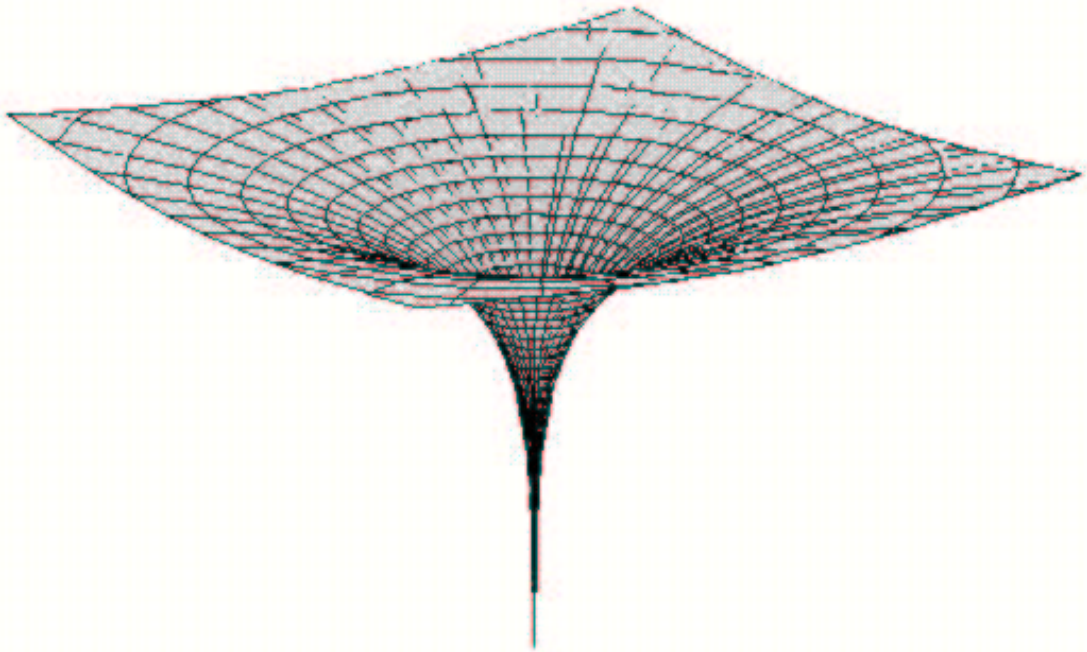
Jahrgang 27 Heft 92 Dezember 2007

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben! **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den „Neuen Aufgaben“ und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.02.2008.**

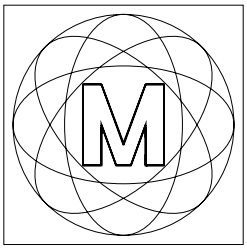
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps.**
Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: **das Goldene M.**



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, Tippen von Texten für den MONOID, etc.

Und nun wünschen wir euch viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Spezielle rechtwinklige Dreiecke

von Hartwig Fuchs

Vorweg

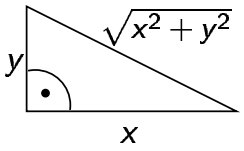
Viele Aufgaben sind mit wenigen Worten beschrieben – doch können sie manchmal nur auf verschlungenen und recht langen mathematischen Pfaden gelöst werden. Die folgende Aufgabe mag dies insbesondere Mathematik-Einsteigern demonstrieren.

Aufgabe

Bestimme alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, bei denen Umfang und Flächeninhalt (numerisch) gleich sind!

Lösung

Die Kathetenlängen eines vorgegebenen rechtwinkligen Dreiecks seien x und y.



Dann ist nach Pythagoras $\sqrt{x^2+y^2}$ die Hypotenusenlänge, außerdem $x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ der Umfang und $\frac{1}{2}xy$ die Fläche des Dreiecks.
Nach Voraussetzung soll gelten: $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}xy$.

Zur Bestimmung der x- und y-Werte aus dieser Gleichung vereinfachen wir diese zunächst:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2}xy-(x+y) \\ \Longrightarrow \quad & x^2+y^2 = \tfrac{1}{4}x^2y^2-xy(x+y)+x^2+2xy+y^2 \\ \Longrightarrow \quad & 0 = xy\left(\tfrac{1}{4}xy-(x+y)+2\right). \end{aligned}$$

$x=y=0$ kommt als Lösung für unser geometrisches Problem nicht in Betracht. Seien also $x\neq 0, y\neq 0$. Dann dürfen wir die letzte Gleichung durch xy teilen und erhalten $0=\frac{1}{4}xy-(x+y)+2$ oder nach Multipilkation mit 4 und Umstellung

$(*)\quad xy+8=4(x+y)$

Wir verschaffen uns nun einen Überblick über die möglichen ganzzahligen Lösungen von $(*)$.
Es ist $y\geq 1$ und es sei noch $x\geq y$ – dies dürfen wir so voraussetzen, weil dadurch die Menge der Lösungsdreiecke nicht verändert wird.
Nun gilt für $y\geq 8$ sowie $x\geq y$:

$$xy+8>xy\geq 8x=4x+4x\geq 4x+4y=4(x+y)$$

und folglich ist $xy+8>4(x+y)$ im Widerspruch zu Gleichung $(*)$.

Die Gleichung $(*)$ kann also keine Lösungen mit $y \geq 8$ haben. Damit kann sie nur noch endlich viele Lösungen besitzen, für die zudem noch $1 \leq y \leq 7$ sein muss.

Mit diesen nur noch wenigen möglichen y-Werten können die Lösungen der Gleichung $(*)$ mit geringem Aufwand berechnet werden:

y	1	2	3	4	5	6	7
x	$\frac{4}{3}$	0	-4	nicht definiert	12	8	$\frac{20}{3}$

Aus der Tabelle entnimmt man: Es gibt nur zwei rechtwinklige Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften – ihre Seitenlängen sind 5, 12, 13 und 6, 8, 10.

Ein Blick hinter die Kulissen

Blitzschnelles Abzählen

von Hartwig Fuchs

Erkennst Du den Trick bei dem folgenden „Kunststück“, das ein Mathematik-Lehrer in einer Vertretungsstunde den Schülern vorführt?

Der Lehrer legt 50 Streichhölzer in einem Haufen auf einen Tisch. Danach stellt er sich so, dass er von den folgenden Aktionen nichts sehen kann:

Er bittet einen Schüler, eine beliebige Anzahl Hölzchen vom Haufen wegzunehmen und in seine Tasche zu stecken. Ein zweiter Schüler soll dann die noch auf dem Tisch verbliebenen Streichhölzer zählen, die Ziffernsumme dieser Anzahl berechnen und nun so viele Hölzchen in die Tasche stecken, wie die Ziffernsumme beträgt.

Beispiel: Wenn sich auf dem Tisch noch 39 Hölzchen befinden, so soll der Schüler $3 + 9 = 12$ Hölzchen wegnehmen.

Nachdem alles abgelaufen ist, wirft der Lehrer nur einen sehr kurzen Blick auf das übrig gebliebene Häufchen Streichhölzer und verkündet – nach einer gespielten Denkpause – die korrekte Anzahl der Streichhölzer auf dem Tisch. Kann der Lehrer tatsächlich so blitzartig die Hölzchen abzählen?

Erklärung

Es gelten folgende Aussagen:

(1) Jede Differenz $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ Ziffern}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ist ein Vielfaches von 9.

(2) Wenn man von einer natürlichen Zahl m ihre Ziffernsumme $Z(m)$ subtrahiert, dann ist die Differenz $m - Z(m)$ ein Vielfaches von 9.

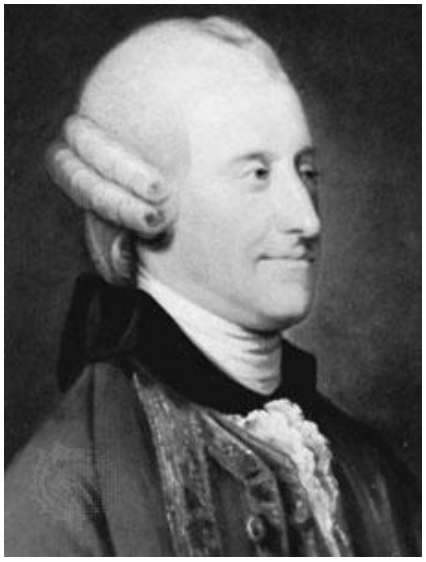
Nachweis von (2):
Es sei $m = Z_t \cdot 10^t + Z_{t-1} \cdot 10^{t-1} + ... + Z_1 \cdot 10^1 + Z_0$, $t \geq 0$ und $Z_t \neq 0$.
Dann ist $Z(m) = Z_t + Z_{t-1} + ... + Z_1 + Z_0$ und es gilt:
$m - Z(m) = Z_t((10^t) - 1) + Z_{t-1}(10^{t-1} - 1) + ... + Z_1(10^1 - 1) + Z_0(10^0 - 1)$
und wegen (1) und wegen $10^0 - 1 = 0$ ist $m - Z(m)$ ein Vielfaches von 9.

Der Lehrer kannte natürlich die Tatsache (2) und so wusste er:
Befanden sich m Streichhölzer, $m \leq 50$, auf dem Tisch, bevor der zweite Schüler einige davon wegnahm, dann gab es nach der Entfernung von $Z(m)$ Hölzchen entweder 0, 9, 18, 27, 36 oder 45 Hölzchen auf dem Tisch. Da der Lehrer den Streichholztrick schon oft vorgeführt hatte, konnte er aus Erfahrung mit einem Blick abschätzen, ob sich noch fast alle (45), etwa zwei Drittel (36), etwa die Hälfte (27), ungefähr ein Drittel (18) oder nur noch sehr wenige (9) Hölzer vorhanden waren.
Also: Ein wenig elementare Zahlentheorie und ein bisschen Erfahrung – und schon klappt der Trick.

Hättest Du es gewusst?

Was ist die Sandwich-Technik?

von Hartwig Fuchs



An John Montagu, 4. Earl von Sandwich (1718–1798), erinnert man sich heute wegen eines Faktums und wegen einer Vermutung:
Er war als Politiker und Militär wesentlich mitverantwortlich dafür, dass England in der „American revolution“ (1775–1783) seine 13 Kolonien an der Ostküste Nordamerikas verlor; und er war möglicher Weise der Erfinder des Sandwichs (zwei Scheiben Brot mit etwas Leckerem dazwischen – ein belegtes Brot eben). Aber als Mathematiker hat er sich mit Sicherheit nicht betätigt!

Wie kommt es dann, dass eine mathematische Arbeitstechnik heute seinen Namen trägt?

Wenn man bei einem Problem, das eine ganzzahlige Lösung besitzt, keinen Weg zur Berechnung dieser Lösung sieht, dann führt folgender Weg manchmal

wenigstens in die Nähe des Ziels: Man versucht (z. B. durch Abschätzungen) zwei möglichst eng beieinander liegende Schranken so zu bestimmen, dass sich die gesuchte Lösung zwischen diesen Schranken befindet.

Stellt man sich diese Situation anschaulich vor, wie die Lösung nun irgendwo zwischen zwei „Scheiben“ (Schranken) liegt, dann hat dieses Bild durchaus eine gewisse Ähnlichkeit mit einem Sandwich – und daher nennt man diese Methode, wie man sich in die Nähe einer Lösung heranrechnet, in Trainingszirkeln für Mathematik-Wettbewerbe die *Sandwich-Technik*.

Wie sieht diese Technik in konkreten Fällen aus?

Beispiel 1
In der Dezimaldarstellung der ganzzahligen Potenzen n^3 und n^4 werden insgesamt die zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 – jede genau einmal – verwendet. Bestimme n.
Lösung mit der Sandwich-Technik:

a) Sei $n \leq 17$. Dann ist $n^3 \leq 4913$ und $n^4 \leq 83521$, so dass n^3 und n^4 zusammen höchstens aus neun Ziffern bestehen.

b) Sei $n \geq 22$. Dann ist $n^3 \geq 10648$ und $n^4 \geq 234256$, so dass nun n^3 und n^4 zusammen mindestens elf Ziffern enthalten.

Die Lösung n befindet sich deshalb innerhalb der Schranken 17 und 22, also $17 < n < 22$. Durch Ausprobieren mit einem Taschenrechner findet man $n = 18$.

Beispiel 2
Die Höhe eines Zylinders ist $\frac{5}{3}$-mal so groß wie sein Radius r. Seine Oberfläche O und sein Volumen V sind dreiziffrige ganzzahlige Vielfache von π. Welchen Radius r hat der Zylinder?
Lösung mit zweifacher Sandwich-Technik:
Es gilt $O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{5}{3}r = \pi \cdot \frac{16}{3}r^2$ und $V = \pi r^2 \cdot \frac{5}{3}r = \pi \cdot \frac{5}{3}r^3$.

a) Für r gilt nun: $100 \leq \frac{16}{3}r^2 \leq 999$, und daher ($r$ ist ganzzahlig!) $4 < r < 14$ (erstes „Sandwich“).

b) Weiter ist $100 \leq \frac{5}{3}r^3 \leq 999$, so dass $3 < r < 9$ (zweites „Sandwich“).

Aus a) und b) folgt zunächst: Die Lösung r befindet sich innerhalb der Schranken 4 und 9, also $4 < r < 9$.
Nun muss r ein ganzzahliges Vielfaches von 3 sein, damit Oberfläche und Volumen ganzzahlige Vielfache von π sind. Also ist $r = 6$.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Daniel Kehlmann: „Die Vermessung der Welt“.

Ein Buch über einen Mathematiker und ein Bestseller? Eigentlich scheint sich dies auszuschließen. Nicht so bei Daniel Kehlmanns 2005 erschienenem „Die Vermessung der Welt“. Das Buch handelt von Carl Friedrich Gauß und Wilhelm von Humboldt. Um dabei ein häufig von Rezensenten beklagtes Missverständnis gleich vorwegzunehmen: Es handelt sich bei Kehlmanns Buch nicht um eine Doppelbiographie der beiden großen Gelehrten, sondern um einen historischen Roman mit dem Hintergrund der Lebensgeschichten der beiden berühmtesten Wissenschaftler des beginnenden 19. Jahrhunderts.

Den Einstieg in die Lebensgeschichte der beiden großen Wissenschaftler wählt Kehlmann mit der Reise des Mathematikers Gauß zum Naturforscherkongress des Jahres 1829 nach Berlin, bei dem er die Gastfreundschaft Humboldts genießt. Begleitet wird Gauß von seinem Sohn Eugen, den er für einen Versager hält. Ausgehend von dem ersten Zusammentreffen werden in Rückblenden die vergangenen Erlebnisse der beiden Giganten aufgerollt, wobei sich jeweils ein Kapitel über Humboldt mit einem über Gauß abwechselt.

Ein Schüler der 9. Klasse kam zu folgendem Urteil: „Daniel Kehlmann hat erfolgreich in seinem Roman gleich zwei deutsche Geistesgrößen vorgestellt: Das Mathematikgenie Carl Friedrich Gauß und den Universalgelehrten und großen Naturforscher Alexander von Humboldt. ‚Die Vermessung der Welt‘ ist eine sehr lehrreiche und lesenswerte Lektüre, die bemerkenswert geschrieben und gut recherchiert ist.“

Fazit: Durch seine packende und amüsante Art zu schreiben schafft es Kehlmann, dem Leser die beiden handelnden Hauptpersonen sehr plastisch als Menschen mit Problemen, Fehlern und Schwächen – und fernab des Sockels, auf dem sie sonst zu stehen pflegen – vor Augen zu führen. Man wird vom ersten Kapitel an gepackt und möchte nicht mehr aufhören zu lesen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Daniel Kehlmann: Die Vermessung der Welt; Rowohlt, 2008, ISBN 978-3499241000, broschiert, 304 Seiten, 9,90€

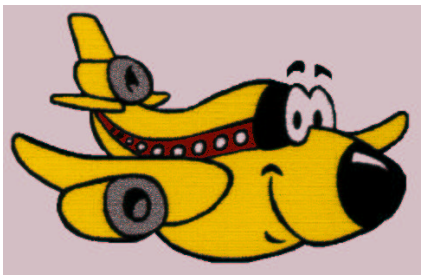
Art des Buches:	Mathematikhistorischer Roman
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 16 Jahren

Die besondere Aufgabe: Eingeschränkter Flugverkehr

von Hartwig Fuchs

Der Entschluss des Königs

In einem fernen Land regiert ein König, der mitunter zu eigenwilligen Entschlüssen neigt. So hat er einmal verfügt, dass an seinem Geburtstag jeglicher Auto-, Zug- und Schiffsverkehr zu ruhen habe, während der Flugverkehr nur unter einer starken Einschränkung erlaubt sei:



Von jeder Stadt seines Reiches darf nur ein einziges Flugzeug starten und zu der ihr am nächsten liegenden Nachbarstadt fliegen – wobei man wissen muss, dass alle Entfernungen zwischen den vielen Städten und ihren jeweils zugehörigen nächst gelegenen Nachbarstädten verschieden sind und außerdem die Anzahl der Städte ungerade ist.

Fragen des Königs an seinen Hof-Mathematicus:

(a) Gibt es eine Stadt, in der kein Flugzeug landet?

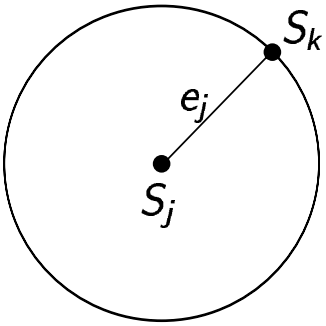
(b) Wie viele Flugzeuge können höchstens in einer Stadt ankommen?

In der Aufgabenstellung werden Bedingungen genannt, bei denen nicht leicht zu erkennen ist, ob bzw. wie man mit ihnen Antworten auf die Fragen (a) und (b) herleiten kann.

Es macht nun den Reiz der Aufgabe aus, dass man aus den wenigen vorhandenen Vorgaben eine solche Menge an geometrischen Informationen gewinnen kann, dass damit dann die Probleme (a) und (b) lösbar werden.

Überlegungen des Hof-Mathematicus

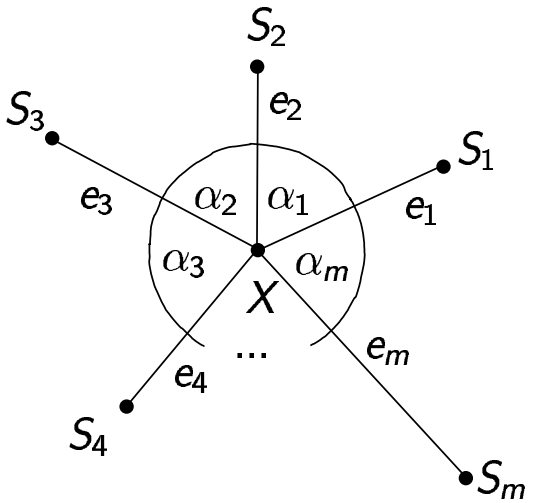
(a) In dem Königreich gebe es n Städte $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$, $n \geq 3$, und die Entfernung einer Stadt S_i von der ihr am nächsten liegenden Nachbarstadt sei e_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$.
Da die Zahlen e_i sämtlich verschieden sind, gibt es unter ihnen eine größte e_j oder zwei größte e_j und e_k – wenn nämlich mit $e_j = |S_jS_k|$ auch $e_k = |S_kS_j|$ ist.
Fallunterscheidung: Es ist $e_j > e_k$ oder es ist $e_j = e_k$.



Im ersten Fall zeichnet man um S_j einen Kreis mit Radius $|S_jS_k| = e_j$. Da dann S_k die am nächsten bei S_j liegende Stadt ist, befinden sich die übrigen $n-2$ Städte S_i, $i \neq j, i \neq k$ außerhalb des Kreises. Wegen $e_i < e_j$ fliegt daher kein Flugzeug von S_i nach S_j. Aber wegen $e_k < e_j$ fliegt auch kein Flugzeug von S_k nach S_j
Es gibt also eine Stadt – nämlich S_j – in der kein Flugzeug landet.

Im zweiten Fall gilt wegen $e_j = e_k$:
In S_k landet nur das Flugzeug aus S_j und in S_j nur das Flugzeug aus S_k. Für die übrigen $n-2$ Städte S_i, $i \neq j, i \neq k$ ergibt sich nun wieder die oben angegebene Alternative.
Im ersten Fall gelangt man zu einer Aussage wie oben und man ist fertig. Im zweiten Fall beginnt man wieder mit der Fallunterscheidung für die dann übrigen $n-2$ Städte; usw.
Dieser Prozess endet entweder mit obiger Situation oder es bleibt eine Stadt S_m übrig, in der kein Flugzeug landet.

(b) Es sei X eine der n Städte des Königreichs, in der m Flugzeuge ankommen, die z. B. in den Städten $S_1, S_2, S_3, ..., S_m$ gestartet seien, $m < n$.
Die m Flugstrecken S_iX, $i = 1, 2, 3, ..., m$, bilden dann die von X ausgehenden Strahlen eines Sterns.
Denn keine Stadt S_j, $j \neq i$, kann auf einem Strahl durch S_i liegen: Sonst läge nämlich – von X aus gesehen – S_j entweder zwischen X und S_i und es wäre $e_i = |S_iS_j| < |S_iX|$, und das Flugzeug flöge von S_i nach S_j statt nach X oder S_j läge hinter S_i und weil dann $e_j = |S_jS_i| < |S_jX|$ wäre, flöge das Flugzeug von S_j nach S_i und nicht nach X.



Der Hof-Mathematicus will nun zeigen:

(1) Die m Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m$ des Sterns sind alle $> 60°$.

Zum Nachweis von (1) benötigt er einmal die altbekannte Tatsache:

(2) In einem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber;

sowie eine oft übersehene Eigenschaft eines nicht gleichseitigen Dreiecks:

(3) In einem nicht gleichseitigen Dreieck ist mindestens ein Winkel $> 60°$.

Denn wären die Dreieckswinkel – sie seien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – sämtlich $\leq 60°$, dann wäre mindestens einer von ihnen $< 60°$. Dann aber wäre die Winkelsumme im Dreieck $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 < 3 \cdot 60° = 180°$ – ein Widerspruch.

Nun zu (1). Für je zwei Punkte (= Städte) S_i und S_{i+1} des Sterns, $i = 1, 2, 3, ..., m$, $S_{m+1} = S_1$ gesetzt, gilt:
Im Dreieck $\triangle S_i X S_{i+1}$ ist die Strecke $S_i S_{i+1}$ die längste Seite:
Denn wäre $S_i S_{i+1}$ kürzer als $S_i X$, dann wäre $e_i = |S_i S_{i+1}|$ und das Flugzeug müsste von S_i nach S_{i+1} statt nach X fliegen; entsprechendes gelte, wenn $S_i S_{i+1}$ kürzer als $S_{i+1} X$ wäre.
Aus (2) folgt daher: Der größte Winkel im Dreieck $\triangle S_i X S_{i+1}$ ist α_i.
Dann aber ergibt sich aus (3), dass $\alpha_i > 60°$ ist für $i = 1, 2, 3, ..., m$, womit (1) gezeigt ist.

Für den Stern gilt nun, dass $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_m = 360°$ sein muss. Diese Bedingung ist wegen (1) nur erfüllbar, wenn $m \leq 5$ ist, weil für $m \geq 6$ aus (1) folgt, dass $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_m > 6 \cdot 60° = 360°$ – ein Widerspruch.
Aus $m \leq 5$ schließt der Hof-Mathematicus: In einer jeden der n Städte des Königreichs können nicht mehr als fünf Flugzeuge ankommen.

Die Lösung des Hof-Mathematicus

Als der Hof-Mathematicus seine Ergebnisse dem König auf einem in Schönschrift abgefassten Dokument vorstellen will, sagt der ungeduldig: „Mach's kurz, Zahlenmeister!", worauf der Hof-Mathematicus sehr kurz und bündig erwidert: „Meine Antworten: (a) ja, (b) höchstens 5 Flugzeuge."
Danach hat er seine Ausarbeitung des Flugverkehr-Problems an MONOID zur Veröffentlichung geschickt.

Aufgaben zum Neuen Jahr

von Hartwig Fuchs

Ein Zahlenbandwurm

Mathis schreibt die Zahlen von 1 bis 2008 hintereinander. Es entsteht der riesige Zahlenbandwurm

1234567891011...200620072008.

Wie viele Ziffern hat diese Zahl?

Wahr oder falsch?

a) Die Zahl $2008^{2007}+1$ ist ohne Rest durch 2009 teilbar.

b) Die Zahl $2007^{2008}-1$ ist ohne Rest durch 2006 teilbar.

Eine Menge mit 2008 Elementen

Eine Menge $\mathbb{M}$ besteht aus 2008 natürlichen Zahlen, deren Quersummen jeweils 2007 sind.
Bestimme $\mathbb{M}$ so, dass die in $\mathbb{M}$ vorkommenden Zahlen kleinst möglich sind.

Eine größt mögliche Menge

Eine Menge $\mathbb{M}$ besteht aus aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen, für die gilt: Jeweils drei verschiedene Elemente haben ein Produkt > 2008 und eine Summe < 2008.
Bestimme diejenige Menge $\mathbb{M}$, die möglichst viele Elemente enthält.

Farbige Punkte auf einem Kreis

Auf einem Kreis liegen 2007 Punkte, von denen einer rot und alle übrigen Punkte blau gefärbt sind.
Wähle nun einen beliebigen dieser Punkte und ersetze jeden seiner Nachbarpunkte durch einen neuen Punkt, der blau bzw. rot ist, wenn der alte Nachbarpunkt rot bzw. blau war.

a) Kannst Du mit endlich vielen solcher Ersetzungen erreichen, dass nur noch rote Punkte auf dem Kreis liegen?

b) Wie lautet die Antwort, wenn sich 2008 Punkte auf dem Kreis befinden?

Ein Wunsch der Redaktion

	15		
	14x	3	
20	x	7	18

Setze in die freien Kästchen des Quadrates positive ganze Zahlen ≤ 28 so ein, dass gilt:

1. Alle 16 Zahlen im Quadrat sind verschieden.
2. Die Produkte der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte sowie in den beiden Diagonalen sind gleich.

a) Bestimme die Zahlen des Quadrats!
Wie heißt das zehnmal vorkommende magische Produkt?

b) Ersetze nun die Zahlen des Quadrats durch Buchstaben gemäß der Tabelle:

1	2	3	4	5	6	7	10	12	14	15	18	20	21	24	28
E	J	E	E	S	E	AH	U	U	G	I	R	S	N	N	T

Dann ergibt sich ein Wunsch der MONOID-Redaktion für unsere L(o)eser.

Die Lösungen findet Ihr auf Seite 15

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Aufgabe

In Heft 89 schlugen wir die Untersuchung des folgenden Algorithmus vor:

(1) Wähle eine bliebige ganze Zahl $Z \geq 10$ aus lauter verschiedenen Ziffern.
(2) Bilde durch Umstellung der Ziffern von Z alle überhaupt möglichen neuen Zahlen.
(Dabei dürfen auch Zahlen mit führenden Ziffern 0 entstehen, z. B. $Z = 601 \to 016, 061, 106, 160, 160, 610.$)
(3) Addiere Z und alle zugehörigen neuen Zahlen auf und dividiere die Summe durch die Quersumme von Z.

Untersuche nun Fragen wie:
Gibt es Gesetzmäßigkeiten bei Anwendung des Algorithmus?
Ist (3) stets ganzzahlig ausführbar?
Hinweis: Untersuche zunächst zweiziffrige, dann dreiziffrige,... Zahlen Z.(H.F.)

Ergebnisse

Malte Meyn von der Freien Waldorfschule Erlangen fand folgende Gesetzmäßigkeiten:
Z ist kleiner als 10^{10}, da es nur zehn verschiedene Ziffern gibt. (Tatsächlich gilt aus diesem Grunde sogar $Z \leq 9\,876\,543\,210$.)
Durch Umstellen der Ziffern z_1, z_2, ..., z_n von Z, $n \geq 2$, entstehen $n!$ neue Zahlen.
Werden Z und diese permutierten Zahlen addiert, ergibt sich

$$(n-1)! \cdot Q(Z) \cdot \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1},$$

wobei $Q(Z)$ die Quersumme von Z bezeichnet. Also führt nach Division durch $Q(Z)$ der Algorithmus bei fester Stellenzahl n stets auf die gleiche ganze Zahl, nämlich

$$(n-1)! \cdot 111...1$$

mit n Einsen.
Alexey Tyukin vom Gymnasium Mainz-Gonsenheim kommt für die Fälle $n = 2, 3, 4$ und 5, die er einzeln untersucht, zu den entsprechenden Ergebnissen.

Die Seiten für den Computer-Fan

Spezielle Primzahlen

Für $n = 1$, 2 und 4 ist $n^n + 1$ eine Primzahl.
Kannst Du eine weitere Zahl n angeben, für die $n^n + 1$ eine Primzahl ist?
Untersuche auch die allgemeinere Fragestellung:
Für welche natürlichen Zahlen $n \leq 100$ ist $n^n + m$ eine Primzahl, wenn m nacheinander die Zahlen 1 bis 20 durchläuft? Natürlich darfst Du auch größere Zahlbereiche untersuchen!

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2008 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 90

Kleine Ursache – große Wirkung

Die Pellsche* Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$, in der D eine natürliche Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist, hat stets ganzzahlige Lösungen (x, y). Wir bezeichnen das Lösungspaar (x, y) mit dem kleinsten positiven x-Wert bei von 0 verschiedenem y-Wert als die kp-Lösung der Pellschen Gleichung.

Zum Beispiel gilt:
Die Gleichung $x^2 - 10y^2 = 1$ hat die kp-Lösung $(19, 6)$;
die Gleichung $x^2 - 11y^2 = 1$ hat die kp-Lösung $(10, 3)$, und
die Gleichung $x^2 - 12y^2 = 1$ hat die kp-Lösung $(7, 2)$.

Die kp-Lösung kann sich bei geändertem D-Wert aber noch viel drastischer verändern, auch wenn sich der D-Wert nur wenig, z. B. um 1 wie oben, ändert.

Überzeuge Dich davon durch Ermittlung der kp-Lösung in den Fällen $D = 10n + m$ für $1 \leq n \leq 9$, $0 \leq m \leq 2$. (nach H.F.)

Lösung

Mit dem Computeralgebra-System Derive 6.1 und dem Befehl

VECTOR(VECTOR(VECTOR(IF(INTEGER?($\sqrt{}$(1 + (10·n + m)·y^2)),
["D=", 10·n + m, ";", $\sqrt{}$(1 + (10·n + m)·y^2), y], ""),
y, 0, 500), m, 0, 2), n, 1, 9)

* nach John Pell, *01.03.1611, †12.12.1685, englischer Mathematiker

können wir den vorgeschlagenen Bereich untersuchen; in Abhängigkeit von D erhalten wir dabei folgende kp-Lösungen:

D	10	11	12	20	21	22
kp-L	(19,6)	(10,3)	(7,2)	(9,2)	(55,12)	(197,42)
D	30	31	32	40	41	42
kp-L	(11,2)	(1520,273)	(17,3)	(19,3)	(2049,320)	(13,2)
D	50	51	52	60	61	62
kp-L	(99,14)	(50,7)	(649,90)	(31,4)	(?,?)	(63,8)
D	70	71	72	80	81	82
kp-L	(251,30)	(3480,413)	(17,2)	(9,1)	—	(163,18)
D	90	91	92			
kp-L	(19,2)	(1574,165)	(1151,120)			

Wie die Tabelle zeigt, machen x und y bei den D-Werten 22, 52, 70 und 82 schon deutliche Sprünge, die bei 31, 41, 71, 91 und 92 noch gewaltiger ausfallen. Bei 61 aber ist der Sprung so enorm, dass y derart weit heraufgesetzt werden muss, dass E.K. die Rechnung mit Derive angesichts der drastisch ansteigenden Rechenzeit ohne Resultat abgebrochen hat.

So ging es auch **Malte Meyn** von der Freien Waldorfschule Erlangen, **Martin Reinhardt** vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal und **Alexey Tyukin** vom Gymnasium Mainz-Gonsenheim, die mit ihren C++- bzw. Java-Programmen alle Werte der Tabelle ermittelten, bei $D = 61$ aber auch „die Flinte ins Korn“ warfen.

Das C++-Programm von **Christian Behrens** vom Gymnasium am Römerkastell Alzey lieferte ebenfalls die in der Tabelle enthaltenen Werte, für $D = 61$ und $D = 81$ jedoch nicht korrekte Ergebnisse.

Florian Schweiger vom Gymnasium Marktoberdorf hat mit seinem Programm in Visual Basic andere Zahlenbereiche für D untersucht und auch dort teilweise erhebliche Schwankungen in den kp-Lösungen festgestellt.

Nach Auskunft des Aufgabenstellers Hartwig Fuchs ist für $D = 61$ die kp-Lösung $(1\,766\,319\,049, 226\,153\,980)$, womit – verglichen mit den kp-Lösungen für $D = 60$ und $D = 62$ – wirklich ein ganz enormer Sprung auftritt!

Lösungen zu den Aufgaben zum Neuen Jahr von Seite 10

Ein Zahlenbandwurm
Die Zahl hat $1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1009 = 6925$ Ziffern.

Wahr der falsch?

a) Für n ungerade und zwei beliebige positive reelle Zahlen ist

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... + y^{n-1}).$$

Setze darin $n = 2007$, $x = 2008$ und $y = 1$ ein. Dann folgt: $2008^{2007} + 1$ ist ohne Rest durch $2008 + 1 = 2009$ teilbar.

b) Für n gerade und zwei beliebige positive reelle Zahlen ist

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1}).$$

Setze darin $n = 2008$, $x = 2007$ und $y = 1$ ein. Dann erhältst Du: $2007^{2008} - 1$ ist ohne Rest durch $2007 - 1 = 2006$ teilbar.

Eine Menge mit 2008 Elementen
Die kleinste Zahl k mit der Quersumme 2007 ist $k = \underbrace{99...99}_{\text{223 Ziffern}}$ mit 223 Ziffern 9.
Somit ist $k \in \mathbb{M}$.
Die 223 nächst größeren Zahlen in $\mathbb{M}$ sind 1899...9, 1989...9, ..., 199...98 mit jeweils 222 Ziffern 9.
Darauf folgen die 223 Zahlen 2799...9, 2979...9, ..., 299...97 mit jeweils 222 Ziffern 9 usw. und schließlich die 223 Zahlen 9099...9, 9909...9, ..., 999...90 mit jeweils 223 Ziffern 9.
Die Menge $\mathbb{M}$ besteht also aus den $1 + 9 \cdot 223 = 2008$ angegebenen kleinst möglichen Zahlen mit Quersumme 2007.

Eine größt mögliche Menge
Es sei k die kleinste Zahl aus $\mathbb{M}$. Dann sind $k+1$ und $k+2$ ebenfalls in $\mathbb{M}$.
Für diese drei Zahlen soll gelten: $k(k+1)(k+2) > 2008$.
Dann aber ist $k \geq 12$, weil für $k \leq 11$ gilt: $k(k+1)(k+2) \leq 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716 < 2008$, währnd für $k \geq 12$ gilt: $k(k+1)(k+2) \geq 12 \cdot 13 \cdot 14 = 2184 > 2008$.
Daraus folgt noch: $\mathbb{M}$ enthält mindestens die drei Elemente 12, 13, 14, weil deren Summe $12 + 13 + 14 = 39 < 2008$ ist.
Es sei nun g das größte Element in $\mathbb{M}$. Dann sind auch $g-1$ und $g-2$ in $\mathbb{M}$ und es soll gelten: $g + (g-1) + (g-2) = 3g - 3 < 2008$, also $g < 2011 : 3$.
Folglich ist $g \leq 670$.
Da nun die gesuchte Menge $\mathbb{M}$ möglichst viele Elemente enthalten soll, ist $\mathbb{M} = \{12, 13, 14, ..., 668, 669, 670\}$ zu wählen.

Farbige Punkte auf einem Kreis

a) Wir denken uns die 2007 Punkte der Reihe nach mit 1 bis 2007 nummeriert. Zu Beginn sei P_2 der einzige rote Punkt r. Wenn wir auf ihn die Ersetzungsregel anwenden, dann bleibt P_2 erhalten, während seine blauen Nachbarpunkte P_1 und P_3 durch rote Punkte ersetzt werden – wir bezeichnen sie wieder mit P_1 und P_3. Für diesen Sachverhalt schreiben wir kurz: $(P_1P_2P_3)$: $brb \mapsto rrr$.
Wählen wir danach der Reihe nach die Punkte P_{4n+2}, $n = 1, 2, ..., 501$, so erhalten wir jeweils $(P_{4n+1}P_{4n+2}P_{4n+3})$: $bbb \mapsto rbr$.
Folglich sind nur noch die Punkte mit durch 4 teilbaren Nummern $4n$, $n = 1, 2, ..., 501$, blau.
Wählt man jetzt der Reihe nach die Punkte P_{4n+1} und wendet auf ihre Nachbarpunkte die Ersetzungsregel an, dann ergibt sich $(P_{4n}P_{4n+1}P_{4n+2})$: $brb \mapsto rrr$.
Damit befinden sich nur noch rote Punkte auf dem Kreis.

b) Wenn sich 2008 Punkte auf dem Kreis befinden, dann ist die Aufgabe nicht lösbar.
Es sei A die Anzahl der roten Punkte auf dem Kreis. Wir wählen einen beliebigen Punkt P_x der Farbe y und wenden auf ihn die Ersetzungsregel an. Vier Fälle sind möglich:

$$(P_{x-1}P_xP_{x+1}): \quad byb \mapsto ryr \quad \text{oder} \quad byr \mapsto rby \quad \text{oder} \quad ryb \mapsto byr \quad \text{oder} \quad ryr \mapsto byb$$

Im ersten Fall ändert sich A um $+2$, im zweiten und dritten Fall bleibt A unverändert und im vierten Fall ändert sich A um -2.
Da am Anfang $A = 1$ war und A sich nur um $2m$, $m \in \{-1, 0, 1\}$ ändert, kann A niemals 2008 werden.

Ein Wunsch der Redaktion

a	15	b	c
d	$14x$	3	e
f	g	h	i
20	x	7	18

Zunächst besetzen wir die leeren Felder des Quadrats mit Buchstaben.
Wir bezeichnen alle Zeilen-, Spalten und Diagonalenprodukte mit m.

a) Aus Spalte 2 und der zweten Diagonalen (von links unten nach rechts oben) folgt: $15 \cdot 14x \cdot g \cdot x = m = 20 \cdot g \cdot 3 \cdot c \Rightarrow 7x^2 = 2c \Rightarrow x$ ist gerade. Wäre $x \geq 4$, dann wäre $7x^2 \geq 112$ und daher $c \geq 56 > 28$. Also gilt: $x = 2$, $c = 14$ und $m = 20 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 18 = 5040$ (4. Zeile).
Aus Spalte 2 ergibt sich dann: $g = 6$.
Aus der ersten Diagonalen folgt: $a \cdot 28 \cdot h \cdot 18 = 5040 \Rightarrow ah = 10 \Rightarrow h = 1, 2, 5$ oder 10.
Nach der dritten Spalte ist $b \cdot 3 \cdot h \cdot 7 = 5040$, also $bh = 240$.

Wäre hier $h = 1$, 2 oder 5, dann wäre $b \geq 240 : 5 > 28$. Somit ist $h = 10$, $b = 24$ und wegen $ah = 10$ ist noch $a = 1$.
Aus der 2. Zeile und der 1. Spalte ergibt sich $d \cdot 28 \cdot 3 \cdot e = 1 \cdot d \cdot f \cdot 20 \Rightarrow 21e = 5f$, so dass f ein Vielfaches von 21 ist, weil $f \leq 28$ sein muss, also $f = 21$ und daher $e = 5$ und schließlich $d = 12$, $i = 4$.

b) Mit den berechneten Werten kannst Du den Wunsch der MONOID-Redaktion rekonstruieren:

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 91

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Immer wieder 100

Kevin hat Ferien und daher viel Zeit. Was macht er? Natürlich: Er stellt Rechenaufgaben zusammen. (Was soll er auch sonst machen?)
Seine Lieblingszahl ist die 100 und für die sucht er Aufgaben. Er verwendet bei seinen Aufgaben keine anderen Zeichen als die Ziffern 0, 1, ..., 9, die Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$, $:$ sowie die Klammern.
Wenn er zum Beispiel mit genau zehn Ziffern 3 das Ergebnis 100 erhalten will, so kann er $33 + 33 + 333 : (3 \cdot 3) - 3 = 100$ bilden.
Welche Rechenaufgabe kann er bilden, um das Ergebnis 100 zu erhalten

a) mit genau fünf Ziffern 1;

b) mit genau fünf Ziffern 3;

c) mit genau fünf Ziffern 5;

d) mit den neun Ziffern von 1 bis 9, von denen jede genau einmal verwendet wird? (WK)

Lösung:
Es gibt viele mögliche Lösungen, etwa

a) $111 - 11 = 100$,

b) $3 \cdot 33 + 3 : 3 = 100$,

c) $(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5 = 100$ oder auch $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$,

d) $1+2+3+4+5+6+7+8 \cdot 9 = 100$ oder $(1+2+8+9) \cdot 5 + (3+7) - (4+6)$ oder $(1 + 2 + 8 + 9) \cdot 5 \cdot (3 + 7) : (4 + 6)$.

Unterwegs
Michael Geister-Fahrer ist mit seinem schwarzen Audi unterwegs. Bevor er losfährt, sieht er auf den Tachostand: „18981 km, das ist ja eine Palindromzahl!“, stellt er erfreut fest. Zwei Stunden Autofahrt später zeigt sein Tachometer erstmals wieder eine Palindromzahl, also eine Zahl, die von vorne gelesen dasselbe ist wie von hinten gelesen.

a) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit ist Michael Geister-Fahrer gefahren?
b) Wie viele fünfstellige Palindromzahlen kann das Tachometer anzeigen (führende Nullen sind also nicht zugelassen)?
c) Wie viele Palindromzahlen kann es anzeigen, wenn wir führende Nullen nicht verbieten und einstellige Zahlen nicht mitzählen – mit anderen Worten: Wie viele Palindromzahlen gibt es zwischen 10 und 100000? (MG)

Lösung:

a) Die nächste Palindromzahl ist 19091, er ist bis dahin also 110km gefahren. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit $v = \frac{110\text{km}}{2\text{h}} = 55\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
b) Für die erste Ziffer gibt es 9 Möglichkeiten, für die zweite 10 Möglichkeiten und die dritte Ziffer wieder 10 Möglichkeiten. Die letzten beiden Ziffern sind durch die ersten beiden festgelegt. Damit ergeben sich insgesamt 900 verschiedene Palindromzahlen.
c) Ähnlich wie in Teil b) können wir uns überlegen: Es gibt neun zweistellige Palindromzahlen, 90 dreistellige, ebenfalls 90 vierstellige und 900 fünfstellige Palindromzahlen. Zusammen sind das $9 + 90 + 90 + 900 = 1089$ Palindromzahlen.

Ein Ratespiel
Mathis soll aus einem Behälter mit zwei roten (r) und einer weißen (w) – sonst aber ununterscheidbaren Kugeln – mit verbundenen Augen zwei Kugeln ohne Zurücklegen ziehen. Er gewinnt, wenn er richtig voraussagt, ob das Ergebnis seiner Ziehung zwei Kugeln von verschiedener (v) oder von gleicher (g) Farbe sein wird.
Mathis behauptet: „Ich werde zwei verschieden farbige Kugeln ziehen.“
Ist Mathis Vorhersage willkürlich oder lässt sie sich begründen? (H.F.)

Lösung:
Es bezeichne $P(r)$ die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen; entsprechend seien mit den Benennungen der Aufgabe $P(w)$, $P(v)$ und $P(g)$ zu verstehen.

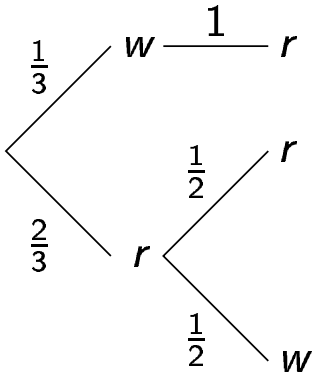
Für den ersten Zug gilt: $P(r) = \frac{2}{3}$ und $P(w) = \frac{1}{3}$

Für den zweiten Zug gilt: $P(r) = \frac{1}{2}$, falls beim ersten Zug r eintrat und
$P(r) = 1$, falls beim ersten Zug w eintrat.
Ferner ist $P(w) = \frac{1}{2}$, falls beim ersten Zug r eintrat.

Nach den so genannten Pfadregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt – vergleiche nebenstehene Figur:

$$P(v) = P(r, w \text{ oder } w, r) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$P(g) = P(r, r) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass Mathis Vermutung zutrifft, ist also doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht gilt. Und dies ist der Grund für seine Prognose.

Mittagessen in einer Ganztagsschule

Bei der Essensausgabe in einer Ganztagsschule standen genau sieben Schüler und Schülerinnen in einer Reihe hintereinander. Olaf stellte fest:

(1) Kein Mädchen stand unmittelbar vor einem anderen Mädchen.

(2) Genau einer der Jungen stand unmittelbar zwischen zwei Mädchen.

(3) Genau eines der Mädchen stand unmittelbar zwischen zwei Jungen.

(4) Genau einmal kam es in der Reihe vor, dass drei Jungen unmittelbar hintereinander standen.

Finde alle Möglichkeiten für die Reihenfolge von Mädchen und Jungen! Erkläre, warum es keine weiteren Möglichkeiten gibt! (WK)

Lösung:

Im Folgenden soll für Mädchen die Abkürzung M und für Jungen die Abkürzung J gelten.

Nach Information (2) ergibt sich zwangsläufig in dieser Reihenfolge eine Teilgruppe MJM, nach Information (4) eine Teilgruppe JJJ. Zwischen diesen Teilgruppen darf wegen (1) kein Mädchen stehen und wegen (4) kein Junge.

Also ergeben sich für Sechsergruppen genau zwei Möglichkeiten, nämlich

(A) MJM JJJ oder (B) JJJ MJM.

Im Falle (A) kann vor der Sechsergruppe wegen (1) kein Mädchen stehen, wegen (3) aber auch kein Junge. Hinter der Sechsergruppe kann wegen (4)

kein Junge stehen, also ergibt sich für die Siebenergruppe die erste Möglichkeit *MJM JJJ M*.
Im Falle (B) kann hinter der Sechsergruppe wegen (1) kein Mädchen stehen, wegen (3) aber auch kein Junge. Vor der Sechsergruppe kann wegen (4) kein Junge stehen, also ergibt sich für die Siebenergruppe die zweite Möglichkeit *M JJJ MJM*.

Stimmt's?
Nach Angaben des Branchenverbandes Bitkom vom 16.05.2007 seien in Deutschland 297 Milliarden Minuten im Jahr 2006 vertelefoniert worden. Unter der Überschrift „60 Stunden an Strippe und Handy" schlussfolgern die Redakteure der digitalen gmx-Nachrichten, dass folglich ein Deutscher im Schnitt etwa 60 Stunden im Jahr mit Telefonieren verbringt. Stimmt das? (Valentin Blomer)

Lösung:
Leider nein. Es stimmt zwar, dass 300 Mrd. Minuten : 80 Mio. Menschen ungefähr 60 Std./Mensch ist, aber zum Telefonieren gehören in der Regel zwei, das heißt, jede Telefonminute zählt für zwei Leute. Deshalb wäre die richtige Schlagzeile „120 Stunden an Strippe und Handy".

Differenz von Quadratzahlen
Unter welcher Bedingung ist die Differenz zweier Quadratzahlen n^2 und m^2

a) teilbar durch $2, 3, 5$ oder 7
b) teilbar durch $2, 4, 8, \ldots 2^j$, $j > 3$?

(WJB)

Lösung:

a) $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$ ist durch eine Primzahl wie $2, 3, 5$ oder 7 genau dann teilbar, wenn es die Summe $n+m$ oder die Differenz $n-m$ ist (oder beide). Für 2 ist dies genau dann der Fall, wenn n und m beide gerade oder beide ungerade sind.
b) In a) ist gezeigt, dass für die Teilbarkeit durch 2 und durch 4 notwendig und hinreichend ist, dass n und m beide gerade oder beide ungerade sind. Zur Teilbarkeit durch 8 muss die Summe oder die Differenz durch 4 teilbar sein. Für 2^j, $(j > 3)$ muss die Summe durch ein 2^l teilbar sein und die Differenz durch 2^{j-l} mit $1 \leq l < j$.

Kakuro
In die weißen Felder des nebenstehenden Gitters ist jeweils eine der Ziffern 1, 2,...,9 einzutragen. Dabei muss in jeder Zeile die links davon stehende Summe, in jeder Spalte die jeweils darüber stehende Summe erreicht werden.
Wiederholungen von Ziffern in einer Summe ist dabei verboten, zum Beispiel darf in der ersten Zeile links nicht 1, 4, 4 oder 2, 5, 2 stehen. An anderen Stellen dürfen die Ziffern allerdings wieder auftreten. (WJB)

Nebenstehend eine mögliche *Lösung*.

	16	26	16		9	23	10
9	1	5	3	12	5	6	1
18	4	6	8	14 / 32	4	8	2
26	9	8	5	4	10 / 6	7	3
9	2	7	15 / 9	8	1	2	4
	21	15 / 18	1	9	5	20	16
23	4	5	8	6	11 / 13	9	2
10	7	3	16 / 6	5	7	3	1
7	1	2	4	16	2	6	8
19	9	8	2	11	4	2	5

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Napp, Klapp und Zapp
Herr Napp, Herr Klapp und Herr Zapp treffen sich zum Skat. Ihre Vornamen sind (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Konrad, Emil und Willi. Einer von ihnen trägt keinen Hut, ein anderer einen grauen und der dritte einen bunten Hut.
Nach dem Spiel stellen sie fest:

(1) Der Gewinner der Skatrunde trägt den grauen Hut.
(2) Herr Klapp saß noch nie vorher auf Herrn Napps Sofa.
(3) Willi trägt keinen Hut.
(4) Herr Napp findet es komisch, dass er nicht gewonnen hat.
(5) Konrad saß schon das vorige Mal auf Herrn Napps Sofa.
(6) Herr Zapp trägt den bunten Hut.

Löse nun die folgenden Aufgaben:

a) Stelle die Vor- und Nachnamen richtig zusammen!
b) Wer hat die Skatrunde gewonnen?

Wahr oder falsch?
Es seien a und b positive ganze Zahlen, $a < b$, deren Differenz 2 beträgt. Dann gilt: $ab + 1$ ist stets eine Quadratzahl. — Stimmt das? (H.F.)

Rätselhaftes Alter
Aisha erzählt: „Nächstes Jahr ist das Alter meines Großvaters eine Quadratzahl. Meine Urgroßmutter, seine Mutter, lebt auch noch; sie hatte vor einem Jahr die darauffolgende Quadratzahl als Alter. Als sie meinen Großvater geboren hat, war ihr Alter durch 7 teilbar."

a) Wie alt sind der Großvater und seine Mutter?
b) Für welche natürliche Zahlen a gelten die obigen Bedingungen $(a+1)^2+1$ ist um ein Vielfaches von 7 mehr als a^2-1 sonst noch?
c) Gibt es noch weitere positive reelle Zahlen a, für die diese Bedingungen gelten? (WJB)

Zum Jahresende
Wie viele der Zahlen $1, 2, \ldots 2007$ lassen sich als Potenzen von 5 mit natürlichen Zahlen als Exponenten oder als Summen von solchen schreiben? (H.F.)

Auf der neuen Schule
Die sechs Freundinnen Anna, Christel, Denise, Juliane, Melanie und Sarah sind von der Grundschule auf das Leonhard-Euler-Gymnasium gewechselt. Leider sind sie in sechs verschiedene Klassen gekommen. Am Nachmittag des ersten Schultags treffen und unterhalten sie sich. Dabei stellen sie auch fest, dass die Raumnummern ihrer Klassenräume sechs verschiedene dreistellige Zahlen sind, die aber alle aus den gleichen Ziffern bestehen.
Anna: „Ich bin diejenige, die von uns den Raum mit der kleinsten Raumnummer hat."
Christel: „Und meine ist um genau 450 größer als deine, Andrea."
Denise: „Meine Raumnummer ist nicht durch 2 teilbar."
Juliane: „Die Nummer unseres Klassenraumes ist durch 11 teilbar."
Melanie: „Bei uns ist sie durch 8 teilbar."
Sarah: „Bei uns durch 3."
Wessen Klassenraum hat welche Raumnummer? (MG)

Bemerkenswerte Quadrate
Den drei Quadratzahlen 7^2, 41^2 und 285^2 ist eine bemerkenswerte Eigenschaft gemeinsam.

Finde heraus, um welche Eigenschaft es sich handeln könnte!

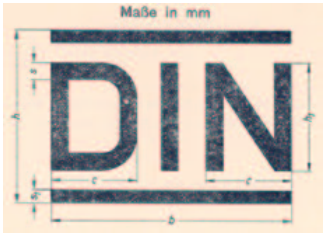
(Kannst Du weitere Quadratzahlen mit dieser Eigenschaft bestimmen?) (H.F.)

Länge einer Kreissehne
In einem Kreis ist jede Sehne, die kein Durchmesser ist, kürzer als ein Durchmesser. Du siehst es! Kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 925: Deutsches Institut für Normung



In Deutschland sind Papierbögen (wie sich das gehört!) nach DIN genormt. (Ist das wieder eine Blüte typisch deutscher Gründlichkeit oder hat das sogar einen Sinn?) Ein Bogen der Größe DIN A0 hat die Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$. Dabei verhalten sich die Seitenlängen des Blattes wie $1 : \sqrt{2}$.

a) Berechne die Seitenlängen des DIN A0-Bogens.

b) Den DIN A1-Bogen erhält man (sowie auch jede weitere Stufe aus der vorherigen) durch Halbieren des Blattes an der längeren Seite. In welchem Verhältnis stehen dann die Seitenlängen?

c) Die MONOID-Hefte haben DIN A5-Format. Berechne die Seitenlängen und die Fläche!

d) Der Ausgangs-DIN-A0-Bogen hat eine Dicke von 0,2 mm. Dieser wird nun auf DIN A10 gefaltet. Wie dick ist der Bogen nun?

(MG, nach einer Idee von Michael Schönberg, Melsbach)

Aufgabe 926: Freitag, der 13.

Im Internet findet man, dass es in jedem Kalenderjahr mindestens einen und höchstens drei Freitage gibt, die auf einen 13. des Monats fallen. Kannst Du das nachweisen? (Valentin Blomer)

Aufgabe 927: Gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke

Gibt es gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke mit lauter rationalen Seitenlängen? (H.F.)

Aufgabe 928: Ein Teilbarkeitsproblem

Die Zahlen 2^2+1, 2^4-1, 2^6+1, 2^8-1 sind sämtlich durch 5 teilbar. Gilt das auch allgemein: Für $n = 2, 6, 10, 14, \ldots$ sind 2^n+1 und $2^{n+2}-1$ durch 5 teilbar? (H.F.)

Aufgabe 929: Erdumkreisung

Angenommen, Julia würde einmal entlang des Äquators um die Erde laufen – um wieviel länger ist die Strecke, die ihr Kopf zurückgelegt hat, im Vergleich zur Strecke, die ihre Füße zurückgelegt haben?
Wie verhält es sich auf dem Mond, dem Mars, der Sonne? (MG)

Aufgabe 930

M sei eine Menge aus 100 nicht negativen Zahlen.

a) Für je zwei Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Begründe: Höchstens eine Zahl aus M ist < 1; sie ist aber $\neq 0$.

b) Für je vier Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $< \frac{5}{4}$. Dann ist das Produkt aller Zahlen aus M kleiner als 265.

c) Für je sechs Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Dann ist das Produkt aller Zahlen aus M größer als 35.

(H.F.)

Aufgabe 931: Wahr oder falsch?

Alle Zahlen $12^n - 1$ sind Vielfache von 11;
alle Zahlen $13^n - 1$ sind Vielfache von 12;
alle Zahlen $14^n - 1$ sind Vielfache von 13... und so weiter, für $n = 1, 2, 3, ...$
Sind diese drei Behauptungen und alle durch „und so weiter“ angedeuteten Behauptungen richtig? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 91

Klassen 8–13

Aufgabe 918: Wahr oder falsch?

Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Dann ist $p^5 - p$ durch 240 ohne Rest teilbar. (H.F.)

Lösung:

Die Einerziffer einer Primzahl $p \geq 5$ ist $1, 3, 7$ oder 9. Dann hat p^5 die gleiche Einerziffer wie $1^5, 3^5, 7^5$ oder 9^5, nämlich wieder $1, 3, 7$ oder 9. Daher hat $p^5 - p$ die Einerziffer 0 – also ist $p^5 - p$ ein Vielfaches von 10.
Wegen $p^5 - p = p(p^4 - 1) = p(p^2 - 1)(p^2 + 1) = p(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ gilt: Von den beiden Zahlen $p - 1$ und $p + 1$ ist eine ein Vielfaches von 2, die andere ein Vielfaches von 4, sowie eine der beiden zusätzlich ein Vielfaches von 3; somit ist $p(p - 1)(p + 1)$ ein Vielfaches von $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Da außerdem

p^2+1 ein Vielfaches von 2 ist, gilt p^4-1 ist ein Vielfaches von 48.
Damit ist p^5-p ein Vielfaches von 10 und von 48, mithin von 240.

Aufgabe 919: Primzahlen erzeugende Formeln

Leonhard Euler entdeckte 1772, dass der Term $P(n) = n^2+n+41$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, 100$ insgesamt 96 Primzahlen liefert. Überhaupt erzeugt $P(n)$ ungewöhnlich viele Primzahlen – zum Beispiel für $n = 0, 1, 2, \ldots 11000$ genau 4923 Primzahlen, aber eben nicht für alle Zahlen n.

Begründe: Ein Term $Q(n) = an^2+bn+p$, wobei a und b natürliche Zahlen ≥ 1 sind und p ein Primzahl ist, kann nicht für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ nur Primzahlen darstellen. (H.F.)

Lösung:
Wegen $Q(p) = ap^2+bp+p = p(ap+b+1)$ ist $Q(p)$ keine Primzahl. Ebenso sind z. B. alle $Q(mp)$ mit $m \in \mathbb{N}$ keine Primzahlen.

Aufgabe 920: Ganzzahlige Lösungen

Die Gleichung $x^2+14 = (x+8)y$ hat möglicher Weise ganzzahlige positive Lösungen x, y. Bestimme gegebenenfalls das Lösungspaar (x, y) mit dem kleinsten ganzzahlig-positiven x. (H.F.)

Lösung:

Angenommen, es gibt eine ganzzahlige Lösung (x, y) der gegebenen Gleichung mit $x \geq 1$, $y \geq 1$.

Dann ist $x+8$ ganzzahlig und ein Teiler von x^2+14. Also ist $x+8$ auch ein Teiler von $(x+8)\cdot x-(x^2+14) = 8x-14$ und mithin Teiler von $(x+8)\cdot 8-(8x-14) = 78$. Daraus folgt – da 78 nur die Teiler 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78 hat –, dass $x+8 \in \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$ ist.

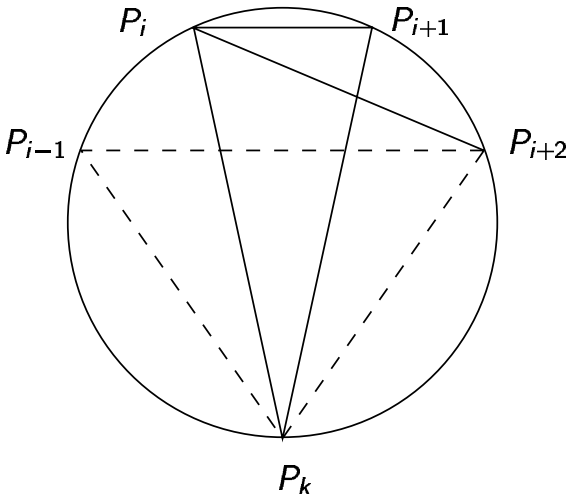
Wegen $x \geq 1$ ist noch $x+8 \geq 9$.

Sei also $x+8 = 13$. Dann ist $x = 5$ und $y = 3$. Dies ist offensichtlich die positiv-ganzzahlige Lösung der Gleichung mit dem kleinstmöglichen x.

Aufgabe 921: Gleichschenklige Dreiecke mit bunten Eckpunkten

Bei einem regelmäßigen 2007-Eck $P_1, P_2, \ldots, P_{2007}$ seien alle Eckpunkte rot oder blau eingefärbt; von jeder Farbe gebe es mindestens einen Eckpunkt.
Dann kannst Du stets drei gleichfarbige Eckpunkte finden, so dass das Dreieck mit diesen drei Eckpunkten gleichschenklig ist. Begründe dies. (H.F.)

Lösung:



Wegen der ungeraden Anzahl von Eckpunkten des 2007-Ecks gibt es (mindestens) zwei benachbarte Eckpunkte P_i und P_{i+1} von gleicher Farbe.

1. Von den Punkten P_{i-1} und P_{i+2} sei mindestens einer von der gleichen Farbe wie P_i und P_{i+1}, z. B. sei das P_{i+2} . Dann ist das Dreieck $\Delta P_iP_{i+1}P_{i+2}$ gleichschenklig ($|P_iP_{i+1}| = |P_{i+1}P_{i+2}|$) mit drei gleichfarbigen Eckpunkten.
2. P_{i-1} und P_{i+2} seien beide von anderer Farbe als P_i und P_{i+1}. Wegen der ungeraden Eckenzahl des 2007 -Ecks liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke P_iP_{i+1} diametral gegenüber von P_i und P_{i+1} ein Eckpunkt P_k des 2007-Ecks.
   Hat P_k die gleiche Farbe wie P_i und P_{i+1}, dann ist das Dreieck $\Delta P_iP_{i+1}P_k$ gleichschenklig ($|P_iP_k| = |P_{i+1}P_k|$) mit drei gleichfarbigen Eckpunkten.
   Hat aber P_k eine andere Farbe als P_i und P_{i+1}, dann ist das Dreieck $\Delta P_{i-1}P_{i+2}P_k$ gleichschenklig ($|P_{i-1}P_k| = |P_{i+2}P_k|$) mit drei gleichfarbigen Eckpunkten.

Aufgabe 922: Niemals eine Quadratzahl

Begründe, dass keine Zahl der Form 3^m+3^n+1, m und n positive ganze Zahlen, eine Quadratzahl ist. (H.F.)

Lösung:

Angenommen, es gibt ganzzahlige Exponenten m und n, nicht beide $= 1$, so dass $3^m + 3^n + 1 = k^2$ ist. Sei $m > 1$ und $n \geq 1$.

Dann ist k^2, also auch k ungerade und daher sind $k \pm 1$ beide gerade.

Wegen $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ ist $3^m + 3^n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ und so $3^m + 3^n$ das Produkt zweier aufeinanderfolgender gerader Zahlen. Somit folgt aus der Annahme, dass $3^m + 3^n = 8v$, v eine natürliche Zahl, ist.

In einem Zwischenschritt beweisen wir die Aussage: $3^l = 8w + 1$ oder $3^l = 8w + 3$ für $l = 1, 2, 3, ...$

1. Die Aussage gilt für $l = 1, 2$ und 3: $3^1 = 8 \cdot 0 + 3$, $3^2 = 8 \cdot 1 + 1$, $3^3 = 8 \cdot 3 + 3$.
2. Die Aussage sei bewiesen für alle Exponenten 1, 2, 3,...,$l - 1$.
3. Für l gilt wegen $3^l = 3 \cdot 3^{l-1} = 3(8w + i) = 8 \cdot 3w + 3i$ mit $i = 1$ oder $i = 3$.

Für $i = 1$ ist $8 \cdot 3w + 3i = 8(3w) + 3$;
für $i = 3$ ist $8 \cdot 3w + 3i = 8(3w) + 9 = 8(3w + 1) + 1$.

Also gilt die Aussage für $I = 1, 2, 3, ...$

Dies können wir einsetzen:
$3^m + 3^n = 8v = (8w_1 + 1 \text{ oder } 3) + (8w_2 + 1 \text{ oder } 3) = 8(w_1 + w_2) + j = 8v + j$,
wobei $j = 2$ oder $= 4$ oder $= 6$ ist.
Wegen $3^m + 3^n = 8v$ muss aber $j = 0$ sein.
Aus diesem Widerspruch folgt: Die Annahme ist falsch. Es gilt die Behauptung, dass $3^m + 3^n + 1$ keine Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 923: Kubische Extrapolation

Durch vier Punkte in der Ebene mit verschiedenen x-Koordinaten geht genau eine kubische Parabel $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man finde fünf positive Zahlen $y_1 < y_2 < y_3 < z_3 \leq 1{,}01y_3 < y_4$, so dass die vier Punkte $(1, y_1)$, $(2, y_2)$, $(3, y_3)$, $(4, y_4)$ eine kubische Parabel mit $a = 1$ bestimmen, während die vier Punkte $(1, y_1)$, $(2, y_2)$, $(3, z_3)$, $(4, y_4)$ eine kubische Parabel mit $a = -1$ bestimmen.
Das zeigt, dass etwa bei kubischer Extrapolation von vier Messwerten bei kleiner Störung nur eines Wertes (hier um 1%) ein völlig anderes Ergebnis entsteht.
(Valentin Blomer)

Lösung:
Es gibt viele Lösungen, z. B. $y_1 = 374$, $y_2 = 390$, $y_3 = 400$, $y_4 = 410$, $z_3 = 404$.
Dies liefert die Polynome

$$x^3 - 214x^2 + 1061x - 884 \quad \text{und} \quad -x^3 - 200x^2 + 1033x - 868.$$

Man findet dies entweder durch Probieren oder einfacher durch die Lagrangesche Interpolationsformel. Der Leitkoeffizient a ist gegeben durch $-\frac{y_1}{6} + \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{6}$.

Bemerkung des Aufgabenstellers: Die Idee zu dieser Aufgabe kam mir bei der Geburt meiner Tochter Johanna, die vor kurzem zur Welt kam. Babies werden regelmäßig gemessen und gewogen, doch sind diese Messungen sehr ungenau, weil kleine Kinder zum Beispiel beim Messen strampeln. Es ist zwar nicht zu erwarten, dass die Wachstumskurve eines Kindes auf einer kubischen Kurve liegt, sollte allerdings trotzdem jemand auf die Idee kommen, bei vier Werten kubisch zu extrapolieren, kann es passieren, dass das Kind voraussichtlich in zwei Monaten −2,30m groß ist...
Das Ganze geht natürlich auch schon bei drei Werten und einer Parabel.

Aufgabe 924: Konstruktion mit beschränkten Mitteln

Hans besitzt nur ein unmarkiertes Lineal und einen eingerosteten Zirkel, das heißt es ist ein fester Abstand eingestellt, mit dem Hans zeichnen kann, aber er kann diesen nicht ändern.
Er kann damit ein Paar sich rechtwinklig schneidender Strecken konstruieren. Wie macht er das?
Gib, wenn möglich, mehrere verschiedene Konstruktionen an. (H.F.)

Lösungen:
Man macht sich leicht klar, dass folgende Figuren mit Lineal und eingerostetem Zirkel konstruierbar sind:

(1) Eine Raute – die Diagonalen der Rauten sind orthogonal.

(2) Ein Halbkreis samt Durchmesser – die Verbindungsstrecken eines beliebigen Punktes auf dem Halbkreis mit den Endpunkten des Durchmessers sind orthogonal (Thaleskreis).

(3) Zu einem Winkel α seinen Nebenwinkel $180° - \alpha$ sowie jeweils die Halbierenden der Winkel – die Winkelhalbierenden sind orthogonal.

(4) Die Mittelsenkrechte auf eine Strecke – dabei müssen die Punkte unter Umständen mit Hilfe des Zirkels näher zueinander "verschobe" werden. Alternativ die ähnliche Konstruktion:

(5) Zwei (beliebige) sich schneidende Kreise – die Verbundungsstrecken der beiden Schnittpunkte resp. der beiden Kreismittelpunkte stehen senkrecht aufeinander.

(6) Ein regelmäßiges Sechseck – die Verbindungsstrecken von zwei gegenüberliegenden Punkten P_1 und P_4 sowie die Strecke zwischen den einem dieser Punkte benachbarter Punkte (P_6 und P_2 resp. P_3 und P_5) stehen senkrecht aufeinander.

(7) Die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechseck – wähle dann vier benachbarte Punkte. Diese bilden ein Parallelogramm, die Verbindungsstrecke des Diagonalenschnittpunktes mit dem Kreismittelpunkt ist orthogona zu den parallelen Seiten des Parallelogramms.

(8) Einen Kreis mit Mittelpunkt M, einen Punkt P außerhalb des Kreises (nicht zu weit entfernt) und dann die Tangenten an den Kreis durch diesen Punkt P – die Verbindungsstrecke zwischen den Berührpunkten der Tangenten an den Kreis und die Gerade MP stehen senkrecht aufeinander.

(9) Zwei beliebige sich schneidene Geraden – zeichne einen Kreis um den Schnittpunkt, die vier neuen Schnittpunkte des Kreises mit den Diagonalen bilden ein Recheck mit vier rechten Winkeln!

(H.F., MG, Felix Liebrich, Anselm Schäfer, Alexej Tyukin)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Wichtig ist, dass man nicht aufhört zu fragen."

Albert Einstein
*14.03.1845 in Ulm, †18.04.1955 in Princeton, USA;
deutscher Physiker, 1921 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet

Wer forscht mit?
Zum Fermat-Problem aus Heft 89

Aufgabenstellung

Der große Pierre de Fermat (1601 – 1665) hat behauptet, er besitze einen Beweis für die folgende Aussage:

(F) Es gibt nur zwei natürliche Zahlen m und n, für die gilt:
Die Quadratzahl m^2 und die Kubikzahl n^3 haben den Abstand 2.

Fermat hat ein Zahlenpaar (m^2, n^3) angegeben, für das diese Aussage zutrifft. Sein Beweis für die Eindeutigkeit ist uns jedoch nicht überliefert.

Untersuche dieses Fermat-Problem und mögliche Verallgemeinerungen (andere Abstände, andere Potenzen,...).

Hinweis: Schon die Wiederentdeckung des Fermat-Paares (m^2, n^3) und der Nachweis, dass es keine weiteren Paare gibt, stellen ein schönes Ergebnis dar.

(H.F.)

Lösung des eigentlichen Fermat-Problems

Annahme: m^2 und n^3, m und n natürliche Zahlen, haben den Abstand 2.
Wir zeigen zunächst, dass dann gilt:

(1) $n < m$

Aus $n \geq m$ und damit $n^3 - m^2 = 2$ folgt nämlich: Für $n = 1$ ist $1 - m^2 = 2$ nicht möglich und für $m = 1$ ist $n^3 - 1 = 2$ unerfüllbar; für $n \geq 2$ und $m \geq 2$ ist $n^3 = n \cdot n^2 \geq 2n^2 \geq 2m^2 = m^2 + m^2 > m^2 + 2$, so dass $n^3 - m^2 > 2$ im Widerspruch zu $n^3 - m^2 = 2$ steht. Also gilt (1).
Daraus folgt nun: $m = n + c$ für ein $c \geq 1$. Damit lautet das Fermat-Problem:

(2) $|n^3 - (n + c)^2| = 2$.

Für $n = 2$, $c \geq 1$ ist (2), also $|8 - (2 + c)^2| = 2$ und somit $c^2 + 4c = 2$ oder 6 unerfüllbar.
Für $n = 3$ hat (2), also $|27 - (3 + c)^2| = 2$ und somit $c^2 + 6c = 16$ oder 20, genau eine Lösung, nämlich $c = 2$. Dann ist $m = 5$, und $(m^2, n^3) = (25, 27)$ ist das von Fermat angegebene Zahlenpaar.
Nun ist noch zu zeigen: Für $n \geq 4$ hat die Gleichung (2) keine Lösung, wie auch immer c gewählt wird.
Für $n = 4$ rechnet man leicht nach: $|4^3 - (4 + c)^2| = 2$, also $c^2 + 8c = 46$ oder 50, hat keine ganzzahlige Lösungen c; und falls $n \geq 5$ und $n \geq c$ ist, gilt:

$n^3-(n+c)^2 \geq n^3-(n+n)^2 = n^2(n-4) > 2$ bzw. $(n+c)^2-n^3 \leq 4n^2-n^3 = n^2(4-n) < 0$, so dass die Aussage gezeigt ist.
Den analog zu behandelnden Fall $5 \leq n < c$ überlassen wir unseren Lesern.

Bemerkung: Eine Variante des Fermat-Problems (F) ist die Fragestellung:

(∗) Gibt es eine Quadratzahl m^2 und eine Kubikzahl n^3, die den Abstand d haben, $d = 1, 3, 4, 5, ...$

Dieser Problemkreis ist weitgehend unerforscht. Nur für $d = 1$ hat man zeigen können, dass es ein einziges Lösungspaar (m^2, n^3) gibt – nämlich $(3^2, 2^3)$.(H.F.)

Ergebnisse unserer Leser

Das Fermat-Paar $(3^2, 2^3)$ gefunden haben **Christian Behrens** vom Gymnasium am Römerkastell in Alzey, **Malte Meyn** von der Freien Walldorfschule Erlangen und **Alexey Tyukin** vom Gymnasium Mainz-Gonsenheim.
Florian Schweiger vom Gymnasium Marktoberdorf hat in dem Buch „Fermats letzter Satz“ von Simon Singh Ausführungen zu Fermats Beweis der Eindeutigkeit des Lösungspaares $(3^2, 2^3)$ gefunden und ein Visual-Basic-Programm geschrieben, das für Potenzen bis zum Exponenten 10 und für Abstände bis zu 20 alle existierenden Paare auflistet, wobei er nur soweit rechnen konnte, dass die jeweilige Potenz unter $4 \cdot 10^{14}$ blieb. Dabei ergab sich eine lange Liste von Ergebnissen, zu denen Florian bemerkt: „Auffallend ist zum Beispiel, dass auch bei den Potenzen 3 und 24, wo ja immerhin bis $2 \cdot 10^7$ gerechnet wurde, manche Abstände wie 5, 6, 10, 14, 16 gar nicht vorkommen. Die Resultate bei den höheren Potenzen sind natürlich weniger aussagekräftig, da ja teilweise nur Basen bis 28 getestet werden konnten. Trotzdem sind auch teilweise recht hohe und ungewöhnliche Werte unter den Resultaten, z. B. dass 5234^3 und 378661^2 den Abstand 17 und 55^5 und 22434^2 den Abstand 19 haben.“

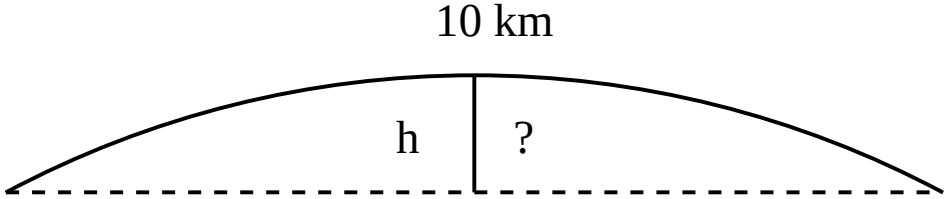
Erhebung durch Sport

von Duco van Straten

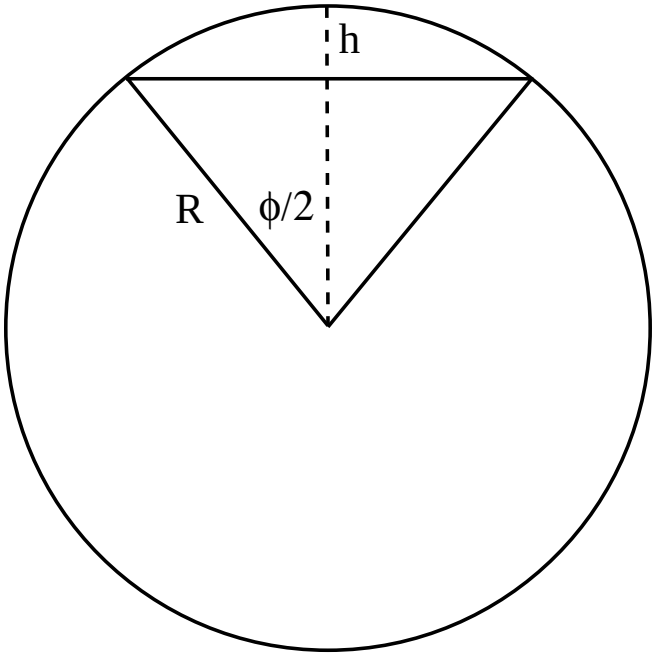
Seit einiger Zeit laufe ich mit meinem Freund Robert jeden Sonntagmorgen in der Rheinaue. Unser Fernziel ist es, einmal beim Mainzer Marathon mitlaufen zu können. Aber erst müssen wir die magische Grenze von zehn Kilometern Dauerlauf durchbrechen, was uns bis jetzt noch nicht gelungen ist.
„Zehn Kilometer, das ist auch deswegen so schwer, weil die Erde rund ist!“, witzelte Robert einmal. „Was meinst Du genau?“, fragte ich. „Na ja, wir müssen nicht bloß unsere zehn Kilometer schaffen, sondern wegen der Erdkrümmung

erhebt sich unser Weg. Der kürzeste Weg zwischen unserem Anfangs- und Endpunkt verläuft eben *durch* die Erde!“ Jetzt verstand ich, was er meinte, und beim Laufen versuchten wir zu schätzen, wie groß diese Erhebung wohl sein würde. Wir machten einige Überschlagsrechnungen, aber kamen zu keinem schlüssigen Ergebnis.

Frage: Wie groß ist die größte Erhebung h eines Bogens von 10 Kilometer Länge über der kürzesten Verbindungslinie, welche durch die Erde verläuft? Versuche diese Zahl zu schätzen, bevor Du weiter liest oder rechnest.
Hinweis: Die Erde wird dabei als perfekte Kugel angenommen, und der Bogen soll Teil eines Großkreises sein, also eines Kreises mit dem Erdmittelpunkt als Kreismittelpunkt.
Natürlich bleiben wir immer auf demselben Niveau (zum Beispiel auf Normalnull) und müssen eigentlich nach der Tiefe der direkten Verbindungsstrecke zwischen Start- und Zielpunkt unter uns fragen.



Wieder zu Hause, nach dem Duschen, wollte ich es doch genau wissen und rechnete nach.
Einem Bogen der Länge d auf der Kugel entspricht ein Winkel $\varphi = 2\pi\frac{d}{U}$, wobei U den Umfang der Erde darstellt, also etwa 40000 km, wenn der Bogen Teil eines Großkreises ist.



Die „Erhebung“ ist dann

$$h = R\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right),$$

wobei R den Erdradius bezeichnet und aus

$$U = 2\pi R$$

ermittelt werden kann. Für h finden wir insgesamt:

$$h = \frac{U}{2\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot d}{U}\right)\right).$$

Für $d = 10\,\text{km} = 10^4\,\text{m}$ ergibt sich:

$$\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{2 \cdot U} = \pi \cdot \frac{10^4}{4 \cdot 10^7} = \frac{\pi}{4000}.$$

Mit einem Taschenrechner findet man

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0{,}9999996916\ldots, \quad 1 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0{,}3084 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$h = \frac{4 \cdot 10^7\,\mathrm{m}}{2\pi} \cdot 0{,}3084 \cdot 10^{-6} = 1{,}963335378\ \mathrm{m}.$$

Die „Erhebung" ist also fast zwei Meter!

Beim Joggen hatten wir natürlich keinen Taschenrechner dabei. Wir hätten das Ergebniss aber auch ohne Taschenrechner, im Kopf, berechnen können. Die *Taylor-Reihe** der Cosinus-Funktion lautet

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

Für kleine Werte von x bekommen wir eine gute Annäherung des Cosinus, wenn wir nur die ersten zwei Terme betrachten:

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Diese Näherungsformel können wir auch über die Verdopplungsformel für die Cosinus-Funktion erhalten:

$$\cos(2y) = \cos^2(y) - \sin^2(y) = 1 - 2\sin^2(y).$$

Mit $y := \frac{x}{2}$ und $\sin(y) \approx y$ für sehr kleine Werte von $|y|$ erhalten wir ebenfalls

$$\cos(x) \approx 1 - 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Somit bekommen wir schließlich

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{4000}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4000}\right)^2 = 0{,}3084 \cdot 10^{-6},$$

was uns auf dasselbe Ergebnis führt.

Frage: Wie groß ist nun die „Erhebung", wenn ein richtiger Marathon von 42 km (ebenfalls entlang eines Großkreises) gelaufen wird?**

---

* Benannt nach Brook Taylor, *18.08.1685 in Edmonton, †29.12.1731 in Somerset House, London

** Antwort: Mehr als 34 Meter!

Eine Intervallschachtelung für e

von Duco van Straten

Die Eulersche Zahl

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709 3...$$

ist eine der prominentesten Konstanten der Mathematik* und spielt zusammen mit π und i die Hauptrolle in vielen Formeln der Analysis. Verknüpft sind sie in der wohl berühmtesten Formel von Euler**

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

welche schon seit Jahrhunderten bei Schönheitswettbewerben für Formeln ganz vorne mitmischt.
Oft wird e eingeführt anhand der Idee der *kontinuierlichen Verzinsung*. Die Geschichte geht dann in etwa so: Im Königreich Wucherei nehmen die Banken gerne hohe Zinsen. Bank A verlangt 100% Zinsen auf Jahresbasis, und nach einem Jahr beträgt die zurückzuzahlende Summe das

$$(1+1) = 2$$

-fache der ausgeliehenen Summe. Wucher! Bank B nimmt nur 50% Zinsen, allerdings pro *halbem* Jahr. Nach einem Jahr müssen wir dann das

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

-fache der geliehenen Summe zurückzahlen. Mehr Wucher! Bank C hat eine noch bessere Idee: einen Zinssatz von 33,33..%, aber hier für jeweils vier Monate. Hier müssen wir nach einem Jahr das

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}37...$$

-fache zurückzahlen. Noch mehr Wucher!
Es ist klar, wie es weitergeht: Wir erhalten eine monoton steigende Folge

$$(1+1) < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 < ... < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

und bei der UWB (Ultimative Wucher Bank) betreibt man nun *kontinuierliche Verzinsung* und geht zum Grenzwert $n \longrightarrow \infty$ über:

$$e := \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

---

* Mehr zur Zahl e könnt Ihr auch im letzten MONOID-Heft nachlesen.

** Leonhard Euler, *15.04.1707 bei Basel, †18.09.1783 in Sankt Petersburg

ist also die ultimative Wucherzahl.

Eine andere bekannte Formel für e ist die unendliche Reihe:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Unten wird gezeigt, wie man dies mit Hilfe der binomischen Formel aus der Definition von e herleiten kann.

Der Mathematiker Jonathan Sondow hat neulich eine hübsche geometrische Intervallschachtelung für die Zahl e angegeben. Wir fangen mit dem Intervall $I_1 = [2, 3]$ an. Dieses Interval teilen wir in zwei gleiche Teile, und I_2 sei das zweite dieser Intervalle, also $I_2 = [2{,}5, 3] = \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right]$. Jetzt teilen wir I_2 in drei gleiche Teile, und I_3 sei wieder das zweite Interval. So können wir weiter gehen und induktiv Intervalle $I_4, I_5, \ldots, I_n, \ldots$ definieren. Das Rezept ist stets: Teile I_{n-1} in n Teilintervalle und I_n sei das zweite dieser n Teilintervalle. Also

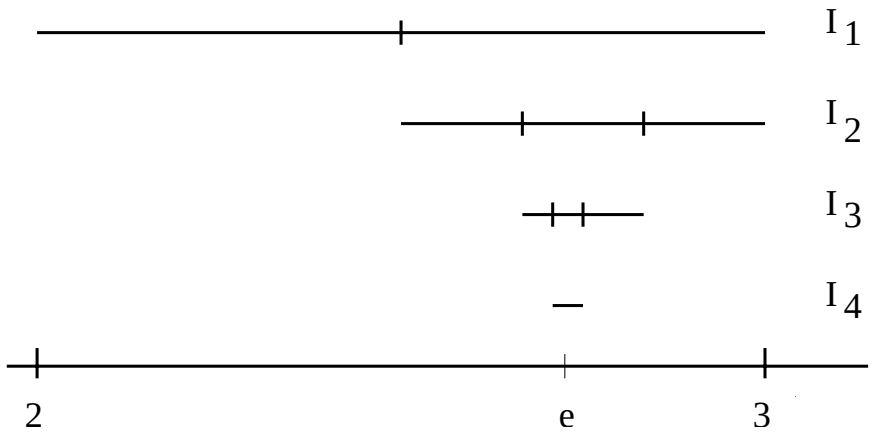
$$I_2 = \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right],$$

$$I_3 = \left[\frac{16}{3!}, \frac{17}{3!}\right],$$

$$I_4 = \left[\frac{65}{4!}, \frac{66}{4!}\right].$$

Bestimmen Sie selbst $I_5, I_6, \ldots$.

Man bemerke, dass in dieser Darstellung die Zähler der Randpunkte sich stets um 1 unterscheiden, da die Länge des n-ten Intervals gerade $\frac{1}{n!}$ ist.



Die Reihenformel für e ist äquivalent zu der Aussage

$$\{e\} = \cap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Aus dieser Intervalschachtelung kann man nun leicht folgern:

Satz: $e \notin \mathbb{Q}$
Beweis: Für $n \geq 2$ liegt I_{n+1} strikt zwischen den Endpunkten von I_n. Dies sind Zahlen der Form $\frac{a}{n!}$ und $\frac{a+1}{n!}$ für ein $a \in \mathbb{N}$, welches von n abhängt. Der Schnittpunkt e aller dieser Intervalle kann also für kein n eine Bruchzahl mit Nenner $n!$ sein kann. Da aber jeder Bruch $\frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!}$ als Bruch mit Nenner $q!$ geschrieben werden kann, folgt dass e keine Bruchzahl ist. QED

Die binomische Formel besagt

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$$

Wir setzen nun $x = \frac{1}{n}$ ein und erhalten

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + ... + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Es ist

$$\binom{n}{1}\frac{1}{n} = 1$$
$$\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}$$
$$\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}$$

und allgemein

$$\binom{n}{m}\left(\frac{1}{n}\right)^m = \frac{1}{m!}\frac{n}{n}.\frac{(n-1)}{n}.\frac{(n-2)}{n}...\frac{(n-m+1)}{n}$$

Da

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n} = 1$$

und allgemeiner

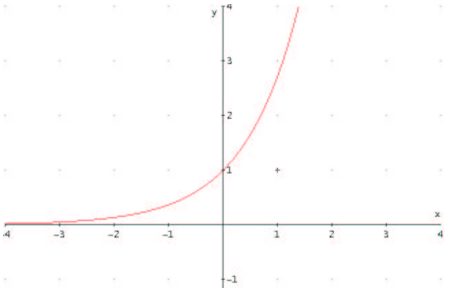
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{n^m} = 1$$

ist, findet man bei Grenzwertübergang $n \longrightarrow \infty$

$$e = \lim_{n\longrightarrow\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$$

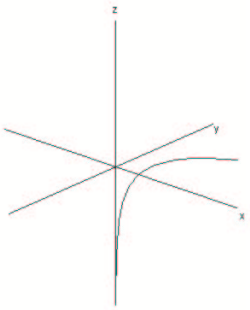
Der „Exponentialtrichter“

von Ekkehard Kroll

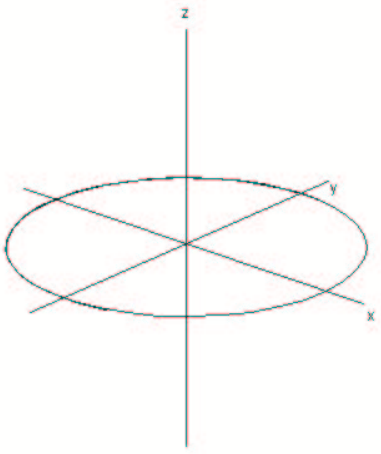


Exponentialfunktionen a^x können zu beliebiger positiver reeller Basiszahl a definiert werden; eine besondere Rolle spielt als Basis die Eulersche Zahl e (siehe vorigen Abschnitt), da mit e^x natürliche Wachstumsvorgänge beschrieben werden können. In Computerprogrammen wird diese Exponentialfunktion mit `exp(x)` bezeichnet. Der Graph von $y = \exp(x)$ zeigt nebenstehenden Verlauf.

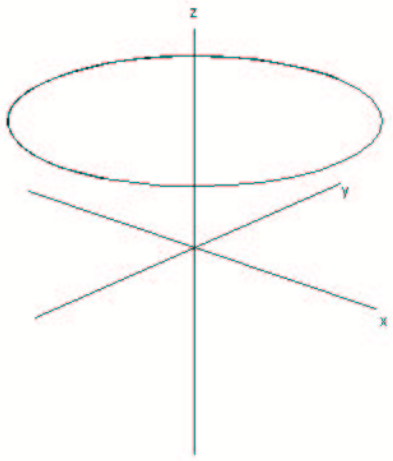
Die Funktionswerte liegen sämtlich im positiven Bereich, sie nehmen mit wachsendem x rapide zu und mit fallendem x ebenso rapide ab. Wir wollen nun mit diesem Graphen mit dem Computeralgebra-System *Derive 6.1* durch Rotation einen „Trichter“ im dreidimensionalen Raum erzeugen. Die Lage von Punkten im Raum wird durch ein Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, bezogen auf ein kartesisches (x, y, z)-Koordinatensystem, beschrieben. Der Graph der Exponentialfunktion $x = \exp(z)$ in der (x, z)-Ebene wird dann durch die Tripel $(\exp(z), 0, z)$ bei variablem z erzeugt.



Eine Rotation dieses Graphen um die z-Achse wird durch die Multiplikation von $\exp(z)$ mit $\cos(t)$ für die x-Koordinate bzw. mit $\sin(t)$ für die y-Koordinate bewirkt; der Grund: $(r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), 0)$ beschreibt einen Kreis vom Radius r in der (x, y)-Ebene bzw. $(r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), h)$ einen Kreis vom Radius r in einer Horizontalebene im Abstand $|h|$ über oder unter der (x, y)-Ebene:

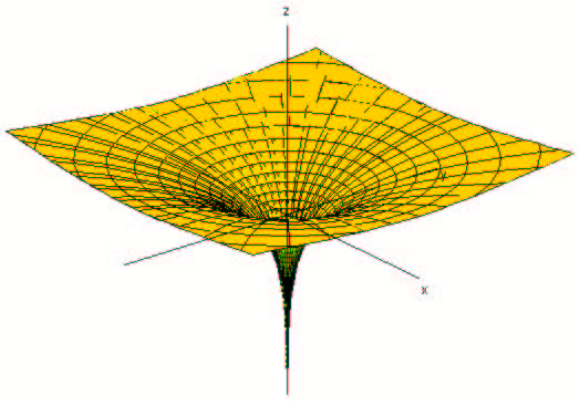


$r = 4, h = 0$

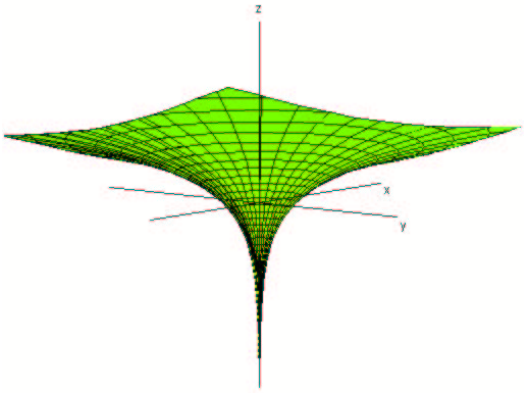


$r = 4, h = 3$

Durch $(\exp(z)\cdot\cos(t), exp(z)\cdot\sin(t), z)$ bringen wir den Radius in die gewünschte exponentielle Abhängigkeit von z. Es entsteht eine Art Trichter:



(Sicht von oben)



(Sicht von unten)

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung, Satz, Korrektur der eingesandten Lösungen und Internet: Marcel Gruner, Juliane Gutjahr
Betreuung der Abonnements: Katherine Pillau

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

▶ **Herausgeber und Redaktion** begrüßen herzlich alle neuen Leserinnen und Leser, die mit dem Schuljahr 2007/08 zu der sich stetig vergrößernden Schar der MONOID-Freunde hinzugekommen sind.

Bitte daran denken, den Abo-Beitrag (falls noch nicht geschehen) rechtzeitig auf das MONOID-Konto Nr. 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen! Das gilt auch für alle treuen Leserinnen und Leser, die ihr Jahresabonnement im Jahr 2008 fortsetzen wollen.

▶ Am 24. November fand im Atrium Maximum der Johannes Gutenberg-Universität Mainz die **MONOID-Feier 2007** statt, in deren Rahmen die Preise für die Leistungen des vergangenen Schuljahres 2006/07 vergeben wurden. Allen Preisträgerinnen und Preisträgern herzlichen Glückwunsch seitens der MONOID-Redaktion, insbesondere dem Gewinner des Goldenen M, **Malte Meyn** von der Freien Waldorfschule Erlangen! Der Sonderpreis, dieses Jahr in Form eines TI-NspireCAS-Rechner mit PC-Software, gestiftet von Texas Instruments, ging zum zweiten Mal in Folge an **Florian Schweiger** vom Gymnasium Marktoberdorf; auch ihm nochmals herzliche Gratulation! In ihren Grußworten gingen der Uni-Vizepräsident für Forschung, Prof. Dr. **Johannes Preuß**, und der Dekan des Fachbereichs Physik, Mathematik und Informatik, Prof. Dr. **Martin Hanke-Bourgeois**, auf die Bedeutung von MONOID an der Schnittstelle zwischen Schule und Universität ein. Auch die Ministerin für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz, Frau **Doris Ahnen**, die aus Termingründen nicht zur Feier kommen konnte, drückte in ihrem Grußschreiben ihre Freude darüber aus, dass sich so viele Schülerinnen und Schüler in ihrer Freizeit gerne mit Mathematik beschäftigen, und sie beglückwünschte die Preisträgerinnen und Preisträger.
Den Festvortrag mit stochastischem Hintergrund hielt unser Redaktionsmitglied Prof. **Wolfgang Bühler**, Ph.D., vom Institut für Mathematik der Universität Mainz zum Thema: „Wie sieht ein ‚beliebiges' Dreieck aus – spitzwinklig oder stumpfwinklig?".
Einen Foto-Rückblick gibt es im Internet (`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`). Redaktion und Herausgeber bedanken sich ganz herzlich bei allen Akteurinnen und Akteuren für das Gelingen dieser schönen Feier. Die MONOID-Feier 2008 wird erstmals am Gymnasium Oberursel stattfinden.

▶ Auf der MONOID-Feier haben wir Euch auch eine kleine Auswahl der Exponate aus der Ausstellung **Mathematik be-greifen** gezeigt. Diese Mitmachausstellung, in der Ihr spielerisch und experimentell mathematische Entdeckungen machen könnt, ist wieder in Mainz zu sehen. Bis 1. Februar 2008 könnt Ihr sie noch im Museum für Antike Schifffahrt besuchen. Weitere Informationen im Internet unter `www.mathematik-begreifen.de`.
Danach geht es weiter in Ludwigshafen (14.02.–30.04.2008 im Stadtmuseum) und Bernkastel-Kues (24.10.–14.12.2008).

▶ Am 16. November 2007 fand der Festakt zum 5. Geburtstag des **Mathematikums Gießen** mit der Eröffnung des Minimathematikums und der Exponatpremiere „Kaleidozykel" statt (`www.mathematikum.de`).

▶ Auch in diesem Jahr ist der **digitale mathematische Adventskalender** mit 24 anwendungsmotivierten Aufgaben und sehr attraktiven Preisen ins Netz gestellt worden. Die Initiative des DFG-Forschungszentrums Matheon ist im Internet unter `www.mathekalender.de` zu erreichen. Auch wenn es für eine diesjährige Anmeldung zu spät ist, so könnt Ihr Euch dort trotzdem registrieren

und dann nächstes Jahr rechtzeitig informieren lassen, wenn der Adventskalender 2008 erscheint.

▶ Unter `www.bundeswettbewerb-mathematik.de` können die Aufgaben zur ersten Runde 2008 des **Bundeswettbewerbs Mathematik** eingesehen werden. Dieser Schülerwettbewerb ist für alle an Mathematik Interessierten und richtet sich an Schülerinnen und Schüler, die eine zur allgemeinen Hochschulreife führende Schule besuchen. Die Aufgaben müssen in ca. zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. Einsendeschluss ist der 1. März 2008.

(MG, E.K.)

Die MONOID-Preisträger 2007

Das Goldene M: Malte Meyn (Waldorfschule Erlangen)

Sonderpreis: Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf)

1. Preis: Lennart Adam, Alia'a Ahmed Doma, Anna Arent, Christian Behrens, Laura Biroth, David Feiler, Felix Liebrich, Martin Reinhardt, Connor Röhricht, Frank Schindler, Alexey Tyukin;

2. Preis: Charlotte Capitain, Thomas Geiß, Ann-Kathrin Hientzsch, Madeline Kohlhaas, Tim Lutz, Kevin Schmitt, Kathrin Stark;

3. Preis: Lena Baum, Tobias Braun, Shaima'a Ahmed Doma, Lena Baum, Alia'a el Bolock, Mariam und Selma Ismail El Sayyad, Mariam Emad, Karen Emil, Aline Endreß, Paulina Hauser, Simon Heinzmann, Annika Kohlhaas, Vivien Kohlhaas, Cornelie Koop, Elisabeth Kopf, Valentin Kuhn, Martin Alexander Lange, Marina Morad, Jennifer Peifer-Weiß, Alexander Rettkowski, Kai Roth, Thorsten Roth, Tobias Soldan, Tobias Thomas;

MONOID-Jahresabonnenment 2008: Stefan Albert, Maurice Paul Artelt, Lara Bergjohann, Stephan Böhmer-Horländer, Marc Dinges, Alexander Gerharz, Maximilian Haist, Meike Hickmann, Joel Jung, Patricia Kastner, Katharina Kober, Anna Katharina Lange, Philipp Mayer, Julia Müller, Andreas Pitsch, Lorena Ritzmann, Paul Schädrich, Hayat Selim, Lena Vogel, David Wander, Bettina Wiebe, Dorothea Winkelvoß, Magdalena Winkelvoß, Nada Zaghloul;

Knobelpreise für unsere jüngsten Löser als Ansporn und Anerkennung erhalten: Marielle Fröhlich, Jana Gillrath, Daniel Worring Pozo, Kim Vanessa Schneider, Luka Zajonz.

Das Goldene M und die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet, der Sonderpreis von Texas Instruments und Dr. Hartwig Fuchs.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Jahresendstand nach Heft 90

Die Klassenangaben beziehen sich auf das Schuljahr 2006/07.

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Laura Tabea Galkowski 10, Anne Hofmacher 2, Philipp Langer 9, Julia Scherner 7, Jakob Waldmann 6;
Kl. 6: Lara Bergjohann 39, Andreas Pitsch 31, Freya Roth 8, Benedikt Schneider 5, Selina Weinheimer 9;
Kl. 7: Maximilian Haist 41, Elisabeth Kopf 52, Kevin Schmitt 82, Anne Vorherr 8;
Kl. 8: Alexander Gerharz 36, Philipp Mayer 46, Sybille Mayer 13;
Kl. 10: Janina Braun 12;
Kl. 11: Patricia Kastner 34, David Spies 20.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 5: Jana Ballweber 18, Tim Brugger 7, Vincent Brugger 15, Leon Bungert 10, Gwendolyn Fuchs 12, Philip Rittmann 7, Philipp Sauerstopf 6, Sina Tischbierek 12, Panajota Tzamara 5, Katarina Vidovic 2;
Kl. 9: Lena Baum 57, Désirée Schalk 12;
Kl. 10: Felix Liebrich 92, Martin Reinhardt 103.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Samia Mohamed Roubaa 3; **Kl. 8:** Ossama Basent 7.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 32;
Kl. 10: Lennart Adam 92, Julia Müller 47;
Kl. 11: Christian Behrens 94, Martin Alexander Lange 65.

Bad Bergzabern, Alfred-Grosser-Gymnasium (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber):
Kl. 7: Katharina Albert 15, Max Broda 19, Kevin Kübel 3, David Wander 44;
Kl. 10: Anselm Schäfer 25.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 12: Laura Biroth 89.

Bad Homburg, Kaiserin-Friedrich-Gymnasium: Kl. 8: Gregor Angeloni 8.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 6: Frank Schindler 100.

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium:
Kl. 6: Marcella Beck 8; **Kl. 9:** Christian Beck 25.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:

Kl. 6: Christian Geiger 2, Florian Salamat 8, Frederik Träuble 7;
Kl. 7: Anton Zeeb 4;
Kl. 8: Daniel Frank 6, Patrick Grupp 4, Maximilian Stocker 8;
Kl. 9: Annika Vesenmaier 4.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 5: Paula Heimroth 8; **Kl. 6:** Katharina Bröhm 6;
Kl. 7: Katharina Busold 5, Paulina Hauser 53, Antonia Kalb 5, Nina Münkel 13, Lena Vogel 32, Lukas Vogel 10.

Erlangen, Freie Waldorfschule Erlangen: Kl. 9: Malte Meyn 122.

Freudenstadt, Realschule Freudenschadt: Kl. 7: Ines Gerber 6.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 4: Joachim Roth 7
Kl. 5: Mustafa Albay 3, Maurice Paul Artelt 41, Marc Dinges 31, Benedikt Franz 17, Isabell Hölzer 3, Elena Müller 12, Felix Rohde 3, Thorsten Roth 59, Aylin Yildiz 3;
Kl. 6: Tristan Hof 5, Dominik Jung 13;
Kl. 7: Marius Burkardt 29, Rolf Niedenthal 9, Florian Orschel 28, Julian Roth 7, Monja Schütz 8, Philipp Wenzel 25;
Kl. 8: Lara Czarnetzki 10, Kai Roth 64.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 8: Connor Röhricht 87.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuender Lehrer: Christoph Straub):
Kl. 6: Sheima'a Ahmed Doma 63, Nada Zaghloul 33;
Kl. 9: Alia'a Ahmed Doma 103, Karen Emil 50, Heba Mamdouh 22, Marina Morad 59; **Kl. 10:** Ghada Hesham 20, Hayat Selim 33, Noha Wahab 15;
Kl. 11: Alia'a el Bolock 56, Mariam und Salma Ismail El Sayyad 67, Mariam Emad 51.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 9: Freya Leuwer 10, Francesco Monteleone 2, Monika Nikolaus 3.

Lahnstein, Johannes-Gymnasium: Kl. 9: Kathrin Stark 75.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 11: Katharina Kober 36.

Ludwigshafen, Theodor-Heuss-Gymnasium:
Kl. 8: Stephan Böhmer-Horländer 39.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 5: Niklas Braun 13, Julia Braunschädel 7, Melina Cappel 11, Nihal Eken 10, Lucas Hippchen 9, Hanin Mohammed 5, Inga Stablo 8, Theodora Tsoutsouli 13,

Sara Widmer 9;
Kl. 7: Ann-Kathrin Hientzsch 73;
Kl. 8: Felix Steins 17, Ersan Tokcan 5, Malik Wagner 8, Thimo-Simon Wieber 10;
Kl. 10: Anna Becken 22, Meike Hickmann 32;
Kl. 12: Cornelie Koop 55.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 11: Alexey Tyukin 88.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 5: Maike Meuser 3, Estelle Paulus 3, Julia Thelen 3;
Kl. 12: Patricia Uthmann 15.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 4: Magdalena Winkelvoß 32.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 7: Kristin Beez 7, Michelle Hangel 3, Simon Heinzmann 56, Steffen Heller 3, Tim Lutz 74, Natalie Müller 3, Christian Sagara 3, Sascha Scheu 10, Marcel Schulz 6, Tobias Soldan 52, Carmen Tomczak 2.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 9: Florian Schweiger 137.

Mössingen, Quenstedt-Gymnasium: Kl. 7: Jack Rodin 10.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 7: Sarah Doll 6, Vanessa Funkel 6, Nina Gerlach 10, Carolin Guntermann 10, Carolin Heines 8, Anja Leichter 6, Amelie Steentjes 6, Nicole Vergin 9;
Kl. 8: Vivien Kohlhaas 62; **Kl. 9:** Madeline Kohlhaas 73;
Kl. 11: Miriam Menzel 4; **Kl. 12:** Annika Kohlhaas 62.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:Kl. 10: Marius Grannemann 2.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium:
Kl. 8: Celine Didierlaurent 4, Bettina Wiebe 38.

Ober-Ramstadt, Georg Christoph Lichtenberg-Schule:
Mille Becht 1, Patrick Ringshausen;
Kl. 6: Janina Freitag 13, Marielle Fröhlich 22, Aylin Ilhan 9, Mero Kaya 18, Catharina Oeber 7, Maura Preiß 11, Kim Vanessa Schneider 28, Marcel T. 2, Tobias Thomas 53, Justine Wirth 10, Eva Zöllner 14;
Kl. 8: Kay Ackermann 24, Rica Altrock 9, Sandra Burkhardt 15, Sebastian Hiller 7, Julian Hottes 11, Jana Lauth 11, Christian Marx 2, Sarah Merz 3, Jannik Metzler 5, Manja Mörl-Kreitschmann 12, Patrick Plößer 23, Amber Pra 8, Mareike Silbereis 8, Carlo Trockel 21, Jennifer Wagner 5, Melanie Wagner 19.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Benjamin Gockeln 14, Yuecan Li 19, Vivien Lorey 4;

Kl. 6: Loreelana Altvater 12, Laura Barowski 7, Tobias Braun 60, Maximilian Dio 8, Niklas Haupt 9, Jannis Heil 10, Ludwig Kempf 9, Elisabeth Koch 11, Janina Köhler 10, Katharina Kuhlmann 12, Valentin Kuhn 52, Sebastian Laux 10, Lara Lechner 6, Miriam Lindert 12, Anna-Katharina Löw 8, Franziska Matern 5, Camilla Metz 8, Merlin Oster 3, Nils Rehm 8, Mai-Britt Rosengarten 7, Jemina Schwab 3, Daniel Worring Pozo 26, Julia Yeo-Peters 2, Lukas Zajonz 22;
Kl. 7: Aline Endreß 63, Christina Stein 8, Nathan Valenti 18;
Kl. 11: Stefan Albert 32.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 7: Simone Marquard 22; **Kl. 10:** Thomas Geiß 80.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: Caroline Alfter 6, Eric Amann 7, David Anders 4, Katinka Bittmann 4, Corinna Engels 5, Ulf Floßdorf 17, Alina Gillrath 16, Jana Gillrath 23, Marcel Herb 3, Alicia Ketterle 7, Annik Ketterle 3, Lisa Marie Kiko 8, Alexander Knoop 8, Fabian Kreuzberg 8, Julia Lenz 4, Simon Löhr 3, Max Müthrath 4, Felix Perschen 6, Janine Piela 4, Philipp Rattay 3, Sören Rauert 7, Jonathan Rochert 9, Armin Schäfer 4, Alexandra Schwinges 4, Simon Wegmann 3;
Kl. 6: Tabea Engels 10, Vivien Grieshaber 4, Marc Heinicke 11, Miriam Hube 7, Michael Krupp 3, Yannik Lager 4, Sabine Litke 4, Tabea Menden 4, Jemima Mubakemeschi 9, Nora Pöhlau 8, Marc Radermacher 2, Julia Reim 16, Sarah Sass 16, Andreas Schmitz 11, Johanna Schneider 4, Luisa Weidert 13, Floralouisa Winkler 1, Daniela Witt 4;
Kl. 7: David Feiler 106.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 5: Luis Ressel 16.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 8: Alexander Rettkowski 62.

Villingen-Schwenningen Tuyet Lan Tran Thi 5

Walldorf, Gymnasium Walldorf Kl. 7: Sebastian Rutz 8.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 6: Dorothea Winkelvoß 48.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 5: Sabrina Hartmann 20, Noah Klein 5, Jonathan Kreilaus 8, Julian Merkel 5, Lorena Ritzmann 40, Paul Schädrich 40, Laura Stilgenbauer 6, Julia Sundheimer 18;
Kl. 7: Joel Jung 33.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (betreuende Lehrerin Frau Elisabeth Maringer):
Kl. 7: Anna Arendt 90, Jennifer Peifer-Weiß 51;
Kl. 11: Charlotte Capitain 75.

Jahrgang 27 | Heft 92 | Dezember 2007

Inhalt

Hartwig Fuchs: Spezielle rechtwinklige Dreiecke 3
Hartwig Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen – Blitzschnelles Abzählen . 4
Hartwig Fuchs: Hättest Du es gewusst? – Was ist die Sandwich-Technik? 5
Martin Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik 7
Hartwig Fuchs: Die besondere Aufgabe – Eingeschränkter Flugverkehr . 8
Aufgaben zum Neuen Jahr 10
Mathis machen mathematische Entdeckungen 12
Die Seite für den Computer-Fan 13
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 91 17
Neue Mathespielereien 21
Neue Aufgaben 23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 91 24
Wer forscht mit? – Zum Fermat-Problem aus Heft 89 29
Duco van Straten: Erhebung durch Sport 30
Duco van Straten: Eine Intervallschachtelung für e 33
Ekkehard Kroll: Der Exponentialtrichter 36
Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion 37
Die MONOID-Preisträger 2007 39
Rubrik der Löser und Löserinnen 40

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid