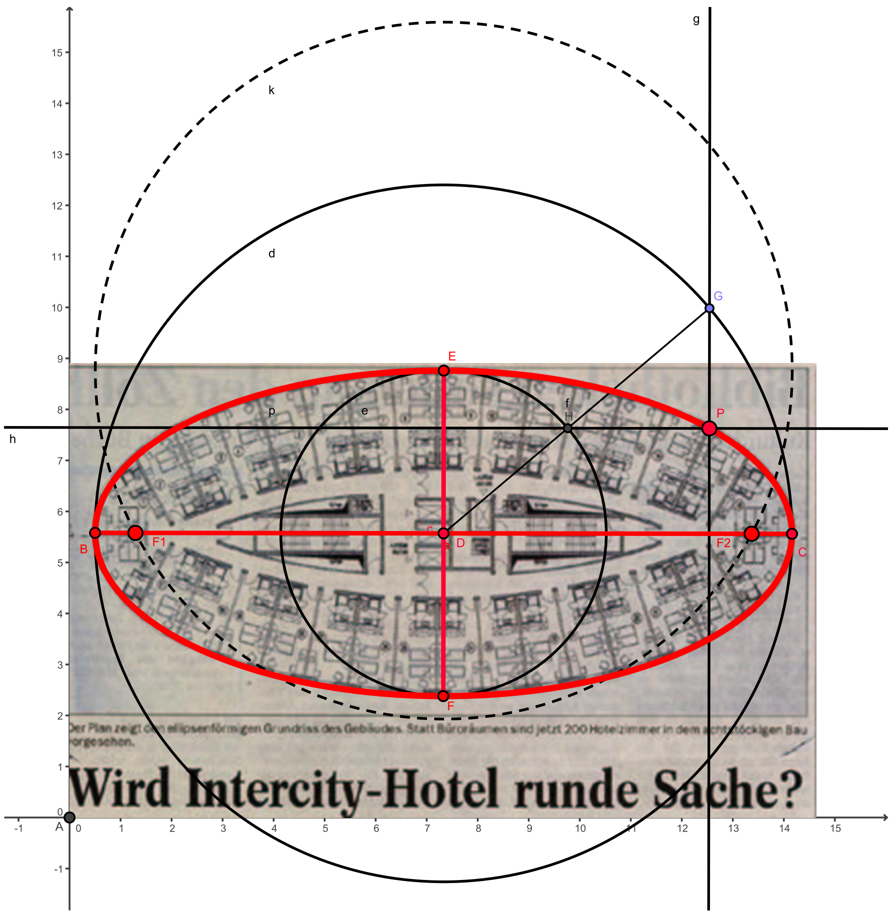
Jahrgang 28 | Heft 93 | März 2008

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.
Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben! **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den „Neuen Aufgaben“, „Wer foscht mit?“ und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.05.2008.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Mathematik – aber wie?

von Manfred Lehn

Liebe Schülerinnen und Schüler, meine sehr geehrten Damen und Herren!*

Mathematik ist eine sehr alte Wissenschaft, zusammen mit der Astronomie sicher die älteste. Ihre Anfänge gehen weit zurück in die Zeit der Sumerer und Babylonier, und Pythagoras hat den Inhalt des später nach ihm benannten Satzes vermutlich schon bei seinen Studienreisen in Ägypten kennengelernt.
In der klassischen Antike geschieht aber etwas ganz Neues. Während es in einem ägyptischen Rechenbuch etwa heißt: „Nimm eine Strecke von $14\frac{2}{3}$ Ellen Länge", schreibt man griechisch: „Betrachte die Strecke AB". Während man babylonisch sagte: „Ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 oder 5, 12 und 13 ist rechtwinklig." sagt man griechisch: „In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten das Quadrat über der Hypothenuse." Das Griechische daran sind natürlich nicht die Vokabeln Kathete und Hypothenuse. Es ist der Übergang vom Zahlenwert zur Variablen, vom Einzelfall zum allgemeinen Fall, von der speziellen Beobachtung zum allgemeinen Satz.
Was sich hier abzeichnet, ist das Entstehen der Theorie, und zwar als bewusster, reflektierter Vorgang. Indem wir theoretisieren, ersetzen wir die Wirklichkeit durch ein Modell der Wirklichkeit. Die Vorteile liegen auf der Hand: Es ist viel einfacher, gedankliche Objekte hin- und herzuschieben als reale Gegenstände der Welt. Mit dem Entstehen der wissenschaftlichen Theorie als menschlichem Werkzeug explodiert in der Antike zugleich unser Wissen über die Welt. Das *Konzept der Theorie* ist ein Geschenk der griechischen Kultur an uns.
Die Trennung in Theorie und Praxis bringt aber auch Probleme mit sich: Einerseits ist diese Trennung die Voraussetzung für die weitere Entwicklung der technischen und wissenschaftlichen Grundlagen unserer Zivilisation. Andererseits wird es immer schwieriger, die Verbindung zwischen theoretischen Erkenntnissen und der praktischen Anwendung unmittelbar zu sehen. Dieses Problem ist nicht neu. Die folgende Geschichte ist mehr als 2000 Jahre alt.
Zu Euklid, dem Haupt des glänzenden Mathematikerkreises an der Bibliothek in Alexandria, kam eines Tages ein junger, der Mathematik beflissener Mann mit der Frage: „Aber was werde ich gewinnen, wenn ich all diese Dinge lerne?" Der Meister winkte, statt einer Antwort zu geben, seinen Sklaven herbei und hieß ihn, dem jungen Mann einige Goldstücke auszuhändigen: „Denn er muss Profit aus dem ziehen, was er lernt!"
Die Frage, die der junge Mann gestellt hat, ist sehr modern. Ich höre sie in anderen Worten regelmäßig von meinen Studenten: „Wozu muss ich wissen, was eine Gruppe oder ein Ring ist? In der Schule brauche ich das doch nicht!",

---

* Vortrag anlässlich der Eröffnung der Sonderausstellung *Mathematik be-greifen* im Museum für Antike Schiffahrt in Mainz am 7. November 2007

und in der einen oder anderen Form geistert sie durch die Debatten über den Schulunterricht.
Die Frage der Nützlichkeit lautet individuell: „Warum soll ich mich mit Mathematik beschäftigen?“ und gesellschaftlich: „Warum sollen wir Mathematik in der Schule unterrichten? Warum soll die Gesellschaft mathematische Forschung finanzieren?“
Darauf gibt es zwei sich ergänzende Antworten. Die erste ist einfacher und leichter zu verstehen. Deshalb ist die Gefahr groß, bei dieser Antwort zu verweilen und die zweite, in meinen Augen wichtigere Antwort zu übersehen. Es ist besser, wir bringen die erste Antwort hinter uns, wir reißen sie kurz an und schieben sie dann vom Tisch, weil sie uns den Blick auf die zweite Antwort versperrt.
Die erste Antwort lautet: Wir sollen uns mit Mathematik beschäftigen, weil sie ungeheuer nützlich ist, weil unsere gesamte moderne technische Welt ohne Mathematik undenkbar ist, und zwar nicht nur im Bereich der industriellen Produktion, sondern bis in den Alltag hinein: Kein MP3-Spieler ohne Datenkomprimierung mit Wavelet-Methoden, kein CD-Spieler ohne fehlerkorrigierende Codierung, keine Scheckkarte ohne Kryptographie.
Diese Liste ist alles andere als erschöpfend und ließe sich endlos fortsetzen. Aber jede Aufzählung von Anwendungsbeispielen ist eigentlich kontraproduktiv, weil sie kurz bleiben muss, um nicht zu langweilen, und damit die ungeheure Masse an anderen Anwendungen ausblendet. Statt die Universalität der Mathematik zu belegen, besteht die Gefahr, dass sich der Blick zu sehr verkürzt. Eigentlich sollte man ganz forsch sagen: Die Nützlichkeit der Mathematik ist doch so offensichtlich, dass man kurzsichtig sein muss, um die Bedeutung der Mathematik zu verkennen.
So. Und jetzt vom Tisch damit! Wir müssen diese Antwort, die wichtig, aber nur die halbe Wahrheit ist, zur Kenntnis nehmen und dann zu den Akten legen. Wenn wir nämlich bei dieser Antwort stehen bleiben, verleitet sie uns zu einer Reihe von Fehlschlüssen, die wir vermeiden müssen. Wie zum Beispiel den Fehlschluss, der Mathematikunterricht müsse anwendungsorientiert oder alltagsnah sein.
Weniges ist falscher als dies: Auch ich brauche im *Alltag* nicht mehr Mathematik als den Dreisatz und etwas Zinseszins beim Baukredit. Wer im Unterricht anderes zu suggerieren versucht, macht sich und seinen Schülern etwas vor. Aber Schüler merken das natürlich.
Dass mit dem Wunsch nach mehr Alltagsnähe etwas nicht ganz stimmt, bemerkte vor einigen Jahren auch ein Bielefelder Pädagoge und Didaktiker. Nur ersetzte er den einen Fehlschluss durch einen schlimmeren. Er kam zu dem Ergebnis, „sieben Jahre Mathematikunterricht sind genug“ und schlug allen Ernstes vor, Schüler nach der siebten Klasse in die Kategorien „Braucht mehr höhere Mathematik“ – sprich: „Soll einmal zur ökonomisch-technischen Elite gehören“ – und „Braucht keine Mathematik mehr“ einzuteilen. Das Medienecho auf diese alberne These war enorm.

Wenn es nicht um Alltagsnähe und Anwendungen geht, worum dann? Erinnern wir uns, wie Euklid auf die Frage des Studenten reagiert hat: Seine Antwort ist eine Nichtantwort. Statt seine Wissenschaft zu verteidigen, reagiert er mit Ironie und Spott. Vermutlich, weil er die Fragestellung verwarf und weil der Student trotz seiner Studien anscheinend wenig vom Wesen der Mathematik begriffen hatte.

Was ist das Wesen der Mathematik? Von Georg Cantor, dem Mann, der uns die Mengenlehre als Fundament der modernen Mathematik gegeben hat – für manche die Hölle, für die Mathematiker, wie David Hilbert gesagt hat, das Paradies –, der uns gelehrt hat, freihändig mit dem Unendlichen umzugehen, von Georg Cantor stammt der Satz:

„Das Wesen der Mathematik liegt in der Freiheit.“

Der Begriff Freiheit bezeichnet zunächst die Tatsache, dass alles Mathematisieren damit beginnt, sich von der konkreten Situation zu lösen, abstrakte Zusammenhänge zu sehen, hinter vier Äpfeln und vier Birnen die Zahl 4 wahrzunehmen. Wir suchen das Gemeinsame in allen Gleichungen, in denen die Unbekannte quadratisch vorkommt, und lösen die sozusagen universelle quadratische Gleichung ein für alle Mal und nicht für jede Wahl von Koeffizienten neu. Es ist gerade die Freiheit von der konkreten Anwendung, die der Mathematik umgekehrt ihre universelle Anwendbarkeit verleiht. Freiheit durch Abstraktion!

Mathematische Freiheit erlaubt, Methoden und Werkzeuge nach Gutdünken zu wählen, auszuprobieren und zu verwerfen. Wir können geometrische Begriffe wie *Winkel*, die *Eigenschaft, senkrecht zu stehen*, oder *Projektion* aus ihrem dreidimensionalen Kontext nehmen und auf höherdimensionale Räume anwenden, sogar auf unendlichdimensionale Räume, und dann Joseph Fourier folgend eine Theorie der Wärmeleitung entwickeln. Wir können diese Theorie der Fouriertransformation dann aus der Analysis in die Algebra transportieren und Arnold Schönhage und Volker Strassen folgend zu einer Methode der sehr schnellen Multiplikation von sehr großen Zahlen weiterentwickeln.

Unserer Freiheit sind Grenzen nur durch unsere Phantasie und unser Können gesetzt. Darauf bezieht sich die bekannte Anekdote, die David Hilbert, aber auch Abraham Kästner, dem Lehrer von Carl-Friedrich Gauß, zugeschrieben wird. Auf die Frage, was denn aus dem Studenten Z geworden sei, sagte er: „Er ist Dichter geworden, er hatte zu wenig Phantasie.“ In der Freiheit, Brücken zwischen völlig separaten Gebieten zu schlagen, liegt die Kraft der Mathematik.

Mathematische Freiheit bedeutet auch, ganz neue Dinge erfinden zu dürfen. Zum Beispiel eine Zahl, deren Quadrat -1 ist, obwohl doch die Schulweisheit sagt, dass minus mal minus plus ist, und plus mal plus sowieso. Man darf auch gekrümmte und 7-dimensionale Räume erfinden. Und zwar einfach, weil man es will, oder genauer: weil etwas in den Fragen, über die wir nachdenken, uns dazu treibt. Und nicht, weil komplexe Zahlen in der Wechselstromlehre schöne Anwendungen haben oder gekrümmte Mannigfaltigkeiten in der allgemeinen Relativitätstheorie. Mathematische Freiheit ist schöpferisch.

Mathematik lehrt uns, im Möglichkeitsmodus zu denken: „Nehmen wir einmal an, dass...“. Sie lehrt, Hypothesen zu formulieren und im Möglichkeitsmodus zu Ende zu denken, aus dem Gegebenen herauszutreten und Anderes, Neues zu wagen. Mathematische Freiheit ist innovativ.

Mathematische Freiheit besteht schließlich auch darin, sich mit dem zu beschäftigen, was einen wirklich interessiert. Es ist die Freiheit, stunden- und tagelang, unter Umständen auch jahrelang über ein bestimmtes Problem zu grübeln. Es ist die Freiheit, dicke Bretter zu bohren.

Es ist die Freiheit des Spiels. Und zwar des freien Spiels der Kinder, die ihre Regeln mitten im Spiel ändern und neu erfinden, allein getrieben von der Lust an der Variation und dem Wunsch, das Spiel noch interessanter zu machen.

Und damit auch in diesem Vortrag etwas Mathematik vorkommt, spielen wir jetzt ein bisschen. Und zwar zunächst ein Spiel, das unabhängig voneinander von Lothar Collatz und Stanislaw Ulam erfunden wurde und das als das $3n+1$-Problem bekannt ist.

Wir spielen nach der Regel: Ist n eine natürliche Zahl, so wird sie halbiert, wenn n gerade ist, und durch $3n+1$ ersetzt, wenn sie ungerade ist. Wir wiederholen die Prozedur und sehen nach, was passiert.

Wir fangen klein an: $1 \mapsto 3 \times 1 + 1 = 4 \mapsto 2 \mapsto 1$, und von jetzt an laufen wir in einer Schleife. Dasselbe passiert offenbar, wenn wir mit 2 oder 4 anfangen. Der nächste Fall ist

$$3 \mapsto 3 \times 3 + 1 = 10 \mapsto 5 \mapsto 3 \times 5 + 1 = 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

und wieder enden wir in der $4-2-1$-Schleife. Noch ein Beispiel!

$$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10\ldots$$

und weiter wie vorher: Wieder landen wir bei der 1.

Hier drängen sich sofort viele Fragen auf: Ist das immer so? Oder kann es passieren, dass man nach ein paar Schritten wieder bei der Ausgangszahl landet? Gibt es also vielleicht noch andere Schleifen als $4-2-1$? Oder kann es passieren, dass wir überhaupt nicht mehr zurückkommen und dass die Zahlen letztlich immer größer werden?

Und hier kommt ein ganz anderes Spiel. Statt die Regeln zu erklären, rechne ich Ihnen einmal etwas vor:

$$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2187$$

und dann

$$3^7 - 3 = 2187 - 3 = 2184 = 7 \times 312$$

und wir stellen fest: Das Ergebnis ist durch 7 teilbar. Noch ein Beispiel

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$$

und

$$2^7 - 2 = 128 - 2 = 126 = 7 \times 18.$$

Und noch eins:

$$4^7 - 4 = 128 \times 128 - 4 = 16380 = 7 \times 2340.$$

Andererseits ist

$$2^9 - 2 = 128 \times 2 \times 2 - 2 = 512 - 2 = 510$$

nicht durch 9 teilbar, wie der Quersummentest uns sofort zeigt. Warum funktioniert der Trick bei 7, aber nicht bei 9? Gibt es eine Regel, oder sind dies einfach zufällige Rechnungen?

Und jetzt frage ich das Publikum – nicht, wer eine Idee hat, was herauskommen könnte, sondern: Wer von Ihnen findet diese Spiele interessant? Wer von Ihnen hat sich insgeheim gefragt, wozu das gut sein soll? Gegenprobe: Wer hört gar nicht mehr zu?

Nun, das Collatz-Ulam-Problem ist offen. Keiner weiß, was passiert. Und das ist doch spannend! Man kann spekulieren, ob es jemals Anwendungen dafür gibt. Dagegen war vor dreihundert Jahren das zweite Problem verstanden. Die Lösung wird durch den Satz von Fermat und Euler gegeben. Aber bis vor kurzem war das einfach ein wunderbarer Satz. Die Anwendungen in der Kryptographie sind allerjüngster Natur. Ohne die rein neugiergetriebenen Arbeiten von Fermat und Euler würde es die Anwendungen aber nicht geben.

Der Versuch, Mathematik an der Universität zu lehren oder in der Schule zu unterrichten, scheitert, wenn die schöpferische und innovative Kraft, die in der mathematischen Freiheit liegt, nicht deutlich wird. Man darf die Mathematik nicht gegen den Strich bürsten.

Mathematikunterricht muss den Spagat zwischen der Vermittlung eines unvermeidlichen Kanons und der Anleitung zu kreativer Freiheit und schöpferischer Innovation schaffen. Dies sind Lernziele jenseits der Alltagsnähe und der Anwendung. Das setzt beim Lehrer eine hohe mathematische Bildung und Souveränität voraus, aber auch, dass das System ihm Freiheiten belässt.

Wir leben in einer Zeit ständig zunehmender Beschneidung von Freiheiten. Die Stichworte sind für die Schule: Zentralabitur, Vergleichsstudien, Vergleichsarbeiten, Lehrplan, zu große Klassen. Für die Universität: Permanente Studienreform, Curriculare Standards, Modularisierung, Akkreditierung, Evaluierung, massive studentische Arbeitsbelastung und hohe Lehrbelastung, zu große Kurse; und alles verbunden mit ständig wachsendem administrativem Leerlauf und der Produktion von viel Papier. Denn was bringt Evaluierung? Um es einmal in Worten aus meiner nordhessischen Heimat zu sagen: „Die Sau muss auch gefüttert werden. Vom Wiegen allein wird sie nicht fett.“

In dieser Ausstellung werden in den nächsten Wochen viele Kinder die Freiheit haben, fern von Lehrplan und Notendruck zu spielen und spielerisch Mathematik zu erfahren. Sie werden manches lernen, aber vor allem viel lachen, viel Lärm machen und viel Spaß haben. Das wünschen wir dem Museum, den Organisatoren der Ausstellung und allen Besuchern.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Ehrhard Behrend: „Fünf Minuten Mathematik“.
„Fünf Minuten Mathematik“ ist eine Sammlung von 100 kurzen Beiträgen über verschiedene mathematische Themen, für die man jeweils fünf Minuten braucht, um sie zu lesen und zu verstehen. In vielen Fällen bleibt es jedoch nicht bei diesen fünf Minuten, da man angeregt wird, weiter über den geschilderten mathematischen Inhalt nachzudenken.
Die 2003 und 2004 in der Tageszeitung „Die Welt“ in einer wöchentlichen Kolumne erschienenen 100 Beiträge wurden für den Sammelband liebevoll illustriert und ergänzt. Da die Beiträge ursprünglich in einer Tageszeitung – also in erster Linie für mathematische Laien – veröffentlicht wurden, sind sie im Großen und Ganzen ohne mathematische Detailkenntnisse verständlich. Weil die einzelnen Beiträge in keinem direkten Zusammenhang stehen, ist „Fünf Minuten Mathematik“ kein Buch, das man am Stück lesen sollte. Stattdessen sollte man immer mal wieder – etwa so wie an einem Adventskalender – ein neues Türchen öffnen und dann darüber nachgrübeln.
Thematisch umfasst der Band die „üblichen Verdächtigen“ wie Lotto, Kryptografie, Escher, Fermat, Quadratur des Kreises und die Unendlichkeit, aber auch weniger Verbreitetes, wie z. B. den Google-Algorithmus oder Finanzmathematik, zum Entdecken und Kennenlernen.
Manche der Beiträge, wie z. B. „Wie nähert man sich einem Genie?“ sind schon für Fünftklässler interessant und verständlich, für andere, wie z. B. „Die schönste Formel wurde im 18. Jahrhundert in Berlin entdeckt“ braucht man schon einige mathematischen Begrifflichkeiten. Deshalb würde ich das Buch als Ganzes erst ab 16 Jahren empfehlen, was nicht bedeutet, dass man nicht auch jüngere Leser – unter anderem auch im Mathematikunterricht – mit ausgewählten Kapiteln begeistern kann.
Fazit: Behrends hat einen sehr schönen Sammelband geschaffen, den es sich lohnt immer mal wieder zur Hand zur nehmen, sei es beim Frühstück, im Bus oder auf der Toilette. Hat man einen Beitrag gelesen, so wird man noch eine zeitlang darüber nachdenken und sich dann auf den nächsten freuen.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Ehrhard Behrends: Fünf Minuten Mathematik. 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT; Vieweg, 2006, ISBN 978-3834800824, gebunden, 256 Seiten, 22,90 €

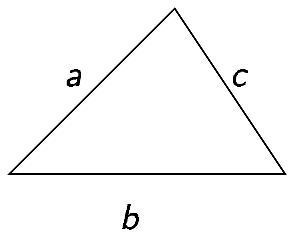
Art des Buches:	Geschichten aus der und über die Mathematik
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 16 Jahren

Das Euklidische Prinzip
Du siehst es – aber Du musst es beweisen!
von Hartwig Fuchs

Das Prinzip

Ein wichtiger geometrischer Satz, der bereits in der griechischen Mathematik bekannt war, ist die Dreiecksungleichung:

(1) Im Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten stets größer als die Länge der dritten Seite.



$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

Fig. 1

Niemand wird die Aussage (1) bestreiten wollen. Nicht nur sieht man, dass sie wahr ist; man kann sich auch kein Dreieck vorstellen, bei dem sie nicht zutrifft.
Und doch hat bereits in einer sehr frühen Entwicklungsphase der Mathematik einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike – Euklid (um 300 v. Chr) – erkannt, dass man sich in der Mathematik nicht auf die Anschauung verlassen darf und deshalb auch in einer Theorie keine anschaulichen Begründungen erlaubt sind – was natürlich bedingt, dass jeder augenscheinlich wahre Sachverhalt durchaus bewiesen werden muss.
Bei seiner Arbeit beachtete Euklid daher stets den Grundsatz:

Auch wenn du es siehst, musst du es beweisen.

Wir wissen das aus seinem Werk *Elemente*, dem Höhepunkt der griechischen Mathematik und über 2000 Jahre lang das maßgebende Lehrbuch der Geometrie.
In dieser Schrift leitet er viele „offensichtlich“ wahre geometrische Aussagen her – und zwar unter strengster Befolgung seines oben genannten Arbeitsprinzips.

Das zeigt sich in exemplarischer Weise bei seiner Herleitung der Dreiecksungleichung (1) mit Hilfe der Sätze 16 bis 20 im ersten Kapitel seines Buches Elemente. Diese Sätze sind anschaulich so evident, dass sie scheinbar überhaupt keines Beweises bedürfen. Es hat daher seinen ganz eigenen Reiz zu sehen, wie er sie zu mathematisch-logisch begründeten Aussagen macht. Deshalb wollen wir sie hier näher betrachten.

Das Prinzip in Aktion

Euklids Beweise seiner Sätze 16 bis 20 sind durchweg bis ins kleinste Detail ausgearbeitet und somit meist ungewöhnlich umfangreich. Wir werden deshalb im Folgenden nur Euklids wesentliche Beweisideen darstellen – die eingefügten Beispiele stammen außer dem ersten nicht von ihm.

Der Außenwinkelsatz

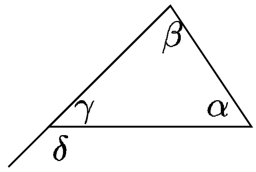


Fig. 2

Wenn man in einem Dreieck eine Seite verlängert, dann entsteht ein Winkel – in der Figur der Winkel δ – den man Außenwinkel des Dreiecks nennt.

Für solche Winkel gilt:

(2) *Euklids Satz 16:* Im Dreieck ist ein Außenwinkel stets größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Du siehst, dass (2) zutrifft – vgl. Fig. 2. Aber wir benötigen einen Beweis dafür!

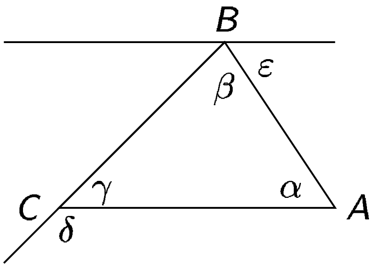


Fig. 3

Zeichne die Parallele zu AC durch den Punkt B. Mit den Bezeichnungen von Fig. 3 ist: $\delta = \beta + \varepsilon$ (Stufenwinkel an Parallelen); wegen $\varepsilon = \alpha$ (Wechselwinkel an Parallelen) gilt dann $\delta = \alpha + \beta$ – eine interessante Eigenschaft des Außenwinkels.

Aus $\delta = \alpha + \beta$ folgt wegen $\alpha > 0°$ und $\beta > 0°$ (und α und β sind Innenwinkel eines Dreiecks), dass sowohl $\delta > \alpha$ als auch $\delta > \beta$ ist, womit (2) gezeigt ist.

Folgerung (Euklids Satz 17): Im Dreieck ist die Summe zweier Innenwinkel stets $< 180°$.
Mit den Bezeichnungen von Fig. 3 ist nämlich wegen $\delta = \alpha + \beta$ und $\delta < 180°$ (da $\gamma > 0°$), auch $\alpha + \beta < 180°$.

Zwei Sätze über Seiten und Winkel im Dreieck

(3) *Euklids Satz 18:* Im Dreieck liegt der längeren Seite stets der größere Winkel gegenüber. Wenn also für die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks $a > b > c$ ist, dann gilt – vgl. Fig. 4: $a > b \Rightarrow \alpha > \beta$; $a > c \Rightarrow \alpha > \gamma$; $b > c \Rightarrow \beta > \gamma$.

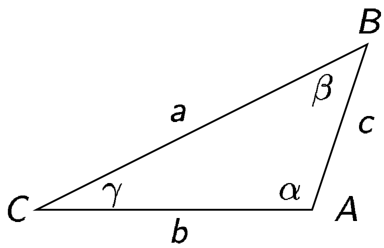


Fig. 4

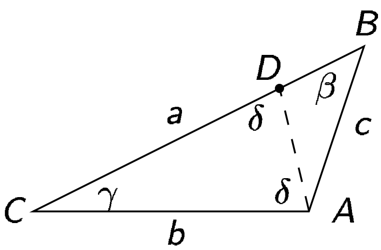


Fig. 5

Du siehst, dass (3) wohl richtig ist. Dennoch – wir brauchen einen Beweis!
Wir leiten nur den Fall $a > b \Rightarrow \alpha > \beta$ ab; die Beweise für die beiden anderen Fälle verlaufen ganz entsprechend.

Auf der Strecke $\overline{BC}$ wird der Punkt D so festgelegt, dass $|\overline{CD}| = b$ ist – wegen $|\overline{BC}| > b$ ist das möglich. Die Strecke $\overline{AD}$ zerlegt dann das Dreieck $\triangle ABC$ in das Dreieck $\triangle ABD$ und in das gleichschenklige Dreieck $\triangle ADC$ mit den beiden gleich großen Innenwinkeln δ bei A und bei D. Zunächst ist $\alpha > \delta$: Euklid begründet das mit einem am Anfang seiner Geometrie eingeführten allgemeinen Axiom:

Das Ganze (hier α) ist größer als sein Teil (hier δ).

Für den Winkel δ bei D als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABD$ gilt $\delta > \beta$ wegen (2). Also ist $\alpha > \delta > \beta$, woraus (3) für den Fall $a > b$ folgt.

> *Folgerung:* Im Dreieck mit drei verschieden langen Seiten ist der größte Innenwinkel $> 60°$.
> Mit den Bezeichnungen von Fig. 4 sei $a > b > c$. Dann ist $\alpha > \beta > \gamma$ wegen (3). Wäre nun $\alpha \leq 60°$, dann wären $\beta < 60°$ und $\gamma < 60°$ und mithin wäre die Winkelsumme im Dreieck $\alpha + \beta + \gamma < 180°$.

(4) *Euklids Satz 19*: Im Dreieck liegt dem größeren Winkel stets die längere Seite gegenüber.

Der Satz 19 stellt die Umkehrung des Satzes 18 dar. Auch hier gilt: Man sieht es, aber es muss dennoch bewiesen werden!

Da es Euklid wohl nicht gelungen ist, (4) auf direktem Wege herzuleiten, hat er zu einem von ihm häufiger benutzten indirekten Beweisverfahren gegriffen, dem Widerspruchsbeweis. Dabei zeigt er, dass jede Alternative zu (4) auszuschließen ist. Da nun aber entweder (4) oder mindestens eine der Alternativen von (4) zutreffen muss, folgert er: Es gilt (4).

Mit den Bezeichnungen von Fig. 4 sei $\alpha > \beta$. Dann gilt: Wäre $a < b$, dann wäre $\alpha < \beta$ wegen (3) im Widerspruch zur Voraussetzung; wäre $a = b$, dann wäre das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig und daher wäre $\alpha = \beta$ – auch dies ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist $a > b$ und die Behauptung (4) ist wahr.

> Folgerung: Der Abstand $|\overline{BC}|$ eines Punktes B von einer Geraden g, $B \notin g$, ist kürzer als die Schrägentfernung $|BA|$ eines jeden Punktes $A \in g$, $A \neq C$, von B.
> Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist der 90°-Winkel γ der größte Winkel, weil $\alpha + \beta = 90°$ ist, also $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$. Aus (4) folgt daher: $|BA| > |BC|$ für jeden Punkt $A \in g$, $A \neq C$.

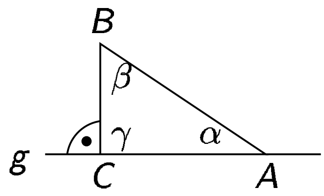


Fig. 6

Die Dreiecksungleichung (1)

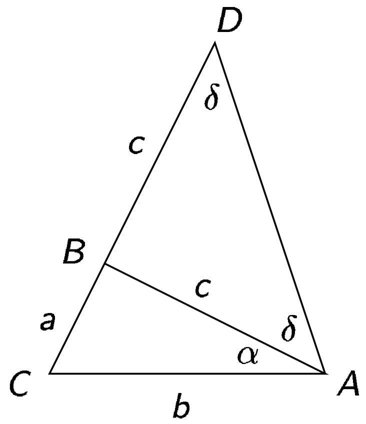


Fig. 7

Mit den Bezeichnungen von Fig. 7 beweisen wir nur den Fall $a + c > b$; die zwei anderen Fälle werden ganz entsprechend gezeigt.
Lege auf der Verlängerung der Strecke $\overline{CB}$ den Punkt D so fest, dass $|\overline{BD}| = |\overline{BA}| = c$ ist. Im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABD$ sind dann die Innenwinkel bei A und bei D gleich groß. Im Dreieck $\triangle ACD$ gilt nun: $\alpha + \delta > \delta$, woraus mit (4) folgt: $|\overline{CD}| = a + c > |\overline{CA}| = b$, also $a + c > b$.

Folgerung: Im Viereck $ABCD$ ist die Summe dreier Seitenlängen stets größer als die vierte Seitenlänge.
Es seien a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks $ABCD$. Wir zeigen, dass dann gilt: $a + b + c > d$.
Dazu zeichnen wir zunächst die Strecke $\overline{AC}$; ihre Länge sei e. Im Dreieck $\triangle ACB$ ist $a + b > e$ (Dreiecksungleichung). Dann ist auch $a + b + c > e + c$. Nun ist im Dreieck $\triangle ACD$ wegen (1): $e + c > d$. Damit haben wir gefunden: $a + b + c > e + c > d$, also $a + b + c > d$.

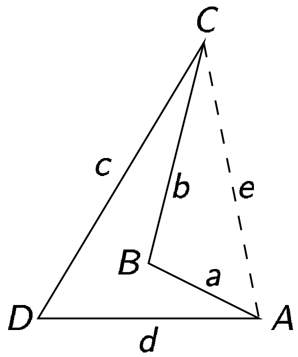


Fig. 8

Hättest Du es gewusst?
Was ist die Simson-Gerade?
von Hartwig Fuchs

Die griechischen Mathematiker haben sehr viele Eigenschaften von Dreiecken entdeckt – sie haben ja auch Jahrhunderte lang danach gesucht. Aber einige sind ihnen doch entgangen. Etwa diese:

(1) Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit seinem Umkreis gegeben und P sei ein beliebiger Punkt des Umkreises, $P \neq A, B, C$.
Wenn man nun vom Punkt P die Lote auf die Dreieckseiten – oder gegebenenfalls auf deren Verlängerungen – fällt, dann liegen die Endpunkte der Lote (=Lotfußpunkte) auf einer Geraden (vgl. Figur 4).

Diese Gerade heißt die *Simson-Gerade* – und das ist eine Fehlbenennung, denn der schottische Mathematiker Robert Simson (1687–1768), dem man ihre Ent-

deckung zuschreibt, hat sie gar nicht gefunden.
Es war William Wallace (1768–1843), der erst drei Jahrzehnte nach Simsons Tod diese Behauptung (1) aufgestellt und bewiesen hat.
William Wallace kam auf Umwegen zur Mathematik. Erst nach einigen wohl nicht recht erfolgreichen Tätigkeiten als Buchdrucker und als Buchhändler ergriff er den Beruf, der seinen Neigungen und seiner Begabung viel eher entsprach: Er wurde 1793 Mathematiklehrer und von 1819 bis 1838 wirkte er als Professor der Mathematik an der Universität Edinburgh. Sein Interesse und seine Arbeit galten im Wesentlichen der Geometrie – und er hat in diesem Gebiet eine Vielzahl wichtiger elementargeometrischer Fakten gefunden – darunter auch die Existenz der Simson-Geraden, die richtig *Wallace-Gerade* heißen sollte.

Der Satz von Wallace lässt sich mit einfachen Mitteln beweisen – deshalb wollen wir das jetzt tun.
Dazu benötigen wir zwei Sätze über Sehnenvierecke – das sind Vierecke, deren Eckpunkte sämtlich auf einem Kreis liegen (wir beschränken uns auf konvexe Vierecke wie in Figur 1).

(2) Ein Viereck, bei dem die Summe zweier einander gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt, ist ein Sehnenviereck.

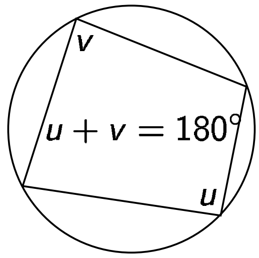


Fig. 1

Beweis: Damit die vier Eckpunkte eines Vierecks $ABCD$ auf einem Kreis liegen, müssen bereits je drei von ihnen auf einem Kreis liegen.
Wir konstruieren daher den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABD$ mit dem Mittelpunkt M und den Umkreis des Dreiecks $\triangle BCD$ mit dem Mittelpunkt M^*.

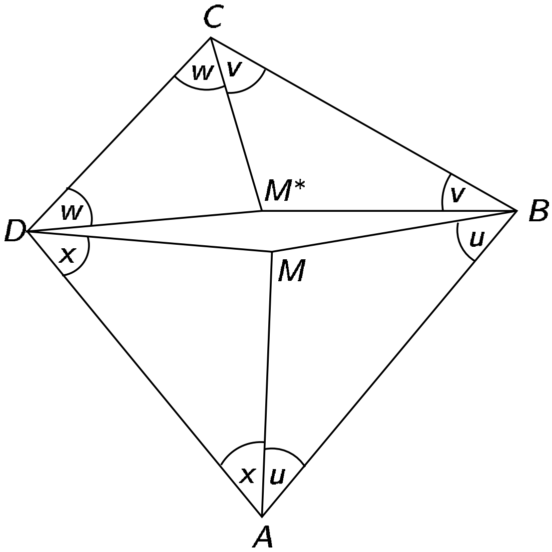


Fig. 2

Annahme: Es sei $M^* \neq M$ (vgl. Fig. 2).
Die vier Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM^*$, $\triangle CDM^*$, $\triangle DAM$ sind sämtlich gleichschenklig. Daher sind bei jedem Dreieck die beiden Basiswinkel gleich groß – diese Basiswinkel seien mit u, v, w, x bezeichnet (Figur 2). Nach Voraussetzung gilt: $(u + x) + (v + w) = 180°$. Nun ist die Summe der Innenwinkel von $ABCD$ bekanntlich 360°, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & 2u + |\sphericalangle M^*BM| + 2v + 2w + |\sphericalangle MDM^*| + 2x \\ =& 2(u + x) + 2(v + w) + |\sphericalangle M^*BM| + |\sphericalangle MDM^*| \\ =& 2 \cdot 180° + |\sphericalangle M^*BM| + |\sphericalangle MDM^*| = 360°, \end{aligned}$$

was nur möglich ist, wenn $|\sphericalangle M^*BM| = |\sphericalangle MDM^*| = 0°$ ist. Dann aber ist die Annahme $M^* \neq M$ falsch. Es ist $M^* = M$ und die vier Punkte A, B, C, D liegen auf einem Kreis.

(3) In einem Sehnenviereck ist der Winkel zwischen einer Seite und einer Diagonalen genauso groß wie der Winkel zwischen der gegenüberliegenden Seite und der anderen Diagonalen (z. B. die Winkel u in Fig. 3).

Beweis: AB sei eine Sehne im Kreis mit Mittelpunkt M.
Dann gilt für jeden Punkt C auf der Kreislinie mit $C \neq A$ und $\neq B$: Der Zentriwinkel $\sphericalangle BMA$ ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle BCA$. Daraus folgt unmittelbar (3).

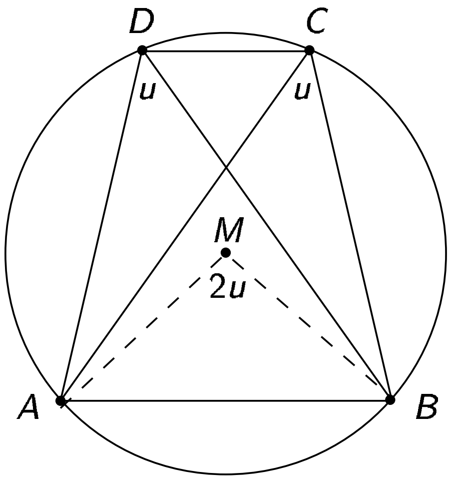


Fig. 3

Der Beweis von (1) erfolgt nun in drei Schritten (Fig. 4).

a) Das Viereck $CGPF$ ist ein Sehnenviereck, weil die Winkel bei F und bei G zusammen $180°$ betragen (Satz (2)). Dann aber ist nach Satz (3): $|\sphericalangle PFG| = |\sphericalangle PCG|$.
b) Das Viereck $ABPC$ ist ein Sehnenviereck. Dann ist nach Satz (3): $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCB|$. Weil nun $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PAH$ und $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PCG$ ist, folgt: $|\sphericalangle PCG| = |\sphericalangle PAH|$.
c) Das Viereck $AHPF$ ist ein Sehnenviereck, weil die Winkel bei F und bei H zusammen $180°$ sind. Dann gilt $|\sphericalangle PAH| = |\sphericalangle PFH|$ nach (3).

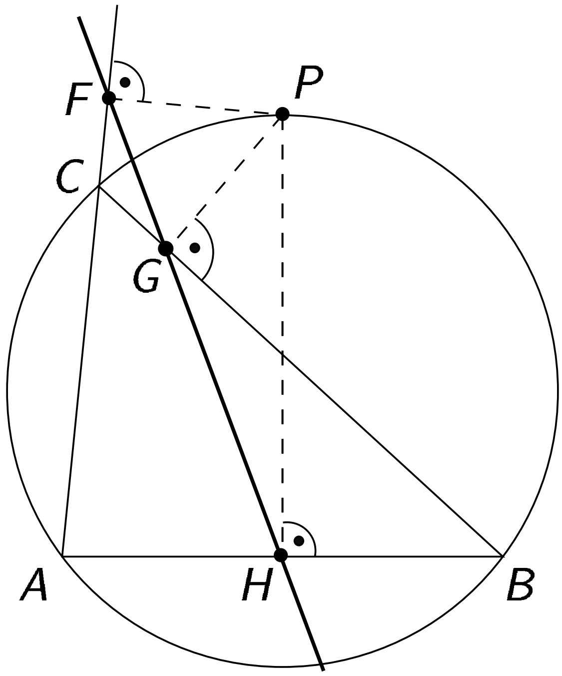


Fig. 4

Aus a, b und c ergibt sich die Gleichungskette

$$|\sphericalangle PFG| = |\sphericalangle PCG| = |\sphericalangle PAH| = |\sphericalangle PFH|.$$

Daher stimmen die Winkel $\sphericalangle PFG$ und $\sphericalangle PFH$ überein – also liegen die Punkte F, G und H auf einer Geraden, womit (1) bewiesen ist.

Ein Blick hinter die Kulissen
Der Hochgeschwindigkeitsrechner
von Hartwig Fuchs

In einer Klasse 5 will der Lehrer das Addieren langer Zahlenkolonnen üben. Dazu hat er sich etwas Besonderes ausgedacht. Jeder Schüler erhält ein Blatt mit der gleichen Zahlenkolonne und jeder Schüler darf dann zwei beliebige Zahlen, zum Beispiel z_m und z_n mit $z_m < z_n$, $z_n \leq z_{30}$, wählen. Und nun soll er alle Zahlen von z_m bis hin zu z_n addieren.

k	z_k	k	z_k	k	z_k
1	1	11	89	21	10 946
2	1	12	144	22	17 711
3	2	13	233	23	28 657
4	3	14	377	24	46 368
5	5	15	610	25	75 025
6	8	16	987	26	121 393
7	13	17	1 597	27	196 418
8	21	18	2 584	28	317 811
9	34	19	4 181	29	514 229
10	55	20	6 765	30	832 040

Der Lehrer verspricht, dass ihm ein Blick auf die jeweils errechnete Summe genügt, um zu entscheiden, ob sie richtig oder falsch ist.

Mathis, der seinen Lehrer testen will, wählt als erste Zahl $z_7 = 13$ und als letzte Zahl $z_{28} = 317811$; die von ihm berechnete Summe $z_7 + z_8 + z_9 + ... + z_{28}$ ist 832019. Der Lehrer schaut sich Mathis Ergebnis wenige Augenblicke an und bestätigt dann, dass es stimmt.

Und auch bei den Ergebnissen der anderen Schüler behält der Lehrer nach jeweils kurzer Bedenkzeit recht. Darauf Mathis zum Lehrer: „Sie sind eine Type! Sie haben vorher alle überhaupt möglichen Summen berechnet und dann auswendig gelernt.“

Die Antwort des Lehrers: „Das ist nicht so! Bedenke: Es gibt 29 Summen mit dem ersten Summanden $z_1 = 1$, 28 Summen mit dem ersten Summanden $z_2 = 1$, 27 Summen mit dem ersten Summanden $z_3 = 2$, ... und schließlich eine Summe mit dem ersten Summanden $z_{29} = 514229$, so dass ich für $29 + 28 + 27 + ... + 1 = 435$ Zahlenpaare (z_m, z_n) die zugehörige Summe $z_m + z_{m+1} + ... + z_n$ auswendig lernen müsste. So etwas fiele mir im Traum nicht ein. Wenn du aber wissen willst, wie ich es gemacht habe, dann schau dir die nächste Seite an, dort findest du die Erklärung für meine angeblichen Hochgeschwindigkeitsrechnungen – tatsächlich handelt es sich dabei um nichts Anderes als die Anwendung eines mathematischen Satzes.“

Was steckt also hinter des Lehrers Rechentrick?
Viele unserer Leser werden sofort bemerken, dass die Zahlenliste des Lehrers einen Anfang der Folge der nach Fibonacci* benannten *Fibonacci-Zahlen* darstellt. Wer aber diese Zahlen nicht kennt, wird dennoch schnell herausfinden, dass für die Zahlen der Liste gilt:

(1) $z_1 = 1, \quad z_2 = 1, \quad z_k = z_{k-2} + z_{k-1}.$

In (1) haben wir nun gerade die Bildungsregel für die Fibonacci-Zahlen vor uns, wenn man n jeden der Werte 3, 4, 5, ... annehmen lässt.
Wir wollen jetzt (1) so schreiben:

$$\begin{array}{rl} z_1 = & -z_2 + z_3 \\ z_2 = & \qquad - z_3 + z_4 \\ z_3 = & \qquad\qquad - z_4 + z_5 \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad \ddots \\ z_{k-1} = & \qquad\qquad\qquad\qquad - z_k + z_{k+1} \\ z_k = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - z_{k+1} + z_{k+2} \end{array}$$

Addiert man diese Gleichungen, dann erhält man wegen $z_2 = 1$:

$$z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n = z_{n+2} - 1.$$

Damit findet man die Summe aller Zahlen von z_m bis z_n, $z_m < z_n$. Zunächst ist $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_{m-1} = z_{m+1} - 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} z_m + z_{m+1} + ... + z_n &= (z_1 + z_2 + ... + z_n) - (z_1 + z_2 + ... + z_{m-1}) \\ &= (z_{n+2} - 1) - (z_{m+1} - 1) \\ &= z_{n+2} - z_{m+1}. \end{aligned}$$

Also gilt der Satz:

(2) Es sei z_1, z_2, z_3,... die Folge der Fibonacci-Zahlen.
Dann ist $z_m + z_{m+1} + ... + z_n = z_{n+2} - z_{m+1}$, $1 \leq m \leq n$.

Mit diesem Satz ist das Geheimnis der phänomenalen Rechengeschwindigkeit des Lehrers gelüftet. Um die Summe der Zahlen z_m, z_{m+1}, ..., z_n zu kennen, braucht der Lehrer in seiner Zahlenliste nur die Zahlen z_{n+2} und z_{m+1} zu suchen und ihre Differenz zu berechnen.
Übrigens hat der Lehrer Vorsorge getroffen für den Fall, dass einer der Schüler z_{29} oder z_{30} als letzten Summanden seiner Additionsaufgabe wählen sollte: Der Lehrer hat einfach seine eigene Zahlenliste vorweg erweitert um die Zahlen $z_{31} = 1\,346\,269$ und $z_{32} = 2\,178\,309$, die er mit der Regel (1) bestimmt hat.

* Kurzform von figlio di Bonaccio (Sohn des Bonacius), eigentlich Leonardo von Pisa, * um 1170, † um 1250

Bei Mathis Rechenaufgabe sieht das so aus: Nachdem Mathis die Zahlen z_7 und z_{28} gewählt hatte, braucht der Lehrer nur noch $z_{30} - z_8 = 832040 - 21$ zu berechnen, um Mathis Summe zu erhalten.

Nachbemerkung: Der Trick funktioniert auch, wenn man eine Liste mit verallgemeinerten Fibonacci-Zahlen verwendet, weil für sie der Satz (2) wörtlich gilt. Verallgemeinerte Fibonacci-Zahlen erhält man, wenn man in (1) für z_1 und z_2 beliebige natürliche Zahlen wählt und wieder $z_n = z_{n-2} + z_{n-1}$ für $n = 3, 4, 5, \ldots$ setzt.

Die besondere Aufgabe

Ein 7-kantiges Kartoffelstück

von Hartwig Fuchs

Die Aufgabe

Ein geometrischer Körper heißt ein *konvexes Polyeder*, wenn seine Oberfläche aus ebenen Vielecksflächen zusammengesetzt ist; diese Flächen stoßen in Kanten aneinander, und die Kanten treffen sich in den Ecken – wobei keine Ecke „nach innen" einspringt.
Leonhard Euler* hat nun für konvexe Polyeder einen berühmten Satz, die so genannte *Eulersche Polyederformel*, bewiesen:

(1) Es seien e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen eines konvexen Polyeders.
Dann gilt:

$$e - k + f = 2.$$

Beantworte damit die Frage: Kannst Du aus einer Kartoffel ein 7-kantiges konvexes Polyeder herausschneiden?

Die Lösung

Es sei P das konvexe Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen.
Wenn man bei jeder Fläche von P die Kanten zählt, die sie begrenzen und diese Anzahlen addiert, dann erhält man $2k$ – weil jede Kante, in der zwei Flächen aneinanderstoßen, sowohl bei der einen als auch bei der anderen Fläche mitgezählt ist.
Ist k_i die Anzahl der Kanten der i-ten Fläche, dann ist $d = \frac{k_1+k_2+\ldots+k_f}{f}$ die durchschnittliche Anzahl von Kanten jeder Fläche.
Damit folgt, dass $2k = d \cdot f$ gilt. Weil aber jede Fläche mindestens drei Kanten besitzt, muss $d \geq 3$ sein. Damit haben wir gefunden:

* *15.04.1707 in Basel, †18.09.1783 in Sankt Petersburg; einer der bedeutendsten Mathematiker auf sämtlichen Gebieten der Mathematik

(2) $2k \geq 3f$.

Zählt man nun die Anzahl der Kanten, die in jeder Ecke zusammentreffen und addiert man diese Anzahlen, dann erhält man wieder $2k$, denn auch jetzt ist jede Kante zweimal mitgezählt, nämlich einmal bei jedem ihrer Endpunkte.
Ist k_j^* die Anzahl der Kanten, die in der j-ten Ecke zusammenstoßen, dann ist $d^* = \frac{k_1^* + k_2^* + ... + k_e^*}{e}$ die durchschnittliche Anzahl von Kanten bei jeder Ecke.
Damit ist $2k = d^* \cdot e$. Weil nun in jeder Ecke mindestens drei Kanten enden, ist $d^* \geq 3$ und deshalb gilt:

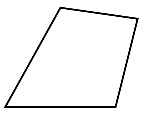
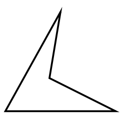
(3) $2k \geq 3e$.

Q sei nun ein 7-kantiges konvexes Polyeder, für das also $k = 7$ ist.
Aus (2) und (3) folgt: $3f \leq 2 \cdot 7$ und $3e \leq 2 \cdot 7$, so dass $f \leq 4$ und $e \leq 4$ ist.
Folglich ist: $e - k + f \leq 4 - 7 + 4 = 1 < 2$ – ein Widerspruch zu (1). Daher kann es kein 7-kantiges konvexes Kartoffelstück geben.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Vierecke im Quadrat

In einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 liegt ein Viereck V mit den Eckpunkten A, B, C, D und den Seitenlängen a, b, c, d. Das Viereck V kann ohne oder mit nach innen einspringender Ecke – also konvex oder nicht konvex – sein (die zwei Viereckstypen):

V konvex  , V nicht konvex  .

Für die Eckpunkte von V soll gelten: Entweder liegen sie alle oder nur einige oder aber keine von ihnen auf dem Rand von Q.
Untersuche nun die Fragen:
Für welchen Viereckstyp V gilt stets $a + b + c + d < 4$?
Gibt es Vierecke V mit $a + b + c + d = 4$ oder mit $a + b + c + d > 4$?

Tipp: Die so genannte Dreiecksungleichung könnte Dir von Nutzen sein (vgl. Seite 9). (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. August 2008 an die MONOID-Redaktion einsenden. In *drei* Heften werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen; außerdem werden sie bewertet und erstmals auch bepunktet.

Die Seite für den Computer-Fan

Vertauschte Ziffernoperatoren

Es seien QS(n) die Ziffernsumme („Quersumme") und QP(n) das Ziffernprodukt („Querprodukt") einer natürlichen Zahl n.
Gibt es Zahlen $n \geq 10$, für die gilt:

$$\mathrm{QS}(\mathrm{QP}(n)) = \mathrm{QP}(\mathrm{QS}(n))?$$

(H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen auch bis zum 15. Mai 2007 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als Anhang einer E-Mail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 91

Ein Ziffernproblem

Mit $z_1 z_2 ... z_n$ sei die Zifferndarstellung einer n-stelligen natürlichen Zahl gegeben, wobei also $1 \leq z_1 \leq 9$, $0 \leq z_i \leq 9$ für $2 \leq i \leq n$ sei.
Bestimme alle natürlichen Zahlen $z_1 z_2 ... z_n$, für die gilt:

$$z_1 z_2 ... z_n = z_1^{z_1} + z_2^{z_2} + ... + z_n^{z_n}$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass es nur Lösungen für $n \leq 10$ geben kann. (H.F.)

Lösung

Aus $10^{n-1} \leq z_1 z_2 ... z_n = z_1^{z_1} + z_2^{z_2} + ... + z_n^{z_n} \leq n \cdot 9^9$ folgt, dass es nur Lösungen geben kann, wenn $10^{n-1} \leq n \cdot 9^9 < n \cdot 9 \cdot 10^8$, also $10^n < n \cdot 9 \cdot 10^9$ gilt. Diese Ungleichung ist für $n = 10$ noch erfüllt, jedoch nicht mehr für $n = 11$, so dass die Untersuchung auf maximal 10-stellige Zahlen beschränkt werden kann.
Es gibt nur zwei Lösungen: 1 und 3435.
Beim Auffinden dieser Zahlen waren **Christian Behrens**, **Martin Alexander Lange**, **Malte Meyn**, **Florian Schweiger** und **Alexey Tyukin** erfolgreich, wobei manchmal die 1 übersehen und auch nicht immer der gesamte Stellenbereich untersucht wurde. Einmal wurden auch 0 und 438579088 angegeben; aber da muss daran erinnert werden, dass 0^0 per definitionem gleich 1 und nicht gleich 0 gesetzt wird!

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 92

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Napp, Klapp und Zapp

Herr Napp, Herr Klapp und Herr Zapp treffen sich zum Skat. Ihre Vornamen sind (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Konrad, Emil und Willi. Einer von ihnen trägt keinen Hut, ein anderer einen grauen und der dritte einen bunten Hut. Nach dem Spiel stellen sie fest:

(1) Der Gewinner der Skatrunde trägt den grauen Hut.
(2) Herr Klapp saß noch nie vorher auf Herrn Napps Sofa.
(3) Willi trägt keinen Hut.
(4) Herr Napp findet es komisch, dass er nicht gewonnen hat.
(5) Konrad saß schon das vorige Mal auf Herrn Napps Sofa.
(6) Herr Zapp trägt den bunten Hut.

Löse nun die folgenden Aufgaben:

a) Stelle die Vor- und Nachnamen richtig zusammen!
b) Wer hat die Skatrunde gewonnen? (WK)

Lösung:

Zunächst erstellen wir eine Tabelle mit den Vor- und Nachnamen der Teilnehmer und dem Sieger der Skatrunde. Aus den Informationen (1) bis (6) folgern wir folgendes Zwischenresultat:

	Napp	Klapp	Zapp	Sieger
Konrad		nein		
Emil				
Willi		nein	nein	nein
Sieger	nein		nein	

Jetzt lässt sich alles aus der Tabelle direkt folgern:

a) Willi muss mit Nachnamen Napp heißen, Herr Klapp muss den Vornamen Emil haben, und folglich kann der letzte Teilnehmer nur Konrad Zapp heißen.
b) Der Sieger der Skatrunde ist also Herr Emil Klapp.

Wahr oder falsch?

Es seien a und b positive ganze Zahlen, $a < b$, deren Differenz 2 beträgt. Dann gilt: $ab + 1$ ist stets eine Quadratzahl. — Stimmt das? (H.F.)

Lösung:

Setzt man $a = x - 1$ und $b = x + 1$, dann ist $b - a = 2$ und $ab + 1 = (x-1)(x+1) + 1 = x^2$. Die Behauptung stimmt also.

Rätselhaftes Alter

Aisha erzählt: „Nächstes Jahr ist das Alter meines Großvaters eine Quadratzahl. Meine Urgroßmutter, seine Mutter, lebt auch noch; sie hatte vor einem Jahr die darauffolgende Quadratzahl als Alter. Als sie meinen Großvater geboren hat, war ihr Alter durch 7 teilbar.“

a) Wie alt sind der Großvater und seine Mutter?
b) Für welche natürlichen Zahlen a gelten die obigen Bedingungen $(a+1)^2+1$ ist um ein Vielfaches von 7 mehr als a^2-1 sonst noch?
c) Gibt es noch weitere positive reelle Zahlen a, für die diese Bedingungen gelten? (WJB)

Lösung:

a) Der Großvater ist 80, die Urgroßmutter 101 Jahre alt durch Ausprobieren oder als einziger Fall von b), der als Alter in Frage kommt.
b) Die Bedingung lautet fomal geschrieben: $7n=(a+1)^2+1-(a^2-1)=2a+3$.
$a=\frac{7n-3}{2}$ ist eine ganze Zahl, wenn n ungerade ist, also $n=2m-1$ nit $m\in\mathbb{N}$. Also ist $a=\frac{14m-10}{2}=7m-5$, das heißt $a\in\{2,9,16,23,...\}$.
$a=9$ liefert die obige Lösung $a^2-1=80$ und $(a+1)^2+1=101$.
c) Die Lösung von $a=\frac{7n-3}{2}$ für gerade n, also $n=2m$ mit $m\in\mathbb{N}$, dass $a=\frac{14m-3}{2}$ ist, das heißt $a\in\left\{\frac{11}{2},\frac{25}{2},\frac{39}{2},...\right\}$.

Zum Jahresende

Wie viele der Zahlen $1,2,...2007$ lassen sich als Potenzen von 5 mit natürlichen Zahlen als Exponenten oder als Summen von solchen schreiben? (H.F.)

Lösung:

Jede durch 5 teilbare Zahl lässt sich so schreiben, also 401 der Zahlen $1,2,...2007$.

Auf der neuen Schule

Die sechs Freundinnen Anna, Christel, Denise, Juliane, Melanie und Sarah sind von der Grundschule auf das Leonhard-Euler-Gymnasium gewechselt. Leider sind sie in sechs verschiedene Klassen gekommen. Am Nachmittag des ersten Schultags treffen und unterhalten sie sich. Dabei stellen sie auch fest, dass die Raumnummern ihrer Klassenräume sechs verschiedene dreistellige Zahlen sind, die aber alle aus den gleichen Ziffern bestehen.
Anna: „Ich bin diejenige, die von uns den Raum mit der kleinsten Nummer hat.“
Christel: „Und meine ist um genau 450 größer als deine, Anna.“
Denise: „Meine Raumnummer ist nicht durch 2 teilbar.“
Juliane: „Die Nummer unseres Klassenraumes ist durch 11 teilbar.“
Melanie: „Bei uns ist sie durch 8 teilbar.“
Sarah: „Bei uns durch 3.“
Wessen Klassenraum hat welche Raumnummer? (MG)

Lösung:
Aus Christels Aussage folgt, dass Anna und sie die gleiche Endziffer haben müssen. Die beiden verbleibenden Ziffern müssen damit einen Abstand von 5 haben, es kommen also für diese nur die Kombinationen $(0, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 7)$, $(3, 8)$ und $(4, 9)$ in Frage.
Da die Nummer von Sarah durch 3 teilbar ist, ist auch die Summe der drei Ziffern durch drei teilbar, womit sich die folgenden Möglichkeiten für die dritte Ziffer ergeben:

$$\begin{array}{lcl} (0,5) & \longrightarrow & 1,\ 4,\ 7 \\ (1,6) & \longrightarrow & 2,\ 5,\ 8 \\ (2,7) & \longrightarrow & 0,\ 3,\ 6,\ 9 \\ (3,8) & \longrightarrow & 1,\ 4,\ 7 \\ (4,9) & \longrightarrow & 2,\ 5,\ 8 \end{array}$$

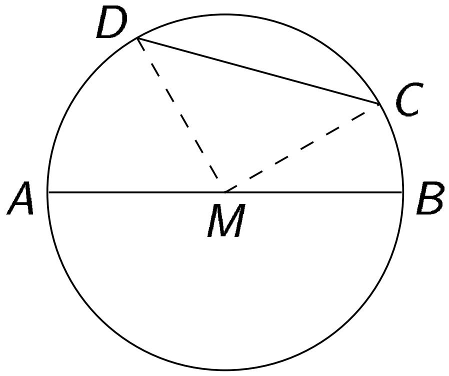
Da Annas Nummer die kleinste ist, muss bei ihr die Endziffer, also die zu ergänzende dritte, am größten sein. Damit bleiben nur noch die Ziffernkombinationen $(0, 5, 7)$, $(1, 6, 8)$ und $(2, 7, 9)$.
Julianes Nummer ist durch 11 teilbar. Eine solche Zahl lässt sich aber nur mit der Ziffernkombination $(2, 7, 9)$ realisieren (alternierende Quersumme).
Nun müssen wir nur noch die fraglichen Zahlen den Schülerinnen zuordnen. Wegen ihrer Aussagen hat Anna die Nummer 279 und Christel die 729. Von den verbleibenden Zahlen ist nur eine durch 8 teilbar, und so hat Melanie den Klassenraum 792. Nun lässt sich nur noch 297 durch 11 teilen – das ist Julianes Klassenraum. Da nur noch 927 ungerade ist, hat Denise entsprechenden Klassenraum und somit bleibt für Sarah der Raum 972.

Bemerkenswerte Quadrate
Den drei Quadratzahlen 7^2, 41^2 und 285^2 ist eine bemerkenswerte Eigenschaft gemeinsam.
Finde heraus, um welche Eigenschaft es sich handeln könnte!
(Kannst Du weitere Quadratzahlen mit dieser Eigenschaft bestimmen?) (H.F.)

Lösung:
$7^2 = 49$ mit $4 = 2^2$ und $9 = 3^2$.
$41^2 = 1681$ mit $16 = 4^2$ und $81 = 9^2$.
$285^2 = 81225$ mit $81 = 9^2$ und $225 = 15^2$.
Weitere Quadratzahlen mit dieser Eigenschaft sind:
$35^2 = 1225$ mit $1 = 1^2$ und $225 = 15^2$ sowie $350^2 = 122500$ mit $1 = 1^2$ und $22500 = 150^2$.
(Magdalena Winkelfoß, Kl. 5, Rabanus-Maurus-Gymnasium, Mainz)

Länge einer Kreissehne
In einem Kreis ist jede Sehne, die kein Durchmesser ist, kürzer als ein Durchmesser. Du siehst es! Kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Lösung:
Es sei $\overline{CD}$ eine beliebige, aber von einem Kreisdurchmesser verschiedene Sehne. $\overline{AB}$ sei ein Durchmesser, der die Sehne nicht schneidet; $\overline{AB}$ sei $2r$ lang, wobei r der Kreisradius sei.
Dann ist zunächst $|CD| < |MC| + |MD|$, denn in einem Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die Länge der dritten Seite.
Wegen $|MC| = |MD| = r$ ist daher $|CD| < 2r$, was zu zeigen war.



Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Die Stühle im Tanzsaal
Familie Neureich lädt die besonders wichtigen Persönlichkeiten von Geldstadt zu einer kleinen intimen Feier ein. Ein besonderer Augenschmaus in der Villa der Neureichs ist der quadratische Tanzsaal. Da der Hausherr sehr viel von Ordnung hält, fordert er seinen Butler auf, die zehn Stühle im Tanzsaal so aufzustellen, dass an jeder Wand dieselbe Anzahl Stühle steht.
Gib eine Lösung an! (gefunden von WK)

Hat Frau Fröhlich etwa 28 Kinder?
Frau Fröhlich erzählt im Urlaub ihrer neuen Bekannten Frau Lustig von ihren kleinen Problemen mit ihren vielen Kindern: „Am Schlimmsten ist es beim Essen. Die haben so einen unterschiedlichen Geschmack. Sieben grausen sich vor Spinat, sechs bringen nicht eine Karotte hinunter und fünf verabscheuen Bohnen. Vier mögen weder Spinat noch Karotten, drei essen weder Spinat noch Bohnen. Zwei bringen weder Bohnen noch Karotten hinunter und eines isst sogar weder Spinat noch Bohnen noch Karotten. Und das Schlimmste ist: Kein einziges Kind mag alle drei Beilagen."
Darauf ist Frau Lustig doch erstaunt und fragt: „Frau Fröhlich, wie viele Kinder haben sie eigentlich?" (WK)

Nimm die Steine weg
Sabrina und Judith treffen sich, nachdem sie ihre Hausaufgaben erledigt haben, bei Judith. Heute wollen sie mal ein wenig spielen. In einer Zeitschrift haben sie ein Spielchen gefunden mit der folgenden Spielregel: Auf einem Haufen liegen 24 Spielsteine, Zwei Spieler nehmen abwechselnd zwischen einem und sechs Steinen davon weg. Gewonnen hat derjenige, der den letzten Stein wegnimmt.

Sabrina überlegt ein wenig und sagt dann: „Ich bin ja hier der Gast und darf deshalb anfangen." Sie weiß nämlich, dass sie dann bei geschickter Strategie mit Sicherheit gewinnen wird.
Spielt das Spiel einige Male und stellt dabei die „todsichere" Methode fest, die für den Spieler zum Sieg führt, der anfängt. Wie geht diese? (WK)

Falsche Aufgabe – richtiges Ergebnis
Mathis sollte in einer Rechenaufgabe drei natürliche Zahlen addieren. Stattdessen multiplizierte er sie miteinander. Dennoch erhielt er das gleiche Ergebnis, wie wenn er addiert hätte.
Wie hießen die drei Zahlen? Gibt es mehrere Möglichkeiten für diese drei Zahlen? (H.F.)

Ein beschränkter Aufzug
In einem Wolkenkratzer mit 99 oberirdischen Stockwerken, wobei das Erdgeschoss das erste Stockwerk ist, gibt es einen Aufzug mit nur zwei Befehltasten: Drückt man den Knopf ⇧, so fährt der Aufzug 13 Stockwerke nach oben, drückt man den Knopf ⇩, so bewegt er sich um neun Stockwerke nach unten. Erhält er einen Befehl, der ihn unter das Erdgeschoss oder über den 99. Stock hinaus führen würde, dann führt er diesen Befehl nicht aus.
Kann man mit diesem Aufzug vom Erdgeschoss bis ins 99. Stockwerk gelangen? (H.F.)

Die neue E-Mail-Adresse
Ralf will sich eine neue E-Mail-Adresse bei der neugegründeten Firma www.OhWehOhWehOhWeh.de einrichten. Er ruft die entsprechende Internetseite auf und will sich die neue Adresse besorgen. Da kommt die Antwort nach nur 42,3567 Sekunden Ladedauer: „Prima, dass Sie sich bei uns anmelden wollen. Sie brauchen sich nur noch ein Kennwort zu wählen. Das geht bei uns ganz besonders einfach: Sie wählen sich eine vierstellige Zahl, in der keine zwei gleichen Ziffern vorkommen. Der Unterschied zwischen der Zehner- und der Hunderterziffer muss 3 betragen, der Unterschied zwischen der Hunderter- und Tausenderziffer muss 4 betragen. Beim Berechnen dieser Unterschiede kommt es nicht auf die Reihenfolge der betreffenden Ziffern an, die Tausenderziffer darf nicht 0 sein." Ralf erinnert sich an die Werbung und schreit: „Das ist aber einfach!" Dann wird er aber doch ernsthafter: „Wie viele verschiedene Kennwörter gibt es denn da eigentlich, also: Wie viele vierstellige Zahlen der gewünschten Art gibt es insgesamt?" (WK)

Zufall oder nicht?

$$\frac{(2007+2007)+(2007-2007)+(2007\cdot 2007)+(2007:2007)}{2008}=2008$$

(H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 931: Ein besonderes arithmetische Mittel

2008 ist das arithmetische Mittel aus

$$\sqrt{2011 \cdot 2009 + 1} \text{ und } \sqrt{2009 \cdot 2007 + 1} \text{ und } \sqrt{2007 \cdot 2005 + 1}.$$

Stimmt das? Begründe Deine Antwort! (H.F.)

Aufgabe 932: Der Eimer

Anna Lysis hat einen alten 10-Liter-Eimer. In diesen füllt sie zunächst 1 l Wasser, danach $\frac{1}{2}$ l, dann $\frac{1}{3}$ l, $\frac{1}{4}$ l und so weiter...

Läuft der Eimer irgendwann über oder erreicht Anna irgendwann eine bestimmte Füllhöhe (welche?), die nicht überschritten wird? (MG)

Aufgabe 933

Gegeben seien die Gleichungen

$$(1)\ \frac{x^2}{yz} - \frac{y^2}{xz} - \frac{z^2}{xy} = 3 \qquad \text{und} \qquad (2)\ \frac{x^2 z}{y} - \frac{2z}{y} = 2,$$

wobei $x, y, z \geq 1$ verlangt sei.

a) Leite aus (1) ab, dass $x > y$ gilt.

b) Leite aus (2) ab, dass $2y \geq x^2 - 2$ ist.

c) Bestimme – falls vorhanden – alle natürlichen Zahlen x, y, z, die (1) und (2) zugleich erfüllen.

(H.F.)

Aufgabe 934: Gleichschenklige Dreiecke mit bunten Eckpunkten – Teil II

In einem regelmäßigen n-Eck seien alle Eckpunkte rot oder blau eingefärbt; von jeder Farbe gebe es mindestens einen Eckpunkt.

In Aufgabe 921 in Heft 91 war zu zeigen, dass man für $n = 2007$ stets drei gleichfarbige Eckpunkte finden kann, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Die in MONOID 92 gegebene Lösung gilt auch für jedes andere ungerade $n > 3$.

Nun haben wir aber das Jahr 2008. Daher unsere Aufgaben:

a) Finde für $n = 4$, $n = 6$ und $n = 8$ Einfärbungen, bei denen dies nicht möglich ist!

b) Zeige, dass Du auch für jedes gerade $n > 8$ immer ein gleichschenkliges Dreieck mit gleich gefärbten Eckpunkten finden kannst! (WJB)

Aufgabe 935: Fischers Fritzens Rudertour

Fischer Fritz rudert flussabwärts von Lachsdorf nach Heringshausen in 2,5 Stunden. Nachdem er in Heringshausen vergeblich auf der Suche nach frischem Fisch war, rudert er im selben Rhythmus wieder zurück nach Lachsdorf. Gegen den Strom braucht er nun 3 Stunden und 45 Minuten.

Wie lange würde Fischer Fritz für diesselbe Strecke (hin und zurück) bei gleichem Ruderrhythmus auf einem strömungsfreien Gewässer brauchen?

(Thomas Geiß, Leibniz-Gymnasium, Östringen)

Aufgabe 936: Deutsches Institut für Normung – Teil II

In der Aufgabe 925 im Heft 92 haben wir uns mit den DIN-Größen für Papiermaße befasst. Zur Erinnerung: DIN A0 ist ein Blatt der Größe $1\,\mathrm{m}^2$ mit Seitenlängen a_0, b_0 für die $a_0 : b_0 = 1 : \sqrt{2}$ gilt. Aus DIN An mit Seitenlängen a_n, b_n entsteht DIN A(n+1) durch Halbieren der längeren Seite: $a_{n+1} = \frac{b_n}{2}$, $b_{n+1} = a_n$.

Wir hatten gezeigt, dass für jedes n das Verhältnis der Seitenlängen gleich bleibt, also immer $a_n : b_n = 1 : \sqrt{2}$ gilt.

Ist das Entsprechende auch dreidimensional möglich, d. h. gibt es einen Quader mit Seitenlängen a_0, b_0, c_0 und $a_0 b_0 c_0 = 1\,\mathrm{m}^3$, $a_0 < b_0 < c_0$ derart, dass nach Halbieren der längsten Seite ein ähnlicher Quader entsteht usw., d. h. $a_{n+1} = \frac{c_n}{2}$, $b_{n+1} = a_n$, $c_{n+1} = b_n$ mit $a_n : b_n : c_n = a_0 : b_0 : c_0$ für alle n?

(WJB)

Aufgabe 937

Die Folge $x_1, x_2, x_3 \ldots$ sei gegeben durch

(1) $x_1 = x_2 = 1$ (2) $x_{2n+1}x_{2n-1} - x_{2n}^2 = 1$ (3) $x_{2n+1}^2 - x_{2n}x_{2n+2} = 1$

a) Berechne x_n für $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$

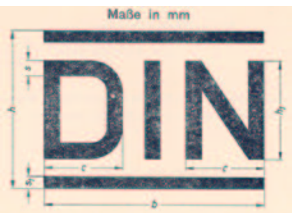
b) Erkennst Du, um welche Folge es sich handelt?

c) Beweise, dass es die von Dir vermutete Folge ist. (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 92

Klassen 8–13

Aufgabe 925: Deutsches Institut für Normung



In Deutschland sind Papierbögen (wie sich das gehört!) nach DIN genormt. (Ist das wieder eine Blüte typisch deutscher Gründlichkeit oder hat das sogar einen Sinn?) Ein Bogen der Größe DIN A0 hat die Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$. Dabei verhalten sich die Seitenlängen des Blattes wie $1 : \sqrt{2}$.

a) Berechne die Seitenlängen des DIN A0-Bogens.

b) Den DIN A1-Bogen erhält man (sowie auch jede weitere Stufe aus der vorherigen) durch Halbieren des Blattes an der längeren Seite. In welchem Verhältnis stehen dann die Seitenlängen?

c) Die MONOID-Hefte haben DIN A5-Format. Berechne die Seitenlängen und die Fläche!

d) Der Ausgangs-DIN-A0-Bogen hat eine Dicke von 0,2 mm. Dieser wird nun auf DIN A10 gefaltet. Wie dick ist der Bogen nun?

(MG, nach einer Idee von Michael Schönberg, Melsbach)

Lösung:

a) Die kürzere Seite sei x, die längere demzufolge $\sqrt{2} \cdot x$ lang. Dann gilt für die Fläche des DIN A0-Bogens: $x \cdot \sqrt{2}x = \sqrt{2} \cdot x^2 = 1$. Auflösen liefert $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, womit $x = \pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx \pm 0{,}841$ ist und, da nur eine positive Lösung sinnvoll ist, muss $x = 0{,}841\,\text{m}$ sein, die längere Seite ist demnach 1,189 m lang.

b) Das Seitenverhältnis beträgt nach Voraussetzung $1 : \sqrt{2}$ resp. als Bruch $\frac{1}{\sqrt{2}}$, wobei die Länge der Seiten unerheblich ist, da sich der gemeinsame Faktor ja herauskürzt. Wird nun die längere Seite halbiert, so ergibt sich

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Das Seitenverhältnis bleibt also (in jedem Schritt!) erhalten und daher sind die verschiedenen DIN-A-Größen einander ähnlich.

c) Wir betrachten folgende Tabelle:

DIN A	0	1	2	3	4	5
Seite 1	1,189	0,595	0,595	0,297	0,297	0,149
Seite 2	0,841	0,841	0,420	0,420	0,210	0,210

Damit ergeben sich für das MONOID-Heft die Seitenlängen 14,9 cm und 21,0 cm. Nachmessen bestätigt diese Größen nur ungefähr, da die Hefte nach dem Druck noch etwas „glattgeschnitten" werden.

Der Flächeninhalt beträgt $A_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1\,\text{m}^2 = 0{,}03125\,\text{m}^2 = 312{,}5\,\text{cm}^2$.

d) Bei zehn Faltungen entstehen 2^{10} Schichten. Damit ist der Bogen nun $0{,}2\,\text{mm} \cdot 2^{10} = 204{,}8\,\text{mm}$ dick. (Auf Grund der Dicke des gefalteten Stoßes ist dies allerdings praktisch nicht umzusetzen.)

Aufgabe 926: Freitag, der 13.

Im Internet findet man, dass es in jedem Kalenderjahr mindestens einen und höchstens drei Freitage gibt, die auf einen 13. des Monats fallen. Kannst Du das nachweisen? (Valentin Blomer)

Lösung:

Wenn ein Monat 31 Tage hat, sind es bis zum 13. des nächsten Monats vier Wochen und drei Tage, die Verschiebung des Wochentages also 3. Bei 30 Tagen beträgt die Verschiebung also 2 Wochentage, bei 29 Tagen 1 Tag und bei 28 Tagn ist der 13. des Folgemonats derselbe Wochentag.

Die Wochentage seien nun mit den Ziffern 1 bis 7 bezeichnet. In einem Jahr sei der 13. Januar Tag 1. Daraus ergibt sich für die folgenden 13. Folgendes:

	Wochentag des 13.	
Monat	normales Jahr	Schaltjahr
Januar	1	1
Februar	4	4
März	4	5
April	7	1
Mai	2	3
Juni	5	6
Juli	7	1
August	3	4
September	6	7
Oktober	1	2
November	4	5
Dezember	6	7

Es taucht jede Wochentagsziffer am 13. eines Monats jeweils mindestens einmal und höchstens dreimal auf. Da sich die Wochentage gegenüber dem Datum jedes Jahr um einen Tag verschieben (bei Schaltjahren um zwei Tage), entspricht jede Ziffer mal einem Freitag. Somit gibt es also in der Tat immer mindestens einen Freitag, den 13. und maximal drei.

(Christian Behrens, Kl. 12, Gymnasium am Römerkastell, Alzey; et al.)

Aufgabe 927: Gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke

Gibt es gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke mit lauter rationalen Seitenlängen? (H.F.)

Lösung:

Δ sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen x und der Hypotenusenlänge y und x, y seien beides rationale Zahlen.

Für Δ gilt dann nach dem Satz des Pythagoras $x^2 + x^2 = y^2$, woraus $2x^2 = y^2$ und damit $2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2$ folgt. Dann aber ist $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$ und weil x, y beide rational sind, ist auch $\frac{y}{x}$ und daher $\sqrt{2}$ rational.

Nun ist aber schon seit der Zeit des Pythagoras bekannt, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Aus diesem Widerspruch folgt: x und y können nicht beide zugleich rational sein. Somit kann es keine rechtwinkligen, gleichseitigen Dreiecke mit lauter rationalen Seitenlängen geben.

Aufgabe 928: Ein Teilbarkeitsproblem

Die Zahlen 2^2+1, 2^4-1, 2^6+1, 2^8-1 sind sämtlich durch 5 teilbar. Gilt das auch allgemein: Für $n = 2, 6, 10, 14, \ldots$ sind 2^n+1 und $2^{n+2}-1$ durch 5 teilbar? (H.F.)

Lösung:

Es sei 2^n+1 durch 5 teilbar, also $2^n+1 = 5m$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 1$. Dann gilt $2^{n+2}-1 = 2^n \cdot 4 - 1 = 2^n \cdot 5 - (2^n+1) = 5 \cdot 2^n - 5m = 5 \cdot (2^n - m)$ – also ist $2^{n+2}-1$ durch 5 teilbar.

$2^{n+4}+1 = 2^{n+2} \cdot 4 + 1 = 2^{n+2} \cdot 5 - (2^{n+2}-1) = 5 \cdot 2^{n+2} - 5(2^n - m) =$ Vielfaches von 5; mithin ist $2^{n+4}+1$ durch 5 teilbar.

Da 2^n+1 und $2^{n+2}-1$ für $n=2$ durch 5 teilbar sind, gilt dies auch für $n=6$, für $n=10$ usw.

Aufgabe 929: Erdumkreisung

Angenommen, Julia würde einmal entlang des Äquators um die Erde laufen – um wieviel länger ist die Strecke, die ihr Kopf zurückgelegt hat, im Vergleich zur Strecke, die ihre Füße zurückgelegt haben?
Wie verhält es sich auf dem Mond, dem Mars, der Sonne? (MG)

Lösung:

Julia läuft entlang eines Kreises, die Strecke entspricht also dem Kreisumfang, wobei ihre Füße auf dem Boden sind, also die Strecke der Füße gleich dem Erdumfang am Äquator ist: $U_F = 2\pi r_{\text{Erde}}$.

Ihr Kopf ist etwas höher, ihre Körpergröße sei h. Die Wegstrecke des Kopfes beträgt also $U_K = 2\pi(r_{\text{Erde}} + h)$.

Damit ergibt sich ein Wegunterschied von

$$U_K - U_F = 2\pi(r_{\text{Erde}} + h) - 2\pi r_{\text{Erde}} = 2\pi h.$$

Da die Differenz unabhängig vom Erdradius ist, ist der Unterschied auf den übrigen Himmelskörpern gleich!

Nehmen wir an, dass Julia $h = 1{,}65\,\text{m}$ groß ist, dann beträgt der Unterschied $U_K - U_F = 2\pi \cdot 1{,}65\,\text{m} = 10{,}37\,\text{m}$.

Dies ist aber unmerklich bei einer Strecke von doch immerhin $U_F = 2\pi \cdot 6378{,}15\,\text{km} = 40015{,}10\,\text{km}$.

Aufgabe 930

M sei eine Menge aus 100 nicht negativen Zahlen.

a) Für je zwei Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Begründe: Höchstens eine Zahl aus M ist < 1; sie ist aber $\neq 0$.

b) Für je vier Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $< \frac{5}{4}$. Dann ist das Produkt aller Zahlen aus M kleiner als 265.

c) Für je sechs Zahlen aus M gelte stets: Ihr Produkt ist $> \frac{5}{4}$. Dann ist das Produkt aller Zahlen aus M größer als 35.

(H.F.)

Lösung:

Es sei $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{100}\}$.

a) Es sei $x_1 < 1$. Dann folgt aus $x_1 \cdot x_2 > \frac{5}{4}$, dass $x_2 > 1$ sein muss. Ebenso folgt aus $x_1 \cdot x_3 > \frac{5}{4}, \dots, x_1 \cdot x_{100} > \frac{5}{4}$, dass $x_3 > 1, \dots, x_{100} > 1$ gilt. Somit ist höchstens eine Zahl aus M kleiner als 1.
Es sei $x_1 = 0$. Dann gilt $x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_3 = \dots = x_1 \cdot x_{100} = 0$, während aber nach Voraussetzung $x_1 \cdot x_2 > \frac{5}{4}, \dots, x_1 \cdot x_{100} > \frac{5}{4}$ ist.
Somit ist keine Zahl aus M gleich Null.

b) Es gilt: $x_1x_2x_3x_4 < \frac{5}{4}, \dots, x_{97}x_{98}x_{99}x_{100} < \frac{5}{4} \Rightarrow$
$(x_1x_2x_3x_4) \cdot (x_5x_6x_7x_8) \cdots (x_{97}x_{98}x_{99}x_{100}) < (\frac{5}{4})^{25} < 265$.

c) Die Elemente von M seien nach wachsender Größe geordnet, also $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{100}$.
Weil das Produkt $x_1x_2 \dots x_6 > \frac{5}{4}$ ist, muss mindestens $x_6 > 1$ sein. Dann aber sind auch $x_7, \cdots, x_{100}$ alle > 1. $\Rightarrow$
$(x_1x_2 \dots x_6) \cdot (x_7x_8 \dots x_{12}) \cdots (x_{91}x_{92} \dots x_{96}) \cdot x_{97}x_{98}x_{99}x_{100} > (\frac{5}{4})^{16} \cdot 1^4 > 35$.

Aufgabe 931: Wahr oder falsch?

Alle Zahlen $12^n - 1$ sind Vielfache von 11;
alle Zahlen $13^n - 1$ sind Vielfache von 12;
alle Zahlen $14^n - 1$ sind Vielfache von 13... und so weiter, für $n = 1, 2, 3, \dots$.
Sind diese drei Behauptungen und alle durch „und so weiter“ angedeuteten Behauptungen richtig? (H.F.)

Lösung:

Es gilt die wichtige Formel $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^1 + 1)$ für beliebige (reelle) Zahlen a und für $n = 1, 2, 3, \dots$. Setzt man in dieser Formel der Reihe nach $a = 1$, $a = 2, \dots$, $a = 12$, $a = 13$, $a = 14, \dots$ ein, dann ergibt sich, dass für jeden dieser Werte und für $n = 1, 2, 3, \dots$ stets die entsprechende Teilbarkeit von $a^n - 1$ durch $a - 1$ zutrifft.

Alexey Tyukin (Kl. 12, Gymansium Gonsenheim, Mainz) bemerkt ganz richtig, dass auch gilt: $12^n + 1$ sind Vielfache von 13, usw. für ungerade $n \in \mathbb{N}$. Denn mit $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

$$\begin{aligned} a^n + 1 = a^{2k+1} + 1 &= ((a+1) - 1)^{2k+1} + 1 = (a+1)(\ldots) - 1 + 1 \\ &= (a+1)(\ldots), \end{aligned}$$

woraus $(a+1) | a^n + 1$ folgt.

Wer forscht mit?

n-te Potenen mit n Ziffern

Wir wollen eine n-ziffrige Zahl, die eine n-te Potenz ist, eine *n-Zahl* nennen. Beispiel: Die Zahl 32768 ist eine 5-Zahl, weil sie fünfziffrig und $32768 = 8^5$ ist. Untersuche nun die Fragen:

a) Gibt es endlich oder unendlich viele n-Zahlen?

b) Wenn es nur endlich viele n-Zahlen gibt, dann gibt es eine größte. Wie heißt sie gegebenenfalls? (H.F.)

Hinweis: Eure Forschungsergebnisse könnt Ihr bis zum 15. August 2008 an die MONOID-Redaktion einsenden. In *drei* Heften werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen; außerdem werden sie bewertet und erstmals auch bepunktet.

Lösung zur BWM-Aufgabe aus Heft 90

In Heft 90 des MONOID fragten wir uns, ausgehend von Aufgabe 1 der ersten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2007: Lassen sich bei einem regelmäßigen n-Eck, wobei n eine positive ganze Zahl sei, die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ so auf die Eckpunkte und die Seitenmittelpunkte verteilen, dass für jede Seite die Summe S der drei Zahlen, die an den Eckpunkten und am Mittelpunkt der Seite stehen, den gleichen Wert hat?
Wir hatten nachgewiesen, dass es für ungerade n stets Lösungen gibt, auch zu verschiedenen Summenwerten S. Zur Frage, ob eine entsprechende Aussage auch für gerade n gilt, sahen wir in dem damaligen Artikel anhand einiger Beispiele (in den Abbildungen 4 und 5), dass Verteilungen bei Vier-, Sechs- und Achtecken möglich sind. Eine systematische Untersuchung war aber eine unserer zentralen Forschungsfragen. Uns haben vier Einsendungen erreicht, die uns alle bei der Beantwortung dieser Frage weiterbringen.
Laura Biroth und **Malte Meyn** haben weitere Verteilungen für $n = 4$ (Summenwert $S = 13$) und $n = 6$ (Summenwert $S = 19$) bzw. die entsprechenden dualen Verteilungen gefunden.
Florian Schweiger erstellt mit Hilfe eines Computerprogramms für die Fälle $n \in \{4, 6, 8\}$ eine Liste zulässiger Verteilungen, indem er für jede Anordnung der

Zahlen 1, 2,..., $2n$ überprüft, ob sie eine gesuchte Verteilung ist. Das ist ein einfaches Verfahren, dessen Rechenaufwand aber mit wachsendem n sehr schnell (exponentiell) steigt. Auch die Anzahl möglicher Verteilungen nimmt mit wachsendem n rasch zu: Bis auf Symmetrien bei der Anordnung im Vieleck enthält die Liste, die Florian Schweiger ermittelt hat, sechs zulässige Verteilungen für ein Viereck, 20 zulässige Verteilungen für ein Sechseck und 282 zulässige Verteilungen für ein Achteck, davon jeweils die Hälfte zueinander duale Verteilungen. Es ist interessant zu beobachten, dass es für die einzelnen Summenwerte unterschiedlich viele zulässige Verteilungen gibt, zum Beispiel für ein Achteck mit den möglichen Summenwerten S zwischen $\left\lceil \frac{5\cdot 8+3}{2} \right\rceil = 22$ und $\left\lfloor \frac{7\cdot 8+3}{2} \right\rfloor = 29$ (vgl. MONOID 90):

Summenwert S	22	23	24	25	26	27	28	29
Anzahl mögl. Verteilungen für $n=8$	10	19	57	55	55	57	19	10

Martin Alexander Lange gelingt es, für allgemeine n-Ecke, wobei n gerade ist, eine Verteilung wie in der Aufgabenstellung mit minimalem Summenwert S anzugeben! Erstaunlicherweise sind die Verteilungen der Zahlen auf Eckpunkte und Seitenmittelpunkte in weiten Teilen analog zu den Verteilungen, die wir für n-Ecke, n ungerade, mit minimalem Summenwert in MONOID 90 beschrieben hatten. Es werden nämlich die Zahlen 1, 2,..., $n-1$ und (anders als im ungeraden Fall) $\frac{3n}{2}$ den Ecken zugeteilt; die verbleibenden Zahlen aus $\{n, n+1, \dots, 2n\}$ lassen sich dann so auf die Seitenmittelpunkte verteilen, dass sich für jede Seite für die drei Zahlen, die an den Eckpunkten und dem Mittelpunkt der Seite stehen, der Wert $\left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil = \frac{5n}{2} + 2$ ergibt. Um die Verteilung der Zahlen besser beschreiben zu können, seien die Ecken des n-Ecks im Uhrzeigersinn mit E_1, E_2,..., E_n fortlaufend nummeriert. Die Seiten können wir entsprechend über E_nE_1, E_1E_2, ..., $E_{n-1}E_n$ als Tupel der beiden zugehörigen Ecken beschreiben. Die eigentliche Verteilung hängt davon ab, ob die gerade Zahl n durch 4 teilbar ist oder nicht. Die Zahl n sei im Folgenden beliebig, aber fest gewählt.
Wir stellen zunächst den Fall dar, dass n gerade, aber nicht durch 4 teilbar ist, das heißt $\frac{n}{2}$ ist ungerade. Die Zahl 1 wird der Ecke E_1 zugeteilt. Wir setzen dies fort, indem wir der im Uhrzeigersinn jeweils übernächsten Ecke fortlaufend die Zahlen 2, 3, ..., $\frac{n}{2}$ zuteilen, bis wir zu E_{n-1} gelangen: Auf diese Weise wird der Ecke E_k, wenn $1 \leq k \leq n-1$ ungerade ist, die Zahl $\frac{k+1}{2}$ zugeteilt. Die Zahlen $\frac{n}{2}+1$, ..., $n-1$ werden den Ecken E_k, wobei $4 \leq k \leq n$ gerade ist, jeweils über $\frac{n}{2} + \frac{k-2}{2}$ zugeteilt. Außerdem teilen wir der Ecke E_2 die Zahl $\frac{3n}{2}$ zu. Wir prüfen nun, ob sich die verbleibenden Zahlen n, $n+1$, ..., $\frac{3n}{2}-1$, $\frac{3n}{2}+1$, ..., $2n-1$, $2n$ so auf die Seitenmittelpunkte verteilen lassen, dass für jede Seite die Summe der drei Zahlen, die an den Eckpunkten und dem Mittelpunkt der Seite stehen, den gleichen Wert, nämlich $\frac{5n}{2} + 2$, haben. Für die einzelnen Seiten stellen wir fest:

Seite	E_nE_1	E_1E_2	E_2E_3	E_kE_{k+1}, $3 \le k \le n-1$
Summe der Zahlen an den Eckpunkten	n	$\frac{3n}{2}+1$	$\frac{3n}{2}+2$	$k+\frac{n}{2}$
$\frac{5n}{2}+2$ – Summe der Zahlen an den Eckpunkten	$\frac{3n}{2}+2$	$n+1$	n	$2n+2-k$

Der Term $2n+2-k$ in der letzten Zeile der Tabelle ist am kleinsten für die Seite $E_{n-1}E_n$, nämlich $n+3$, und am größten für die Seite E_3E_4, nämlich $2n-1$. Es zeigt sich damit, dass wir die Zuordnung aus mehreren Gründen modifizieren müssen, um zu einer Verteilung wie in der Aufgabenstellung zu gelangen: Wir haben die Zahlen $n+2$ und $2n$ nicht zugeteilt, wir würden sowohl der Seite E_nE_1 als auch der Seite $E_{n/2}E_{n/2+1}$ die Zahl $\frac{3n}{2}+2$ zuteilen, und wir würden sowohl der Seite $E_{n/2+2}E_{n/2+3}$ als auch der Ecke E_2 die Zahl $\frac{3n}{2}$ zuteilen. Alle Konflikte lassen sich auflösen, wenn wir die Zuteilung der Zahlen $\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}-1}{2}=\frac{3n-2}{4}$ bzw. $\frac{\frac{n}{2}+3}{2}$ zu den Ecken $E_{n/2+1}$ bzw. $E_{n/2+2}$ vertauschen und alle anderen Zuteilungen unverändert lassen. Die obige Tabelle ist dann für die folgenden Seiten neu zu erstellen:

Seite	$E_{n/2}E_{n/2+1}$	$E_{n/2+1}E_{n/2+2}$	$E_{n/2+2}E_{n/2+3}$
Summe der Zahlen an den Eckpunkten	$\frac{\frac{n}{2}+1}{2}+\frac{\frac{n}{2}+3}{2}$	$\frac{\frac{n}{2}+3}{2}+\frac{3n-2}{4}$	$\frac{3n-2}{4}+\frac{3n+2}{4}$
$\frac{5n}{2}+2$ – Summe der Zahlen an den Eckpunkten	$2n$ (war $\frac{3n}{2}+2$)	$\frac{3n}{2}+1$ (unverändert)	$n+2$ (war $\frac{3n}{2}$)

Für $n=6$ ergibt sich die Verteilung wie in Abb. 4 in MONOID 90.
Die Verteilung für den Fall, dass n durch 4 teilbar, das heißt, dass $\frac{n}{2}$ gerade ist, ist ähnlich.

- Der Ecke E_k, $1 \le k \le \frac{n}{2}+1$ ungerade, wird die Zahl $\frac{k+1}{2}$ zugeteilt.
- Der Ecke $E_{n/2+3}$ wird die Zahl $\frac{3n}{4}-1$ zugeteilt.
- Der Ecke E_k, $\frac{n}{2}+5 \le k \le n-1$ ungerade, wird die Zahl $\frac{k-1}{2}$ zugeteilt.
- Der Ecke E_2 wird die Zahl $\frac{3n}{2}$ zugeteilt.
- Der Ecke E_k, $4 \le k \le \frac{n}{2}$ gerade, wird die Zahl $\frac{n}{2}+\frac{k-4}{2}$ zugeteilt.
- Der Ecke $E_{n/2+2}$ wird die Zahl $\frac{3n}{4}$ zugeteilt.
- Der Ecke E_k, $\frac{n}{2}+4 \le k \le n$ gerade, wird die Zahl $\frac{n}{2}+\frac{k-2}{2}$ zugeteilt.

Man überprüft, dass auf diese Weise alle n Zahlen in $\left\{1,\dots,\frac{n}{4}+1\right\} \cup \left\{\frac{n}{4}+2,\dots,\frac{n}{2}-1\right\} \cup \left\{\frac{n}{2},\dots,\frac{3n}{4}-2\right\} \cup \left\{\frac{3n}{4}+1,\dots,n-1\right\} \cup \left\{\frac{3n}{4}-1,\frac{3n}{4},\frac{3n}{2}\right\}$, also alle Zahlen in $\{1, \dots, n-1\} \cup \left\{\frac{3n}{2}\right\}$, genau einmal einer Ecke zugeteilt werden. Wiederum müssen wir nur noch nachweisen, dass sich die verbleibenden Zahlen n, $n+1$, $\dots$, $\frac{3n}{2}-1$, $\frac{3n}{2}+1$, $\dots$, $2n-1$, $2n$ so auf die Seitenmittelpunkte verteilen lassen, dass für jede Seite die Summen der drei Zahlen, die an den Eckpunkten und dem Mittelpunkt der Seite stehen, den gleichen Wert, nämlich $\frac{5n}{2}+2$, haben. Wir stellen zunächst fest:

Seite	E_nE_1	E_1E_2	E_2E_3	E_kE_{k+1}, $3 \leq k \leq \frac{n}{2}$	E_kE_{k+1}, $\frac{n}{2}+4 \leq k \leq n-1$
Summe an d. Eckpkt.	n	$\frac{3n}{2}+1$	$\frac{3n}{2}+2$	$k+\frac{n}{2}-1$	$k+\frac{n}{2}-1$
$\frac{5n}{2}+2$ – Summe an d. Eckpkt.	$\frac{3n}{2}+2$	$n+1$	n	$2n+3-k$	$2n+3-k$

Der Term $2n+3-k$ in der letzten Zeile der Tabelle ist am kleinsten für die Seite $E_{n-1}E_n$, nämlich $n+4$, und am größten für die Seite E_3E_4, nämlich $2n$, außerdem fehlen in der obigen Tabelle die Werte des Terms für $\frac{n}{2}+1 \leq k \leq \frac{n}{2}+3$, von denen wir aber nur die Zahl $\frac{3n}{2}+1$ noch nicht zugeteilt haben. Wenn wir abschließend die Seiten $E_{n/2+1}E_{n/2+2}$, $E_{n/2+2}E_{n/2+3}$ und $E_{n/2+3}E_{n/2+4}$ betrachten, müssen wir also im Auge behalten, ob wir dort die Zahlen $n+2$, $n+3$ und $\frac{3n}{2}+1$ zuteilen. Für diese Seiten ergibt sich:

Seite	$E_{n/2+1}E_{n/2+2}$	$E_{n/2+2}E_{n/2+3}$	$E_{n/2+3}E_{n/2+4}$
Summe der Zahlen an den Eckpunkten	$\frac{\frac{n}{2}+2}{2}+\frac{3n}{4}$	$\frac{3n}{4}+\frac{3n}{4}-1$	$\frac{3n}{4}-1+\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}+2}{2}$
$\frac{5n}{2}+2-$ Summe der Zahlen an den Eckpunkten	$\frac{3n}{2}+1$	$n+3$	$n+2$

Für $n=4$ und $n=8$ ergeben sich (bis auf Symmetrie) Verteilungen wie in Abb. 4 in MONOID 90.
Damit ist insgesamt nachgewiesen, dass wir auch für n-Ecke mit geradem n stets eine Verteilung der Zahlen $1, \dots, 2n$ auf Ecken und Seitenmittelpunkte finden können, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

(Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Gewissheit gibt allein die Mathematik. Aber leider streift sie nur den Oberrock der Dinge."

Wilhelm Busch

*15.04.1832 in Wiedensahl, †09.01.1908 in Mechtshausen; humoristischer Dichter und Zeichner von satirischen Bildergeschichten

Was heißt „rein zufällig“?

von Wolfgang J. Bühler

Laplace

Sollen wir aus einem Kasten (in der Tradition der Wahrscheinlichkeitstheorie heißt dieser „Urne“), in dem sich N Kugeln befinden, eine dieser Kugeln rein zufällig heraus-„ziehen“, so heißt das, dass jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen werden soll. Diese Wahrscheinlichkeit ist dann $\frac{1}{N}$.
Ziehen wir mehrere, etwa n, Kugeln nacheinander, so heißt „rein zufällig“, dass jeder mögliche Ausgang dieses Experiments die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Hier haben wir für die erste Kugel N Möglichkeiten, für die zweite Kugel $N-1$ Möglichkeiten, für die dritte Kugel $N-2$ Möglichkeiten usw., für die n-te Kugel $N-n+1$ Möglichkeiten, da nur noch $N-(n-1)$ Kugeln in dieser Urne liegen. Insgesamt gibt es also $N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$ solche *geordneten Stichproben* – geordnet, weil es auf die Reihenfolge (die Ordnung) der Einzelziehungen ankommt.
Kommt es uns auf die Reihenfolge nicht an (ziehen wir zum Beispiel die Kugeln gleichzeitig), so reden wir von einer *ungeordneten Stichprobe*. Diese Stichproben sind dann die möglichen Teilmengen vom Umfang n aus der N-elementigen Grundmenge, und „rein zufällig“ heißt dann, dass wir jede dieser Teilmengen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit versehen.
Glücklicherweise können wir die Anzahl der ungeordneten Stichproben aus der Anzahl der geordneten einfach berechnen: Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ mögliche Ordnungen derselben Teilmenge (n Möglichkeiten für die Kugel, die wir zur ersten erklären, $n-1$ für die zweite, ..). Somit hat die Menge der N Kugeln gerade $\frac{N!}{(N-n)!n!} = \binom{N}{n}$ Teilmengen der Größe n.
Für $N = 49$ und $n = 6$ ist dies gerade das Modell für eine Ausspielung im Zahlenlotto (wenn wir Zusatzzahl und Superzahl nicht berücksichtigen). Wollen wir nun feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Tipp vier Richtige enthalten wird, so brauchen wir nur zu ermitteln, wie viele der Möglichkeiten hierzu beitragen: Es sind $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$ Möglichkeiten.
Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit als Quotient aus der „Anzahl der *günstigen* Fälle“ und der „Anzahl der *möglichen* Fälle“. Dieser Quotient wird oft fälschlicherweise als *Definition der Wahrscheinlichkeit* bezeichnet. Er gilt genau im *Laplace-Modell**, d. h. unter der Vorausetzung, dass wir „rein zufällig“ (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) aus endlich vielen Möglichkeiten auswählen.

* Pierre-Simon (Marquis de) Laplace, *28.03.1749 in Beaumont-en-Auge in der Normandie, †05.03.1827 in Paris; Mathematiker und Astronom, beschäftigte sich unter anderem mit der Wahrscheinlichkeitstheorie und Differentialgleichungen

Monte Carlo

Wir betrachten ein Quadrat der Seitenlänge a. Einen Punkt „rein zufällig" in das Quadrat zu werfen, verstehen wir dann so: Die Wahrscheinlichkeit p, mit der ein Teilgebiet des Flächeninhaltes F getroffen wird, ist proportional zu F, also gleich $\frac{F}{a^2}$. Allgemeiner verstehen wir unter dem rein zufälligen Auswählen eines Punktes in einem geometrischen Gebilde, dass jedem Teilbereich eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird, die proportional zu seinem geometrischen Maß ist (Flächeninhalt im zweidimensionalen, Volumen im dreidimensionalen Raum). Das Berechnen einer Wahrscheinlichkeit ist damit rediziert auf die Bestimmung eines Volumens oder einer Fläche. Ist dies nicht explizit möglich, so wiederholen wir das beschriebende Experiment N-mal „rein zufällig", d. h. hier unabhängig, und zählen die Anzahl n von Treffern. Die Gesetze der großen Zahlen in ihrer einfachsten Form besagen dann, dass wir uns für große Werte von N mit hoher Wahrscheinlichkeit darauf verlassen dürfen, dass die relative Häufigkeit $\frac{n}{N}$ von Treffern in der Nähe der Wahrscheinlichkeit p liegt (schwaches Gesetz der großen Zahlen) und dass wir sogar auf Konvergenz von $\frac{n}{N}$ gegen p hoffen dürfen (starkes Gesetz der großen Zahlen).

Dies ist die *Monte-Carlo-Methode* zur (näherungsweisen) Bestimmung einer Fläche oder eines Volumens. Schließen wir etwa einen Kreis vom Radius 1 in ein Quadrat der Seitenlänge $a = 2$ ein und zählen, wie viele von N zufälligen Punkten im Kreis liegen, so ergibt sich auf diese Weise eine Näherung für seine Fläche, also wegen $F = 2\pi r^2 = 2\pi$ insbesondere für die Kreiszahl π.

Prinzipiell lässt sich so jede Wahrscheinlichkeit durch eine Monte-Carlo-Simulation näherungsweise bestimmen, indem man das zugehörige Zufallsexperiment „rein zufällig" (d. h. unabhängig) N-mal wiederholt und die Anzahl n der „Erfolge" zählt. Eine grobe Abschätzung für die Genauigkeit dieser Methode erhalten wir mit Hilfe der *Tschebyscheffschen Ungleichung***.

Diese Ungleichung gibt in Abhängigkeit von der Variabilität einer Zufallsvariablen X eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, mit der X um mehr als eine Konstante η von ihrem Erwartungswert $E(X) = m$ abweicht. Dabei messen wir die Variabilität durch die Varianz $\mathrm{Var}(X)$, definiert als Erwartungswert von $(X - m)^2$. Die Ungleichung lautet dann:

$$P(|X - m| > \eta) < \frac{\mathrm{Var}(X)}{\eta^2}.$$

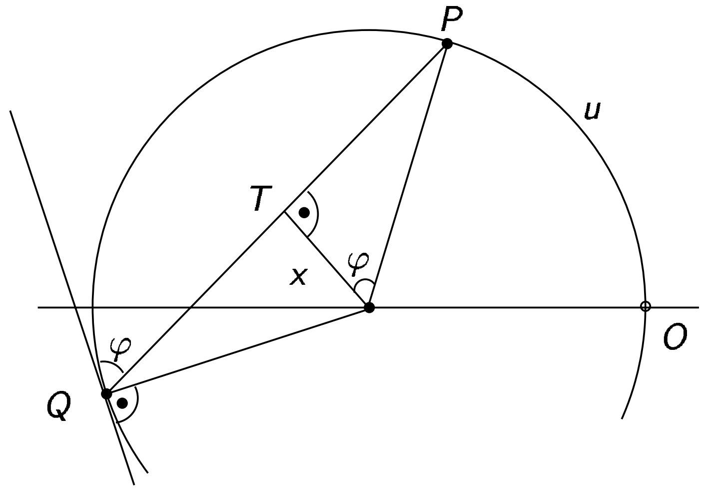
Die Zufallsvariable $X = \frac{n}{N}$ ht den Erwartungswert $m = p$ und die Varianz $\mathrm{Var}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{p(1-p)}{N}$, womit wir als Abschätzung erhalten:

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - p\right| > \eta\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\frac{n}{N})}{\eta^2} = \frac{p(1-p)}{N\eta^2} < \frac{1}{4N\eta^2}$$

** Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow, *16.05.1821 Okatowo bei Moskau, †08.12.1894 in St. Petersburg

Bertrand

Was können wir über die Länge einer Sehne sagen, die „rein zufällig" in einen Kreis gelegt wird? Joseph L. F. Bertrand*** hat in seinem 1888 veröffentlichten Buch *Calcul des Probabilités* untersucht, mit welcher Wahrscheinlichkeit die zufällige Sehne länger als die Seitenlänge $r\sqrt{3}$ eines in den Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist. Dass er dabei mit unterschiedlichen Methoden zur Berechnung auf die drei verschiedenen Werte $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ kam, ist heute als das *Bertrand-Paradoxon* bekannt.



Offensichtlich spielt für diese Fragestellung die Größe des Kreises keine Rolle. Wir betrachten deshalb die Situation für einen Kreis mit Radius $r = 1$. Hier gilt $\left(\frac{s}{2}\right)^2 + x^2 = 1$, also $x = \sqrt{1 - \frac{s^2}{4}}$ und $s = 2\sqrt{1 - x^2}$ sowie $\frac{s}{2} = \sin\varphi$, also $\varphi = \arcsin\left(\frac{s}{2}\right)$ und $s = 2\sin(\varphi)$.

Bezeichnen wir mit den Großbuchstaben S die Länge der zufälligen Sehne, mit X den zugehörigen zufälligen Abstand der Sehne von der Kreismitte und mit Φ die Richtung der Sehne, gemessen als (kleinerer) Winkel zur Tangente, so gilt:

$$S \leq s \iff X \geq x = \sqrt{1 - \frac{s^2}{4}} \iff \Phi \leq \varphi = \arcsin\left(\frac{s}{2}\right)$$

Wir wollen allgemeiner als Bertrand die ganze Wahrscheinlichkeitsverteilung von S, d. h. die Verteilungsfunktion $F(s) = P(S \leq s)$ bestimmen. Dabei argumentieren wir wie Bertrand:

a) Der Abstand einer zufälligen Sehne vom Kreismittelpunkt ist zufällig, also $P(X > x) = P(X \in [x, 1]) = 1 - x$. Daraus ergibt sich $F(s) = P(S \leq s) = 1 - \sqrt{1 - \frac{s^2}{4}}$ und speziell für $s = \sqrt{3}$ haben wir $P(S > \sqrt{3}) = 1 - F(3) = \frac{1}{2}$.

b) Die Richtung einer zufälligen Sehne ist zufällig, d. h. $P(S \leq s) = P(\Phi \in [0, \varphi]) = \frac{\varphi}{90°}$. Demnach ist also $F(s) = \frac{\arcsin(\varphi)}{90°}$ und für $s = \sqrt{3}$ gilt $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60°$, das heißt $P(S \geq \sqrt{3}) = 1 - F(3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

c) Der Sehnenmittelpunkt ist ein zufälliger Punkt im Kreisinneren. Daraus schließen wir $P(X \leq x) = \frac{\text{Fläche des Kreises mit Radius } x}{\text{Gesamtfläche}} = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2$,

*** Joseph Louis François Bertrand, *11.03.1822 in Paris, †05.04.1900 in Paris; Mathematiker und Pädagoge also $P(S \leq s) = P(X \geq x) = 1 - x^2 = 1 - \left(\sqrt{1 - \frac{s^2}{4}}\right)^2 = \frac{s^2}{4}$ und für $s = \sqrt{3}$ ergibt sich die dritte der Lösungen von Bertrand, nämlich $P(S > \sqrt{3}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Bei genauerem Hinsehen löst sich das Paradoxon auf. Wir haben mit Bertrand drei verschiedene Aufgaben gelöst. Die Angabe „rein zufällige Sehne" war zu vage. Drei verschiedene Präzisierungen lieferten uns die drei verschiednenen Ergebnisse:

a) Wir betrachten die Sehne mit rein zufälligen Abstand von der Kreismitte, d. h. mit X als zufälligen Punkt im Intervall $[0, 1]$.

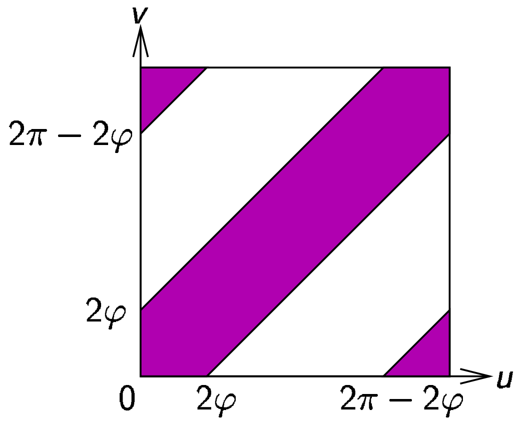
b) Wir betrachten den Winkel zur Tangente im „Eintrittspunkt" als rein zufällig, d. h. Φ als zufälligen Punkt in $[0°, 90°]$.

c) Wir betrachten den Sehnenmittelpunkt als rein zufällig im Inneren des Kreises, also als mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\pi x^2}{\pi}$ im Inneren eines Teilkreises vom Radius x.

d) Eine weitere, von Bertrand nicht betrachtete Möglichkeit ist, die Endpunkte P und Q der Sehne auf dem Kreisbogen „rein zufällig" zu wählen. Dies präzisieren wir als die Wahl des Paares der Bogenlänge $OP = u$ und $OQ = v$ im Quadrat.

Es ist somit $\varphi = \frac{|v-u|}{2}$ und (siehe Abbildung)

$$\begin{aligned} F(s) = G(\varphi) &= P(0 \leq \Phi \leq \varphi) \\ &= \frac{\text{Fläche des schraffierten Bereichs}}{\text{Fläche des Quadrats}} \\ &= \frac{(2\varphi)^2 + (2\pi)^2 - (2\pi - 2\varphi)^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{8\varphi\pi}{4\pi^2} = \frac{2\varphi}{\pi} \end{aligned}$$



Dem von Bertrand betrachteten Spezialfall entspricht jetzt $\varphi = \frac{\pi}{3}$, und somit ist die Sehne mit Wahrscheinlichkeit $1 - G\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$ länger als die Seite eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

In Situationen wie der betrachteten, wo der Begriff „rein zufällig" in der Aufgabenstellung nicht ausreichend präzisiert ist, sind der Phantasie, wie man präzisieren könnte, keine Grenzen gesetzt, und es darf deshalb nicht erstaunen, wenn sich paradoxe Resultate ergeben.

Bundeswettbewerb Mathematik 2008

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

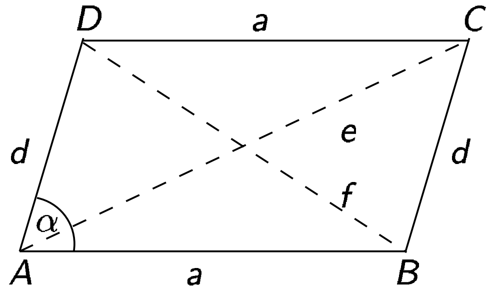
von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Fritz hat mit Streichhölzern gleicher Länge die Seiten eines Parallelogramms gelegt, dessen Ecken nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er stellt fest, dass in die Diagonalen genau 7 bzw. 9 Streichhölzer passen.
Wie viele Streichölzer bilden den Umfang des Parallelogramms?

Lösung: Den Umfang des Parallelogramms bilden 22 Streichhölzer.

Beweis: Wir wählen die Bezeichnungen im Parallelogramm wie in der Abbildung. Längen werden dabei im Folgenden in Einheiten „Streichholz" gemessen. Nach den Voraussetzungen der Aufgabenstellung sind a, d, e, f positive natürliche Zahlen, wobei $e = 9$, $f = 7$ oder umgekehrt.



Nach den Voraussetzungen der Aufgabenstellung und dem Kosinus-Satz gilt in den Dreiecken $\triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha \\ e^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(180° - \alpha) = a^2 + d^2 + 2ad \cdot \cos\alpha \end{aligned} \tag{1.1}$$

Durch Addition der beiden rechten Terme erhalten wir die notwendige Bedingung $130 = 81 + 49 = e^2 + f^2 = 2(a^2 + d^2)$, bekannt als *Parallelogrammsatz*, also $65 = a^2 + d^2$. Mit positiven natürlichen Zahlen a, d gibt es hierfür nur die Lösungen $(a, d) \in \{(1, 8), (4, 7), (7, 4), (8, 1)\}$, da $65 - a^2$ für andere Werte von a keine (positive) Quadratzahl ist. Für die Tupel $(a, d) \in \{(1, 8), (8, 1)\}$ gilt Gleichheit in der Dreiecksungleichung $a + d \geq e$, damit müsste $\alpha = 0°$ sein, was nach Aufgabenstellung ausgeschlossen ist, da nicht alle Ecken auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Für die Tupel $(a, d) \in \{(4, 7), (7, 4)\}$ ergibt sich $\cos\alpha = \pm\frac{2}{7}$, also $\alpha \approx 90° \pm 16{,}6°$. Unabhängig von der konkreten Realisierung des Parallelogramms bilden stets $2(a + d) = 22$ Streichhölzer den Umfang des Parallelogramms. $\square$

Aufgabe 2

Man stelle die Zahl 2008 so als Summe natürlicher Zahlen dar, dass die Addition der Kehrwerte der Summanden die Zahl 1 ergibt.

Erste Lösung: Wir machen zunächst die einfache Beobachtung, dass sich alle Quadratzahlen $N = k^2$, wobei k eine positive natürliche Zahl ist, wie in der Aufgabenstellung darstellen lassen, denn

$$\underbrace{k + k + \cdots + k}_{k\text{-mal}} = k^2 \quad \text{und} \quad \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k}}_{k\text{-mal}} = 1$$

Dies führt noch nicht direkt zu einer Lösung der Aufgabe, da 2008 keine Quadratzahl ist. Wir können die Beobachtung jedoch verfeinern: Ist die natürliche Zahl $N = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_q^2$ Summe von q Quadratzahlen $k_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq q$, so lässt sich $q \cdot N$ wie in der Aufgabenstellung darstellen, denn

$$\begin{aligned} &\underbrace{qk_1 + \cdots + qk_1}_{k_1\text{-mal}} + \underbrace{qk_2 + \cdots + qk_2}_{k_2\text{-mal}} + \cdots + \underbrace{qk_q + \cdots + qk_q}_{k_q\text{-mal}} \\ &= q \cdot (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_q^2) = q \cdot N \end{aligned} \tag{2.1}$$

und

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{qk_1} + \cdots + \frac{1}{qk_1}}_{k_1\text{-mal}} + \underbrace{\frac{1}{qk_2} + \cdots + \frac{1}{qk_2}}_{k_2\text{-mal}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{qk_q} + \cdots + \frac{1}{qk_q}}_{k_q\text{-mal}} \\ &= \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{qk_i} \cdot k_i = 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Man findet durch Ausprobieren, dass $N = \frac{2008}{4} = 502 = 14^2 + 11^2 + 11^2 + 8^2$. Also ist mit den Parametern $q = 4$, $k_1 = 14$, $k_2 = k_3 = 11$ und $k_4 = 8$ über (2.1) und (2.2) eine Darstellung von 2008 wie in der Aufgabenstellung (mit $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 44$ Summanden) gegeben.

Eine andere Darstellung (mit 32 Summanden) ergibt sich aus $\frac{2008}{4} = 1^2 + 1^2 + 10^2 + 20^2$. □

Zweite Lösung: Wir beginnen erneut mit einer einfachen Beobachtung, die noch nicht direkt zum Ziel führt. Es ist

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 512 = 1534 \tag{2.3}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{2}{512} \\ =&\frac{1}{512} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{8} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{512} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^9}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wir zeigen nun, wie sich die in der Darstellung (2.3) mit Blick auf die Aufgabenstellung noch fehlende Differenz $2008 - 1534 = 474$ schrittweise durch Veränderung der Summanden verringern lässt, ohne die Eigenschaft zu verletzen, dass die Kehrwerte der Summanden wie in (2.4) die Zahl 1 ergibt. Wenn wir in der Summe (2.3) die Zweierpotenz 2^k durch $2^{k+1} + 2^{k+1}$ ersetzen, so muss in (2.4) der Summand $\frac{1}{2^k}$ entsprechend durch $\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$ ersetzt werden. Die Addition der Kehrwerte der Summanden ändert sich also durch diesen Ersetzungs-Schritt nicht, während sich die Summe der natürlichen Zahlen um $2 \cdot 2^{k+1} - 2^k = 3 \cdot 2^k$ erhöht. Da

$$2008 - 1534 = 474 = 3 \cdot 158 = 3 \cdot (128 + 16 + 8 + 4 + 2) \tag{2.5}$$

und da alle Zweierpotenzen in der Klammer auf der rechten Seite in (2.5) auch in (2.3) auftreten, können wir die oben beschriebenen Ersetzungs-Schritte, beginnend mit 128, nacheinander durchführen und erhalten eine Darstellung (mit 15 Summanden), nämlich

$$4+4+8+8+16+16+32+32+32+64+256+256+256+512+512 = 2008,$$

für die

$$\begin{aligned}&\frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} + \frac{3}{256} + \frac{2}{512}\\ =&\frac{1}{32} + \frac{1}{256} - \frac{1}{64} - \frac{2}{128} + \sum_{i=2}^{9} \frac{2}{2^i} = \frac{1}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^8}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

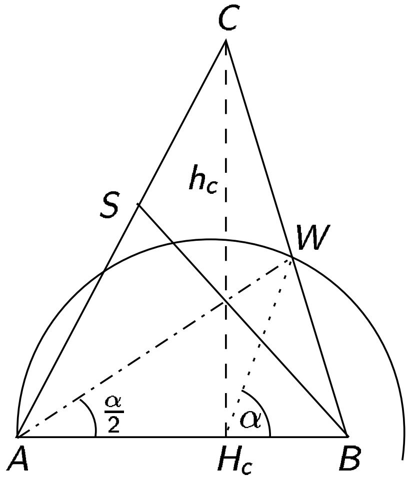
Man beweise die folgende Aussage:
In einem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ schneiden sich die Winkelhalbierende w_α, die Seitenhalbierende s_b und die Höhe h_c genau dann in einem Punkt, wenn w_α, die Seite BC und der Kreis um den Höhenfußpunkt H_c durch die Ecke A einen Punkt gemeinsam haben.

Beweis: Wir verwenden den hilfreichen *Satz von Ceva*, der besagt: Im Dreieck $\triangle ABC$ seien X, Y, bzw. Z Punkte im Inneren der Seiten BC, CA bzw. AB. Genau dann schneiden sich die Strecken AX, BY und CZ in einem Punkt, wenn gilt

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1 \tag{3.1}$$

$\overline{AZ}$ etc. bzeichnen hier *ungerichtete positive* Streckenlängen.*

* Ein Beweis des Satzes findet sich etwa in Martin Mettlers Buch *Vom Charme der „verblassten" Geometrie*, Timisoara (2000).



Wir zeigen im ersten Schritt, dass die in der Aufgabenstellung angegebene **Bedingung hinreichend** ist. Es sei also W der Schnittpunkt von w_α mit der Seite BC; nach Voraussetzung liegt W auch auf dem Kreis $K = K(H_c, \overline{H_cA})$. Die Winkelhalbierende w_α und die Höhe h_c verlaufen beide im Inneren des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$; ihr Schnittpunkt P liegt also auch im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Gerade BP hat mit AC den Punkt S im Inneren der Seite AC gemeinsam. Zu beweisen ist, dass $BS = s_b$, dass also $\overline{AS} = \overline{SC}$.

Hierzu beobachten wir, dass H_cW parallel zu AC ist: Denn weil W auf dem Kreis K liegt, ist $\overline{H_cW} = \overline{H_cA}$. Das Dreieck $\triangle WAH_c$ ist also gleichschenklig mit $\sphericalangle AWH_c = \sphericalangle H_cAW = \frac{\alpha}{2}$ und daher

$$\sphericalangle BH_cW = 180° - \sphericalangle WH_cA = 180° - \left(180° - 2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha. \tag{3.2}$$

Weil die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle H_cBW$ also ähnlich sind, gilt insbesondere

$$\overline{H_cW} : \overline{H_cB} = \overline{AC} : \overline{AB}. \tag{3.3}$$

Außerdem gilt (Anwendung des Sinussatzes in den Dreiecken $\triangle ABW$ und $\triangle CAW$), dass die Winkelhalbierende w_α die Seite BC im Verhältnis der beiden angrenzenden Seiten teilt, das heißt

$$\overline{BW} : \overline{WC} = \overline{AB} : \overline{AC}. \tag{3.4}$$

Aus dem Satz von Ceva folgt nun

$$1 = \frac{\overline{BW}}{\overline{WC}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} \cdot \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} \cdot \frac{\overline{H_cW}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}},$$

also $\overline{AS} = \overline{SC}$, wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen (3.4) und die Tatsache $W \in K$ und beim dritten Gleichheitszeichen (3.3) angewandt haben.

Wir zeigen im zweiten Schritt, dass die in der Aufgabenstellung angegebene **Bedingung** auch **notwendig** ist. Nach Voraussetzung schneiden sich also w_α, s_b und h_c in einem Punkt P, der im Inneren des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ liegen muss. Wie oben sei W der Schnittpunkt von w_α mit der Seite BC, der Punkt S sei der Schnittpunkt von s_b mit CA; wir zeigen, dass $\overline{H_cW} = \overline{H_cA}$. Aus dem Satz von Ceva folgt zusammen mit $\overline{CS} = \overline{SA}$ (Seitenhalbierende s_b)

$$1 = \frac{\overline{BW}}{\overline{WC}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} \cdot \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{BW}}{\overline{WC}} \cdot \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}}, \tag{3.5}$$

das heißt $\overline{BW} : \overline{WC} = \overline{BH_c} : \overline{H_cA}$. Für die inneren Punkte W von BC bzw. H_c von BA folgt damit aus der Umkehrung des ersten Strahlensatzes mit Strahlen BC bzw. BA durch B, dass H_cW parallel zu AC ist. Daher sind die Dreiecke

$\triangle ABC$ und $\triangle H_cBW$ ähnlich, insbesondere gilt (3.3). Dies zusammen mit (3.4) in (3.5) ergibt

$$1 = \frac{\overline{BW}}{\overline{WC}} \cdot \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cW}} \cdot \frac{\overline{H_cW}}{\overline{H_cB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cW}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cW}}.$$

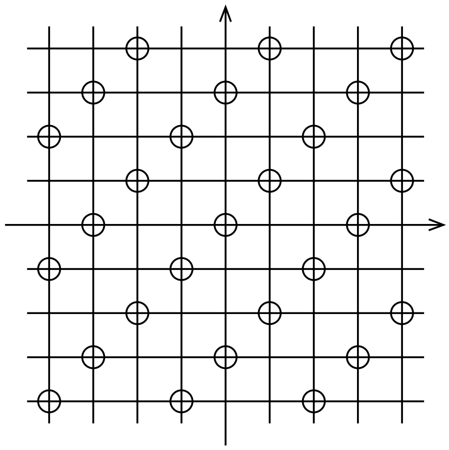
□

Aufgabe 4

In einem ebenen Koordinatensystem stehen auf den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten vier Spielsteine. Sie können nach folgender Regel gezogen werden: Ein Stein kann auf eine neue Position gezogen werden, wenn in der Mitte zwischen seiner alten und neuen Position einer der übrigen Steine liegt.
Zu Beginn stehen die vier Spielsteine auf den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$. Kann man nach endlich vielen Zügen erreichen, dass die vier Steine auf je einem der Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 0)$ und $(2, -1)$ stehen?

Lösung: Es gibt keine solche endliche Folge von Zügen.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, es gäbe eine endliche Folge von Zügen, die die vier Spielsteine von den Ausgangspunkten auf die vier Endpunkte der Aufgabenstellung bewegt; sie sei im Folgenden fest gewählt. Wir zeichenen unter allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten die Teilmenge aus, die über



$$G = \{a\cdot(1, 1)+b\cdot(0, 3) = (a, a+3b);\ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

definiert ist; siehe Skizze.
Wegen $(0, 0) = (0, 0 + 3 \cdot 0)$, $(1, 1) = (1, 1 + 3 \cdot 0)$, $(3, 0) = (3, 3 - 3 \cdot 1)$ und $(2, -1) = (2, 2 - 3 \cdot 1)$ stehen alle vier Spielsteine am Ende der Zugfolge auf Elementen von G. Die Anfangspunkte $(0, 1)$ bzw. $(1, 0)$ könnn jedoch nicht Elemente von G sein, denn $3b = 1$ bzw. $3b = -1$ sind nicht mit $b \in \mathbb{Z}$ lösbar. Am Beginn des Spiels stehen also nur zwei Spielsteine auf Elementen von G.
Da sich während der Zugfolge immer nur ein Stein bewegt, kann sich die Anzahl aller Spielsteine, deren Position ein Element von G ist, nur jeweils um höchstens 1 verändern. In der Zugfolge existiert also (mindestens) ein Zeitpunkt, an dem drei Spielsteine auf Elementen von G stehen, und der vierte Spielstein, der auf dem Punkt $(u, v) \notin G$ steht, im nächsten Zug auf eine neue Position in G, also auf eine Position $(x, x + 3y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, bewegt wird.
Wir betrachten diesen Zeitpunkt: Der vierte Spielstein gelangt auf die neue Position, weil in der Mitte zwischen alter und neuer Position einer der übrigen Steine liegt; dieser steht nach Voraussetzung auf Koordinaten $(p, p + 3q) \in G$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Nach dem Zug befindet sich der vierte Spielstein gemäß den Regeln der Aufgabenstellung auf den Koordinaten

$$(x, x + 3y) = (p, p + 3q) + ((p, p + 3q) - (u, v)) = (2p, 2p + 6q) - (u, v)$$

(Punktspiegelung an $(p, p+3q)$). Damit ergibt sich jedoch für die alte Position des vierten Spielsteins

$$(u, v) = (2p, 2p+6q) - (x, x+3y) = ((2p-x), (2p-x) + 3(2q-y))$$

mit $2p - x, 2q - y \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet aber $(u, v) \in G$, ein Widerspruch. $\square$

Wir danken Herrn Fegert und Herrn Prof. Quaisser für ihre hilfreichen Hinweise zur Darstellung.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

- **Wir begrüßen herzlich alle neuen Leserinnen und Leser**, die mit dem Kalenderjahr 2008 den Weg zu Monoid gefunden haben.
- **2008 ist das Jahr der Mathematik**, wie Ihr sicher schon mitbekommen habt. Aus diesem Anlass finden das ganze Jahr über viele Aktivitäten rund um die „Königin der Wissenschaften" statt. Informationen hierzu findet Ihr auch auf der Internetseite `www.jahr-der-mathematik.de`.
- Die Ausstellung **Mathematik be-greifen**, von welcher wir Euch auf der Monoid-Feier 2007 einige Exponate präsentiert haben, ist derzeit noch bis zum 30. April im Stadtmuseum Ludwigshafen zu sehen. Im Herbst (24.10.–14.12.2008) geht es weiter nach Bernkastel-Kues.
  Weitere Informationen unter `www.mathematik-begreifen.de`.

(MG)

Die Redaktion

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 91

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 6: Laura Tabea Galkowski 10, Sebastian Ludwig 20, Kareem Ramadan 7, Samuel Rischke 7, Julia Scherner 15;

Kl. 7: Lara Bergjohann 15, Chantal Graversen 13, Dominik Meier 12, Andreas Pitsch 25, Sören Rathgeber 14, Max Rose 15, Freya Roth 15;

Kl. 8: Kevin Schmitt 34;

Kl. 9: Philipp Mayer 16,

Kl. 11: Max de Zoeten 10;

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 6: Jana Ballweber 6; **Kl. 10:** Lena Baum 15;
Kl. 11: Felix Liebrich 13, Martin Reinhardt 10.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 11;
Kl. 11: Lennart Adam 19;

Kl. 12: Christian Behrens 16, Martin Alexander Lange 29.

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber):
Kl. 6: Anna Gast 7;

Kl. 8: Alexander Schneider 3, David Wander 5;
Kl. 10: Jonathan Bohlen 2, Carl Degitz 2;

Kl. 11: Anselm Schäfer 6.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 13: Laura Biroth 15.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 7: Frank Schindler 31.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:
Kl. 7: Christian Geiger 9, Florian Salamat 18, Alihan Tax 2.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 8: Paulina Hauser 15.

Erlangen, Ohm-Gymnasium: Kl. 10: Malte Meyn 25.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik:
Kl. 7: Vera Hartmann 12, Janina Müller 9, Jana Scholz 10.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Philipp Arndt 13, Mara Koch 10, Joachim Roth 9, Henrik Stenger 11;
Kl. 6: Thorsten Roth 19.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 9: Connor Röhricht 19.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuender Lehrer: Christoph Straub):
Kl. 7: Shaima'a Ahmed Doma 7, Belkais Khaled, Aya Mohamed Mostafa 1;
Kl. 10: Alia'a Ahmed Doma 14;
Kl. 11: Ghada Hisham 7, Hayat Selim 5, Noha Abdel Wahab 8;
Kl. 12: Alia'a el Bolock 8.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Argawan Daschti 2, Niklas Staiger 6, Maike Stanischewski 15, Timur Can Zorlu 5;
Kl. 6: Alexander Erb 5, Maurice Remmers 2.

Ludwigshafen, Theodor-Heuss-Gymnasium:
Kl. 9: Stephan Böhmer-Horländer 17.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 12: Alexey Tyukin 22.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 5: Magdalena Winkelvoß 12.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Steffen Heller 10, Tim Lutz 9, Tobias Soldan 10;

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 10: Florian Schweiger 27.

Mössingen, Quenstedt-Gymnasium: Kl. 8: Jack Rodin 15.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 7: Sophia Allex 11, Kendra Belthle 7, Ariane Bialas 4, Anna Braun 7, Sarah Doll 4, Eva Drews 4, Tabea Fausten 8, Vanessa Funkel 8, Nina Gerlach 7, Carolin Heimes 7, Clara Jenker 8, Marika Kaules 4, Olivia Langwald 5, Colette Perillieux 12, Amelie Steentjes 7, Nicole Vergin 8;
Kl. 9: Vivien Kohlhaas 12;
Kl. 10: Madeline Kohlhaas 7.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium:
Kl. 6: Ruwen Bergen 10, Tom Klein 5, Fabian Mertes 5, Janina Vogel 10;
Kl. 9: Celine Didierlaurent 15, Bettina Wiebe 15.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Georg Auburger 9, Andrea Behrent 19, Lutz Bischoff 12, Nils Blaschke 15,

Michaela Czermin 12, Yasmina Gab 1, Michael Grunwald 13, Anna-Lena Hock 15, Jannik Hoffmann 15, Anna-Maria Klaas 5, Lucas Köhler 14, Heiko Kötzsche 13, Selma Mezger 3, Martin Müller 10, Mariam Rahi 6, Felix Sobotta 8, Richard von Mutius 5;
Kl. 6: Viktoria Kunz 14, Jeanne Merswolken 23, Julia Yeo-Peters 23;
Kl. 7: Tobias Braun 20, Valentin Kuhn 20, Agnes Valenti 17;
Kl. 8: Aline Endreß 4;
Kl. 10: Bianca Bellchambers 6, Vita Bellchambers 4, Markus Gierenstein 8, Larissa Habbel 10, Kilian Valenti 9;
Kl. 11: Annkatrin Weber 13.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 8: Simone Marquard 8.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 6: Luis Ressel 12.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:Kl. 9: Alexander Rettkowski 11.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 7: Dorothea Winkelvoß 8.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Kuntz):
N. N. 3;
Kl. 5: Markus Baldermann 12, Judith Geib 14, Anna Lena Meier 9;
Kl. 6: Lorena Ritzmann 17, Paul Schädrich 4;
Kl. 8: Joel Jung 0.

Errata

Obwohl wir uns stets bemühen und auch Alles Korrektur lesen, schleichen sich leider immer wieder mal Fehler in die MONOID-Hefte ein. So auch im letzten Heft 92:

- Im Artikel „Die besondere Aufgabe: Eingeschränkter Flugverkehr“ von Dr. Hartwig Fuchs ist ein Argument etwas ungenau, wie der Autor selbst bemerkte. In den Überlegungen des Hof-Mathematicus, Teil (a) muss es im letzten Absatz heißen (Seite 9):
  Da es ungeradzahlig viele Städte gibt, müssen die Fallunterscheidungen damit enden, dass man wie im ersten Fall auf eine Stadt S_m mit dem größten e_m stößt – in S_m landet daher kein Flugzeug.
- Auf Seite 28 ist das Geburtsjahr Albert Einsteins falsch angegeben. Tatsächlich wurde er erst am 14.03.1879 geboren, wie unsere Leser Alexander Rettkowski und Prof. Dr. Günter Pickert richtig bemerkten.

Vielen Dank für die Hinweise. Wir bitten Euch, diese Ungenauigkeiten zu entschuldigen.

Jahrgang 28 Heft 93 März 2008

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid