, besagt nämlich, dass $\text{Li}(n)$ und $\pi(n)$ „asymptotisch gleich“ sind.

Was das Letzte bedeutet, wollen wir an der fünften Spalte der Tabelle veranschaulichen. Dort ist jeweils angegeben, um wieviel Prozent $p(n)$ der Näherungswert $\text{Li}(n)$ vom wahren Wert $\pi(n)$ abweicht.

Aus dem Primzahlsatz folgt nun, dass gilt: Wenn n immer größer wird, geht die prozentuale Abweichung $p(n)$ gegen 0.

Mit dem Primzahlsatz ist daher die Befürchtung (2) von Gauß ausgeräumt.

Offen bleibt nur noch der Status der Vermutung (1) der überschätzten Primzahlen-Verteilung. Zwar stützte jedes von Hunderttausenden von durchgerechneten Beispielen die Annahme (1), doch 1914 trat eine ziemlich überraschende Wendung in dieser Sache ein, als John Edensor Littlewood (1885–1977) die Gauß-Vermutung widerlegte und darüberhinaus sogar bewies:

Die Differenz $\text{Li}(n) - \pi(n)$ ist in unendlichem Wechsel positiv, negativ, positiv, usw.

Natürlich wollten die Mathematiker nun wissen, für welche Zahlen n wohl erstmals $\text{Li}(n) - \pi(n) < 0$ ist. Ein erstes Ergebnis: Stanley Skewes (1899–1988) bewies 1933, dass der erste Vorzeichenwechsel von $\text{Li}(n) - \pi(n)$ für ein $n < S$ mit $S = 10^{10^{10^{34}}}$ stattfindet. Die gigantische Größe von S liegt jenseits dessen, was wir uns vorstellen können – man braucht ja S nur mit der geschätzten Anzahl 10^{87} aller Partikel in unserem Universum zu vergleichen.

Das Resultat von Skewes wurde inzwischen mindestens zweimal verbessert.

R. S. Lehmann hat 1966 die Schranke, unterhalb derer der erste Vorzeichenwechsel von $\text{Li}(n) - \pi(n)$ erfolgt, auf die schon recht „kleine“ Zahl $S' = 1,65 \cdot 10^{1165}$ heruntergedrückt.

Und aus der kuriosen Aussage von te Riehe aus dem Jahre 1986 – dass es nämlich zwischen $6,62 \cdot 10^{370}$ und $6,69 \cdot 10^{370}$ mindestens 10^{180} aufeinanderfolgende Zahlen n mit $\text{Li}(n) - \pi(n) < 0$ gibt – wissen wir:

$\text{Li}(n) - \pi(n) < 0$ erstmals für ein $n < S''$ mit $S'' \leq 6,69 \cdot 10^{370} - 10^{180}$.

Es steht aber damit immer noch die Frage im Raum: Für welche Zahl n findet denn nun tatsächlich der erste Vorzeichenwechsel von $\text{Li}(n) - \pi(n)$ statt?

Antworten auf die Fragen zum Artikel „Über die Verteilung der Primzahlen“ von Seite 3

Antwort 1: Von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer eine gerade. Alle geraden Zahlen größer 2 sind also zusammengesetzt (haben außer sich selbst und 1 noch den Faktor 2).

Antwort 2: Wir nehmen drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Dann gibt es für die kleinste dieser Zahlen genau drei Möglichkeiten: Entweder sie ist durch 3 teilbar oder sie lässt bei Division durch 3 den Rest 1 oder sie lässt bei Division durch 3 den Rest 2.

Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall ist die mittlere Zahl durch 3 teilbar, im dritten Fall die größte.

Antwort 3: $P = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 = 362880$. Die gesuchten Zahlen sind 362882, 362883, 362884, 362885, 362886, 362887, 362888, 362889.

Antwort 4: $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 3$, $\pi(7) = 4$, $\pi(8) = 4$, $\pi(9) = 4$, $\pi(10) = 4$.

Wer war's? von Hartwig Fuchs

Alexander der Große hätte es sich gewiss nicht träumen lassen: Dass er den Anstoß gegeben hatte zu einer Entwicklung, die viele Jahrhunderte später der hochbegabten jungen Frau eine glänzende mathematische Karriere ermöglichte, durch die sie sich den Ruf der besten Mathematikerin der griechischen und der römischen Epoche erwarb. Ihre herausragende wissenschaftliche Position brachte ihr gesellschaftliche und politische Anerkennung, die aber – zusammen mit ihren auf Plato gründenden philosophischen Ansichten – von gewissen Leuten als Vorwand benutzt wurde, um sie als eine Feindin des Volkes zu verleumden und ihr ein tragisches Lebensende zu bereiten; sie wurde 45-jährig grausam ermordet.

Wer war sie?

Des Rätsels Lösung

Die gesuchte Person ist *Hypatia* (um 370–415) aus Alexandria. Sie gilt als die erste historisch fassbare Mathematikerin, denn über sie gibt es erstmals authentische – also historisch nicht bezweifelte – schriftliche Zeugnisse, in denen Einzelheiten ihres Lebens und ihres mathematischen Schaffens dokumentiert sind.

Lange Vorgeschichte – kurz gefasst

Als Alexander der Große (356–323 v.Chr.) Ägypten, das uralte Land der Pharaonen, erobert hatte, gründete er 331 v.Chr. im Nildelta die Stadt *Alexandria* als Verwaltungszentrum der neuen Provinz seines Weltreichs.

Nach Alexanders frühem Tod riss einer seiner Generäle, Ptolemaios I., die Macht in Ägypten an sich und wählte Alexandria zur Hauptstadt seines Staates. Aber er machte Alexandria nicht nur zu einem politisch-wirtschaftlichen Zentrum: Durch die Gründung des *Museion* – das weder ein Museum noch ein Musentempel, sondern die frühe Form einer Universität war – legte er das Fundament für den allmählichen Aufstieg seiner Stadt zum wissenschaftlichen Mittelpunkt der Alten Welt.*

Dem Museion war eine Bibliothek angegliedert, die den Auftrag hatte, alles damals bekannte Wissen zu sammeln und zu dokumentieren. Und so wurde in der Bibliothek nach und nach ein gewaltiger Bestand an Büchern angehäuft, der die Wissenschaftler aus aller Welt magisch anzog: In seiner mehr als 800-jährigen Geschichte lockte das Museion fast alle der fähigsten Köpfe der griechischen und römischen Epoche nach Alexandria, um hier zu forschen und zu lehren.

Für die Mathematik spielte die Stadt eine einzigartige Rolle: Hier war der beste Platz, um Mathematik zu studieren und zu produzieren. Denn an der alexandrini-schen mathematischen Schule – der berühmtesten Abteilung des Museion – waren wohl alle Mathematiker von Rang irgendwann einmal tätig; um nur die bedeutendsten unter ihnen zu nennen:

Euklid (um 300 v.Chr.) schrieb den 2000-jährigen geometrischen Bestseller „Elemente“;

Eratosthenes (um 284–200 v.Chr.) berechnete erstmals den Erdumfang mit 38000 km, eine Sensation für seine Zeitgenossen;

Archimedes (um 287–212 v.Chr.) war der bedeutendste und vielseitigste Mathematiker der Antike;

Heron (um 100?) gilt als der wichtigste „angewandte“ Mathematiker der Griechen;

Ptolemäus (um 85–165) schrieb das 1500 Jahre gültige Grundlagenbuch der Astronomie, den „Almagest“;

* Um Alexandria mit seinem Museion ins rechte Licht zu rücken: In einer Rangfolge der Bedeutung akademischer Einrichtungen läge Alexandria sicher vor Newtons Cambridge, vor Gauss' und Hilberts Göttingen, vor Einsteins und Gödels Princeton.

Pappos (um 300) verfasste das Werk „Collectio“, in dem er fast das ganze Spektrum der antiken Geometrie kritisch darstellt.

In dieser Liste fehlt ein Name: Hypatia.

Sie war die erste Frau, die am Museion Mathematik lehrte; aber zugleich auch war sie letzter herausragender Vertreter ihres Faches – mit ihrem Tod versank die langlebigste und erfolgreichste mathematische Institution, die es je gegeben hat, die alexandrinische Schule, nach und nach in die Bedeutungslosigkeit.

Hypatia

wurde um 370 als die Tochter eines berühmten Vaters, des Mathematikers und Astronomen Theon (330/340–400) in Alexandria geboren. Theon erkannte früh, dass Hypatia hochbegabt war und großes mathematisches Talent besaß, weshalb er sie schon als Kind in seinen Fächern Mathematik und Astronomie unterrichtete; später machte er sie dann zu seiner engsten Mitarbeiterin.

Sie soll in Athen studiert und sich dabei so hervorgetan haben, dass sie den begehrten Lorbeerkrantz errang, welcher nur dem besten Athener Studenten verliehen wurde.

Nach Alexandria zurückgekehrt, begann Hypatia damit, mathematische Forschung zu betreiben, die sie in eigenständigen Abhandlungen und in Kommentaren zu älteren mathematischen Werken niederlegte (ihre Schriften sind heute sämtlich verloren).

Sie nahm eine Lehrtätigkeit am Museion auf. Mit ihren Vorlesungen – zunächst über Mathematik, später auch über Philosophie – erwarb sie sich bald den Ruf einer scharfsinnigen, kompetenten und hochgebildeten Dozentin.

Ihre Ausstrahlung – und wohl auch die mehrfach bezeugte Tatsache, dass Hypatia eine schöne Frau war – machte ihre öffentlichen Auftritte zu Höhepunkten des akademischen Lebens in Alexandria und weit darüber hinaus: Eigens zu ihren Vorlesungen sollen sogar Zuhörer aus Rom und Athen angereist sein. Hypatia war zum Star des Museions geworden.

Durch ihre herausgehobene Stellung erlangte sie Zutritt zu den höchsten Kreisen der alexandrinischen Gesellschaft. Selbst Orestes, von 412 bis 415 Präfekt der römischen Provinz Ägypten, gehörte zu ihren Bewunderern und ließ sich mit ihr auf Diskussionen über Staatsgeschäfte ein. Der politische Einfluss, den sie so möglicherweise gewann, sollte fatale Folgen für sie haben.

Gegen Ende des 2. Jahrhunderts gab es in Alexandria eine große frühchristliche Gemeinde. Sie gründete wohl in Konkurrenz zum „heidnischen“ Museion eine christlich geprägte Hochschule. Wegen gegensätzlicher Auffassungen kam es zwischen beiden Einrichtungen immer wieder zu Streitigkeiten bis hin zu Ausschreitungen – 391 wurde sogar ein Brandanschlag auf die alexandrinische Bibliothek verübt mit großen Bücherverlusten im Gefolge.

Im Jahr 412 wurde Cyrill, ein machthungriger Eiferer, Bischof in Alexandria. Für

ihn hatte wohl der Kampf gegen das „Heidentum“ in der Stadt oberste Priorität. Mit der politisch-militärischen römischen Obrigkeit wollte er sich vermutlich nicht anlegen. Deshalb suchte er nach einem weniger wehrhaften Opfer und er fand ein geeignetes in Hypatia.

Sie galt ja als die exponierteste Repräsentantin und die entschiedenste Wahrerin des alten „heidnischen“ Erbes, das sich auf das nationale Denken und die Philosophie der Griechen, nicht aber auf christliche Lehrmeinungen berief.

Zunächst startete Cyrill Verleumdungskampagnen gegen Hypatia – ohne Erfolg. Dann griff er zur Gewalt – an einem Morgen der Fastenzeit 415 wurde Hypatia entführt und grausam ermordet.

Kurze Nachgeschichte

Bischof Cyrill und seine Nachfolger gewannen nach und nach die Oberhand in Alexandria und in der Folge ging die griechisch geprägte Tradition, die das Museion so groß gemacht hatte, verloren. Dies war der Anfang des Abstiegs der „alexandrinischen Schule“ in die Bedeutungslosigkeit – nach dem Einzug der Araber in Ägypten wurde sie 643 geschlossen.

Es sollten übrigens noch 1300 Jahre nach Hypatias Tod vergehen, bevor wieder eine Mathematikerin die Weltbühne betrat: Maria Gaetana Agnesi (1718–1799).

Ein Blick hinter die Kulissen

Eine Anwendung des chinesische Restsatzes

von Hartwig Fuchs

Bei einer Veranstaltung tritt ein „Gedankenleser“ auf, der behauptet, er könne eine von Zuschauern ausgedachte natürliche Zahl erraten.

Das Experiment läuft so ab:

Der „Gedankenleser“ ruft drei Personen P_1 , P_2 und P_3 auf die Bühne und bittet sie, sich gemeinsam eine zweiziffrige natürliche Zahl auszudenken.

Nachdem sich die Drei auf eine Zahl G geeinigt haben, fordert er P_1 auf, G durch 3 zu teilen, P_2 möge G durch 5 und P_3 möge G durch 7 teilen; danach sollen die Drei ihre jeweiligen Divisionsreste r_1 , r_2 und r_3 öffentlich nennen.

P_1 findet den Rest $r_1 = 2$, P_2 den Rest $r_2 = 3$ und P_3 den Rest $r_3 = 4$.

Nach kurzer Überlegung verkündet der „Gedankenleser“: Die von P_1 , P_2 und P_3 ausgedachte Zahl ist $G = 53$. Die Versuchspersonen bestätigen verblüfft das Ergebnis.

Wie lässt sich des „Gedankenlesers“ Erfolg begründen?

Manche Tricks von Rechenkünstlern sind leicht durchschaubar – der unseres „Gedankenlesers“ ist es aber nicht. Vielmehr benötigt er zur Bestimmung der Zahl G ein uraltes Theorem der Zahlentheorie, den so genannten *Chinesischen Restsatz*, der wohl erstmals in dem Buch „Die klassische Mathematik“ des chinesischen Mathematikers Sun Tzu (3. Jahrhundert n. Chr.) erwähnt wird und den auch Fibonacci (um 1170–1250) gekannt hat: Fibonacci beschreibt nämlich das oben beschriebene Gedankenlesen-Experiment in seinem berühmten Buch „Liber Abaci“ von 1202.

Der chinesische Restsatz sagt im Wesentlichen aus:

Wenn bei der Division einer natürlichen Zahl G durch die paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ der Reihe nach die Reste $r_1, r_2, \dots, r_n$ auftreten, dann gilt:

Allein aus der Kenntnis von $p_1, p_2, \dots, p_n$ und $r_1, r_2, \dots, r_n$ kann man G eindeutig bestimmen, falls $G < p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ ist.

Damit ist theoretisch der Erfolg des „Gedankenlesers“ garantiert. Aber wie hat er G tatsächlich berechnet?

Das dazu notwendige Rechenverfahren werden wir hier nur für den Fall einer zweistelligen Zahl G und der drei Primzahlen $p_1 = 3, p_2 = 5$ und $p_3 = 7$ beschreiben, für die ja gilt: $G < p_1 p_2 p_3$.

Dazu vorweg: Eine Zahl x , welche bei Division durch y den Rest r ergibt, ist ein Vielfaches von y vermehrt um r , kurz: $x = vy + r$, $v \geq 0$ eine natürliche Zahl.

Die Bestimmung von G :

1. Der „Gedankenleser“ weiß die durch die Primzahlen p_1, p_2, p_3 festgelegten Zahlen Z_1, Z_2 und Z_3 mit den folgenden Eigenschaften auswendig:
 - (1) Z_1 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von p_2 und p_3 , für das zugleich gilt $Z_1 = v_1 \cdot p_1 + 1$,
 - (2) Z_2 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von p_1 und p_3 , für das zugleich gilt $Z_2 = v_2 \cdot p_2 + 1$,
 - (3) Z_3 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von p_1 und p_2 , für das zugleich gilt $Z_3 = v_3 \cdot p_3 + 1$.
2. Der „Gedankenleser“ berechnet nun nach Bekanntgabe der Divisionsreste r_1, r_2, r_3 durch die drei Teilnehmer des Experimentes schnell die Zahl
 - (4) $H = Z_1 r_1 + Z_2 r_2 + Z_3 r_3$.

Wozu braucht er H ? – Wir zeigen, dass für H gilt:

- (5) $H = w_1 p_1 + r_1 = w_2 p_2 + r_2 = w_3 p_3 + r_3$, mit natürlichen Zahlen w_1, w_2, w_3 .

Wegen (1) bis (3) gilt für (4), wenn man H durch p_1 teilt:

$$H = (v_1 p_1 + 1)r_1 + \text{Vielfaches von } p_1 = w_1 p_1 + r_1;$$

analog zeigt man, dass die zweite und dritte Gleichheit in (5) zutreffen.

3. Damit folgt nun: $H - G$ ist ein Vielfaches von p_1 , von p_2 und von p_3 , also ein Vielfaches von $p_1 p_2 p_3$, so dass $H - G = w \cdot p_1 p_2 p_3$ mit einer natürlichen Zahl w ist. Damit ist die entscheidende Gleichung zur Bestimmung von G gefunden:
 $G = H - w \cdot p_1 p_2 p_3$.

Wählt man hier w so, dass $G < p_1 p_2 p_3$ erfüllt ist, dann ist G nach dem chinesischen Restsatz eindeutig bestimmt.

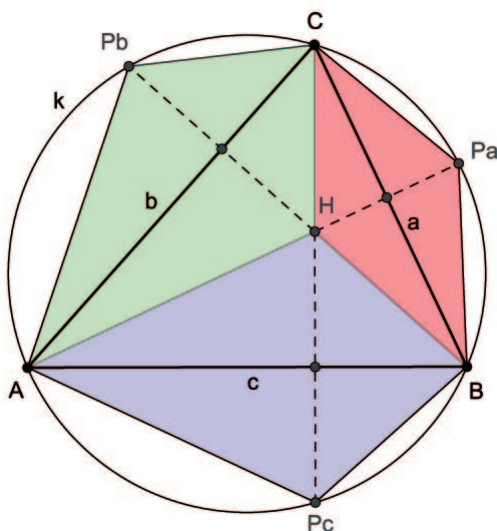
Die konkrete Bestimmung von G :

1. Für $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ und $p_3 = 7$ weiß der „Gedankenleser“ die Zahlen Z_1 , Z_2 , Z_3 auswendig: $Z_1 = 70$, $Z_2 = 21$ und $Z_3 = 15$.
2. Nach Nennung der Divisionsreste $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ und $r_3 = 4$ berechnet er $H = 70 \cdot 2 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 4 = 263$.
3. Von H subtrahiert er das ihm bekannte Produkt $p_1 p_2 p_3 = 105$ so oft, bis er eine zweistellige Zahl G erhält: $G = 263 - 2 \cdot 105 = 53$.

Dies ist die von den drei Personen ausgewählte Zahl.

Die keineswegs selbstverständlichen Überlegungen, die zur Bestimmung von G führen, zeigen uns beispielhaft, was die frühen chinesischen und europäischen Mathematiker schon alles konnten – und weshalb man ihnen heute noch Respekt zollt für ihre Leistungen.

Die besondere Aufgabe Drei Drachen im Umkreis eines Dreiecks



Die drei Höhen eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich bekanntlich in einem gemeinsamen Punkt H .

Beweis: Wird H an den Dreiecksseiten a , b , c gespiegelt, so liegen die drei Spiegelpunkte P_a , P_b , P_c von H auf dem Umkreis k von $\triangle ABC$.

Damit liegen in diesem Umkreis die drei Drachen HAP_cB , HBP_aC und HCP_bA .

(eingesandt von Irmtraud Niederle,
Fürst-Johann-Ludwig-Schule Hadamar)

Lösung

Zum gegebenen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c konstruieren wir den Höhenschnittpunkt H sowie den Umkreismittelpunkt M als Schnittpunkt der Mittellote von a, b und c . Die Höhenlinie h_c schneiden wir mit c in S_c und mit dem Umkreis k in P_c .

Die Winkel $\sphericalangle BAP_c$ und $\sphericalangle BCP_c$ sind als Winkel über derselben Kreissehne BP_c gemäß dem Umfangswinkelsatz am Kreis gleich groß. Da die Schenkel der Winkel $\sphericalangle BCP_c$ und $\sphericalangle HAS_c$ paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind auch diese Winkel gleich groß. Insgesamt hat sich ergeben:

$$\sphericalangle HAS_c = \sphericalangle BCP_c = \sphericalangle BAP_c = \sphericalangle S_cAP_c.$$

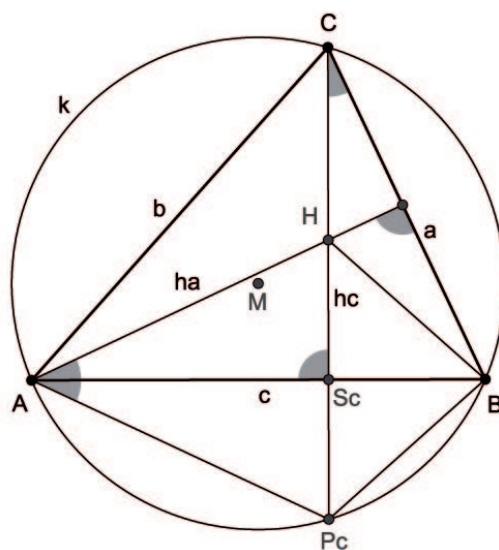
Aus $\sphericalangle HAS_c = \sphericalangle S_cAP_c$ folgt, dass $\triangle HAP_c$ gleichschenkelig ist mit AS_c als Mittellot auf der Basisseite HP_c ; insbesondere sind die Strecken HS_c und S_cP_c gleichlang, so dass P_c der Bildpunkt bei der Spiegelung von H an c ist, der somit auf k liegt. Ferner ist auch $\triangle HBP_c$ gleichschenkelig und das Viereck HAP_cB folglich ein Drachen.

Analog verläuft der Beweis, dass auch P_a und P_b auf k liegen und dass HBP_aC und HCP_bA Drachenvierecke sind. Dazu genügt es, in dem durchgeführten Beweis die zyklische Vertauschung $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ bzw. $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ vorzunehmen.

Ergänzende Bemerkungen

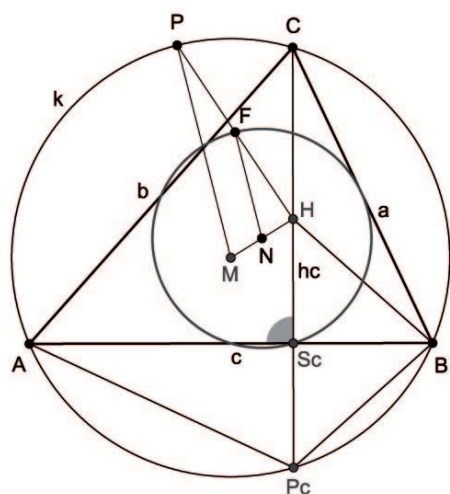
Lässt man einen Punkt P den Umkreis k des Dreiecks $\triangle ABC$ durchlaufen, so beschreibt der Mittelpunkt F der Strecke HP einen Kreis um den Mittelpunkt N der Strecke HM ; denn es gilt in jeder Position von P auf k für die Länge der Strecke NF , als Mittelparallele im Dreieck $\triangle NPH$: $|NF| = \frac{|MP|}{2} = \frac{r}{2}$, wobei r der Radius von k ist. Dieser Kreis ist bekannt als der *Feuerbach-Kreis** des Dreiecks $\triangle ABC$, auch *Neunpunktekreis* genannt, da auf ihm die Höhenfußpunkte S_a, S_b, S_c , die Mittelpunkte H_a, H_b, H_c zwischen H und den Eckpunkten A, B, C und die Seitenmitten M_a, M_b, M_c des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen.

Dass dies zutrifft, ist leicht zu sehen: Wenn P die Lage der Eckpunkte A, B, C einnimmt, fällt F mit den Mitten H_a, H_b bzw. H_c der Strecken HA, HB bzw. HC zusammen. Wenn P die Lage der Punkte P_a, P_b, P_c einnimmt, fällt F mit den Höhenfußpunkten S_a, S_b bzw. S_c zusammen. Um zu zeigen, dass auch die Seitenmitten M_a, M_b, M_c auf dem Feuerbach-Kreis liegen, verbinden wir den Endpunkt Q_c des Umkreis-Durchmessers durch M und C mit H ; dann ist MM_c

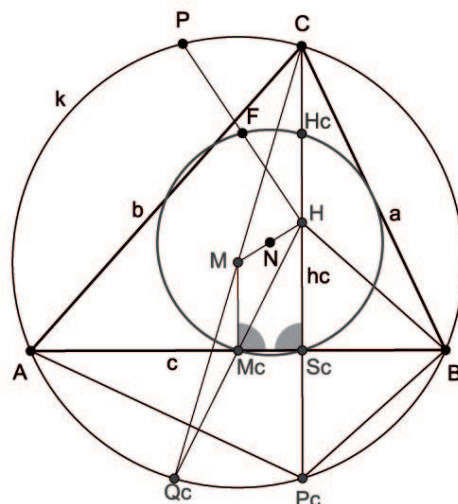


* nach Karl Wilhelm Feuerbach, *30.05.1800 in Jena, †12.03.1834 in Erlangen

als Mittellot von AB Mittelparallele im Dreieck $\triangle CHQ_c$, also M_c auch die Mitte von HQ_c , so dass F mit M_c zusammenfällt, wenn P die Lage von Q_c einnimmt. (Entsprechende Argumentation für M_a und M_b .)



Erzeugung des Feuerbach-Kreises



Feuerbach-Kreis als Neunpunktekreis

Letzte Bemerkung: Da die *Euler-Gerade* des Dreiecks $\triangle ABC$ durch H und M geht (außerdem noch durch den Schwerpunkt des Dreiecks), liegt auch der Mittelpunkt N des Feuerbach-Kreises als Mittelpunkt der Strecke HM auf der Euler-Geraden. (E.K.)

Mathis machen mathematische Entdeckungen Ein Packungsproblem

Mathis packt Pampelmusen von 10 cm Durchmesser in eine Kiste, die 80 cm lang, 60 cm breit und 10 cm hoch ist und mit einem Deckel verschlossen werden soll. Er kann 48 Pampelmusen in die Kiste packen.

Matteo dagegen kann sogar 49 Pampelmusen in der Kiste unterbringen.

Doch Mette triumphiert: Ihr gelingt es, 50 Pampelmusen in die Kiste einzuordnen.

Wie haben die drei Packungskünstler die Früchte wohl in die Kiste gepackt?

(gefunden von H. F.)

Hinweis

Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2008 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im *übernächsten* Heft werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen; außerdem werden sie bewertet.

Die Seite für den Computer-Fan

Ein Ziffernproblem

Mit $z_1 z_2 \dots z_n$ sei die Zifferndarstellung einer n -stelligen natürlichen Zahl gegeben, wobei also $1 \leq z_1 \leq 9$, $0 \leq z_i \leq 9$ für $2 \leq i \leq n$ sei.

Bestimme alle natürlichen Zahlen $z_1 z_2 \dots z_n$, für die gilt:

$$z_1 z_2 \dots z_n = z_1^{z_1} + z_2^{z_2} + \dots + z_n^{z_n}$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass es nur Lösungen für $n \leq 10$ geben kann. (H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen auch bis zum 15. November 2007 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als Anhang einer E-Mail an die MONOID-Adresse: monoid@mathematik.uni-mainz.de).

Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 89

Auf Primzahlensuche

Die Zahl $2^3 + 3^2 = 17$ ist eine Primzahl. Lassen sich in der Menge der Potenzsummen $m^n + n^m$ mit natürlichen Zahlen m und n weitere Primzahlen finden? Untersuche etwa die Bereiche $2 \leq m \leq 11$, $1 \leq n \leq 1000$. (nach H.F.)

Lösung

In den vorgeschlagenen Bereichen erhält man für folgende Kombinationen von m und n insgesamt siebzehn verschiedene Primzahlen der Form $m^n + n^m$:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	1, 3, 9, 15, 21, 33	2, 56	1	24	1	54	69, 519	2, 76, 122, 422	1	—

Diese Ergebnisse gewinnt man leicht mit einem CAS wie *Derive 6.1* und dem Befehl (z. B. für $m = 3$):

VECTOR(IF(PRIME?($3^n + n^3$), n,), n, 1, 1000)

Mit einem C++-Programm hat **Christian Behrens** vom Gymnasium am Römerkastell Alzey acht Primzahlen dieses Typs ausfindig gemacht und ebenfalls mit einem C++-Programm **Martin Reinhardt** vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal vier Primzahlen der gesuchten Art.

Florian Schweiger vom Gymnasium Marktoberdorf hat sein Programm in Visual Basic fünf Primzahlen in den vorgeschlagenen Bereichen und dazu noch fünfzehn für $m = 1$ berechnen lassen.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 90

Drei Seiten für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7



Blumensträuße

Ein Blumenhändler bestellt 216 rote und 312 weiße Asters. Wie viele identische Sträuße kann er daraus höchstens binden, wenn keine Blumen übrig bleiben sollen? (H.F.)

Lösung:

Es seien r und w die Anzahl der roten und weißen Asters in einem Strauß und a sei die Anzahl der Sträuße.

Dann gilt $ra = 216$ und $wa = 312$.

Da a möglichst groß sein soll, muss a der größte gemeinsame Teiler von 216 und 312 sein. Wegen $216 = 9 \cdot 24$ und $312 = 13 \cdot 24$ ist 24 der größte gemeinsame Teiler von 216 und 312.

Somit können höchstens $a = 24$ identische Sträuße gebunden werden.

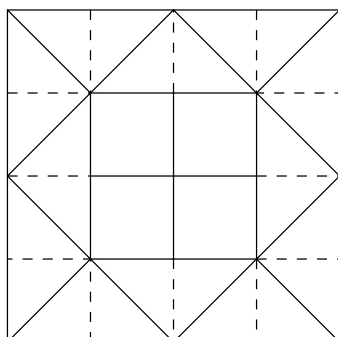
Zerlegung eines Quadrates

Ein Quadrat der Seitenlänge 4 soll so in zwölf Dreiecke und vier Quadrate zerlegt werden, dass alle 16 Teilfiguren den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Gib eine solche Aufteilung an – wenn sie möglich ist. (H.F.)

Lösung:

Wir nehmen an, die gewünschte Zerlegung des Quadrates sei möglich.



Das Quadrat hat den Flächeninhalt 16. Somit besitzt jede der 16 Teilfiguren des Quadrates den Flächeninhalt 1. Es liegt daher nahe, das Quadrat zunächst in 16 Teilquadrate zu zerlegen.

Vier dieser Teilquadrate bilden bereits einen Teil der Lösung. Wir platzieren sie in das Zentrum des Ausgangs-
quadrates – wie in der Figur.

Die übrigen zwölf Teilquadrate zerlegen wir dann in jeweils zwei kongruente Dreiecke. Die so entstandenen 24 Dreiecke haben sämtlich den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. Setzt man daher jeweils zwei benachbarte Dreiecke zusammen, dann erhält man zwölf Dreiecke, von denen jedes den Flächeninhalt 1 hat.

Zahlen-Steckbrief

Kannst Du die natürliche Zahl z bestimmen, die alle nachfolgenden Bedingungen erfüllt?

- (1) z ist vierstellig;
- (2) alle Ziffern von z sind ungerade und verschieden von einander;
- (3) die Einerziffer von z ist dreimal so groß wie die Tausenderziffer von z ;
- (4) die Hunderterziffer von z ist größer als die Zehnerziffer von z ;
- (5) von allen Zahlen, die (1) bis (4) erfüllen, liegt die Lösungszahl z am nächsten bei 2744. (H.F.)

Lösung:

(1) Es sei $z = abcd$.

Aus (2) folgt: $1357 \leq abcd \leq 9753$.

Aus (3) folgt: $d = 3a$; wegen (2) ist a ungerade, also $a = 1$ und dann $d = 3$ oder $a = 3$ und dann $d = 9$. Somit gilt

$z \in \{1573, 1593, 1793, 3159, 3179, 3579, 1753, 1953, 1973, 3519, 3719, 3759\}$.

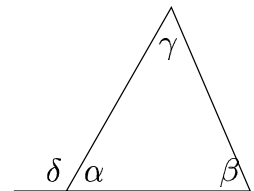
Wegen (4) kommen die ersten sechs Zahlen dieser Menge nicht als Lösungen in Frage.

Aus (5) folgt: Die Lösungszahl ist $z = 1973$.

Innenwinkel und Außenwinkel eines Dreiecks

Wenn man eine Seite eines Dreiecks $\triangle ABC$ verlängert, dann ist der dabei entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden ihm gegenüberliegenden Innenwinkel des Dreiecks; z. B. ist in der Figur $\delta > \beta$ und $\delta > \gamma$.

Du siehst es! Kannst Du es auch begründen? (H.F.)



Lösung:

Als Nebenwinkel müssen α und δ die Summe 180° haben. Dasselbe muss $\alpha + \beta + \gamma$ als Innenwinkelsumme eines Dreiecks ergeben. Also:

$$\alpha + \delta = \alpha + \beta + \gamma \iff \delta = \beta + \gamma.$$

Da sowohl β als auch γ positiv sind, also besonders $\neq 0$, gilt damit $\delta > \beta$ und $\delta > \gamma$.

(Anna Arent, 7b, Peter-Wust-Gymnasium, Wittlich;
Luis Ressel, 5b, Friedrich-List-Gymnasium Reutlingen;
Connor Röhricht, 8, Gymnasium Hochrad, Hamburg;
Frank Schindler, 6d, Peter-Joerres-Gymnasium, Bad Neuenahr-Ahrweiler)

Eine wichtige Ungleichung

Bestimme alle natürlichen Zahlen x und y , $x \leq y$, für welche die Ungleichung
$$xy > x + y$$

gilt und für welche sie nicht gilt. (H.F.)

Lösung:

Nach Voraussetzung ist $x \leq y$.

1. Fall: Es sei $x \geq 3$ und $y \geq 3$. Dann ist $xy > 2y = y + y \geq x + y$.

2. Fall: Es sei $x = 2$ und $y \geq 3$. Dann ist $xy = 2y = y + y > x + y$.

3. Fall: Es sei $x = 2$ und $y = 2$. Dann ist $xy = x + y$.

4. Fall: Es sei $x = 1$ und $y \geq 1$. Dann ist $xy = y < x + y$.

Somit gilt $xy > x + y$ für $x \geq 2$ und $y \geq 3$; die Ungleichung gilt nicht für $x = y = 2$ und für $x = 1, y \geq 1$.

Wortgleichung

Für welche drei Ziffern a, b, c gilt $(ababab/ab)/ab = ccc$? (WJB)

Lösung:

Anders geschrieben lautet die Gleichung $(10a + b)(10101)/(10a + b)^2 = 111c$, also $(10a + b)c = 10101/111 = 91 = 13 \cdot 7$.

Die Ziffer c muss also ein einstelliger Teiler von 91 sein, daher ist $c = 1$ oder $c = 7$. Dann ist $a = 9$ und $b = 1$ bzw. $a = 1$ und $b = 3$.

Es gibt also für das Tripel (a, b, c) zwei Lösungen, nämlich $(1, 3, 7)$ und $(9, 1, 1)$.
(Florian Schweiger, 9d, Gymnasium Marktoberdorf)

Lösungen dreier Gleichungen?

Gibt es Zahlen x und y , welche die Gleichungen

$$(1) \quad x + y = 1 \qquad (2) \quad x^2 + y^2 = 2 \qquad (3) \quad x^3 + y^3 = 3$$

gleichzeitig erfüllen? (H.F.)

Lösung:

Aus (1) und (2) folgt $1 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2 + 2xy$, so dass $xy = -\frac{1}{2}$ ist. Aber aus (1) und (3) ergibt sich:

$$1 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 3 + 3xy(x + y) = 3 + 3xy,$$

so dass nun $xy = -\frac{2}{3}$ sein muss.

Aber $xy = -\frac{1}{2}$ und $xy = -\frac{2}{3}$ widersprechen sich. Somit gibt es keine Zahlen x und y , welche die Gleichungen erfüllen.

Florian Schweiger (9d, Gymnasium Marktoberdorf) schrieb: „In MONOID 76, Seite 33 wird bereits gezeigt, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.“ Stimmt, gut gemerkt!

Neue Mathespielereien

Zwei Seiten für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Immer wieder 100

Kevin hat Ferien und daher viel Zeit. Was macht er? Natürlich: Er stellt Rechenaufgaben zusammen. (Was soll er auch sonst machen?)

Seine Lieblingszahl ist die 100 und für die sucht er Aufgaben. Er verwendet bei seinen Aufgaben keine anderen Zeichen als die Ziffern 0, 1, ..., 9, die Grundrechenarten +, −, ·, : sowie die Klammern.

Wenn er zum Beispiel mit genau zehn Ziffern 3 das Ergebnis 100 erhalten will, so kann er $33 + 33 + 333 : (3 \cdot 3) - 3 = 100$ bilden.

Welche Rechenaufgabe kann er bilden, um das Ergebnis 100 zu erhalten

- a) mit genau fünf Ziffern 1;
- b) mit genau fünf Ziffern 3;
- c) mit genau fünf Ziffern 5;
- d) mit den neun Ziffern von 1 bis 9, von denen jede genau einmal verwendet wird?
(WK)

Unterwegs

Michael Geister-Fahrer ist mit seinem schwarzen Audi unterwegs. Bevor er losfährt, sieht er auf den Tachostand: „18981 km, das ist ja eine Palindromzahl!“, stellt er erfreut fest. Zwei Stunden Autofahrt später zeigt sein Tachometer erstmals wieder eine Palindromzahl, also eine Zahl, die von vorne gelesen dasselbe ist wie von hinten gelesen.

- a) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit ist Michael Geister-Fahrer gefahren?
- b) Wie viele fünfstellige Palindromzahlen kann das Tachometer anzeigen (führende Nullen sind also nicht zugelassen)?
- c) Wie viele Palindromzahlen kann es anzeigen, wenn wir führende Nullen nicht verbieten und einstellige Zahlen nicht mitzählen – mit anderen Worten: Wie viele Palindromzahlen gibt es zwischen 10 und 100000? (MG)

Ein Ratespiel

Mathis soll aus einem Behälter mit zwei roten (r) und einer weißen (w) – sonst aber ununterscheidbaren Kugeln – mit verbundenen Augen zwei Kugeln ohne Zurücklegen ziehen. Er gewinnt, wenn er richtig voraussagt, ob das Ergebnis seiner Ziehung zwei Kugeln von verschiedener (v) oder von gleicher (g) Farbe sein wird. Mathis behauptet: „Ich werde zwei verschieden farbige Kugeln ziehen.“

Ist Mathis Vorhersage willkürlich oder lässt sie sich begründen? (H.F.)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf Seite 22

Neue Mathespielereien

Zwei Seiten für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Mittagessen in einer Ganztagschule

Bei der Essenausgabe in einer Ganztagschule standen genau sieben Schüler und Schülerinnen in einer Reihe hintereinander. Olaf stellte fest:

- (1) Kein Mädchen stand unmittelbar vor einem anderen Mädchen.
- (2) Genau einer der Jungen stand unmittelbar zwischen zwei Mädchen.
- (3) Genau eines der Mädchen stand unmittelbar zwischen zwei Jungen.
- (4) Genau einmal kam es in der Reihe vor, dass drei Jungen unmittelbar hintereinander standen.

Finde alle Möglichkeiten für die Reihenfolge von Mädchen und Jungen! Erkläre, warum es keine weiteren Möglichkeiten gibt! (WK)

Stimmt's?

Nach Angaben des Branchenverbandes Bitkom vom 16.05.2007 seien in Deutschland 297 Milliarden Minuten im Jahr 2006 vertelefoniert worden. Unter der Überschrift „60 Stunden an Strippe und Handy“ schlussfolgern die Redakteure der digitalen gmx-Nachrichten, dass folglich ein Deutscher im Schnitt etwa 60 Stunden im Jahr mit Telefonieren verbringt. Stimmt das? (Valentin Blomer)

Differenz von Quadratzahlen

Unter welcher Bedingung ist die Differenz zweier Quadratzahlen n^2 und m^2

- a) teilbar durch 2, 3, 5 oder 7
- b) teilbar durch 2, 4, 8, ... 2^j , $j > 3$?

(WJB)

Kakuro

In die weißen Felder des nebenstehenden Gitters ist jeweils eine der Ziffern 1, 2, ..., 9 einzutragen. Dabei muss in jeder Zeile die links davon stehende Summe, in jeder Spalte die jeweils darüber stehende Summe erreicht werden.

Wiederholungen von Ziffern in einer Summe ist dabei verboten, zum Beispiel darf in der ersten Zeile links nicht 1, 4, 4 oder 2, 5, 2 stehen. An anderen Stellen dürfen die Ziffern allerdings wieder auftreten. (WJB)

	16	26	16		9	23	10
9				12			
18				14			
26				32			
9			15		10		
			9		6		
	21	18				20	16
23					11		
10			16		13		
7			6				
19				16			
				11			

Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 918: Wahr oder falsch?

Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Dann ist $p^5 - p$ durch 240 ohne Rest teilbar. (H.F.)

Aufgabe 919: Primzahlen erzeugende Formeln

Leonhard Euler entdeckte 1772, dass der Term $P(n) = n^2 + n + 41$ für $n = 0, 1, 2, \dots, 100$ insgesamt 96 Primzahlen liefert. Überhaupt erzeugt $P(n)$ ungewöhnlich viele Primzahlen – zum Beispiel für $n = 0, 1, 2, \dots, 11000$ genau 4923 Primzahlen, aber eben nicht für alle Zahlen n .

Begründe: Ein Term $Q(n) = an^2 + bn + p$, wobei a und b natürliche Zahlen ≥ 1 sind und p eine Primzahl ist, kann nicht für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ nur Primzahlen darstellen. (H.F.)

Aufgabe 920: Ganzzahlige Lösungen

Die Gleichung $x^2 + 14 = (x + 8)y$ hat möglicher Weise ganzzahlige positive Lösungen x, y . Bestimme gegebenenfalls das Lösungspaar (x, y) mit dem kleinsten ganzzahlig-positiven x . (H.F.)

Aufgabe 921: Gleichschenklige Dreiecke mit bunten Eckpunkten

Bei einem regelmäßigen 2007-Eck $P_1, P_2, \dots, P_{2007}$ seien alle Eckpunkte rot oder blau eingefärbt; von jeder Farbe gebe es mindestens einen Eckpunkt.

Dann kannst Du stets drei gleichfarbige Eckpunkte finden, so dass das Dreieck mit diesen drei Eckpunkten gleichschenkelig ist. Begründe dies. (H.F.)

Aufgabe 922: Niemals eine Quadratzahl

Begründe, dass keine Zahl der Form $3^m + 3^n + 1$, m und n positive ganze Zahlen, eine Quadratzahl ist. (H.F.)

Aufgabe 923: Kubische Extrapolation

Durch vier Punkte in der Ebene mit verschiedenen x -Koordinaten geht genau eine kubische Parabel $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man finde fünf positive Zahlen $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$, $1,01y_3 < y_4$, so dass die vier Punkte $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), (4, y_4)$ eine kubische Parabel mit $a = 1$ bestimmen, während die vier Punkte $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), (4, y_4)$ eine kubische Parabel mit $a = -1$ bestimmen.

Das zeigt, dass etwa bei kubischer Extrapolation von vier Messwerten bei kleiner Störung nur eines Wertes (hier um 1%) ein völlig anderes Ergebnis entsteht.

(Valentin Blomer)

Aufgabe 924: Konstruktion mit beschränkten Mitteln

Hans besitzt nur ein unmarkiertes Lineal und einen eingerosteten Zirkel, das heißt es ist ein fester Abstand eingestellt, mit dem Hans zeichnen kann, aber er kann diesen nicht ändern.

Er kann damit ein Paar sich rechtwinklig schneidender Strecken konstruieren. Wie macht er das?

Gib, wenn möglich, mehrere verschiedene Konstruktionen an.

(H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 90

Klassen 8–13

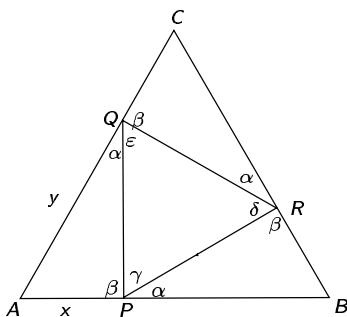
Aufgabe 911: Gleichseitiges Dreieck in gleichseitigem Dreieck

In einem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge a seien ein Punkt P auf der Seite $\overline{AB}$ und ein Punkt Q auf der Seite $\overline{AC}$ so gewählt, dass $\overline{AP} \neq \overline{AQ}$ und zugleich $|\overline{AP}| + |\overline{AQ}| = a$ ist.

Kann man auf der Seite $\overline{BC}$ einen Punkt R so festlegen, dass dann auch das Dreieck PQR gleichseitig ist?

(H.F.)

Lösung:



Es sei $|\overline{AP}| = x$ und $|\overline{AQ}| = y$, $x + y = a$. Dann ist $|\overline{BP}| = y$ und $|\overline{CQ}| = x$. Wir wählen nun R auf der Strecke $\overline{BC}$ so, dass $|\overline{BR}| = x$ und folglich $|\overline{CR}| = y$ ist.

Damit gilt: Die Dreiecke APQ , BRP und CQR stimmen in zwei Seitenlängen und in dem eingeschlossenen 60° -Winkel überein – sie sind also kongruent; also stimmen auch die Seiten $|\overline{PQ}|$, $|\overline{PR}|$ und $|\overline{QR}|$ überein. Somit ist das Dreieck PQR gleichseitig.

Aufgabe 912

Bestimme alle natürlichen Zahlen, die sich als $\sqrt{15n - 2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben lassen.

(WJB)

Lösung:

Es gibt keine solche Zahl $15n - 2$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat sie die Einerziffer 3 oder 8, kann also keine Quadratzahl sein.

Aufgabe 913: Zwei besondere Würfel

Bei zwei verschieden großen Würfeln mit ganzzahligen Kantenlängen sei die Summe ihrer Volumina zahlenmäßig genau so groß wie die Summe aller ihrer Kanten-

längen.

Bestimme sämtliche solcher Würfelpaare!

(H.F.)

Lösung:

Die Kantenlängen der beiden Würfel seien mit x und y bezeichnet und es sei $x < y$.

Dann soll nach Voraussetzung gelten: $x^3 + y^3 = 12(x + y)$, x und y positiv und ganzzahlig, $x < y$.

Die Lösungen x, y dieser Gleichung befinden sich in den beiden Mengen $\mathbb{M}_x = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{M}_y = \{2, 3, 4, \dots\}$. Diese beiden unendlichen Mengen lassen sich auf endliche Mengen $\mathbb{M}'_x$ und $\mathbb{M}'_y$ reduzieren. Dazu dividiert man die obige Gleichung durch $x + y$. Man erhält: $x^2 - xy + y^2 = 12$ und aus $x^2 - 2xy + y^2 = 12 - xy$ folgt $(x - y)^2 = 12 - xy$.

Nun ist $(x - y)^2 \geq 0$, so dass auch $12 - xy \geq 0$ und daher $12 \geq xy$ und daher wegen $x < y$ noch $12 > x^2$ gelten muss. Daher muss x in der Menge $\mathbb{M}'_x = \{1, 2, 3\}$ und y dann in der Menge $\mathbb{M}'_y = \{2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$ enthalten sein.

Durch systematisches Probieren findet man als einzige Lösung $x = 2$ und $y = 4$.

Aufgabe 914: Regentropfen im Quadrat

Auf einen quadratischen Platz von 49 m^2 Fläche fallen 5000 (punktförmige) Regentropfen.

Dann gibt es mindestens 100 Tropfen, von denen jeder einen Abstand von weniger als 15 cm zu einem anderen Tropfen hat.

(H.F.)

Lösung:

Man denke sich den Platz in 4900 Quadrate mit 10 cm Seitenlänge eingeteilt. Nehmen wir den ungünstigsten Fall an, dass in jedes dieser 4900 Quadrate bereits ein Tropfen gefallen sei. Dann können die restlichen Tropfen nur ins Innere oder auf den Rand eines bereits besetzten Quadrates fallen. Die Entfernung zweier Punkte im Innern oder auf dem Rand eines Quadrates der Seitenlänge 10 cm ist aber maximal die Diagonallänge $\sqrt{200} \text{ cm} \approx 14,14 \text{ cm}$, also weniger als 15 cm.

Aufgabe 915: Natürliche Zahlen als Summen natürlicher Zahlen

Mathis behauptet, dass man 5 auf 16 verschiedene Arten als eine Summe aus natürlichen Zahlen schreiben kann. Man überprüft schnell, dass er Recht hat, wenn er z. B. $4 + 1$ und $1 + 4$ als verschieden betrachtet und auch Summen aus einem Summanden, z. B. $5 = 5$, zulässt.

- Was hältst Du von der Aussage: „11 kann auf mehr als 1000 Arten als eine Summe dargestellt werden.“?
- Auf wie viele Arten kannst Du eine beliebige natürliche Zahl $n > 1$ als eine Summe schreiben?

(H.F.)

Lösung:

Wir denken uns n dargestellt als eine Folge von n Symbolen $*$. Jede Trennlinie zwischen zwei Sternen beschreibe die Darstellung von n als eine Summe.

Beispiel:

$$\begin{aligned} *** &= *|** = **|* = *|*|* \quad \text{soll} \\ 3 &= 1+2 = 2+1 = 1+1+1 \quad \text{bedeuten.} \end{aligned}$$

Zwischen zwei Sterne kann man keinen oder einen Trennstrich schreiben – das sind zwei Möglichkeiten. Bei einem Stern mehr kann man zusätzlich keinen oder einen weiteren Trennstrich ziehen – bei drei Sternen sind das jetzt $2 \cdot 2$ Möglichkeiten. Bei der Erhöhung der Sternenzahl um 1 erhöht sich die Anzahl der Möglichkeiten, Trennstriche zu zeichnen, um den Faktor 2. Somit gilt: n kann auf 2^{n-1} Arten, $n \geq 1$, als Summe geschrieben werden. Für $n = 11$ ist $2^{10} = 1024$, so dass die Frage a) zu bejahen ist.

Aufgabe 916: Ungewöhnliche Vielfache von 10

Trifft es zu, dass alle Zahlen $9^k + 1$ mit $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ Vielfache von 10 sind? (H.F.)

Lösung:

Für ungerade Zahlen k gilt: $n^k + 1 = (n+1)(n^{k-1} - n^{k-2} + \dots - n^1 + 1)$. Setze $n = 9$. Dann ist $9^k + 1 = (9+1)(9^{k-1} - 9^{k-2} + \dots - 9^1 + 1)$, woraus folgt: $9^k + 1$ ist ein Vielfaches von $9+1 = 10$. (H.F.)

Aufgabe 917

- a) Die Kanten von der Spitze S einer Pyramide über dem Dreieck ABC bilden mit der Grundfläche den gleichen Winkel δ . Wo liegt der Fußpunkt F des Lotes von S auf die Grundfläche?
- b) Gibt es auch Pyramiden über Vierecken, bei denen alle Kanten zur Spitze den gleichen Winkel mit der Grundfläche bilden?
- c) Die Seitenflächen einer Pyramide über dem Dreieck ABC bilden mit der Grundfläche jeweils den gleichen Winkel ε . F sei der Fußpunkt des Lotes von der Spitze S auf die Grundfläche. Wo liegt F ? (WJB)

Lösung:

- Die Dreiecke AFS , BFS und CFS haben den gleichen Winkel δ (bei A bzw. B bzw. C), einen rechten Winkel bei F und die gemeinsame Seite FS . Also müssen auch die Seiten AF , BF und CF gleich lang sein. F ist also der Umkreismittelpunkt von ABC .
- Wenn ein Viereck einen Umkreis besitzt (d. h. alle vier Ecken auf einem Kreis liegen), haben Pyramiden mit der Spitze über dem Umkreismittelpunkt diese Eigenschaft.
- Die Höhe im Dreieck ABS trifft die Kante AB im Punkt D . Die Ebene durch SD senkrecht zur Grundfläche enthält das Dreieck FDS . Dieses ist bestimmt durch den Winkel ε bei D , den rechten Winkel bei F und die Länge der Seite FS . Das gleiche gilt für die Dreiecke, die entstehen, wenn wir die Kante AB ersetzen durch BC oder AC . Damit sind auch die entsprechenden Strecken DF , EF und GF gleich lang. F ist also der Mittelpunkt des Inkreises von ABC .

Fürther Mathematik-Olympiade

Drei Aufgabenbeispiele mit Lösungen

Wie bereits im letzten Heft angekündigt, veröffentlichen wir an dieser Stelle drei Kostproben aus: „FüMO – Das Buch. Aufgaben und Lösungen aus 14 Jahren Fürther Mathematik-Olympiade“.

125 Jubiläum

FüMO ist im Sommer zehn Jahre alt geworden. Aus diesem Anlass haben wir FüMO zehnmal untereinander geschrieben.

- Wie oft kann man FüMO lesen, wenn man beim F links oben startet und auch schräges Lesen (Springen um eine Zeile nach unten bzw. oben) zugelassen ist? Beispiel: Siehe rechts das fett gedruckte FüMO.
- Wie viele derartige Lesemöglichkeiten gibt es jeweils mehr, wenn man bei dem F in der zweiten bzw. dritten Zeile startet?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt, in der nebenstehenden Figur FüMO auf obige Art zu lesen?

F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O
F	ü	M	O

Lösung:

- Schreibt man an die Stellen der Buchstaben des Diagramms die Anzahl der Wege, die vom linken oberen F zum jeweiligen Buchstaben führen, so ergibt sich folgender Ausschnitt:

1	1	2	4
0	1	2	5
0	0	1	3
0	0	0	1

Insgesamt gibt es $4 + 5 + 3 + 1 = 13$ Lesemöglichkeiten.

b) Analog zu a) erhält man folgende Ausschnitte beim Start in der

zweiten Zeile:

0	1	2	5
1	1	3	7
0	1	2	6
0	0	1	3
0	0	0	1
0	0	0	0

bzw. dritten Zeile:

0	0	1	3
0	1	2	6
1	1	3	7
0	1	2	6
0	0	1	3
0	0	0	1

Demnach gibt es insgesamt 22 bzw. 26 Lesemöglichkeiten, also 9 bzw. 13 Möglichkeiten mehr als in a).

c) Für die Startzeile 10 gibt es wie in a) 13 Möglichkeiten, für Zeile 9 bzw. 8 entsprechend 22 und 26 Möglichkeiten. Für die übrigen vier Startzeilen gibt es bei analoger Zählung jeweils 27 Lesarten, also insgesamt $2 \cdot 13 + 2 \cdot 22 + 2 \cdot 26 + 4 \cdot 27 = 230$ Lesemöglichkeiten.

148 Zum Jahreswechsel 1998/1999

Auf welche Ziffer endet die Zahl $N_1 = 1998^{1999}$?

Auf welche drei Ziffern endet die Zahl $N_2 = 1999^{1998}$, auf welche drei die Zahl $N_3 = 1999^{1999}$?

Lösung:

$$N_1 = 1998^{1999} = (2 \cdot 9 \cdot 111)^{1999} = 8 \cdot 2^{1996} \cdot 9 \cdot 81^{999} \cdot 111^{1999} = 8 \cdot 9 \cdot 16^{499} \cdot 81^{999} \cdot 111^{1999}$$

Der letzte und der vorletzte Faktor enden auf die Ziffer 1. Der drittletzte Faktor endet auf die Ziffer 6.

Wegen der ersten beiden Faktoren 8 und 9 endet die Zahl N_1 auf 2 ($8 \cdot 9 \cdot 6 = 432$).
 $N_2 = 1999^{1998} = (1999^2)^{999} = 3996001^{999} = (n \cdot 10^3 + 1)^{999}$, da $(k \cdot 10^3 + 1) \cdot (l \cdot 10^3 + 1) = (kl \cdot 10^3 + k + l) \cdot 10^3 + 1 = m \cdot 10^3 + 1$ mit $k, l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow N_2$ endet auf die Ziffern 001

$N_3 = N_2 \cdot 1999 \Rightarrow$ Die Endziffern sind 999.

224 Zehntel und Elftel

Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{11} \right\rfloor = 1; x \in \mathbb{N}_0 ?$$

Dabei bedeutet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist.

Beispiele: $[3, 4] = 3$, $[4, 7] = 4$, $[17] = 17$, $[-\frac{6}{5}] = -2$

Lösung:

Wir betrachten zunächst nur den Bereich von $x = 0$ bis 109 mit Hilfe einer Wertetabelle:

x		0	1	...	9	10	11	12	...
	$\frac{x}{10}$	0	0	...	0	1	1	1	...
	$\frac{x}{11}$	0	0	...	0	0	1	1	...
$\frac{x}{10}$	$-\frac{x}{11}$	0	0	...	0	1	0	0	...

x		19	20	21	22	23	...	...	109
	$\frac{x}{10}$	1	2	2	2	2	...	...	10
	$\frac{x}{11}$	1	1	1	2	2	...	...	9
$\frac{x}{10}$	$-\frac{x}{11}$	0	1	1	0	0	...	...	1

Bei $x = 10, 20, 30, 40, \dots$ erhöht sich der Wert von $[\frac{x}{10}]$ um jeweils 1. Bei $x = 11, 22, 33, 44, \dots$ erhöht sich der Wert von $[\frac{x}{11}]$ „verzögert“. Die Differenz dieser beiden Werte beträgt 0 oder 1. Daher wird die Gleichung im betrachteten Bereich von folgenden x -Werten erfüllt: $x = 10, 20, 21, 30, 31, 32, 40, 41, 42, 43, 50, \dots, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109$. Die Anzahl der Lösungen ist daher $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 = 55$. Das ist die Hälfte der 110 Zahlen von 0 bis 109.

Wir betrachten nun die nächsten 110 x -Werte von 110 bis 219. Es gilt: $[\frac{x+110}{10}] = [\frac{x}{10}] + 11$ und $[\frac{x+110}{11}] = [\frac{x}{11}] + 10$

x		110	111	...	119	120	121	122	...
	$\frac{x}{10}$	11	11	...	11	12	12	12	...
	$\frac{x}{11}$	10	10	...	10	10	11	11	...
$\frac{x}{10}$	$-\frac{x}{11}$	1	1	...	1	2	1	1	...

x		129	130	131	132	133	...	...	219
	$\frac{x}{10}$	12	13	13	13	13	...	...	21
	$\frac{x}{11}$	11	11	11	12	12	...	...	19
$\frac{x}{10}$	$-\frac{x}{11}$	1	2	2	1	1	...	...	2

Die Differenz der Werte beträgt nun 1 oder 2. Wo in der untersten Zeile der ersten Wertetabelle 0 eingetragen ist, erscheint nun (110 Zahlen weiter) eine 1, wo eine 1 eingetragen ist, erscheint eine 2. Daher sind wieder die Hälfte der 110 Zahlen von 110 bis 219 Lösungen. Das sind nochmals 55 Stück.

Betrachtet man nun abschnittsweise die jeweils nächsten 110 Zahlen von 220 bis 329, von 330 bis 439 usw., erhält man analog als Differenzwerte in der letzten

Zeile der Wertetabelle 2 oder 3 bzw. 3 oder 4, usw., also keine weiteren Lösungen der Gleichung. Insgesamt hat die gegebene Gleichung also 110.

Wer forscht mit? Periodische Dezimalbrüche

Wenn man die durch die Bruchzahl $\frac{1}{n}$, $n > 1$, gegebene Division $1 : n$ ausführt, dann erhält man manchmal eine rein-periodische Dezimalzahl, deren Periodenlänge mit $L\left(\frac{1}{n}\right)$ bezeichnet sei.

Beispiel: $\frac{1}{37} = 1 : 37 = 0,027\,027\,027\dots = 0,\overline{027}$ mit $L\left(\frac{1}{37}\right) = 3$.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass jede in Betracht gezogene Bruchzahl eine rein-periodische Dezimalstellung besitzt.

Untersuche dann die Fragen:

- a) Welche Längen sind für Perioden möglich?
- b) Kann man zu jeder natürlichen Zahl m eine Bruchzahl $\frac{1}{n}$ (eine Bruchzahl $\frac{1}{p}$ mit einer Primzahl p) angeben, für die $L\left(\frac{1}{n}\right) = m$ bzw. $L\left(\frac{1}{p}\right) = m$ ist, $m = 1, 2, 3, \dots$?
- c) Für eine Primzahl $p \neq 2$ sei $L\left(\frac{1}{p}\right) = p - 1$. Dann heiße $L\left(\frac{1}{p}\right)$ *maximal*.
Bestimme für mehrere der Intervalle $(1, 10^2)$, $(1, 10^3)$, $(1, 10^4)$, ... den Anteil der Primzahlen des jeweiligen Intervalls.
- d) Gibt es nur endlich viele oder unendlich viele Primzahlen mit maximaler Periodenlänge?

Natürlich darfst du auch weitere Fragestellungen, die Dir selbst einfallen, untersuchen. (H.F.)

Hinweis

Eure Forschungsergebnisse könnt Ihr bis zum 15. Februar 2008 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im *übernächsten* Heft werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen; außerdem werden sie bewertet.

Einige Bemerkungen über die Zahl e

von Stefan Müller-Stach

... Posito igitur hoc numero = e erit

$$e = 2,71828182845904,$$

qua expressione in fractionem continuam conversa erit

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

cuius denominatores terni constituunt progressionem arithmeticam
2, 4, 6, 8, etc.,
reliqui sunt unitates...*

Einleitung

Die reelle Zahl

$$e = 2,71828182845904523536 \dots$$

ist neben π eine der wichtigsten nicht-trivialen Konstanten der Mathematik und der Naturwissenschaften. Die Bezeichnung e wurde wahrscheinlich von Leonhard Euler eingeführt, obwohl dies nicht wirklich bekannt ist, ebenso wenig wie der Grund für die Wahl dieses Buchstabens. Historisch wurde e um 1618 wohl zuerst von John Napier in seinen Werken über den Logarithmus verwendet. Dabei trat die Konstante aber nicht explizit auf. Danach erscheint e , allerdings meist noch nicht unter diesem Namen, u. A. in Arbeiten von Briggs, Saint-Vincent, Huygens, Mercator, Bernoulli und Euler (siehe den Artikel zu e im MacTutor Archiv <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>).

Wir wollen uns hier mit e beschäftigen und eine interessante Verbindung zu Euler im Zusammenhang mit Kettenbrüchen herausarbeiten. Es ist davon auszugehen, dass Euler zuerst die Kettenbruchentwicklung

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

gefunden hat. Er liefert jedenfalls in der Arbeit [E] einen elementaren Beweis für

* Leonhard Euler in [E] §21, 1744

die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \frac{1}{30 + \frac{1}{34 + \dots}}}}}}}}$$

mit Hilfe der nicht-linearen Riccati-Differentialgleichung. Etwas allgemeiner leitet er dort sogar Formeln für Zahlen wie e , $\sqrt{e}$, $e^{\frac{1}{a}}$, $\frac{e^a+1}{e^a-1}$, $\frac{\sqrt[3]{e}-1}{2}$ her, deren Kettenbruchentwicklung eine arithmetische Progression beinhaltet. Eine andere Methode für e wurde von Cohn [C] angegeben.

Wir gehen hier nicht besonders intensiv auf weitere bemerkenswerte Formeln für e ein, wie z. B.

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad i^{-i} = \sqrt{e^\pi}, \dots,$$

obwohl besonders der Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen und die analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion eine sehr wichtige Rolle in der Analysis spielen.

Jacob Bernoulli und die Zahl e

Jacob Bernoulli fand um 1683 die zwei Formeln

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1)$$

sowie

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad (2)$$

die e als Grenzwert von Folgen rationaler Zahlen darstellen. Diese beiden Ausdrücke gehen vermöge $n \mapsto -n$ und Kehrwertbildung ineinander über. Was bedeuten diese Formeln?

Man stelle sich ein Glücksspiel vor, bei dem der Spieler bzw. die Spielerin in jeder Runde aus n Möglichkeiten auswählen kann, z. B. an einem Spielautomaten, und eine richtige Wahl einen Gewinn erbringt. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Versuch zu verlieren ist $1 - \frac{1}{n}$, wenn man Gleichverteilung der Ereignisse annimmt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, nach n Runden immer noch keinen Gewinn bekommen zu haben durch

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

gegeben. Die Formel (2) von Bernoulli besagt, dass diese Wahrscheinlichkeit für

großes n gegen die Konstante

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2,7182...} = 0,3678...$$

konvergiert, also etwa 37 Prozent beträgt. Tatsächlich ist bereits

$$\left(1 - \frac{1}{10^5}\right)^{10^5} = 0,3678...$$

bis auf 4 Stellen genau. Die Formel (1) kann mittels Zinsrechnung interpretiert werden. Angenommen ein Kapital von 1 Euro verzinst sich jährlich mit 100 Prozent pro Jahr (zugegebenermaßen sehr hoch). Wird der Zinssatz am Ende des Jahres ausgeschüttet, so hat man danach 2 Euro. Wird der Zinssatz dagegen halbjährlich berechnet, so hat man nach einem halben Jahr $1 + \frac{1}{2}$ Euro und nach einem ganzen Jahr $(1 + \frac{1}{2})^2$ Euro. Macht man nun die Zeitintervalle immer kürzer, d.h. teilt das Jahr in n Teile auf, so ergibt sich $(1 + \frac{1}{n})^n$ als Ausschüttung. Dieser Wert konvergiert von unten gegen $e = 2,71828...$ Euro. Im Fall von $n = 365$ ergibt sich bereits $(1 + \frac{1}{365})^{365} = 2,714567...$

Andere Definition von e

Anstelle der Limesdefinition von Bernoulli kann man e auch als unendliche Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \quad (3)$$

definieren. Damit ist e die Basis der Exponentialfunktion, die man als unendliche Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

erhält. Durch zulässige Multiplikation von solchen Reihen sieht man damit die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad e^0 = 1.$$

Diese Formeln bilden die Grundlage für das Rechnen mit Logarithmentafeln und charakterisieren die Funktion e^x und damit auch e eindeutig. In der Reihendarstellung von $f(x) = e^x$ sieht man auch durch (gliedweises) Differenzieren, dass f mit seiner eigenen Ableitung übereinstimmt und $f(0) = 1$ gilt. Durch diese Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = 1$ ist die Zahl e ebenfalls eindeutig bestimmt.

Allgemeines über Kettenbruchentwicklungen

Kettenbrüche sind Darstellungen von reellen Zahlen, die analog zu Dezimalbrüchen, aber etwas weniger bekannt sind [MP]. Ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch ist eine Formel der Gestalt

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

wobei a_0 eine ganze Zahl ist und $a_1, a_2, \dots$ natürliche Zahlen ≥ 1 sind. In Kurzform schreibt man auch $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. Dabei wird x als reelle Zahl mit dem Grenzwert des Ausdrucks auf der rechten Seite gleichgesetzt. Dieser existiert immer unter unseren Voraussetzungen, wie man beweisen kann. Jeder Bruch lässt sich als Kettenbruch wie folgt darstellen (ein Beispiel möge genügen):

$$\frac{59}{27} = 2 + \frac{5}{27} = 2 + \frac{1}{\frac{27}{5}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{2}{5}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = [2; 5, 2, 2].$$

Dabei wird im ersten Schritt der größte ganzzahlige Anteil $a_0 \in \mathbb{Z}$ sowie ein Rest $0 \leq t_0 < 1$ gebildet, so dass

$$x = a_0 + t_0 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{t_0}}, \quad \frac{1}{t_0} > 1$$

gilt. Dann wird mit dem selben Verfahren weitergemacht, d. h. a_1 ist der größte ganzzahlige Anteil von $\frac{1}{t_0}$ und t_1 der Rest usw.. Bei Brüchen terminiert dieses Verfahren immer, aber bei beliebigen reellen Zahlen wird das nicht der Fall sein. Jede reelle Zahl hat also eine Kettenbruchentwicklung, die aber nicht ganz eindeutig ist, so ist z.B. $[1; 1] = [2]$. Der unendliche, periodische Kettenbruch

$$\varrho = [\bar{1}] = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

stellt beispielsweise den goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dar. Dies sieht man schnell so: Aus dem Kettenbruch folgt $\varrho = 1 + \frac{1}{\varrho}$, da sich die Struktur wiederholt. Nach Multiplikation mit ϱ bekommt man daher $\varrho^2 - \varrho - 1 = 0$, und die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind genau $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Jeder unendliche Kettenbruch $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ liefert eine schnelle Approximation der Zahl x durch die endlichen Kettenbrüche $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, die auch Näherungsbrüche genannt werden. Die Zahlen p_n, q_n lassen sich dabei rekursiv berechnen durch

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad p_{-1} = q_0 = 1, \quad p_0 = a_0, \quad q_{-1} = 0.$$

Es gilt sogar immer

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

für $n \geq 1$, d.h. man hat auch eine effektive Fehlerabschätzung.

Euler und die Irrationalität von e

Bereits in [E] hat Euler die Irrationalität von e gesehen, denn er kannte die Kettenbruchentwicklung

$$\begin{aligned} e &= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots] \\ &= 1 + [1; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots] \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}} \end{aligned}$$

und wusste natürlich, dass rationale Zahlen (Brüche) eine endliche Kettenbruchentwicklung besitzen.

Im Gegensatz dazu zeigt der ebenfalls unendliche Kettenbruch von π keine solchen Regelmäßigkeiten wie der von e und beginnt mit

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots].$$

Der Näherungsbruch $[3; 7] = \frac{22}{7}$ ist eine wohlbekannte Approximation von π .

Hermite und die Transzendenz von e

Euler erwähnt in [E, §20] die Tatsache, dass die periodischen Kettenbrüche genau die quadratischen Irrationalzahlen sind, d. h. irrationale Lösungen quadratischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Hieraus folgt sofort, dass e keine quadratische Gleichung erfüllt. Durch Verwendung sogenannter Padé-Approximationen hat Hermite 1874 gezeigt, dass e sogar transzendent ist, d.h. es gibt auch keine Polynomgleichung

$$c_m \cdot e^m + c_{m-1} \cdot e^{m-1} + \dots + c_1 \cdot e + c_0 = 0$$

höheren Grades $m \geq 3$ mit ganzzahligen Koeffizienten $c_0, \dots, c_m$, die e als Nullstelle besitzt. Liouville hat um 1844 zuerst transzendente Zahlen von der Bauart

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!} = 0,110001000\dots$$

gefunden. Die Transzendenz von π wurde von Lindemann 1882 bewiesen. 1934 haben Gelfond und Schneider auch die Transzendenz von $2^{\sqrt{2}}$ bewiesen (Lösung von Hilberts siebtem Problem).

Die Ziffern von e

Die Dezimalstellen von e wurden mindestens bis in die Größenordnung 10^{10} berechnet. Es gibt sehr raffinierte Algorithmen, die dies bewerkstelligen und mit denen man mühelos auch viele Ziffern mit einem Taschenrechner berechnen kann.

Euler hat selbst mindestens 20 Ziffern gekannt und dazu vermutlich die Reihendarstellung (3) benutzt, die recht schnell konvergiert. Es gibt aber viel schnellere Verfahren, die in jedem Schritt eine präzise vorgegebene Anzahl von neuen Dezimalstellen berechnen, siehe <http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html>.

Die Folge der Näherungsbrüche von e beginnt mit

$$0, 3, \frac{19}{7}, \frac{193}{71}, \frac{2721}{1001}, \frac{49171}{18089}, \frac{1084483}{398959}, \dots$$

Bereits der letzte dieser Brüche liefert die gute Approximation

$$\frac{1084483}{398959} = 2,71828182845856\dots$$

Der Kettenbruch zu $\frac{e-1}{2}$ ist sogar noch einfacher:

$$\frac{e-1}{2} = [0; 1, 6, 10, 14, 18, \dots]$$

Hier gilt für die Folge der a_n die einfache Formel $a_n = 4(n-1) + 2$ für $n \geq 2$. Dieses Kennntnis ergibt einen ersten recht schnellen Algorithmus zur Berechnung von e , denn die Folge der Näherungsbrüche lässt sich mit den Rekursionsformeln für p_n und q_n unglaublich schnell berechnen.

Besonders interessant sind die Spigot-Algorithmen für e und π . Der Spigot-Algorithmus für e beruht auf der Darstellung

$$e-1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} (1 + \dots) \right) \right) \right).$$

Diese Darstellung kann man sofort zu einer rekursiven Folge ausbauen, die gegen eine Näherung von $e - 1$ konvergiert:

$$u_{n-1} = \frac{1 + u_n}{n},$$

wobei n abwärts von N bis 1 läuft und z.B. $u_N = 0$ ein Startwert ist. Ist man konkret an der Folge der Ziffern interessiert, so arbeitet man zusätzlich mit der Multiplikation mit der Zahl 10 im Verlauf der Berechnung und erhält den Spigot-Algorithmus für e , den wir hier als PYTHON-Programm (www.python.org) abdrucken:

```
len=100
output=[2]
a=[1 for i in range(len)]
for j in range(1,len):
    q=0
    for i in range(len,0,-1): # durchläuft die Zahlen N, N-1, ..., 1
        abwärts
```

```

        x=10*a[i-1]+q
        a[i-1]=x%i
        q=x/i
    a[0],q=q%10,q/10
    output.append(a[0])
print output

```

Es gibt einen analogen Spigot-Algorithmus für π , der auf der Darstellung

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{7} \left(1 + \frac{4}{9} (1 + \dots) \right) \right) \right)$$

basiert.

Um viele Stellen von π auf einmal zu berechnen, haben Ramanujan und andere nach ihm nach Reihendarstellungen von π gesucht, die mit jedem Summanden einige neue Stellen liefern. Bailey, Borwein und Plouffe haben dabei die berühmte Reihe

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right),$$

gefunden, die in jedem Schritt neue gültige (Hexa-)Dezimalstellen liefert, ohne dass man im Übrigen die vorangegangenen kennen muss!

Ein Ausblick: Perioden

Eine (reelle) Periode P ist eine reelle Zahl, die als n -dimensionales Integral der Form

$$P = \int_{\Delta} \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

entsteht, wobei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein durch Polynomungleichungen definiertes Gebiet ist. Diese Polynome und auch die Polynome $f(x)$ und $g(x)$ haben rationale Koeffizienten. Viele irrationale oder sogar transzendente Zahlen sind Perioden, z. B.

$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}, \quad \pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy.$$

Es ist jedoch keine einzige reelle Zahl bekannt, die keine Periode ist. Man beachte, dass die Perioden eine abzählbare Menge bilden, die reellen Zahlen aber überabzählbar sind. Es wird aber vermutet, dass e keine Periode ist, da kein Integral dieser Bauart für e bekannt ist. e und auch $\sqrt{\pi}$ sind aber sogenannte exponentielle Perioden, da sie verallgemeinerte Integrale der Form

$$e = \int_{-\infty}^1 e^x dx, \quad \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

sind. Perioden und deren Verallgemeinerungen stehen im Mittelpunkt des Interesses moderner Forschung in der Arithmetischen Geometrie.

Literatur

- [C] H. COHN: *A short proof of the simple continued fraction expansion of e* , Amer. Math. Monthly **113**, 57–62 (2006), elektronisch verfügbar auf arXiv:math.NT/0601660.
- [E] L. EULER: *De fractionibus continuis dissertatio*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **9**, 98–137 (1744); einsehbar in Eulers Opera Omnia, Band 14, Seite 187–215, Teubner Verlag, Leipzig 1925.
- [MP] S. MÜLLER-STACH UND JENS PIONTKOWSKI: *Elementare und Algebraische Zahlentheorie*, 240 Seiten, Vieweg Verlag 2007.



„Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer
Freiheit.“

Georg Cantor

*03.03.1845 in St. Petersburg, †06.01.1918 in Halle (Saale)
Begründer der Mengenlehre.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz

Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung, Satz, Korrektur der eingesandten Lösungen und Internet: Marcel Gruner, Juliane Gutjahr

Betreuung der Abonnements: Katherine Pillau

Monoidaner: Alexander Gerharz, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Philipp Mayer

Freie Autoren dieses Heftes: Prof. Dr. Stefan Müller-Stach, Heike Winkelvoß

Mathematische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

Fabian Meier (Hrsg.): „Mathe ist cool! Junior. Eine Sammlung mathematischer Probleme.“.

Wem, nachdem die Aufgaben des aktuellen Heftes von MONOID gelöst sind, die Wartezeit bis zum nächsten Heft zu lange dauert, dem kann geholfen werden. „Mathe ist cool! Junior“ bietet anspruchsvolle und grundlegende Aufgaben, die sich an Schülerinnen und Schüler ab der 8. Klasse richten. Die verschiedenen Kapitel beginnen jeweils mit Beispielaufgaben mit Lösungen. Bei den meisten geht es dann mit Übungsaufgaben weiter, bei denen man die Lösungen einige Seiten später findet, so dass man sich – ohne die Lösung direkt auf derselben Seite zu finden – in Ruhe selbst mit den Aufgaben auseinandersetzen kann.

Inhaltlich umfasst die Sammlung Aufgaben aus verschiedensten mathematischen Gebieten, so geht es um Folgendes: Logik, das Extremalprinzip, Rechnen mit Restklassen, Vollständige Induktion, Summenformeln, Faktorisieren, Gleichungen, Ungleichungen, Scherung, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie um Geometrie am Kreis, an Kirchenfenstern und im Raum.

Abgerundet wird der Band durch eine kurze Erklärung von Grundlagen für diejenigen Leser, welche die entsprechenden benötigten Inhalte in der Schule noch nicht kennen gelernt haben.

Erwähnenswert ist noch, dass die meisten der Autoren zur Zeit der Veröffentlichung der Sammlung mathematischer Probleme gerade erst ihr Abitur abgelegt hatten und sich von daher noch gut in den mathematischen Verständnishorizont der anvisierten Zielgruppe eindenken konnten.

Abzüge gibt es lediglich für die phantasielose Aufmachung. Hier hätte der Verlag außer den mathematischen Konstruktionen zur Auflockerung durchaus ein paar Illustrationen, Cartoons oder Bilder ergänzen können.

Fazit: Anspruchsvolle Aufgaben, die sich sehr gut zur Vorbereitung auf Mathematikwettbewerbe und für Mathematik-Arbeitsgemeinschaften eignen. Wegen der lieblosen optischen Gestaltung erhält das Buch jedoch nur die

Gesamtbeurteilung: gut ☺☺

Angaben zum Buch: Meier, Fabian (Hrsg.): Mathe ist cool! Junior; Cornelsen, 2003, ISBN 978-3-464-56194-2, KT, 144 Seiten, 16,95 €

Art des Buches: Sammlung von Knobelaufgaben

Mathematisches Niveau: meistens verständlich

Altersempfehlung: ab 15 Jahren

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand einschließlich Heft 89

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:

Kl. 5: Laura Tabea Galkowski 10, Anne Hofmacher 2, Philipp Langer 9, Julia Scherner 7, Jakob Waldmann 6;

Kl. 6: Lara Bergjohann 26, Maximilian Haist 11, Andreas Pitsch 12, Freya Roth 8, Benedikt Schneider 5;

Kl. 7: Elisabeth Kopf 10, Kevin Schmitt 16, Anne Vorherr 8;

Kl. 8: Alexander Gerharz 10, Philipp Mayer 18, Sybille Mayer 13;

Kl. 10: Janina Braun 8, David Spies 20;

Kl. 11: Patricia Kastner 12.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:

Kl. 5: Jana Ballweber 8, Tim Brugger 7, Vincent Brugger 7, Leon Bungert 10, Philipp Sauerstopf 6, Sina Tischbierek 12, Panajota Tzamara 5, Katarina Vidovic 2;

Kl. 9: Lena Baum 41, Désirée Schalk 12;

Kl. 10: Felix Liebrich 69, Martin Reinhardt 75.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):

Kl. 6: Samia Mohamed 3; **Kl. 8:** Ossama Basent 22.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:

Anna Katharina Lange 24;

Kl. 10: Lennart Adam 48, Julia Müller 34;

Kl. 11: Christian Behrens 71, Martin Alexander Lange 48.

Bad Bergzabern, Alfred-Grosser-Gymnasium (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber):

Kl. 7: Katharina Albert 15, Max Broda 15, Kevin Kübel 3, David Wander 24;

Kl. 10: Anselm Schäfer 11.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 12: Laura Biroth 54.

Bad Homburg, Kaiserin-Friedrich-Gymnasium:

Kl. 8: Gregor Angeloni 8.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 6: Frank Schindler 73.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:

Kl. 6: Christian Geiger 2, Florian Salamat 8, Frederik Träuble 7;

Kl. 7: Anton Zeeb 4;

Kl. 8: Daniel Frank 6, Patrick Grupp 4, Maximilian Stocker 8;

Kl. 9: Annika Vesenmaier 4.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):

Kl. 5: Paula Heimroth 8; **Kl. 6:** Katharina Bröhm 6;

Kl. 7: Katharina Busold 5, Paulina Hauser 43, Antonia Kalb 5, Nina Munkel 13, Lena Vogel 32, Lukas Vogel 10.

Erlangen, Freie Waldorfschule Erlangen: Kl. 9: Malte Meyn 94.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):

Kl. 5: Mustafa Albay 3, Maurice Paul Artelt 63, Marc Dinges 27, Benedikt Franz 17, Isabell Hölzer 3, Elena Müller 12, Felix Rohde 3, Thorsten Roth 48, Aylin Yildiz 3;

Kl. 6: Tristan Hof 5, Dominik Jung 13;

Kl. 7: Marius Burkardt 29, Rolf Niedenthal 9, Florian Orschel 28, Julian Roth 7, Monja Schütz 8, Philipp Wenzel 25;

Kl. 8: Lara Czarnetzki 10, Kai Roth 60.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 8: Connor Röhricht 64.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuender Lehrer: Christoph Straub):

Kl. 6: Sheima'a Ahmed Doma 50, Nada Zaghloul 32;

Kl. 9: Alia'a Ahmed Doma 76, Karen Emil 38, Heba Mamdouh 16, Marina Morad 49;

Kl. 10: Ghada Hesham 7, Hayat Selim 17, Noha Wahab 7;

Kl. 11: Alia'a el Bolock 39, Mariam und Selma el Sayyad/Ismail 44, Mariam Emad 33.

Kaiserslautern, Burggymnasium:

Kl. 9: Freya Leuwer 10, Francesco Monteleone 2, Monika Nikolaus 3.

Lahnstein, Johannes-Gymnasium: Kl. 9: Kathrin Stark 51.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:

Kl. 11: Katharina Kober 36.

Ludwigshafen, Theodor-Heuss-Gymnasium:

Kl. 8: Stephan Böhmer-Horländer 19.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis):

Kl. 5: Niklas Braun 13, Julia Braunschädel 7, Melina Cappel 11, Nihal Eken 10, Lucas Hippchen 9, Hanin Mohammed 5, Inga Stablo 8, Theodora Tsoutsouli 13,

Sara Widmer 9;

Kl. 7: Ann-Kathrin Hientzsch 40;

Kl. 8: Felix Steins 17, Ersan Tokcan 5, Malik Wagner 8, Thimo-Simon Wieber 10;

Kl. 10: Anna Becken 14, Meike Hickmann 20;

Kl. 12: Cornelia Koop 25.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 11: Alexey Tyukin 61.

Mainz, Maria-Ward-Schule:

Kl. 5: Maïke Meuser 3, Estelle Paulus 3, Julia Thelen 3;

Kl. 12: Patricia Uthmann 15.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 4: Magdalena Winkelvoß 22.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Wittekindt):

Kl. 7: Kristin Beez 1, Michelle Hangel 3, Simon Heinzmann 56, Steffen Heller 3, Tim Lutz 59, Natalie Müller 3, Christian Sagara 3, Sascha Scheu 10, Marcel Schulz 6, Tobias Soldan 52, Carmen Tomczak 2.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 9: Florian Schweiger 102.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):

Kl. 8: Vivien Kohlhaas 50; **Kl. 9:** Madeline Kohlhaas 59;

Kl. 11: Miriam Menzel 4; **Kl. 12:** Annika Kohlhaas 46.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium: Kl. 8: Bettina Wiebe 38.

Ober-Ramstadt, Georg Christoph Lichtenberg-Schule:

Mille Becht 1;

Kl. 6: Janina Freitag 13, Marielle Fröhlich 22, Aylin İlhan 9, Mero Kaya 18, Catharina Oeber 7, Maura Preiß 11, Kim Vanessa Schneider 28, Marcel T. 2, Tobias Thomas 37, Justine Wirth 10, Eva Zöllner 14;

Kl. 8: Kay Ackermann 24, Rica Altrock 10, Sandra Burkhardt 15, Sebastian Hiller 7, Julian Hottes 11, Jana Lauth 11, Christian Marx 2, Sarah Merz 3, Jannik Metzler 5, Manja Mörl-Kreitschmann 12, Patrick Plößer 23, Amber Pra 8, Mareike Silbereis 7, Carlo Trockel 21, Jennifer Wagner 10, Melanie Wagner 14.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):

Kl. 5: Maximilian Dio 8, Benjamin Gockeln 14, Yuecan Li 19, Vivien Lorey 4;

Kl. 6: Lorlana Altvater 12, Laura Barowski 7, Tobias Braun 45, Niklas Haupt 9, Jannis Heil 10, Elisabeth Koch 11, Janina Köhler 10, Katharina Kuhlmann 12, Valentin Kuhn 36, Lara Lechner 6, Miriam Lindert 8, Anna-Katharina Löw 8, Franziska Matern 5, Camilla Metz 8, Merlin Oster 3, Nils Rehm 8, Mai-Britt

Rosengarten 7, Jemina Schwab 3, Daniel Worrying Pozo 7, Julia Yeo-Peters 2, Lukas Zajonz 22;

Kl. 7: Aline Endreß 47, Christina Stein 8, Nathan Valenti 18;

Kl. 11: Stefan Albert 16.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):

Kl. 7: Simone Marquard 14; **Kl. 10:** Thomas Geiß 57.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner):

Kl. 5: Caroline Alfter 6, Eric Amann 3, Ulf Floßdorf 12, Alina Gillrath 16, Jana Gillrath 23, Simon Löhr 3, Felix Perschen 6, Jonathan Rochert 9, Simon Wegmann 3;

Kl. 6: Tabea Engels 10, Vivien Grieshaber 4, Marc Heinicke 11, Miriam Hube 7, Michael Krupp 3, Yannik Lager 4, Sabine Litke 4, Tabea Menden 4, Jemima Mubakemeschi 9, Nora Pöhlau 8, Marc Radermacher 2, Julia Reim 16, Sarah Sass 16, Andreas Schmitz 11, Johanna Schneider 4, Luisa Weidert 13, Floralouisa Winkler 1, Daniela Witt 4; **Kl. 7:** David Feiler 70.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 8: Alexander Rettkowski 46.

Villingen-Schwenningen: Tuyet Lan Tran Thi 4

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 6: Dorothea Winkelvoß 37.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Kuntz):

Kl. 5: Sabrina Hartmann 20, Noah Klein 5, Jonatham Kreilaus 7, Julian Merkel 5, Lorea Ritzmann 22, Paul Schädlich 26, Laura Stilgenbauer 6, Julia Sundheimer 15; **Kl. 7:** Joel Jung 12.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (betreuende Lehrerin Frau Elisabeth Maringer):

Kl. 7: Anna Arendt 69, Jennifer Peifer-Weiß 35; **Kl. 11:** Charlotte Capitain 52.

Die Klassenangaben beziehen sich noch auf das Schuljahr 2006/2007.

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2007

mit der Preisvergabe an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2006/2007

am Samstag, dem 24. November 2006, Beginn 10 Uhr

an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz,

im Atrium Maximum (Alte Mensa).

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.

Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite

www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

Inhalt

An die Le(ö)ser	2
Heike Winkelvoß: Über die Verteilung der Primzahlen	3
Hartwig Fuchs: Die Primzahlenvermutung von Gauß und einige Vor- und Nach- spiele dazu	6
Hartwig Fuchs: Wer war's?	9
Hartwig Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen – Eine Anwendung des chinesischen Restsatzes	12
Irmtraud Niederle, Ekkehard Kroll: Die besondere Aufgabe – Drei Drachen im Umkreis eines Dreiecks	14
Mathis machen mathematische Entdeckungen – Ein Packungsproblem	16
Die Seite für den Computer-Fan	17
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 90	18
Neue Mathespielereien	21
Neue Aufgaben	23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 90	24
Fürther Mathematik-Olympiade – Drei Aufgabenbeispiele mit Lösungen	27
Wer forscht mit? – Periodische Dezimalbrüche	30
Stefan Müller-Stach: Einige Bemerkungen über die Zahl e	31
Die Redaktion	38
Martin Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	39
Rubrik der Löser und Löserinnen	40

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift:	Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon:	06131/39-26107, Fax: 06131/39-24389
E-Mail:	monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage:	http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid