

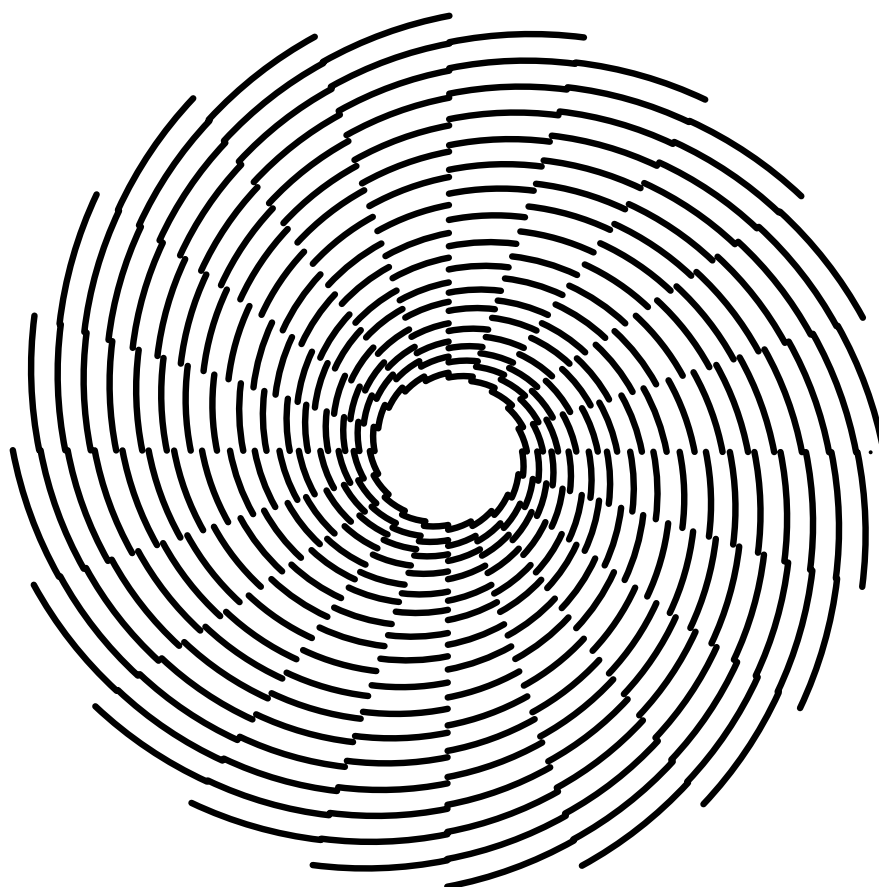
Jahrgang 28

Heft 94

Juni 2008

# MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift  
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)  
1980 gegründet von Martin Mettler  
gegenwärtig herausgegeben vom  
Institut für Mathematik an der  
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz



Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

**Wichtig:** Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen.

**Für Schüler/innen der Klassen 5-7** sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben! **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den „Neuen Aufgaben“, „Wer foscht mit?“ und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

**15.08.2008.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg-Universität  
Institut für Mathematik  
MONOID-Redaktion  
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107

Fax: 06131/3924389

E-Mail: [monoid@mathematik.uni-mainz.de](mailto:monoid@mathematik.uni-mainz.de)

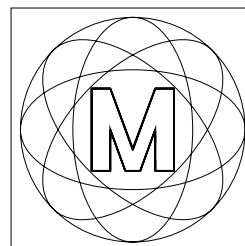
Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville. Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: **das Goldene M.**

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

# Pappos und die Mittelwerte

von Hartwig Fuchs

## Proportionen

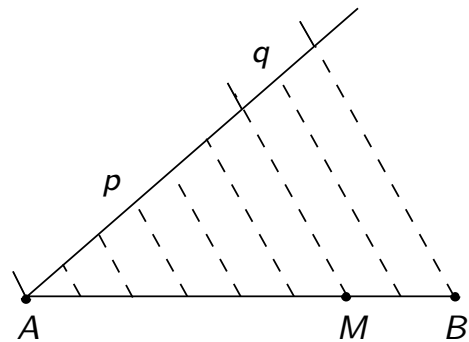
Die Mathematiker der Antike befassten sich vorzugsweise mit Geometrie, und sie versuchten, ihre geometrischen Einsichten durch Konstruktionen zu beweisen. Aber sie rechneten auch in ihrer Geometrie. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei waren für sie *Proportionen*; das sind Längenverhältnisse von Strecken.

### Beispiel 1:

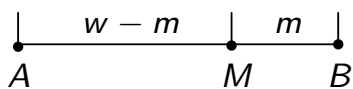
Man kann die Position eines Punktes  $M$  in einer Strecke  $\overline{AB}$  durch die Proportion  $|\overline{AM}| : |\overline{MB}| = p : q$ ,  $p$  und  $q$  gemessene Größen, beschreiben, wobei  $|\overline{AM}|$  und  $|\overline{MB}|$  die Längen der Strecken  $\overline{AM}$  und  $\overline{MB}$  bedeuten.

Veranschaulichung einer solchen Proportion zum Beispiel für ganzzahlige  $p$  und  $q$ :

Denkt man sich die Strecke  $\overline{AB}$  in  $p + q$  gleich lange Teilstrecken zerlegt, dann besteht  $\overline{AM}$  aus  $p$  und  $\overline{MB}$  aus  $q$  dieser Teilstrecken.



Man kann aber auch umgekehrt durch Vorgabe von Zahlen  $p$  und  $q$  einen Punkt  $M$  in einer Strecke  $\overline{AB}$  festlegen.



Es sei  $|\overline{AB}| = w$ ,  $w$  gegeben, und für die gesuchte Strecke  $\overline{MB}$  sei  $|\overline{MB}| = m$  gesetzt. Dann gestattet die folgende Proportion die Bestimmung von  $m$  und damit auch von  $M$ :

$$(1) \quad (w - m) : m = p : q, \quad w > m \text{ und } p > 0, q > 0.$$

### Beispiel 2:

Für  $p = q = 1$  ergibt sich aus (1), dass  $w - m = m$  gilt.

Mithin ist  $M$  der Mittelpunkt einer Strecke der Länge  $w$ .

## Mittlere Proportionalen

Eine geringfügig erscheinende Verallgemeinerung von (1) führt auf ein Thema, welches in der griechischen Mathematik seit den Zeiten des Pythagoras\* diskutiert wurde: Mittelwerte in der Geometrie.

\* Pythagoras (Πυθαγόρας), \* um 570 v. Chr., vermutlich auf Samos, † nach 510 v. Chr. in Metapont; griechischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler

Wir wissen das aus dem Werk „Collectio“ des Mathematikers Pappos von Alexandria, der um 300 n. Chr. in der alexandrinischen Bibliothek – dem Wissenschaftszentrum der Antike – lehrte und forschte. Diese „Sammlung“, in der Pappos fast das ganze Spektrum der griechischen Geometrie beschreibt, handelt in Buch III „von den drei Mitteln“. Diese „Mittel“ – so schreibt Pappos – habe man als Verallgemeinerung von (1) so erklärt:

Es seien  $w_1$ ,  $w_2$  und  $m$  Längen von Strecken,  $w_1 > m > w_2$ , und  $p$ ,  $q$  seien positive Zahlen. Dann heißt  $m$  die *mittlere Proportionale* (der Mittelwert) von  $w_1$  und  $w_2$ , wenn die Proportion besteht:

$$(2) \quad (w_1 - m) : (m - w_2) = p : q \quad \text{mit } w_1 > m > w_2 \text{ und } p > 0, q > 0.$$

Mit  $w_2 = 0$  stellt sich (1) als ein Sonderfall von (2) heraus.\*\*

Die griechischen Mathematiker vor Pappos haben mit (2) Mittelwerte  $m$  bei vorgegebenen Werten von  $p$  und  $q$  berechnet und konstruiert. Sie haben sich dabei aber im Wesentlichen auf die folgenden sieben Werte von  $p : q$  beschränkt:  $p : q \in \{w_1 : w_1, w_1 : m, w_1 : w_2, m : w_1, m : w_2, w_2 : w_1, w_2 : m\}$ .

Es zeugt von der Weitsicht des Pappos, dass er unter diesen Möglichkeiten der Mittelbildung in seiner „Sammlung“ nur die drei behandelt hat, die auch heute noch – wenn auch nicht in geometrischem Gewand – von Bedeutung sind.

Die drei Mittelwerte des Pappos sind diese Spezialfälle von (2):

$$p : q = w_1 : w_1, p : q = w_1 : m \text{ und } p : q = w_1 : w_2.$$

## Berechnung der Mittelwerte des Pappos

Aus  $(w_1 - m) : (m - w_2) = w_1 : w_1$  folgt  $w_1 - m = m - w_2 \implies m = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ :

(a) Das *arithmetische Mittel*  $m_a$  von  $w_1$  und  $w_2$  ist  $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ .

Aus  $(w_1 - m) : (m - w_2) = w_1 : m$  folgt  $m(w_1 - m) = w_1(m - w_2) \implies m^2 = w_1 w_2 \implies m = \sqrt{w_1 w_2}$ :

(g) Das *geometrische Mittel*  $m_g$  von  $w_1$  und  $w_2$  ist  $\sqrt{w_1 w_2}$ .

Aus  $(w_1 - m) : (m - w_2) = w_1 : w_2$  folgt  $w_2(w_1 - m) = w_1(m - w_2) \implies m = \frac{2w_1 w_2}{w_1 + w_2} = \frac{2}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}}$ :

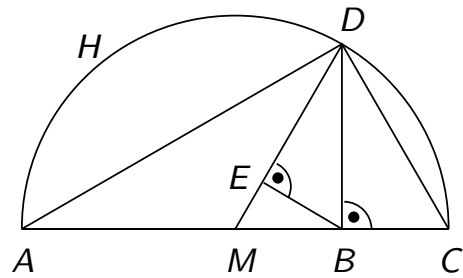
(h) Das *harmonische Mittel*  $m_h$  von  $w_1$  und  $w_2$  ist  $2w_1 w_2 : (w_1 + w_2) = 2 : \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$ .

Pappos gibt auch die Konstruktion der drei Mittelwerte  $m_a$ ,  $m_g$  und  $m_h$  als Längen von Strecken an.

---

\*\* Einen solchen Satz hätten die Griechen nicht bilden können, da sie die Null nicht kannten!

Es seien  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  zwei in einer Geraden liegende Strecken mit vorgegebenen Längen  $|\overline{AB}|$  und  $|\overline{BC}|$ .  $\overline{AC}$  sei ein Durchmesser eines Halbkreises  $H$  mit dem Mittelpunkt  $M$ . Der Punkt  $D$  sei auf  $H$  so gewählt, dass  $BD \perp AB$  ist, und der Punkt  $E$  sei auf der Strecke  $\overline{DM}$  so bestimmt, dass  $BE \perp DM$  ist.



- (a) Man sieht, dass  $|\overline{DM}| = |\overline{AM}| = \frac{1}{2} (|\overline{AB}| + |\overline{BC}|)$  ist, so dass  $|\overline{DM}|$  das arithmetische Mittel von  $|\overline{AB}|$  und  $|\overline{BC}|$  ist.
- (g) Da das Dreieck  $\triangle ACD$  nach dem Satz von Thales\*\*\* rechtwinklig ist, gilt (Höhensatz):  $|\overline{BD}|^2 = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|$ , also  $|\overline{BD}| = \sqrt{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|}$ , so dass  $|\overline{BD}|$  das geometrische Mittel von  $|\overline{AB}|$  und  $|\overline{BC}|$  ist.
- (h) Wegen der Rechtwinkligkeit der Dreiecke  $\triangle DMB$  und  $\triangle DEB$  gilt:  
 $|\overline{BE}|^2 = |\overline{DE}| (|\overline{DM}| - |\overline{DE}|) = |\overline{DE}| |\overline{DM}| - |\overline{DE}|^2$  und  
 $|\overline{BE}|^2 = |\overline{BD}|^2 - |\overline{DE}|^2$ . Durch Gleichsetzen folgt daraus mit (a) und (g):  
 $|\overline{DE}| \left( \frac{1}{2} (|\overline{AB}| + |\overline{BC}|) \right) - |\overline{DE}|^2 = |\overline{DE}| |\overline{DM}| - |\overline{DE}|^2 = |\overline{BD}|^2 - |\overline{DE}|^2$   
 $= |\overline{AB}| |\overline{BC}| - |\overline{DE}|^2$ .  
 Deshalb ist  $|\overline{DE}| = \frac{2|\overline{AB}| |\overline{BC}|}{|\overline{AB}| + |\overline{BC}|}$ , so dass  $|\overline{DE}|$  das harmonische Mittel von  $|\overline{AB}|$  und  $|\overline{BC}|$  ist.

### Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Die drei Mittelwerte des Pappos werden heute noch benutzt. Allerdings hat man ihre Definitionen (a), (g) und (h), die ja nur zwei Werte  $w_1$  und  $w_2$  in Betracht zogen, so erweitert, dass sie auch für  $n$  Werte  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ,  $n \geq 2$ , Mittelwerte liefern. An Beispielen zeigen wir, wie sich diese Verallgemeinerungen von (a), (g) und (h) motivieren lassen.

#### Beispiel 3

Ein Schüler hat in fünf Englischarbeiten folgende Noten  $w_i$  geschrieben.

| Nummer $i$ der Klassenarbeit                            | 1   | 2   | 3    | 4    | 5   |                         |
|---------------------------------------------------------|-----|-----|------|------|-----|-------------------------|
| Note $w_i$ der Klassenarbeit                            | 3   | 4   | 6    | 5    | 4   | $\Rightarrow m_a = 4,4$ |
| Abstand $m_a - w_i$ der Note $w_i$ vom Mittelwert $m_a$ | 1,4 | 0,4 | -1,6 | -0,6 | 0,4 |                         |

Der Schüler hat seine Durchschnittsnote  $m_a$  nach dem bekannten Verfahren  $m_a = \frac{1}{5}(3 + 4 + 6 + 5 + 4) = 4,4$  errechnet.  $m_a$  lässt sich so als ein Mittelwert

\*\*\* Thales (griech. Θαλῆς) von Milet, \* um 624 v. Chr. in Milet (in der heutigen Türkei), † um 546 v. Chr. in Milet; griechischer Naturphilosoph, Staatsmann, Mathematiker, Astronom und Ingenieur.

rechtfertigen: Die Summe der Abweichungen der Note  $w_i$  von der Durchschnittsnote  $m_a$  beträgt 0 (vgl. dritte Zeile der Tabelle).

- (a) Für die Zahlen  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ,  $n \geq 2$ , heißt  $\frac{1}{n}(w_1 + w_2 + \dots + w_n)$  das *arithmetische Mittel*  $m_a$ .

#### Beispiel 4

Ein Kleinkapitalist kauft Aktien für 2000 €. Er hat Glück: Fünf Jahre lang steigen sie im Wert – ihr Wert am Ende des Jahres  $i$  sei  $a_i$  und  $w_i$  sei der Wachstumsfaktor, um den der Aktienwert im Jahr  $i$  angestiegen ist. Wie groß ist der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor?

| Nummer $i$ des Jahres | 0    | 1    | 2       | 3       | 4       | 5       |
|-----------------------|------|------|---------|---------|---------|---------|
| Aktienwert $a_i$      | 2000 | 2240 | 2419,20 | 2878,85 | 3022,79 | 3173,93 |
| Wachstumsfaktor $w_i$ | —    | 1,12 | 1,08    | 1,19    | 1,05    | 1,05    |

Für die Werte  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  mit  $a_0 = 2000$  gilt:  $a_1 = w_1 a_0$ ,  $a_2 = w_2 a_1 = w_1 w_2 a_0$ , ...,  $a_5 = w_5 a_4 = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 a_0$ . Für den durchschnittlichen Wachstumsfaktor  $m_g$  gilt dann, wobei im Allgemeinen  $a_i^* \neq a_i$  ist für  $i = 1, 2, 3, 4$ :  $a_1^* = m_g a_0$ ,  $a_2^* = m_g a_1^* = m_g^2 a_0$ , ...,  $a_5^* = m_g^5 a_0$ .

Nun wird man von  $m_g$  aber fordern, dass  $a_5^* = a_5$  ist. Folglich sollte für  $m_g$  gelten:  $m_g^5 a_0 = w_1 w_2 \cdot \dots \cdot w_5 a_0$ , also  $m_g = \sqrt[5]{w_1 w_2 \cdot \dots \cdot w_5}$ . In unserem Beispiel beträgt  $m_g$  rund 1,1.

Diese Überlegung führt zu der Definition:

- (g) Für die positiven Zahlen  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ,  $n \geq 2$ , heißt  $\sqrt[n]{w_1 w_2 \cdot \dots \cdot w_n}$  das *geometrische Mittel*  $m_g$ .

#### Beispiel 5

Bei einem Autorennen müssen die Fahrer in einem so genannten „Qualifying“ fünfmal an den Start und jeweils eine Runde so schnell fahren, dass ihre Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Gesamtstrecke von fünf Runden mindestens  $200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  beträgt.

Der Favorit des Rennens fährt seine Runden mit folgenden Geschwindigkeiten:

| Nummer $i$ der Runde                                               | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
|--------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Geschwindigkeit $v_i$ in Runde $i$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ | 185,4 | 198,7 | 201,1 | 199,2 | 218,4 |

Darf er damit am Rennen teilnehmen? – Ja!

Zunächst gilt: Da die Runden nicht in der gleichen Zeit zurückgelegt wurden, kann die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v$  auf der Gesamtstrecke nicht das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten auf den fünf Teilstrecken sein. Vielmehr erhält man  $v$  aus der Formel

$$v = \frac{\text{Länge der Gesamtstrecke}}{\text{gesamte benötigte Zeit}}.$$

Es sei  $L$  die Länge einer Runde in km. Dann gilt für die Fahrzeiten in Stunden:

1. Runde  $\frac{L}{185,4}$ , 2. Runde  $\frac{L}{198,7}$ , ..., 5. Runde  $\frac{L}{218,4}$ .

Damit lautet nun die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v$  für den Rennfahrer

$$v = \frac{5L}{\frac{L}{185,4} + \frac{L}{198,7} + \dots + \frac{L}{218,4}} = \frac{5}{\frac{1}{185,4} + \frac{1}{198,7} + \dots + \frac{1}{218,4}} \approx 200,016.$$

Diese Gleichung zeigt, wie man den Mittelwert  $m_h$  des Pappos verallgemeinern kann.

(h) Für die positiven Zahlen  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ,  $n \geq 2$ , heißt  $\frac{n}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_n}}$  das *harmonische Mittel*  $m_h$ .

### Anmerkung:

In der so genannten *harmonischen Reihe*  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  ist ab dem zweiten Summand jeder Summand das harmonische Mittel seiner beiden benachbarten Summanden. Denn für den  $n$ -ten und  $(n+2)$ -ten Summanden der harmonischen Reihe gilt

$$\frac{2}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}} = \frac{2}{n + n + 2} = \frac{1}{n + 1}.$$

Somit ist die Bezeichnung „harmonisch“ für die Reihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  gerechtfertigt. Der Name harmonisches Mittel leitet sich allerdings aus der Musiktheorie her.

So wurden die guten Konsonanzeigenschaften der auf Didymus (etwa 63 v. Chr.) zurückgehenden diatonischen oder reinen Tonskala von Gioseffo Zarlino\*\*\*\* 1558 damit begründet, dass man fast alle Frequenzverhältnisse, die vom Grundton aus zu solchen als „konsonant“ akzeptierten Intervallen gehörten, mit einem Zahlenpaar aus  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  beschreiben kann. Hierin ist zum Beispiel 3 das harmonische Mittel von 2 und 6 oder 4 das harmonische Mittel von 3 und 6.

Wer sich näher über diese Beziehungen zwischen Mathematik und Musik informieren möchte, findet einige wertvolle Hinweise auf der Internetseite von Norbert Christmann von der TU Kaiserslautern unter [http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/0einf\\_hrungmathemusik.html](http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/0einf_hrungmathemusik.html).

---

\*\*\*\* Gioseffo Zarlino, \*22.03.1517 in Chioggia, †14.02.1590 in Venedig; italienischer Kapellmeister, Musiktheoretiker und Komponist.

# Hättest Du es gewusst?

## Was ist das Basler Problem?

von Hartwig Fuchs

### Vorgeschichte: Die harmonische Reihe

Jeder, der sich mit Mathematik befasst, kennt den schönen Beweis des Satzes

(1) Die *harmonische Reihe*  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  hat keine endliche Summe.

Doch wer den Beweis gefunden hat, das wissen nicht allzu viele.

Es war Nicole Oresme (um 1323–1382), ein Mann umfassender Bildung, der eine glänzende Karriere im Dienste des französischen Königs und der Kirche gemacht hatte, der aber zugleich durch seine Forschungen – hier sind Philosophie, Ökonomie, Physik und besonders die Mathematik\* zu nennen – zu einem bedeutenden Vorläufer der Entwicklungen wurde, die in der Renaissance und im 17. Jahrhundert zur Herausbildung der exakten Naturwissenschaften führten.

Im 14. Jahrhundert wurde viel über den Begriff der Unendlichkeit diskutiert, auch in der Mathematik. Oresmes Beitrag zu dieser Diskussion waren die unendlichen Reihen und der unerwartete Satz (1).

Dieses Theorem war deshalb so überraschend, weil die harmonische Reihe unglaublich langsam anwächst: Addiert man 1000000 ihrer Glieder, so ist deren Summe erst  $\approx 14,392$ ; und man muss etwa  $1,51 \cdot 10^{43}$  Glieder addieren, damit deren Summe erstmals  $> 100$  ist.

Oresme aber überlegte so:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$  und so weiter.

Dann aber ist

$$\frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Die unendliche Reihe auf der rechten Seite der Ungleichung hat keine endliche Summe; also gilt das erst recht für die harmonische Reihe links vom  $>$ -Zeichen. Ein modernes überraschendes Argument für dieses Ergebnis wird am Ende des Artikels vorgeführt.

### Das Basler Problem

Um 1650 fand die Geschichte der harmonischen Reihe eine Fortsetzung, als der italienische Mathematiker Pietro Mengoli (1625–1686) die Reihe  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ , eine Variante von (1), untersuchte und in Anlehnung an Oresmes Beweis zeigte, dass gilt:

---

\* Oresme schlug 300 Jahre vor René Descartes (1596–1650) die Benutzung von Koordinatensystemen in der Geometrie vor; er benutzte bereits Vorformen des Funktionsbegriffs. Vermutlich geht auch das +-Zeichen auf ihn zurück.

(2) Die unendliche Reihe  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$  hat eine endliche Summe.  
Es ist nämlich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^2} + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left( \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \right) + \left( \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{15^2} \right) + \dots \\ & < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^2} + 8 \cdot \frac{1}{8^2} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

Mengoli wusste, dass die geometrische Reihe ganz rechts den Wert 2 hat; also musste die Reihe links vom  $<$ -Zeichen eine endliche positive Summe  $< 2$  besitzen.

Es gelang ihm allerdings nicht, den Wert der Reihe (2) zu bestimmen. Auch für andere bedeutende Mathematiker wie John Wallis (1616–1703)\*\* und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) stellte sich die Bestimmung der exakten Summe von (2) als zu schwierig heraus.

Jakob Bernoulli (1654–1705) aus der berühmten Basler Mathematikerfamilie beschrieb in seinem 1680 in Basel erschienenen Buch „Tractus de seribus infinitis“ (Abhandlung über unendliche Reihen) das Problem der Berechnung des Wertes von (2) als immer noch ungelöst und er fügte die Bitte an: „Falls jemand die Lösung findet, dann wären wir für eine diesbezügliche Mitteilung äußerst dankbar.“

Danach wurde das Problem allgemein bekannt als das *Basler Problem*.

## Die Lösung des Basler Problems

Das Basler Problem widerstand mehrere Jahrzehnte nach Bernoullis Aufruf vielen Lösungsversuchen – bis der bedeutendste Mathematiker des 18. Jahrhunderts, Leonhard Euler (1707–1783), sich endlich der Sache annahm.

Er entdeckte 1736 einen genialen Zugang zum Basler Problem, durch den sich eine Lösung auf verblüffende Weise – ohne numerische Rechnung ergibt.

Dieser Lösungsweg soll nun hier skizziert werden.

Euler leitete zunächst das nach ihm benannte *Euler-Produkt für den Sinus* her. Das unendliche Produkt

$$P(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \dots$$

und die Funktion  $\sin$  haben beide genau die gleichen Nullstellen  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ . Er vermutete deshalb, und konnte es dann auch beweisen, dass gilt:

$$(3) \quad \text{Für jedes reelle } x \text{ ist } \sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \dots$$

Seit 1715 war eine von Brook Taylor (1685–1731) hergeleitete Darstellung von  $\sin x$  als unendliche so genannte *Taylor-Reihe* bekannt:

$$(4) \quad \text{Für jedes reelle } x \text{ ist } \sin x = x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \text{ mit } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

---

\*\* Mehr über John Wallis und seinem Werk könnt Ihr im nächsten Heft lesen.

Und nun zu Eulers genialer Idee zur Lösung des Basler Problems. Er überlegte: Wenn man sich die rechte Seite von (3) ausmultipliziert denkt, dann erhält man eine von (4) verschiedene Reihe für  $\sin x$ . Und von dieser Reihe bestimmte er den  $x$ -Term und den  $x^3$ -Term – mehr nicht!

Er findet (Siehst Du es auch? Es ist gar nicht so schwierig!):

$$(5) \quad \text{Für jedes reelle } x \text{ ist } \sin x = x^1 - x^3 \left( \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots \right) + x^5(\dots) - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Aus (4) und (5) folgert er: } & x^1 - x^3 \left( \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots \right) + x^5(\dots) - \dots \\ & = x^1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten bei  $x^3$  links und rechts des Gleichheitszeichens übereinstimmen müssen, ergibt sich daraus fast unmittelbar die Lösung des Basler Problems:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Eine der schönsten Formeln, die Euler entdeckt hat.

## Neue Probleme

Für einen Mathematiker wie Euler war der Erfolg natürlich ein unwiderstehlicher Anreiz, das Basler Problem zu verallgemeinern auf unendliche Reihen  $\zeta(s)$ , die man später als *Zeta-Funktionen* bezeichnet und die bis heute eine zentrale Rolle in der Zahlentheorie spielen, nämlich

$$(6) \quad \zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad s \geq 2 \text{ eine natürliche Zahl.}$$

$$\text{Ein erstes Ergebnis von Euler: } \zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi}{90}.$$

Und in seiner 1750 veröffentlichten Arbeit bestimmte er sogar die Werte von  $\zeta(s)$  für jedes geradzahlige  $s \geq 6$ .

Er fand auch eine erste wichtige Anwendung der Zeta-Funktionen in der Zahlentheorie, einen Zusammenhang zwischen  $\zeta(s)$  und den Primzahlen  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , ...:

$$(7) \quad \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_3^s}\right)^{-1} \cdot \dots, \quad s > 1 \text{ ganzzahlig.}$$

Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (1821–1894) löste 1848 mit dem auf reelle  $s > 1$  verallgemeinerten Satz (7) ein damals berühmtes Problem – das Bertrand'sche Postulat –, das aussagt: Zwischen zwei natürlichen Zahlen  $n$  und  $2n$ ,  $n > 1$ , gibt es stets mindestens eine Primzahl.

Elf Jahre später veröffentlichte Bernhard Riemann (1826–1866) eine achtseitige Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Größe“, die wohl die wichtigste Arbeit ist, die jemals über Primzahlen geschrieben wurde, und die eine immer noch andauernde Flut von Publikationen auslöste.

In dieser Arbeit erweiterte er Eulers Definition (6) auf komplexe Argumente  $s$  und er stellte dann eine Vermutung auf über eine bestimmte Eigenschaft der

Nullstellen der verallgemeinerten Zeta-Funktion  $\zeta(s)$ : die *Riemannsche Hypothese*.

Riemanns Vermutung stellt eine der härtesten Herausforderungen dar, die sich unter den „Top Ten“ der ungelösten mathematischen Probleme befinden.

Sollte sie zutreffen – und unter der ersten Milliarde Nullstellen haben die Computer kein einziges Gegenbeispiel gefunden –, dann hätte das weitreichende Konsequenzen für die Mathematik und ganz besonders für die Zahlentheorie.

Nicht nur könnte man für das schon lange schwelende Gaußsche Problem, die Anzahl  $\pi(x)$  aller Primzahlen  $< x$  zu bestimmen, eine außerordentlich gute Näherungsformel angeben. Auch eine Lösung der beiden alten, aber immer noch ungelösten Probleme

- der *Goldbachvermutung*: Jede gerade natürliche Zahl  $\geq 4$  ist die Summe zweier Primzahlen
- der *Primzahlzwillingsvermutung*: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge

rückte damit in greifbare Nähe.

## Anhang: Ein alternativer Beweis für die Unendlichkeit der harmonischen Reihe

von Hans-Jürgen Schuh

Neulich erschien in einer mathematischen Zeitschrift folgender verblüffende Widerspruchsbeweis für die Unendlichkeit der harmonischen Reihe:

Annahme: Die harmonische Reihe konvergiert, das heißt es gibt eine positive (endliche) reelle Zahl  $a$  mit  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = a$ .

Dann konvergieren auch die Reihen über die ungeraden und die geraden Glieder der harmonischen Reihe, das heißt es gibt positive reelle Zahlen  $b$  und  $c$  mit  $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = b$  und  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = c$ .\*\*\*

Offensichtlich ist  $a = b + c$ .

Da  $a$ ,  $b$  und  $c$  endlich sind, muss  $b$  echt größer als  $c$  sein.

Daraus ergibt sich

$$a = b + c > 2c = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = a,$$

das heißt  $a$  ist eine reelle Zahl mit  $a > a$ , Widerspruch!

Also ist obige Annahme falsch, das heißt  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$ . q.e.d.

*Bemerkung:* Damit gilt auch (warum?):

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \infty$$

---

\*\*\* Da alle Glieder der beiden Reihen  $> 0$  sind, darf man sie in beliebiger Reihenfolge addieren.

# Mathematische Lese-Ecke

## – Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

### **Albrecht Beutelspacher, Marcus Wagner: „Wie man durch eine Postkarte steigt ...und andere spannende mathematische Experimente“**

Bei Experimenten denkst Du zunächst eher an Physik, Chemie und Biologie? In Bezug auf die Mathematik fallen Dir zunächst nur Gedankenexperimente ein. Dann ist das Buch „Wie man durch eine Postkarte steigt ...und andere mathematische Experimente“ genau das richtige für Dich! Darin geht es nämlich wirklich um mathematische – im echten Leben durchzuführende – Experimente. Im Gegensatz zu physikalischen und chemischen beschränken sich die für die vorliegenden mathematischen Experimente nötigen Materialien meist auf Papier, Kleber und eine Schere.

Im Vorwort beschreiben die beiden Autoren den Hintergrund ihrer Auswahl: „Wie bei jedem guten Experiment werden Sie staunen, sich wundern, und manchmal auch verblüfft sein. Aber die mathematischen Experimente gehen darüber hinaus. Sie geben zu Fragen Anlass (Warum ist das so?), sie regen Vorstellungen an (Wie wird aus etwas Zweidimensionalem etwas Dreidimensionales?) und sie bergen Hinweise zur gedanklichen Klärung.“ Schon die experimentelle Erfahrung der beiden Autoren verspricht eine gelungene Zusammenstellung von Experimenten.

Wer schon immer einmal wissen wollte, wie man Parabeln oder Ellipsen falten kann, wie man durch eine Postkarte steigt, oder wie man mit einem Kölschglas mathematische Erkenntnisse gewinnen kann, der wird von diesem Buch begeistert sein. Besonders schön an der Auswahl ist, dass die vorgestellten Experimente zumeist von mathematischen Vorkenntnissen oder dem Alter der Experimentatoren völlig unabhängig ausprobiert werden können. Vom Grundschüler bis zum Erwachsenen (Mathematiker oder auch nicht) wird jeder, der gerne bastelt und experimentiert, sein Lieblingsexperiment finden.

Selbstverständlich kommen auch die Klassiker unter den mathematischen Basteleien zu ihrem Recht: Möbiusband, Cäsarscheibe und im EM-Jahr natürlich der Fußball wurden nicht vergessen.

*Fazit:* Buch kaufen; Papier, Kleber und Schere bereitlegen und direkt losbasteln!  
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

**Angaben zum Buch:** Albrecht Beutelspacher, Marcus Wagner: Wie man durch eine Postkarte steigt. ...und andere spannende mathematische Experimente; Herder, 2008, ISBN 978-3-451-29643-7, gebunden, 160 Seiten, 14,95 €

Art des Buches: Sammlung mathematischer Experimente

Mathematisches Niveau: meist leicht verständlich

Altersempfehlung: ab 8 Jahren

# Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

- Wir wünschen allen Lesern erholsame und schöne Sommerferien.
- Noch bis zum 20. Juli 2008 ist in Paderborn die Sonderausstellung „Zahlen, bitte! – Die wunderbare Welt von null bis unendlich“ im Heinz-Nixdorf-Museumsforum zu sehen.
- Zum Jahr der Mathematik ist das Schiff MS Wissenschaft auf deutschen Wasserstraßen unterwegs und legt bis zum 4. September 2008 in vielen Städten an. An Bord kann Mathematik gemacht und erforscht werden. Mehr Informationen unter: <http://www.wissenschaft-im-dialog.de>.

## Wer war's? von Wolfgang J. Bühler

Nachdem ihr Freund die Hochschwangere verlassen hatte, wollte sie in ihr Heimatdorf fahren. In dem Städtchen Tambow unterwegs, musste sie mit starken Wehen den Zug verlassen. Dort gebar sie dann ihren Sohn und starb kurz darauf. Das Kind kam nach Tambow zu seinen Tanten. Diese gründeten ein paar Jahre später eine Schule für ihn und seine Freunde.

Außerdem druckten sie eine kleine Zeitschrift, die „Frühlingsschwalben“. Im Alter von 5 Jahren veröffentlichte hier der Junge 1908 (also vor jetzt 100 Jahren) seine erste mathematische Entdeckung: Die Summe der ersten  $k$  ungeraden Zahlen ist gleich  $k^2$ .<sup>\*</sup> Später stellte er seinen Mitschülern Aufgaben, deren Lösung dann in den „Frühlingsschwalben“ gedruckt wurden – diese können damit als ein früher Vorläufer von MONOID gelten.

Höhere Mathematik lernte der 14-jährige, indem er in einer Enzyklopädie fehlende Beweise selber fand. In mehreren Plänen für ein Perpetuum Mobile versteckte er die Fehler so geschickt, dass sein Physiklehrer sie nicht finden konnte. Nachdem er seine Lehrer gebeten hatte, die Abschlussprüfung an seiner Schule ein Jahr früher abzulegen, bestellten diese ihn für den Nachmittag. Als er dann kam, gaben sie ihm ohne Prüfung sein Abschlusszeugnis. Er erzählte später, wie enttäuscht er war, dass ihm so die Herausforderung einer schwierigen Prüfung entging. Seine wissenschaftliche Karriere begann er mit 17 Jahren als Student an der Universität der Hauptstadt seines Heimatlandes.

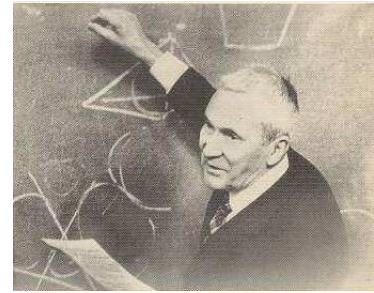
Wer war dieses Wunderkind?

---

<sup>\*</sup> Diese Entdeckung ist auch auf dem Titelbild von MONOID 86 von Juni 2006 dargestellt. Siehe dazu auch den zugehörigen Artikel im gleichen Heft auf Seite 28 „Beweise ohne Worte“ von Hartwig Fuchs.

# Des Rätsels Lösung

Die gesuchte Person ist *Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov*. Er wurde geboren am 12. April 1903 (nach dem damals in Russland gültigen julianischen Kalender, dies ist der 25. April nach gregorianischem Kalender) in Tambow und starb am 20. Oktober 1987 in Moskau.



Bereits als Student zeigte er sehr vielseitige Interessen und hörte auch Vorlesungen aus ganz anderen Gebieten. Seine erste veröffentlichte Forschungsarbeit ergab sich aus einem Seminar über Russische Geschichte.

Das Grundstudium in Mathematik in Moskau umfasste damals 14 Pflichtkurse. In jedem dieser Kurse hatte der Student die Wahl zwischen einer Prüfung und einer eigenständigen Arbeit zum Thema des Kurses. Nur wenige Studenten schrieben mehr als eine solche Arbeit; Kolmogorov lieferte 14 zum Teil bedeutende wissenschaftliche Arbeiten – und legte in keinem der Kurse eine Prüfung ab.

Am besten bekannt wurde Kolmogorov durch seine Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie als einer in sich geschlossenen mathematischen Wissenschaft. Sein 1933 (also vor nunmehr 75 Jahren) zuerst in deutscher Sprache erschienenes Buch gab einen entscheidenden Anstoß für die Forschung auf diesem Gebiet. Kolmogorov selbst trug wesentliche Ergebnisse zur Wahrscheinlichkeitstheorie und zur Mathematischen Statistik bei. Seine wissenschaftliche Forschung blieb aber nicht auf diesen Bereich beschränkt. Andere Teilgebiete der Mathematik (zum Beispiel die Theorie der trigonometrischen Reihen) und ihre Anwendungen (in der Physik etwa die klassische Mechanik) verdanken Kolmogorov wichtige Ergebnisse und Impulse.

Kolmogorovs Interessen und Forschungen gingen weit über die Mathematik und ihre unmittelbaren Anwendungsgebiete hinaus; seine außergewöhnliche Vielseitigkeit dokumentiert sich in wissenschaftlicher Tätigkeit in so unterschiedlichen Gebieten wie Meteorologie, Geschichte, Archäologie, Hydrodynamik, Linguistik, Astronomie und Ozeanographie. Noch im Alter von 68 Jahren nahm er an einer Expedition auf dem Forschungsschiff *Dmitri Mendeleev* teil. In einem biographischen Artikel über Kolmogorov fand ich die Formulierung: „It would be easier to list the fields of mathematics, physics, biology, and philosophy in which Kolmogorov did *not* have a major influence than it would be to list the areas in which his imprint was felt.“

Nicht zuletzt war Kolmogorov ein herausragender Lehrer nicht nur für Studenten an der Universität. So ließ er auch an einer Moskauer Schule für begabte Kinder diese teilhaben an seiner Begeisterung für Literatur und Musik im formalen Unterricht und bei Wanderungen und Ausflügen. Kolmogorovs Einfluss auf das gesamte Bildungssystem in Russland und anderen Ländern der ehemaligen Sowjetunion ist noch heute spürbar.

# Ein Blick hinter die Kulissen

## Wie man das Differenzen-Spiel gewinnt

von Hartwig Fuchs

Ein Lehrer spielt mit seinen Schülern das Differenzen-Spiel, mit dem die Schüler das Subtrahieren üben sollen.

Auf einem Bogen Papier sind alle natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$  mit einer nicht zu kleinen natürlichen Zahl  $n$  (zum Beispiel  $n = 2008$ ) aufgeschrieben; jeder Schüler besitzt eine Kopie davon.

Die Spielregeln:

Zunächst wählt der Lehrer oder aber ein Schüler eine Startzahl  $s \leq n$ ; damit ist die Liste der Zahlen, mit der das Spiel beginnt, festgelegt – sie ist 1, 2, 3, ...,  $s$ .

Die Spielzüge werden im Wechsel vom Lehrer und von den Schülern ausgeführt und zwar so: Es werden jeweils zwei Zahlen der Liste gestrichen und dafür deren nicht negative Differenz der Liste hinzugefügt. Das soll so lange gemacht werden, bis nur noch eine Zahl übrig bleibt.

Der Lehrer hat gewonnen, wenn die letzte Zahl gerade ist, im anderen Fall haben die Schüler gewonnen.

Nach einigen Spielen bemerken die Schüler, dass der Lehrer stets dann gewinnt, wenn er die Startzahl  $s$  bestimmen darf. Eine Taktik erkennen sie jedoch weder bei seiner Wahl der Zahl  $s$  noch in seinen Spielzügen. Und doch muss er eine Gewinnstrategie besitzen, die vermutlich von  $s$  abhängt. Aber welche?

Nehmen wir an, die Wahl der Startzahl  $s$  liegt beim Lehrer. Kann er dann  $s$  so festlegen, dass im Laufe des Spiels zwangsläufig alle ungeraden Zahlen nach und nach verschwinden?

Schauen wir dazu nach, ob es eine Regel für das Verschwinden der ungeraden Zahlen gibt – aus der wir dann eventuell Rückschlüsse auf die zum Gewinn führenden Zahlen  $s$  machen können.

Was passiert bei einem Spielzug mit den ungeraden Zahlen ( $u$  bedeutet eine ungerade und  $g$  eine gerade Zahl)?

| Die beiden gewählten Zahlen sind: | Ihre Differenz ist: | Die Anzahl der ungeraden Zahlen verändert sich um |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------|
| $g, g$                            | $g$                 | 0                                                 |
| $g, u$ oder $u, g$                | $u$                 | 0                                                 |
| $u, u$                            | $g$                 | -2                                                |

Nach jedem Spielzug ist daher die Anzahl der ungeraden Zahlen unverändert oder sie hat um 2 abgenommen.

Waren also in der Startliste 1, 2, 3, ...,  $s$  geradzahlig viele ungerade Zahlen, dann ist die beim Spielende übrige Zahl gerade – der Lehrer gewinnt.

Beispiel: In der Liste 1, 2, 3, ...,  $s$  mit  $s = 2007$  oder  $s = 2008$  befinden sich 1004 ungerade Zahlen – mit diesen  $s$ -Werten gewinnt der Lehrer; für  $s = 2005$  oder  $s = 2006$  enthält die Liste 1003 ungerade Zahlen – mit diesen Zahlen  $s$  als Startzahl verliert der Lehrer.

Der Lehrer gewinnt also, wenn er  $s = 4m - 1$  oder  $s = 4m$  wählt; er verliert mit  $s = 4m + 1$  und  $s = 4m + 2$ ,  $m$  eine natürliche Zahl so, dass  $s \leq n$  ist.

## Die Seiten für den Computer-Fan

### Das ungelöste Problem von Brocard

Henri Brocard\*, französischer Ingenieur und Meteorologe, beschäftigte sich in seiner Freizeit mit elementarer Geometrie und Zahlentheorie. Dabei stieß er auf folgende Frage:

Für welche natürlichen Zahlen  $n$  ist  $n! + 1$  eine Quadratzahl?  
(Dabei bedeutet  $n!$  das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .)

Bis heute sind nur drei Lösungen mit „kleinem“  $n$  bekannt.

- Bestimme diese drei Lösungen des Problems!
- Versuche weitere Lösungen  $n < 10^t$  mit nicht zu kleinem  $t$  zu finden!
- Wandle das Brocardsche Problem ab, indem Du  $n! + m$  mit einigen  $m > 1$  untersuchst!
- Auch ist die Frage interessant, für welche  $n$  und  $m$  sich mit  $n! + m$ ,  $m \geq 1$ , dritte Potenzen ergeben. (nach H.F.)

*Hinweis:* Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2008 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als E-Mail-Anhang an [monoid@mathematik.uni-mainz.de](mailto:monoid@mathematik.uni-mainz.de)).

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

## Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 92

### Spezielle Primzahlen

Für  $n = 1, 2$  und  $4$  ist  $n^n + 1$  eine Primzahl.

Kannst Du eine weitere Zahl  $n$  angeben, für die  $n^n + 1$  eine Primzahl ist?

Untersuche auch die allgemeinere Fragestellung:

---

\* Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard, \*12.05.1845 in Vignot, †16.01.1922 in Bar-le-Duc

Für welche natürlichen Zahlen  $n \leq 100$  ist  $n^n + m$  eine Primzahl, wenn  $m$  nacheinander die Zahlen 1 bis 20 durchläuft? Natürlich darfst Du auch größere Zahlbereiche untersuchen!

*Lösung:*

Für folgende Kombinationen von  $n \leq 100$  und  $m \leq 20$  sind die Zahlen vom Typ  $n^n + m$  Primzahlen (Überprüfung zum Beispiel mit dem CAS Derive):

|     |         |      |   |             |   |             |   |                |
|-----|---------|------|---|-------------|---|-------------|---|----------------|
| $m$ | 1       | 2    | 3 | 4           | 6 | 7           | 9 | 10             |
| $n$ | 1, 2, 4 | 1, 3 | 2 | 1, 3, 7, 43 | 1 | 2, 4, 6, 32 | 2 | 1, 3, 7, 9, 39 |

|     |      |              |       |      |          |           |           |       |
|-----|------|--------------|-------|------|----------|-----------|-----------|-------|
| $m$ | 12   | 13           | 14    | 15   | 16       | 18        | 19        | 20    |
| $n$ | 1, 5 | 2, 4, 16, 42 | 3, 23 | 2, 4 | 1, 3, 13 | 1, 19, 49 | 2, 10, 30 | 3, 53 |

Diese Ergebnisse hat auch **Malte Meyn** vom Ohm-Gymnasium Erlangen (10. Klasse) mit Derive erzielt; er ist aber noch weiter gegangen und hat den Laufbereich von  $m$  bis 100 ausgedehnt; schließlich hat er den gesamten Bereich  $1 \leq n \leq 200$  und  $-100 \leq m \leq 100$  untersucht.

Mit dieser Aufgabe beschäftigt haben sich mit eigenen Programmen auch **Luis Ressel** vom Friedrich-List-Gymnasium Reutlingen (6. Klasse) für den Bereich  $n \leq 15$  und  $m \leq 20$  sowie **Florian Schweiger** vom Gymnasium Marktoberdorf (10. Klasse) für den Bereich  $n \leq 12$  und  $m \leq 20$ .

## Mathis machen mathematische Entdeckungen

### Lösung des Packungsproblems aus Heft 91

Mathis packt Pampelmusen von 10 cm Durchmesser in eine Kiste, die 80 cm lang, 60 cm breit und 10 cm hoch ist und mit einem Deckel verschlossen werden soll. Er kann 48 Pampelmusen in die Kiste packen.

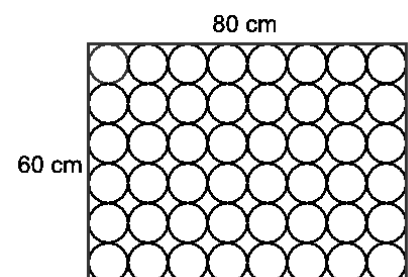
Matteo dagegen kann sogar 49 Pampelmusen in der Kiste unterbringen.

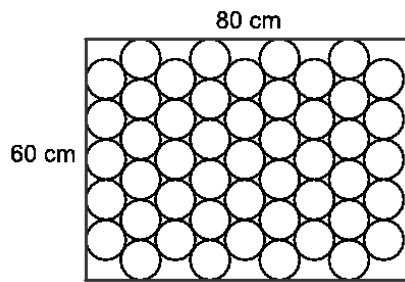
Doch Mette triumphiert: Ihr gelingt es, 50 Pampelmusen in die Kiste einzuordnen.

Wie haben die drei Packungskünstler die Früchte wohl in die Kiste gepackt?  
(gefunden von H. F.)

*Lösung:*

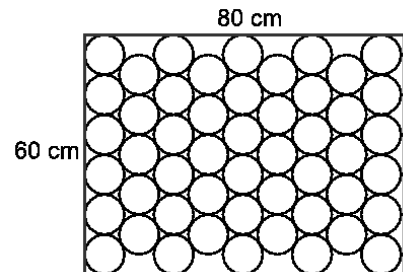
Mathis packt die Pampelmusen in 6 Reihen zu je 8 Stück in die Kiste und kann so  $6 \cdot 8 = 48$  Pampelmusen unterbringen; denn  $6 \cdot 10 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$  und  $8 \cdot 10 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$ .





Matteo dagegen geht platzsparender vor und packt „auf Lücke“, indem er Fünfer-Spalten mit Sechser-Spalten sich abwechseln lässt. Da er mit einer Fünferspalte beginnt, kann er in der Längsrichtung der Kiste 5 Spalten mit 5 Pampelmusen und 4 Spalten mit 6 Pampelmusen, also insgesamt  $5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 25 + 24 = 49$  Pampelmusen unterbringen.

Mette dagegen beginnt mit einer Sechser-Spalte und kann so 5 Spalten mit 6 Pampelmusen und 4 Spalten mit 5 Pampelmusen, also insgesamt  $5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 30 + 20 = 50$  Pampelmusen in die Kiste packen.



Dass dies bei Matteo und Mette wirklich klappt, liegt daran, dass bei ihrem Vorgehen die Mittelpunkte dreier benachbarter Pampelmusen ein gleichseitiges Dreieck von 10 cm Seitenlänge und daher (nach Pythagoras) einer Höhe von  $5 \cdot \sqrt{3}$  cm bilden. Somit ergibt sich in der Längsrichtung der Kiste für die insgesamt neun Pampelmusen-Spalten eine Länge von  $5 + 8 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 5 = 10 + 40 \cdot \sqrt{3} \approx 79,28 < 80$  [cm].

In dieser Weise haben **Malte Meyn** vom Ohm-Gymnasium Erlangen (10. Klasse) und **Alexey Tyukin** vom Gymnasium Mainz-Gonsenheim (12. Klasse) das Packungsproblem gelöst. **Magdalena Winkelvoß** vom Rabanus-Maurus-Gymnasium Mainz (5. Klasse) hat die Packungen mit Knöpfen nachgelegt; allerdings verbrauchen ihre Lösungen für die Fälle von 49 bzw. 50 Knöpfen zuviel Fläche, so dass bei Übertragung auf das Pampelmusenproblem die Kiste gesprengt würde.

## Die Redaktion

**Leitung:** Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz

**Mitglieder:** Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

**Weitere Mitarbeiter:** Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe

**Zusammenstellung, Satz, Korrektur der eingesandten Lösungen und**

**Internet:** Marcel Gruner, Juliane Gutjahr

**Betreuung der Abonnements:** Katherine Pillau

# Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 93

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

## Die Stühle im Tanzsaal

Familie Neureich lädt die besonders wichtigen Persönlichkeiten von Geldstadt zu einer kleinen intimen Feier ein. Ein besonderer Augenschmaus in der Villa der Neureichs ist der quadratische Tanzsaal. Da der Hausherr sehr viel von Ordnung hält, fordert er seinen Butler auf, die zehn Stühle im Tanzsaal so aufzustellen, dass an jeder Wand dieselbe Anzahl Stühle steht.

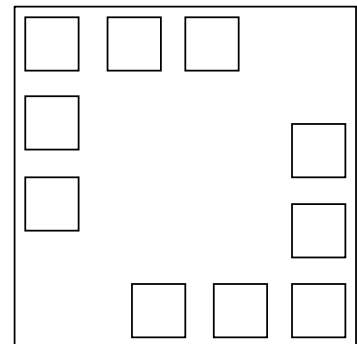
Gib eine Lösung an!

(gefunden von WK)

### Lösung:

Da 10 nicht durch 4 teilbar ist, ist keine ganz einfache Lösung möglich. Der Quotient ist  $10 : 4 = 2,5$ . Also ist 3 wohl die Maximalzahl der Stühle, die man an einer Wand unterbringen kann. Da  $3 \cdot 4 = 12$  gilt, müssen zwei Stühle so platziert werden, dass sie zwei Wänden zugeordnet werden können; also müssen zwei Stühle genau an der Ecke aufgestellt werden.

Eine Lösung ist nebenstehende. Eine weitere Lösung erhält man durch Drehung der Lösung um  $90^\circ$ .



## Hat Frau Fröhlich etwa 28 Kinder?

Frau Fröhlich erzählt im Urlaub ihrer neuen Bekannten Frau Lustig von ihren kleinen Problemen mit ihren vielen Kindern: „Am Schlimmsten ist es beim Essen. Die haben so einen unterschiedlichen Geschmack. Sieben grausen sich vor Spinat, sechs bringen nicht eine Karotte hinunter und fünf verabscheuen Bohnen. Vier mögen weder Spinat noch Karotten, drei essen weder Spinat noch Bohnen. Zwei bringen weder Bohnen noch Karotten hinunter und eines isst sogar weder Spinat noch Bohnen noch Karotten. Und das Schlimmste ist: Kein einziges Kind mag alle drei Beilagen.“

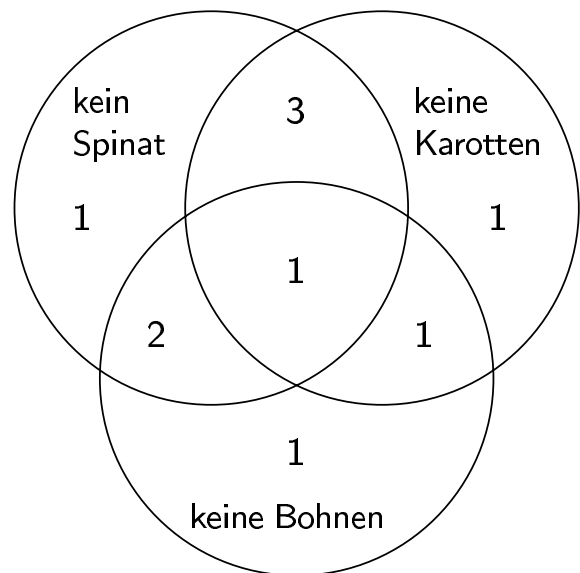
Darauf ist Frau Lustig doch erstaunt und fragt: „Frau Fröhlich, wie viele Kinder haben sie eigentlich?“

(WK)

### Lösung:

Wir erstellen ein Diagramm mit drei sich überschneidenden Mengen, in das wir die Anzahl der Kinder, die keinen Spinat, keine Karotten, keine Bohnen, weder Spinat noch Bohnen usw. essen, an die passende Stelle eintragen.

Wir beginnen dabei „von innen heraus“: Wir tragen also zunächst die 1, die für die Anzahl der Kinder, die keines der drei Gerichte mögen, in der Schnittmenge aller drei Mengen ein, dann tragen wir die 2 in die Schnittmenge von „kein Spinat“ und „keine Bohnen“ ein, da ja drei der Kinder weder Spinat noch Bohnen essen und eines davon schon in der Schnittmenge aller drei Mengen vertreten ist. Entsprechend fahren wir fort, immer unter Beachtung, wie viele der Kinder wir im Inneren des Diagramms bereits dargestellt haben. Das fertige Diagramm sieht wie nebenstehend aus.



Daraus lesen wir unmittelbar ab, dass Frau Fröhlich insgesamt zehn Kinder hat.

### Nimm die Steine weg

Sabrina und Judith treffen sich, nachdem sie ihre Hausaufgaben erledigt haben, bei Judith. Heute wollen sie mal ein wenig spielen. In einer Zeitschrift haben sie ein Spielchen gefunden mit der folgenden Spielregel: Auf einem Haufen liegen 24 Spielsteine. Zwei Spieler nehmen abwechselnd zwischen einem und sechs Steinen davon weg. Gewonnen hat derjenige, der den letzten Stein wegnimmt. Sabrina überlegt ein wenig und sagt dann: „Ich bin ja hier der Gast und darf deshalb anfangen.“ Sie weiß nämlich, dass sie dann bei geschickter Strategie mit Sicherheit gewinnen wird.

Spielt das Spiel einige Male und stellt dabei die „todsichere“ Methode fest, die für den Spieler zum Sieg führt, der anfängt. Wie geht diese? (WK)

### Lösung:

Entscheidend ist die Spielregel, dass bis zu sechs Steine gezogen werden dürfen. Wir denken vom Spielende aus: Die Gegnerin, hier Judith, kann nie gewinnen, wenn noch sieben Steine auf dem Haufen sind; denn egal was Judith zieht, kann Sabrina anschließend alle übrigen Steine wegnehmen und so gewinnen.

Wie erreicht nun Sabrina, dass vor der Gegnerin sieben Steine liegen? Ein Schritt zurück zeigt, dass Sabrina es schaffen muss, dass 14 Steine für Judith auf einem Haufen sind (dann kann sie durch geschickte Kombination nach Judiths Zug so viele Steine wegnehmen, dass sieben übrig bleiben).

Entsprechendes macht sie im Zug vorher: Sie muss so viele Steine wegnehmen, dass 21 Steine auf dem Haufen verbleiben, weil sie dann mit Sicherheit im nächsten Zug für 14 Steine auf dem Haufen sorgen kann.

Folglich muss Sabrina zunächst  $24 - 21 = 3$  Steine wegnehmen.

### Falsche Aufgabe – richtiges Ergebnis

Mathis sollte in einer Rechenaufgabe drei natürliche Zahlen addieren. Stattdessen multiplizierte er sie miteinander. Dennoch erhielt er das gleiche Ergebnis, wie wenn er addiert hätte.

Wie hießen die drei Zahlen? Gibt es mehrere Möglichkeiten für diese drei Zahlen?  
(H.F.)

*Lösung:*

Die drei gesuchten natürlichen Zahlen seien mit  $x$ ,  $y$  und  $z$  bezeichnet, wobei wir ohne Einschränkung  $x \leq y \leq z$  annehmen dürfen.

Nach Voraussetzung gilt  $x + y + z = x \cdot y \cdot z$ , woraus nach Division mit  $xyz$  folgt:  $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$ . Wegen  $x \leq z$  ist  $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{yz}$  und wegen  $y \leq z$  ist  $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{xz}$ . Damit folgt:

$$1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \leq \frac{3}{xy}.$$

Aus  $1 \leq \frac{3}{xy}$  ergibt sich, dass  $y$  in der Menge  $\{1, 2, 3\}$  und  $x = 1$  sein muss (wegen  $x \leq y$  und  $x \leq \frac{3}{y}$ ).

Wenn man nun die drei für das Paar  $(x, y)$  möglichen Fälle durchrechnet, dann erfüllen nur  $y = 2$  und  $x = 1$  und deshalb  $z = 3$  die Voraussetzungen.

Also ist  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$  die einzige Lösung.

### Ein beschränkter Aufzug

In einem Wolkenkratzer mit 99 oberirdischen Stockwerken, wobei das Erdgeschoss das erste Stockwerk ist, gibt es einen Aufzug mit nur zwei Befehltasten: Drückt man den Knopf  $\uparrow$ , so fährt der Aufzug 13 Stockwerke nach oben, drückt man den Knopf  $\downarrow$ , so bewegt er sich um neun Stockwerke nach unten. Erhält er einen Befehl, der ihn unter das Erdgeschoss oder über den 99. Stock hinaus führen würde, dann führt er diesen Befehl nicht aus.

Kann man mit diesem Aufzug vom Erdgeschoss bis ins 99. Stockwerk gelangen?  
(H.F.)

*Lösung:*

Angenommen, man könnte das 99. Stockwerk mit  $x$  Befehlen  $\uparrow$  und mit  $y$  Befehlen  $\downarrow$  erreichen, dann gilt  $99 = 1 + 13x - 9y$ , also  $9(y + 11) = 1 + 13x$ . Daraus folgt, dass  $1 + 13x$  ein Vielfaches von 9 sein muss.

Wegen  $y \geq 0$  ist  $13x \geq 98$ , also  $x \geq 8$ . Man prüft durch nachrechnen, dass  $x = 11$  die kleinste Lösung ist und  $y = 5$  liefert, denn  $99 = 1 + 13 \cdot 11 - 9 \cdot 5$ . Diese Tasten müssen nun richtig kombiniert werden, damit der Fahrstuhl nicht zu weit fährt.

Es gibt aber noch weitere (größere) Lösungen, zum Beispiel  $x = 20$ ,  $y = 18$  oder  $x = 29$ ,  $y = 31$  und so weiter.

## Die neue E-Mail-Adresse

Ralf will sich eine neue E-Mail-Adresse bei der neugegründeten Firma [www.OhWehOhWehOhWeh.de](http://www.OhWehOhWehOhWeh.de) einrichten. Er ruft die entsprechende Internetseite auf und will sich die neue Adresse besorgen. Da kommt die Antwort nach nur 42,3567 Sekunden Ladedauer: „Prima, dass Sie sich bei uns anmelden wollen. Sie brauchen sich nur noch ein Kennwort zu wählen. Das geht bei uns ganz besonders einfach: Sie wählen sich eine vierstellige Zahl, in der keine zwei gleichen Ziffern vorkommen. Der Unterschied zwischen der Zehner- und der Hunderterziffer muss 3 betragen, der Unterschied zwischen der Hunderter- und Tausenderziffer muss 4 betragen. Beim Berechnen dieser Unterschiede kommt es nicht auf die Reihenfolge der betreffenden Ziffern an, die Tausenderziffer darf nicht 0 sein.“ Ralf erinnert sich an die Werbung und schreit: „Das ist aber einfach!“ Dann wird er aber doch ernsthafter: „Wie viele verschiedene Kennwörter gibt es denn da eigentlich, also: Wie viele vierstellige Zahlen der gewünschten Art gibt es insgesamt?“ (WK)

### Lösung:

Wir stellen fest, dass es hier (zunächst) nicht auf die Einerziffer der gesuchten Zahl ankommt. Wir stellen alle Möglichkeiten für die drei anderen Ziffern, ausgehend von der Zehnerziffer, als Folgerung alle möglichen Hunderter- und anschließend die noch möglichen Tausenderziffern zusammen:

| Nummer | Zehnerziffer | Hunderterziffer | Tausenderziffer |
|--------|--------------|-----------------|-----------------|
| 1      | 0            | 3               | 7               |
| 2      | 1            | 4               | 8               |
| 3      | 2            | 5               | 1               |
| 4      | 2            | 5               | 9               |
| 5      | 3            | 0               | 4               |
| 6      | 3            | 6               | 2               |
| 7      | 4            | 1               | 5               |
| 8      | 4            | 7               | 3               |
| 9      | 5            | 2               | 6               |
| 10     | 5            | 8               | 4               |
| 11     | 6            | 3               | 7               |
| 12     | 6            | 9               | 5               |
| 13     | 7            | 4               | 8               |
| 14     | 8            | 5               | 1               |
| 15     | 8            | 5               | 9               |
| 16     | 9            | 6               | 2               |

Für die Zehner-, Hunderter- und Tausenderziffer gibt es offensichtlich 16 Möglichkeiten. Für die Einerziffer bleiben noch jeweils  $10 - 3 = 7$  Möglichkeiten übrig, da ja die drei festgelegten Ziffern nicht wiederholt werden dürfen. Insgesamt gibt es also  $16 \cdot 7 = 112$  verschiedene Kennwörter bei dieser Firma, also unter Datenschutzgesichtspunkten viel zu wenige.

## Zufall oder nicht?

$$\frac{(2007 + 2007) + (2007 - 2007) + (2007 \cdot 2007) + (2007 : 2007)}{2008} = 2008$$

(H.F.)

*Lösung:*

Für jede reelle Zahl  $x \neq -1, x \neq 0$  gilt:

$$T(x) := (x + x) + (x - x) + (x \cdot x) + (x : x) = 2x + 0 + x^2 + 1 = (x + 1)^2.$$

Daher ist  $\frac{T(x)}{x+1} = x + 1$ .

Setzt man in diese Gleichung  $x = 2007$  ein, dann ist die behauptete Zahlen-gleichung richtig und, da sie für alle reellen Zahlen  $x$  mit  $-1 \neq x \neq 0$  gilt, kein Zufall.

## Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

### Simpson-Zahlen

Mit dem Dezimalsystem sind wir alle bestens vertraut: Es gibt genau zehn Ziffern von 0 bis 9, aus denen unsere Zahlen zusammengesetzt werden. Dabei bedeutet beispielsweise die Darstellung der Zahl 1958 im Dezimalsystem  $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$ .

Dass unser Zahl-System auf der 10 beruht, verdanken wir wohl der Tatsache, zehn Finger zur Verfügung zu haben.

Betrachten wir nun die Hände der „Springfieldianer“: An jeder Hand ein Daumen und drei Finger; also insgesamt acht Finger. Würden die Simpsons ein eigenes Zahl-System entwickeln, gäbe es wohl nur acht Ziffern von 0 bis 7. In der Zahlendarstellung wäre der Übertrag in die nächste Reihe also bereits bei 8 der Fall. In diesem Zahl-System wird also mit Achter-Potenzen gerechnet statt mit Zehner-Potenzen, wie bei uns.

- a) Die Simpsons wohnen in der Evergreen Terrace Nr. 742. Da diese Zahl aus Springfield stammt, gehen wir davon aus, dass sie im Oktamalsystem aufgestellt wurde. Wie würde die Hausnummer im Dezimalsystem aussehen?
- b) Wie würde die Jahreszahl 2008 in Springfield (im Oktamalsystem) lauten?  
(Christian Dreisbach, Mainz)

### Zukünftiger Wochentag

Wenn heute Montag ist, welchen Wochentag haben wir dann in 2008 Tagen?  
(H.F.)

## Summenspielerei

Bestimme die Summen (ohne Taschenrechner!):

a)  $S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots + 2007 - 2008$

b)  $S_2 = 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots - 2007 + 2008$  (H.F.)

Hier ist es besonders wichtig, dass Du Deinen Lösungsweg angibst!

## Eine schwierige Teilung

Eine ziemlich große Bande von Bankräubern will sich auflösen. Jeder Räuber soll dabei den gleichen Anteil des erbeuteten Geldes erhalten. Doch bei der Teilung der 3 992 003 € bleibt ein Rest übrig. Daher beschließen sie wieder auf Beutejagd zu gehen. Als sie nun die 4 056 716 € teilen wollen, bemerken sie, dass wieder derselbe Rest übrig bleibt. Deshalb rauben sie nochmals eine Bank aus. Beim Teilen der 4 077 621 € bleibt erneut derselbe Rest übrig.

Wie viele Bankräuber gehören der Bande an?

(Thomas Geiß, Kl. 11, Leibniz-Gymnasium, Östringen)

## Rangfolge gesucht

Die fünf Schüler A, B, C, D und E einer Klasse haben bei einem Mathematik-Wettbewerb mitgemacht. Ihre Ergebnisse teilen sie ihrem Mathematik-Lehrer in verschlüsselter Form mit, nämlich so:

- (1) A hat mehr Punkte als E.
- (2) B hat weniger Punkte als C.
- (3) C hat weniger Punkte als D.
- (4) D hat weniger Punkte als A.
- (5) E hat mehr Punkte als C.
- (6) A hat weniger Punkte als C.
- (7) E hat mehr Punkte als D.

Bei genau einer dieser sieben Aussagen haben die Schüler geschwindelt.

Gib die Namen der Schüler in der Reihenfolge wachsender Punktezahlen an. (H.F.)

## Ein magischer Würfel

Man kann die Zahlen 499, 500, 501, 502, 502 (also zweimal!), 503, 504 und 505 so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilen, dass die Summe der Zahlen in den vier Ecken jeder der sechs quadratischen Würfelflächen jeweils den gleichen Wert  $S$  hat. Bestimme  $S$  und gib eine Verteilung der Zahlen an! (H.F.)

## Wahr oder falsch?

Es sei  $p \neq 5$  eine ungerade Primzahl. Dann ist  $p^4 - 1$  ein Vielfaches von 10, das heißt, es hat die Einerziffer 0. (H.F.)

# Neue Aufgaben

Klassen 8–13

## Aufgabe 939: Durch 2008 teilbar?

Die Zahl  $1 + 2007^{2009}$  ist ohne Rest durch 2008 teilbar.

Stimmt das?

(H.F.)

## Aufgabe 940: Wahr oder falsch?

Die Zahl  $Z = 2009^{2008} - 2007^{2008}$  ist ein Vielfaches von 16.

Trifft das zu?

*Hinweis:*  $Z$  hat mehr als 6600 Ziffern – also versuche nicht zu dividieren.

(H.F.)

## Aufgabe 941: Eine Quaderknochelei

Zwei Kanten eines Quaders haben die Längen 2 und 251; die Länge der dritten Kante ist  $\frac{1}{757}$  der Maßzahl der Würfeloberfläche.

Welches Volumen hat der Quader?

(H.F.)

## Aufgabe 942: Fehlerhafte Vergrößerung?

Augustine Schlechtmonat möchte eine DIN-A4-Vorlage auf DIN A3 vergrößern. Am Kopierer stellt sie fest, dass sie dazu die Vergrößerung 141% einstellen muss. Dabei möchte sie doch auf ein doppelt so großes Blatt vergrößern, also auf 200%.

Ist die Anzeige fehlerhaft? Oder gibt es gar eine plausible Erklärung – wie wäre dann die Einstellung für die umgekehrte Verkleinerung von DIN A3 auf A4?

(MG)

## Aufgabe 943: Tinas Radtour

Tina wohnt in der Stadt und möchte mit dem Rad an einen Badensee im Umland fahren. Um 14.30 Uhr fährt sie los. Nach einer Strecke von 1763 m begegnet sie ihrem Onkel. Dieser wohnt am Badensee und ist um 14.30 Uhr ebenfalls mit dem Fahrrad losgefahren, um in der Stadt einzukaufen. Für den Einkauf in der Stadt benötigt er 138 min, dann fährt er wieder zurück zum Badensee. Dort hat Tina nach ihrer Ankunft 2,3 Std. mit Schwimmen und Sonnen zugebracht und befindet sich nun wieder auf dem Rückweg in die Stadt. Sie ist bereits 1058 m vom Badensee entfernt, als ihr Onkel ihr wieder entgegenkommt. Am Abend überlegt sich Tina, wie weit sie heute wohl gefahren ist...

Frage unter der Annahme, dass Tina und ihr Onkel beständig jeweils mit konstanter Geschwindigkeit gefahren sind, wobei sich beide Geschwindigkeiten unterscheiden können: Wieviele Meter hat Tina auf dem Rad zurückgelegt?

(Christian Dreisbach, Mainz)

### Aufgabe 944: Primzahlen

Wie groß muss eine Primzahl mindestens sein, welche das um 1 vermehrte Produkt der geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, ..., 50 teilt? (H.F.)

### Aufgabe 945: Eine seltsame Pflanze

Auf dem Stern Gerlach wächst seit einiger Zeit eine seltsame Pflanze. Am Anfang (quasi am nullten Tag) hatte sie ein einziges quadratisches Blatt mit der Seitenlänge 1 m, welches auf dem Boden lag. Einen Tag später sind an drei Seiten dieser Pflanze neue Blätter gewachsen und zwar an drei Seiten des Quadrates, jeweils in der Mitte. Auch diese Blätter sind quadratisch, haben jedoch nur ein Drittel der Seitenlänge der vorherigen Blattgeneration. Am zweiten Tag wachsen wieder quadratische Blätter...

- Zeichne die Pflanze für jeden der ersten drei Tage ( $n = 0$ ,  $n = 1$  und  $n = 2$ ).
- Die Gerlacher haben Angst, dass die Pflanze irgendwann den ganzen Stern bedecken wird. Ist ihre Angst begründet?
- Wird der Rand der Pflanze irgendwann länger als 42 m?
- Koschie ist ein besonders schlauer Gerlacher und möchte den Flächeninhalt und den Umfang der Pflanze genau berechnen. Wie lauten die entsprechenden Formeln? (MG)

## Gelöste Aufgaben aus MONOID 93

Klassen 8–13

*Hinweis:* In Heft 93 ist uns ein Fehler bei der Nummerierung der Aufgaben unterlaufen: Wir haben die Nummer 931 zweimal vergeben, nämlich in Heft 92 und 93. Bei den Lösungen stehen nun die korrekten Nummern, die jeweils um 1 größer sind als die alten bei der Aufgabenstellung.

### Aufgabe 932: Ein besonderes arithmetisches Mittel

2008 ist das arithmetische Mittel aus

$$\sqrt{2011 \cdot 2009 + 1} \text{ und } \sqrt{2009 \cdot 2007 + 1} \text{ und } \sqrt{2007 \cdot 2005 + 1}.$$

Stimmt das? Begründe Deine Antwort! (H.F.)

*Lösung:*

Allgemein gilt:  $\sqrt{(a+1) \cdot (a-1) + 1} = \sqrt{a^2 - 1 + 1} = \sqrt{a^2} = a.$

Daraus folgt:  $\sqrt{2011 \cdot 2009 + 1} = 2010$ ,  $\sqrt{2009 \cdot 2007 + 1} = 2008$  und  $\sqrt{2007 \cdot 2005 + 1} = 2006.$

Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist  $\frac{2010+2008+2006}{3} = \frac{6024}{3} = 2008.$   
(Laura Biroth, 13. Klasse, Humboldtschule, Bad Homburg)

### Aufgabe 933: Der Eimer

Anna Lysis hat einen alten 10-Liter-Eimer. In diesen füllt sie zunächst 1 l Wasser, danach  $\frac{1}{2}$  l, dann  $\frac{1}{3}$  l,  $\frac{1}{4}$  l und so weiter...

Läuft der Eimer irgendwann über oder erreicht Anna irgendwann eine bestimmte Füllhöhe (welche?), die nicht überschritten wird? (MG)

*Lösung:*

Wir summieren die eingefüllten Wassermengen und erhalten nach dem  $n$ -ten Schritt die Füllmenge  $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ . Die Füllhöhe wird also durch die Folge der Partialsummen  $(s_n)$  beschrieben und wir müssen deren Konvergenz untersuchen. Für jedes  $k$  und  $n$  mit  $2^{k-1} < n \leq 2^k$  gilt die Abschätzung  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^k}$ . Dies gilt jeweils für  $2^{k-1}$  Summanden. Damit können wir die  $2^k$ -te Partialsumme abschätzen:

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{i} \right) \geq 1 + \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{2^j} \right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^k 2^{j-1} \frac{1}{2^j} = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Da die Folge der Partialsummen  $(s_n)$  monoton wächst, zeigt die Rechnung, dass die Folge divergiert (da ihre Teilfolge divergiert).

Wir sehen, dass die Füllhöhe immer größer wird und unbeschränkt wächst. Insbesondere wird sie also auch größer als 10, der Eimer läuft also über. Es lässt sich berechnen, dass dies nach dem Einfüllen von  $\frac{1}{12367}$  l geschieht!

### Aufgabe 934

Gegeben seien die Gleichungen

$$(1) \quad \frac{x^2}{yz} - \frac{y^2}{xz} - \frac{z^2}{xy} = 3 \quad \text{und} \quad (2) \quad \frac{x^2z}{y} - \frac{2z}{y} = 2,$$

wobei  $x, y, z \geq 1$  verlangt sei.

- Leite aus (1) ab, dass  $x > y$  gilt.
- Leite aus (2) ab, dass  $2y \geq x^2 - 2$  ist.
- Bestimme – falls vorhanden – alle natürlichen Zahlen  $x, y, z$ , die (1) und (2) zugleich erfüllen.

(H.F.)

*Lösung:*

a) Aus (1) folgt  $\frac{x^2}{yz} = \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy} + 3$ .

Weil  $\frac{z^2}{xy} > 0$  ist, folgt:  $\frac{x^2}{yz} > \frac{y^2}{xz}$ , woraus  $x^3 > y^3$  und daher auch  $x > y$  folgt.

b) Multipliziert man (2) mit  $y$ , so folgt  $2y = x^2z - 2z = (x^2 - 2)z \geq x^2 - 2$  wegen  $z \geq 1$  und  $x^2 - 2 > 0$ .

c) Aus a) und b) erhält man

$$2x > 2y \geq x^2 - 2, \text{ woraus } 2x > x^2 - 2, \text{ also}$$

$$0 > x^2 - 2x + 1 - 3 \text{ und daher}$$

$$3 > (x - 1)^2 \text{ folgt.}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass wegen  $x \geq 1$  gilt:  $x = 1$  oder  $x = 2$ .

Für  $x = 1$  erhält man aus (2) den Widerspruch  $-\frac{z}{y} = 2$ .

Für  $x = 2$  folgt aus (2), dass  $\frac{2z}{y} = 2$  und folglich  $y = z$  ist.

Aus (1) erhält man damit

$$\frac{4}{y^2} - \frac{y}{2} - \frac{y}{2} = 3 \text{ und daraus } y^3 + 3y^2 = 4.$$

Die letzte Gleichung ist nur von  $y = 1$  erfüllbar.

Die einzige Lösung von (1) und (2) lautet daher  $x = 2, y = 1, z = 1$ .

### Aufgabe 935: Gleichschenklige Dreiecke mit bunten Eckpunkten – Teil II

In einem regelmäßigen  $n$ -Eck seien alle Eckpunkte rot oder blau eingefärbt; von jeder Farbe gebe es mindestens einen Eckpunkt.

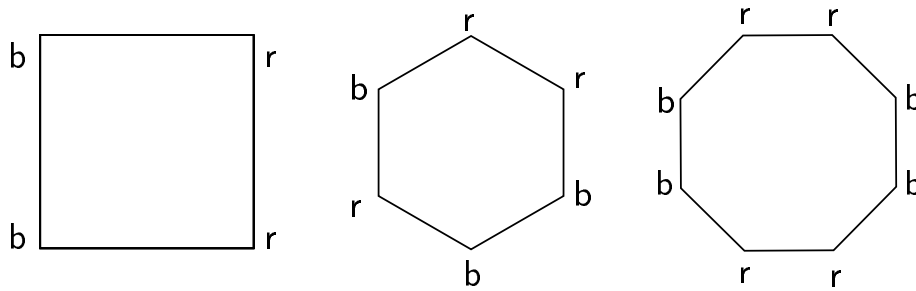
In Aufgabe 921 in Heft 91 war zu zeigen, dass man für  $n = 2007$  stets drei gleichfarbige Eckpunkte finden kann, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Die in MONOID 92 gegebene Lösung gilt auch für jedes andere ungerade  $n > 3$ .

Nun haben wir aber das Jahr 2008. Daher unsere Aufgaben:

- a) Finde für  $n = 4$ ,  $n = 6$  und  $n = 8$  Einfärbungen, bei denen dies nicht möglich ist!
- b) Zeige, dass Du für jedes gerade  $n > 8$  immer ein gleichschenkliges Dreieck mit gleich gefärbten Eckpunkten finden kannst! (WJB)

*Lösung:*

a)



b) Sind drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gleich gefärbt, so bilden diese ein gleichschenkliges Dreieck. Sind die Punkte genau abwechselnd gefärbt, so bilden (bei fortlaufender Nummerierung) die Punkte 1, 3 und 5 ein gleichschenkliges Dreieck mit Punkten gleicher Farbe.

Schließen wir diese Fälle aus, so kommen die Farben jeweils isoliert oder in benachbarten Paaren von Eckpunkten vor, und es gibt mindestens ein solches gleichfarbiges Paar. Wir beginnen mit der Nummerierung so, dass die Punkte 5 und 6 die gleiche Farbe besitzen, z. B. beide rot sind (für ein blaues Paar läuft die Argumentation analog). Dann sind die Punkte 4 und 7 beide blau, da nie drei gleichfarbige Punkte nebeneinander liegen.

- Sind auch 3 und 8 blau, d. h. ist das rote Paar 5,6 von zwei blauen Paaren umrahmt, so müssen 2 und 9 wieder rot sein. Ist auch 1 rot, so bilden 1, 5 und 9 ein rotes Dreieck. Ist aber 1 blau, so haben wir das blaue gleichschenklige Dreieck 1, 4 und 7.
- Ist 3 rot und 8 blau, dann ist 9 wieder rot und somit 3, 6, 9 ein gleichschenkliges Dreieck aus roten Punkten. Umgekehrt: Ist 3 blau und 8 rot, dann ist 2 wieder rot und somit 2, 5, 8 ein gleichschenkliges Dreieck aus roten Punkten.
- Sind 3 und 8 beide rot, so sehen wir uns 2 an. Ist 2 rot, so ist das gleichschenklige Dreieck 2, 5, 8 rot. Ist 2 blau, so liefert 1 entweder ein rotes Dreieck 1, 3, 5 oder ein blaues Dreieck 1, 4, 7.

### Aufgabe 936: Fischer Fritzens Rudertour

Fischer Fritz rudert flussabwärts von Lachsdorf nach Heringshausen in 2,5 Stunden. Nachdem er in Heringshausen vergeblich auf der Suche nach frischem Fisch war, rudert er im selben Rhythmus wieder zurück nach Lachsdorf. Gegen den Strom braucht er nun 3 Stunden und 45 Minuten.

Wie lange würde Fischer Fritz für diesselbe Strecke (hin und zurück) bei gleichem Ruderrhythmus auf einem strömungsfreien Gewässer brauchen?

(Thomas Geiß, Leibniz-Gymnasium, Östringen)

*Lösung:*

Wir verwenden die Bezeichnungen  $s$  für die einfache Flussstrecke,  $v_B$  für die Geschwindigkeit des Bootes und  $v_F$  für die Fließgeschwindigkeit des Flusses.

Wegen  $v = \frac{s}{t}$  ist  $s = tv$ , hier also  $s = 2,5 \cdot (v_B + v_F)$  auf dem Hinweg resp.  $s = 3,75 \cdot (v_B - v_F)$  auf dem Rückweg.

Da die Strecke jeweils übereinstimmt, können wir die rechten Seiten der Gleichungen gleichsetzen und nach  $v_F$  auflösen:

$$\begin{aligned} 2,5 \cdot (v_B + v_F) &= 3,75 \cdot (v_B - v_F) \\ \Leftrightarrow 2,5v_B + 2,5v_F &= 3,75v_B - 3,75v_F \\ \Leftrightarrow 6,25v_F &= 1,25v_B \\ \Leftrightarrow v_F &= \frac{1}{5}v_B \end{aligned}$$

Dies können wir nun einsetzen und erhalten für die Länge der Strecke  $s = 2,5(v_B + \frac{1}{5}v_B) = 3v_B$ .

Die Zeit, die bei strömungsfreiem Gewässer für die einfache Fahrt benötigt würde, ist somit  $t = \frac{s}{v_B} = \frac{3v_B}{v_B} = 3$  [Stunden].

Fischer Fritz würde für den kompletten Weg also 6 Stunden brauchen.

### Aufgabe 937: Deutsches Institut für Normung – Teil II

In der Aufgabe 925 im Heft 92 haben wir uns mit den DIN-Größen für Papiermaße befasst. Zur Erinnerung: DIN A0 ist ein Blatt der Größe  $1\text{ m}^2$  mit Seitenlängen  $a_0, b_0$  für die  $a_0 : b_0 = 1 : \sqrt{2}$  gilt. Aus DIN A(n) mit Seitenlängen  $a_n, b_n$  entsteht DIN A(n+1) durch Halbieren der längeren Seite:  $a_{n+1} = \frac{b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = a_n$ .

Wir hatten gezeigt, dass für jedes  $n$  das Verhältnis der Seitenlängen gleich bleibt, also immer  $a_n : b_n = 1 : \sqrt{2}$  gilt.

Ist das Entsprechende auch dreidimensional möglich, d. h. gibt es einen Quader mit Seitenlängen  $a_0, b_0, c_0$  und  $a_0 b_0 c_0 = 1\text{ m}^3$ ,  $a_0 < b_0 < c_0$  derart, dass nach Halbieren der längsten Seite ein ähnlicher Quader entsteht usw., d. h.  $a_{n+1} = \frac{c_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = a_n$ ,  $c_{n+1} = b_n$  mit  $a_n : b_n : c_n = a_0 : b_0 : c_0$  für alle  $n$ ? (WJB)

*Lösung:*

$a_0 : b_0 : c_0 = \frac{c_0}{2} : a_0 : b_0$  heißt  $\frac{b_0}{a_0} = \frac{2a_0}{c_0}$  und  $\frac{c_0}{b_0} = \frac{b_0}{a_0}$ , also  $c_0 = \frac{b_0^2}{a_0}$  und deshalb  $\frac{b_0}{a_0} = \frac{2a_0}{c_0} = \frac{2a_0^2}{b_0^2}$ , also  $\frac{b_0}{a_0} = \sqrt[3]{2}$  und  $\frac{c_0}{b_0} = \sqrt[3]{2}$ .

Mit  $a_0 b_0 c_0 = 1$  ergibt sich  $1 = a_0 b_0 c_0 = a_0 \cdot \frac{b_0}{a_0} a_0 \cdot \frac{c_0}{b_0} \frac{b_0}{a_0} a_0 = 2a_0^3$ . Es folgt  $a_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ,  $b_0 = a_0 \sqrt[3]{2} = 1$  und  $c_0 = \sqrt[3]{2}$ .

### Aufgabe 938

Die Folge  $x_1, x_2, x_3 \dots$  sei gegeben durch

$$(1) x_1 = x_2 = 1 \quad (2) x_{2n+1} x_{2n-1} - x_{2n}^2 = 1 \quad (3) x_{2n+1}^2 - x_{2n} x_{2n+2} = 1$$

- a) Berechne  $x_n$  für  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .  
 b) Erkennst Du, um welche Folge es sich handelt?  
 c) Beweise, dass es die von Dir vermutete Folge ist. (WJB)

*Lösung:*

- a) 2, 3, 5, 8, 13, 21.  
 b) Es ist die Fibonacci-Folge\*.  
 c) Wir zeigen dazu, dass die Fibonacci-Folge  $x_{2n+1}^2 - x_{2n}x_{2n+2} \stackrel{(*)}{=} x_{2n+1}x_{2n-1} - x_{2n}^2 \stackrel{(**)}{=} x_{2n-1}^2 - x_{2n-2}x_{2n} = \dots = x_3x_1 - x_2^2 = 1$  erfüllt. Damit muss unsere Folge die Fibonacci-Folge sein, da sie durch diese Bedingungen festgelegt ist.

$$(*) : x_{2n+1}^2 - x_{2n}x_{2n+2} - (x_{2n+1}x_{2n-1} - x_{2n}^2) = x_{2n+1}(x_{2n+1} - x_{2n-1}) - x_{2n}(x_{2n+2} - x_{2n}) \stackrel{(\bullet)}{=} x_{2n+1}x_{2n} - x_{2n}x_{2n+1} = 0$$

$$(**) : x_{2n+1}x_{2n-1} - x_{2n}^2 - (x_{2n-1}^2 - x_{2n-2}x_{2n}) = x_{2n-1}(x_{2n+1} - x_{2n-1}) - x_{2n}(x_{2n} - x_{2n-2}) \stackrel{(\bullet)}{=} x_{2n-1}x_{2n} - x_{2n}x_{2n-1} = 0.$$

An den Stellen  $\stackrel{(\bullet)}{=}$  wurde jeweils zweimal die Rekursionsgleichung  $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$  für die Fibonacci-Folge verwendet.

## Lösungsvielfalt

### zur Neuen Aufgabe 931

zusammengestellt von Marcel Gruner und Juliane Gutjahr

Im MONOID-Heft 92 haben wir Euch die folgende Neue Aufgabe 931 „Wahr oder falsch“ gestellt:

Alle Zahlen  $12^n - 1$  sind Vielfache von 11;  
 alle Zahlen  $13^n - 1$  sind Vielfache von 12;  
 alle Zahlen  $14^n - 1$  sind Vielfache von 13... und so weiter, für  $n = 1, 2, 3, \dots$   
 Sind diese drei Behauptungen und alle durch „und so weiter“ angedeuteten Behauptungen richtig? (H.F.)

Zu dieser Aufgabe haben uns zahlreiche verschiedene Lösungswege erreicht, worüber wir uns sehr gefreut haben. Denn genauso wie alle – oder zumindest

---

\* Fibonacci, Kurzform von figlio die Bonaccio (Sohn des Bonacius), eigentlich Leonardo von Pisa, \* um 1170, † um 1250. Die Fibonacci-Folge war zuletzt Gegenstand im Artikel „Ein Blick hinter die Kulissen – Der Hochgeschwindigkeitsrechner“ von Hartwig Fuchs in MONOID 93 auf Seite 15.

viele Wege – nach Mailand (oder welche italienische Stadt war das doch gleich?) führen, so führen auch in der Mathematik oftmals viele Wege zum Ziel oder zur Lösung. Wir müssen sie nur finden.

Oftmals ist es auch so, dass wir von Euch Lösungen bekommen, die einfacher und kürzer sind, als diejenigen, die vom Aufgabensteller vorgeschlagen wurden. Dann drucken wir diese auch gerne entweder zusätzlich oder sogar statt der Autorenlösung ab – dann erscheint auch Euer Name unter der Lösung im Heft. Bei dieser Aufgabe war es nun wie erwähnt so, dass uns viele alternative Lösungswege erreichten. Gerne wären wir im letzten Heft, als wir die Lösung veröffentlicht haben, auch auf diese Lösungswege eingegangen, aber leider hat dort der Platz nicht gereicht, um diese alle abzudrucken (auch so haben wir den Heftumfang schon um vier Seiten erweitern müssen!). Deshalb holen wir das jetzt nach.

### Eine wichtige Formel – die Autorenlösung

Der Aufgabensteller Hartwig Fuchs hatte eine Lösung geliefert, die wir bereits im MONOID-Heft 93 veröffentlicht haben, aber hier noch einmal wiederholen möchten.

Er hat dabei eine wichtige Formel verwendet. Leider wird diese im Schulunterricht nicht gelehrt. Sie lautet für beliebige reelle Zahlen  $a$  und alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^1 + 1)$$

Die Formel lässt sich recht einfach beweisen, etwa durch Polynomdivision. Aber das möchten wir hier nicht tun, das haben wir von Euch auch nicht gefordert. Treuen Lösern unter Euch dürfte diese Formel bekannt sein – viele MONOID-Aufgaben lassen sich mit dieser lösen, daher empfehlen wir Euch, dass Ihr sie Euch merkt. Wer weiß, wann sie mal nützlich sein könnte?!

Jetzt muss man nur noch in dieser Formel der Reihe nach  $a = 1$ ,  $a = 2, \dots$ ,  $a = 12$ ,  $a = 13$ ,  $a = 14, \dots$  einsetzen, dann ergibt sich, dass für jeden dieser Werte und für  $n \in \mathbb{N}$  stets die entsprechende Teilbarkeit von  $a^n - 1$  durch  $a - 1$  zutrifft.

### Binomische Formel

Auch der, dem diese Formel nicht geläufig war, konnte doch zum Ziel kommen, etwa indem er die binomische Formel anwendet, wie Madeline Kohlhaas (Kl. 10, Gymnasium Marienberg, Neuss) oder Connor Röhrich (Kl. 9, Gymnasium Hochrad, Hamburg) :

Der jeweilige Term sei als  $(x + 1)^n - 1$  dargestellt.

$$(x+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} + 1 - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} = x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k-1}$$

Die Behauptung gilt also.

## Kongruenzrechnung

Einer großen Beliebtheit erfreut sich bei verschiedenen Aufgaben auch immer wieder die Kongruenzrechnung. Dabei bedeutet  $x \equiv m \bmod n$ , dass bei der Division  $x : n$  der Rest  $m$  übrig bleibt.

Mit Hilfe der Kongruenzrechnung löste Alexander Rettkowski (Kl. 9, Winckelmann-Gymnasium, Stendal) die Aufgabe in wenigen Zeilen:

$$\begin{aligned} & a \equiv 1 \bmod (a - 1) \\ \Rightarrow & a^n \equiv 1^n \equiv 1 \bmod (a - 1) \\ \Rightarrow & a^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \bmod (a - 1) \end{aligned}$$

## Vollständige Induktion

Bei Problemen, die sich um natürliche Zahlen drehen, bietet sich manchmal die vollständige Induktion an. Bei diesem Beweisverfahren wird zunächst nachgerechnet, dass eine Aussage  $A(1)$  für einen „Startwert“ (dies ergibt sich aus der Problemstellung, meistens ist es die Zahl 1) stimmt. Danach muss gezeigt werden, dass aus der Gültigkeit einer Aussage  $A(n)$  auch die Gültigkeit der Aussage  $A(n + 1)$  folgt – und dann muss sie ja für **alle** natürlichen Zahlen gelten! Dies ist der einfachste Fall der vollständigen Induktion, manchmal ist es auch etwas komplizierter.

In der zu beweisenden Aussage tauchen die natürlichen Zahlen im Exponenten auf. Laura Biroth (Kl. 13, Humboldtschule, Bad Homburg) hat sich an das Verfahren der Induktion erinnert und es angewendet. Hier ihr Lösungsweg:

*Induktionsanfang:* Für  $n = 1$  gilt:  $a^1 - 1 = a - 1 = 1 \cdot (a - 1)$ . Die Aussage stimmt.

*Induktionsvoraussetzung:* Die Behauptung gilt für  $n$ .

*Induktionsschritt*  $n \Rightarrow n + 1$ :

$$a^{n+1} - 1 = a^{n+1} - a + (a - 1) = a \cdot (a^n - 1) + (a - 1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $a^n - 1$  durch  $a - 1$  teilbar, also beide Summanden auf der rechten Seite und damit auch die Summe.

$\Rightarrow a^{n+1} - 1$  ist durch  $a - 1$  teilbar.

Manche von Euch haben auch den Induktionsbeweis mit der Notation der Kongruenzrechnung aufgeschrieben. Aber das ist natürlich kein neuer Lösungsweg, sondern lediglich eine andere Notation.

Etwas anders war der induktive Beweis von Jonathan Bohlen und Carl Degitz (beide Kl. 10, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum, Bad Bergzabern), der sich wie folgt aufschreiben lässt. Sie zeigten zunächst für allgemeines  $a$  den Spezialfall  $n = 2$  mit der 3. Binomischen Formel  $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ .

Diesen konnten sie noch für Exponenten  $n$  erweitern mit der Umformung

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= (a^2 - 1 + 1) \cdot a^{n-2} - 1 = ((a - 1)(a + 1) + 1) \cdot a^{n-2} - 1 \\ &= (a - 1)(a + 1)a^{n-2} + a^{n-2} - 1 \end{aligned}$$

Mit dem letzten Summanden lässt sich dann das Verfahren induktiv wiederholen. Das Vorgehen bricht ab, da am Ende entweder  $a^2 - 1$  stehen bleibt oder  $a^1 - 1 = a - 1$ . Insgesamt erhalten sie also eine Summe mit lauter durch  $a - 1$  teilbaren Summanden.

### Leider nur Spezialfälle – Teillösungen

Jedem Mathematiker kann es passieren, dass er vor einem Problem steht und nicht zum Ziel gelangt. Dennoch ist es manchmal möglich, eine allgemeine Aussage wenigstens für ein paar Spezialfälle zu beweisen. In unserem Vorwort steht, dass Ihr auch Teillösungen einsenden könnt und sollt. Dazu gehören dann auch solche Spezialfälle. Für diese gibt es dann zwar leider nicht die volle Punktzahl, aber immerhin angemessen Teilpunkte. Das Wichtigste sollte ohnehin die Beschäftigung mit der Mathematik sein – und nicht die Punktejagd, die einen schönen Nebeneffekt darstellt.

Ein solches Teilergebnis konnte Anselm Schäfer (Kl. 11, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum, Bad Bergzabern) erzielen, nämlich den Spezialfall  $a = 12$  und  $n = 2$ . Auch dieser Lösungsweg ist schön, kurz und prägnant:

$$12^2 - 1 = 12 \cdot 12 - 1 = \underbrace{12 + \dots + 12}_{12\text{-mal}} - 1 = 11 + \underbrace{12 + \dots + 12}_{11\text{-mal}} = 11 + 11 \cdot 12,$$

das heißt der Koeffizient verringert sich immer um 1 und die Aussage trifft immer zu.

Ohne Probleme lässt sich dieser Beweis für natürliche Zahlen  $a$  verallgemeinern.

### Neue Erkenntnisse

Alexey Tyukin (Kl. 12, Gymnasium Gonsenheim, Mainz) bemerkt ganz richtig, dass auch gilt:  $12^n + 1$  sind Vielfache von 13, usw. für ungerade  $n \in \mathbb{N}$ . Denn mit  $n = 2k + 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  gilt:

$$\begin{aligned} a^n + 1 &= a^{2k+1} + 1 = ((a + 1) - 1)^{2k+1} + 1 = (a + 1)(\dots) - 1 + 1 \\ &= (a + 1)(\dots), \end{aligned}$$

woraus  $(a + 1) | a^n + 1$  folgt.

Manchmal lassen sich auch neue Erkenntnisse und weitere Ergebnisse gewinnen, die über die Aufgabenstellung hinausgehen. Wenn Euch so etwas auffällt, dann behaltet diese Ergebnisse nicht nur für Euch. Wir freuen uns, wenn Ihr uns diese auch mitteilt. Wir können sie dann – unter Eurem Namen – veröffentlichen und allen MONOID-Lesern zugänglich machen.

Falls Euch das aber zu einfach ist, könnt Ihr auch eine neue Aufgabe formulieren, die wir in einem der nächsten Hefte dann vielleicht stellen können. Bei Alexey

hätte diese dann beispielsweise so lauten können: „Zeige, dass gilt:  $12^n + 1$  sind Vielfache von 13, usw. für ungerade  $n \in \mathbb{N}$ .“ Oder so ähnlich.

Dies war übrigens früher eine gängige Praxis. Damals haben die Mathematiker nicht einfach Bücher herausgegeben oder Artikel in Zeitschriften publiziert, in denen sie der Fachwelt ihre neuen Erkenntnisse präsentiert haben, sondern sie haben ihre Kollegen zu kleinen Wettbewerben herausgefordert.

## Wer forscht mit? Ergebnisse zur Aufgabe aus Heft 91

### Periodische Dezimalbrüche

Wenn man die durch die Bruchzahl  $\frac{1}{n}$ ,  $n > 1$ , gegebene Division  $1 : n$  ausführt, dann erhält man manchmal eine rein-periodische Dezimalzahl, deren Periodenlänge mit  $L\left(\frac{1}{n}\right)$  bezeichnet sei.

Beispiel:  $\frac{1}{37} = 1 : 37 = 0,027\,027\,027\dots = 0,\overline{027}$  mit  $L\left(\frac{1}{37}\right) = 3$ .

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass jede in Betracht gezogene Bruchzahl eine rein-periodische Dezimalstellung besitzt.

Untersuche dann die Fragen:

- a) Welche Längen sind für Perioden möglich?
- b) Kann man zu jeder natürlichen Zahl  $m$  eine Bruchzahl  $\frac{1}{n}$  (eine Bruchzahl  $\frac{1}{p}$  mit einer Primzahl  $p$ ) angeben, für die  $L\left(\frac{1}{n}\right) = m$  bzw.  $L\left(\frac{1}{p}\right) = m$  ist,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ?
- c) Für eine Primzahl  $p \neq 2$  sei  $L\left(\frac{1}{p}\right) = p - 1$ . Dann heiße  $L\left(\frac{1}{p}\right)$  *maximal*. Bestimme für mehrere der Intervalle  $(1, 10^2)$ ,  $(1, 10^3)$ ,  $(1, 10^4)$ , ... den Anteil der Primzahlen\* des jeweiligen Intervalls.
- d) Gibt es nur endlich viele oder unendlich viele Primzahlen mit maximaler Periodenlänge?

Natürlich darfst Du auch weitere Fragestellungen, die Dir selbst einfallen, untersuchen. (H.F.)

### Lösung:

Mit den gestellten Fragen haben sich beschäftigt: **Lennart Adam** vom Gymnasium am Römerkastell in Alzey (11. Klasse), **Laura Biroth** von der Humboldtschule in Bad Homburg (13. Klasse), **Malte Meyn** vom Ohm-Gymnasium in

---

\* Gemeint waren hier Primzahlen, deren Kehrwerte maximale Periodenlänge haben.

Erlangen (10. Klasse), **Florian Schweiger** vom Gymnasium Marktoberdorf (10. Klasse) und **Alexey Tyukin** vom Gymnasium Gonsenheim in Mainz (12. Klasse). Da Florian Schweiger die Problemstellung sehr gründlich behandelt, wollen wir seinen Beitrag im nächsten Heft (MONOID 95, September 2008) in voller Länge veröffentlichen und uns jetzt kurz fassen.

- a) und b) Da es zu jeder natürlichen Zahl  $m$  eine natürliche Zahl  $n$  mit  $L\left(\frac{1}{n}\right) = m$  gibt, sind alle Lösungen für Perioden möglich. Dies belegen gleich mehrere Beispiele; denn es gilt bekanntlich:

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}, \quad \frac{1}{33} = 0,\overline{03}, \quad \frac{1}{333} = 0,\overline{003}, \dots, \text{ allgemein}$$

$$L\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^m 3 \cdot 10^{i-1}}\right) = m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

(Malte Meyn). Daraus folgt sofort

$$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}, \quad \frac{1}{99} = 0,\overline{01}, \quad \frac{1}{999} = 0,\overline{001}, \dots, \text{ allgemein}$$

$$L\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^m 9 \cdot 10^{i-1}}\right) = m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

(Laura Biroth und Lennart Adam) und auch

$$\frac{1}{1} = 0,\overline{9}, \quad \frac{1}{11} = 0,\overline{09}, \quad \frac{1}{111} = 0,\overline{009}, \dots, \text{ allgemein}$$

$$L\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^m 1 \cdot 10^{i-1}}\right) = m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

wobei der Fall  $m = 1$  außer Acht bleiben kann (Alexey Tyukin).

Ob es möglich ist, zu jeder natürlichen Zahl  $m$  auch eine Primzahl  $p$  zu finden, so dass  $L\left(\frac{1}{p}\right) = m$  ist, wurde unseres Wissens bisher weder bewiesen noch widerlegt. Bei Lennart Adam, Florian Schweiger und Alexey Tyukin finden sich Ansätze zur Lösung dieses Problems. Dabei stellt Florian Schweiger insbesondere Beziehungen zwischen  $L\left(\frac{1}{n}\right)$  und  $L\left(\frac{1}{p}\right)$  für Primfaktoren  $p$  von  $n$  her – mehr darüber in Heft 95.

- c) Laura Biroth hat unter den Primzahlen unterhalb 20 die Zahlen 7, 17 und 19 als solche mit maximaler Periodenlänge ihres Kehrwertes ausgemacht. Im Bereich bis 100 gibt es neun solcher Primzahlen, nämlich 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61 und 97, wie Florian Schweiger mit einem Visual-Basic-Programm errechnet hat. Bis 1 000 hat er so 60 dieser Primzahlen und bis 10 000 insgesamt 467 festgestellt.
- d) Setzt man die in c) gefundenen Anzahlen von Primzahlen von maximaler Periodenlänge ihrer Kehrwerte ins Verhältnis zur Zahl aller Primzahlen in den jeweiligen Zahlbereichen, so erhält man zum Beispiel für den Bereich bis 1 000 den Wert  $\frac{60}{168} \approx 0,36$  und für den Bereich bis 10 000 den Wert  $\frac{467}{1229} \approx 0,38$ .

Dies bestätigt die Vermutung, dass dieser Anteil generell zwischen 0,35 und 0,40 liegt. Sollte dies bewiesen werden können, würde daraus folgen, dass es unendlich viele Primzahlen mit maximaler Periodenlänge gibt.

## Mathematik-Wettbewerb Rheinland-Pfalz Lösungen der 2.Runde 2008

### Aufgabe 1

Bestimme alle Paare  $(x, y)$  ganzer Zahlen, die Lösung der Gleichung  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  sind.

*Hinweis:* Es genügt nicht, nur die Zahlenpaare anzugeben, es muss auch gezeigt werden, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

*Lösung:*

Lösungen der Gleichung kann es nur in  $\mathbb{Z} \setminus \{0, 3\}$  geben. Also kann man  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  mit dem Hauptnenner  $3xy$  multiplizieren, nach  $x$  auflösen und  $x$  als gemischten Bruch (Polynomdivision) schreiben:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \iff 3y + 3x = xy \iff 3y = x(y - 3) \iff x = \frac{3y}{y - 3} = 3 + \frac{9}{y - 3}.$$

$x$  ist genau dann ganzzahlig, wenn  $(y - 3)$  ein Teiler von 9 ist, also  $(y - 3) \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$  und somit  $y \in \{-6, 0, 2, 4, 6, 12\}$ . Die Lösung  $y = 0$  entfällt, da  $y$  als Nenner nicht vorkommen kann.

Zu  $y \in \{-6, 2, 4, 6, 12\}$  berechnet man  $x \in \{2, -6, 12, 6, 4\}$  in der entsprechenden Reihenfolge und erhält die Lösungspaare  $(2, -6)$ ,  $(-6, 2)$ ,  $(12, 4)$ ,  $(6, 6)$  und  $(4, 12)$ .

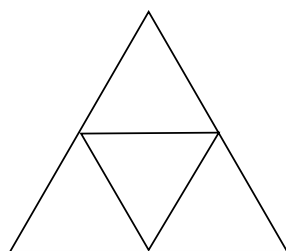
### Aufgabe 2

Ein gleichseitiges Dreieck soll in  $n$  gleichseitige Teildreiecke zerschnitten werden, die nicht alle gleich groß sein müssen.

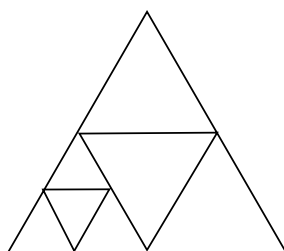
- Zeichne je eine solche Zerlegung für  $n = 4$ ,  $n = 7$  und  $n = 10$ .
- Untersuche die Fälle  $n = 5$  und  $n = 6$ .
- Bestimme alle Anzahlen  $n$ , für die eine solche Zerlegung möglich ist.

Lösung:

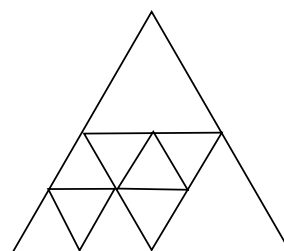
a)



$n = 4$

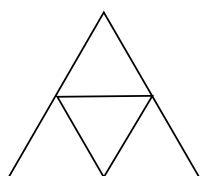


$n = 7$

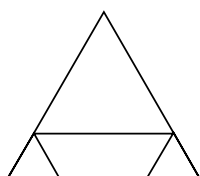


$n = 10$

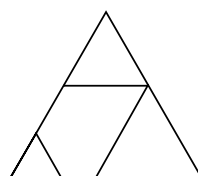
- b) Für  $n = 5$  ist keine solche Zerlegung möglich: Angenommen, es gibt eine Zerlegung in fünf gleichseitige Teildreiecke. Dann muss man an jeder Ecke des Ausgangsdreiecks ein Teildreieck abschneiden. Für die Form der Restfläche sind vier Fälle möglich:



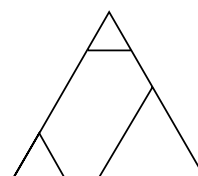
gleichseitiges  
Dreieck



achsensymmetrisches  
Trapez



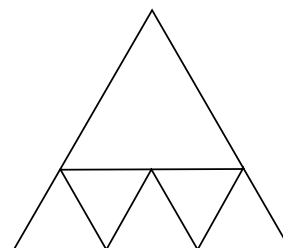
Fünfeck



Sechseck

In keinem der vier Fälle ist eine Zerlegung der Restfläche in zwei gleichseitige Dreiecke möglich.

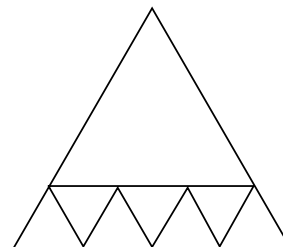
$n = 6$ : Hier ist wieder eine Zerlegung möglich. Schneidet man ein Dreieck in einer Ecke so ab, dass das verbliebene Trapez Parallelen hat, die sich wie  $2 : 3$  verhalten, so lässt sich das Trapez in fünf gleichseitige Dreiecke zerlegen.



- c)  $n = 1$  entfällt, da das Dreieck laut Aufgabenstellung zerschnitten werden soll.

Wenn man nun an einer Ecke ein gleichseitiges Dreieck abschneidet, muss man auch an den beiden anderen Ecken eines abschneiden und es bleibt eine Restfläche. Daraus folgt, dass es weder für  $n = 2$  noch für  $n = 3$  eine Zerlegung geben kann.

Analog zu  $n = 6$  gibt es eine Zerlegung für  $n = 8$ , indem man ein Dreieck in einer Ecke so abschneidet, dass die Parallelen des Resttrapezes im Verhältnis  $3 : 4$  stehen (siehe nebenstehende Abbildung).



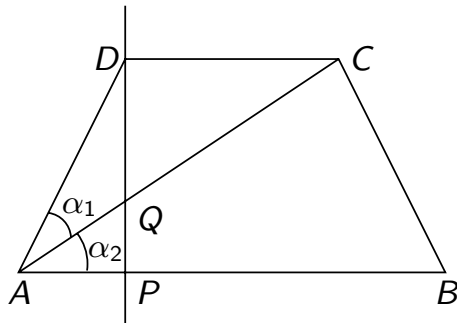
Aus den Zerlegungen für  $n = 5$ ,  $n = 7$  und  $n = 8$  lassen sich Zerlegungen für alle  $n > 8$  finden: Ein gleichseitiges Teildreieck einer bereits gefundenen Zerlegung lässt sich immer in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen, dabei

nimmt die Anzahl der Teildreiecke um drei zu. Da sich jedes  $n > 8$  um ein Vielfaches von 3 von  $n = 6$ ,  $n = 7$  oder  $n = 8$  unterscheidet, gibt es für jedes  $n > 8$  eine Zerlegung.

Zusammengefasst ergibt sich:

Ein gleichseitiges Dreieck lässt sich genau dann in  $n$  Teildreiecke zerlegen, wenn  $n = 4$  oder  $n > 5$ .

### Aufgabe 3



Gegeben sei ein gleichseitiges Trapez  $ABCD$  mit  $|\overline{AB}| > |\overline{CD}|$ .

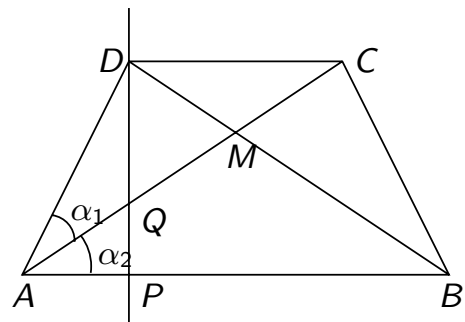
Die Senkrechte zur Seite  $\overline{AB}$  durch  $D$  schneide die Seite  $\overline{AB}$  in  $P$  und die Diagonale  $\overline{AC}$  in  $Q$ . Die Diagonale  $\overline{AC}$  teilt den Winkel in  $A$  in  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  (siehe Abbildung).

- Beweise: Wenn  $\alpha_1 = 2\alpha_2$ , dann ist  $\overline{QC}$  doppelt so lang wie  $\overline{AD}$ .
- Beweise die Umkehrung: Wenn  $|\overline{QC}| = 2|\overline{AD}|$ , dann ist  $\alpha_1$  doppelt so groß wie  $\alpha_2$ .

*Lösung:*

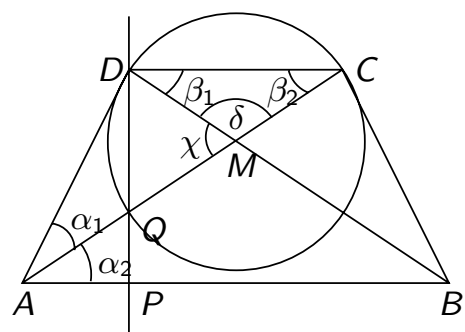
Zeichne die zweite Diagonale des Trapezes, der Diagonalschnittpunkt sei  $M$ .

- Da das Trapez achsensymmetrisch ist und  $\angle QDC = 90^\circ$ , liegen  $C$ ,  $D$  und  $Q$  auf dem Kreis um  $M$  mit Radius  $r = |\overline{MC}|$ .



Weiterhin gilt:

- $\beta_2 = \alpha_2$  (Wechselwinkel)
- $\beta_1 = \beta_2$  (gleichschenkliges Dreieck  $\triangle CDM$  mit Basis  $\overline{CD}$ )
- $\delta = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2$  (Winkelsumme im Dreieck)
- $\chi = 180^\circ - \delta$  (Nebenwinkel)
- $\delta = 180^\circ - 2\beta_2$  (mit (3) und (4))
- $\chi = 180^\circ - \delta = 2\beta_2$  (mit (5) und (6))



- $\alpha_1 = 2\alpha_2$   
 $\implies \alpha_1 = 2\beta_2 = \chi$  (mit (2) und (7))  
 $\implies$  das Dreieck  $\triangle AMD$  ist gleichschenkl. mit Basis  $\overline{AM}$

$$\Rightarrow |\overline{AD}| = |\overline{MD}| = |\overline{MC}| = \frac{1}{2}|\overline{QC}| \text{ (mit (1))}$$

$$\Rightarrow \overline{QC} \text{ ist doppelt so lang wie } \overline{AD}.$$

$$\text{b) } |\overline{AD}| = \frac{1}{2}|\overline{QC}|$$

$$\Rightarrow |\overline{AD}| = |\overline{MD}| \text{ (mit (1))}$$

$$\Rightarrow \text{das Dreieck } \triangle AMD \text{ ist gleichschenkelig mit Basis } \overline{AM}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \chi$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2 \text{ (mit (2) und (7))}$$

q.e.d.

## Aufgabe 4

„Alles was ich mitbekommen habe:“, sagte der Kommissar zu seinem Assistenten, „Der Ganove wählte eine 5-stellige Telefonnummer. Wie ich den Tastenlängen entnehmen konnte, enthielt diese Nummer nur zwei verschiedene Ziffern, zum Beispiel so etwas wie 51151.“ – „Na prima“, meinte der Assistent, „so viele Telefonnummern von dieser Sorte gibt es ja nicht, die können wir systematisch alle durchprobieren.“

- Wie viele 5-stellige Zahlen kann man aus genau zwei verschiedenen Ziffern bilden, wenn an der ersten Stelle keine Null stehen darf?
- Beantworte die Frage a) für 6-stellige und für 7-stellige Zahlen.
- Beantworte die Frage a) für eine beliebige Stellenzahl  $n$ .

*Lösung:*

Vorbemerkung: Die beiden Ziffern werden mit  $a$  und  $b$  bezeichnet. Dabei soll  $a$  die Ziffer sein, die an erster Stelle steht, das heißt  $a \neq 0$ . Für  $a$  gibt es also neun Möglichkeiten. Für  $b$  gibt es, wenn  $a$  festgelegt ist,  $10 - 1 = 9$  Möglichkeiten, denn  $b \neq a$ . Insgesamt sind es  $9 \cdot 9 = 81$  Ziffernkombinationen für jede der Buchstabenkombinationen, zum Beispiel  $aaabb$ .

Man löst zunächst c) und schließt dann auf a) und b):

- Wir betrachten die zulässigen Kombinationen (Wörter von  $n$  Buchstaben):

|     |     |     |         |          |        |
|-----|-----|-----|---------|----------|--------|
| $a$ | $*$ | $*$ | $\dots$ | $*$      | $*$    |
| 1.  | 2.  | 3.  |         | $(n-1).$ | $n.$   |
|     |     |     |         |          | Stelle |

An erster Stelle kann nur  $a$  stehen, an allen anderen Stellen  $a$  oder  $b$ .

Es gibt  $2^{n-1}$  solche Wörter aus  $a$  und  $b$ . Dazu gehört aber auch das unzulässige Wort aus  $n$  Buchstaben  $a$ . Also gibt es  $(2^{n-1} - 1)$   $n$ -stellige Wörter aus den Buchstaben  $a$  und  $b$ , die mit  $a$  beginnen und mindestens ein  $b$  enthalten. Mit der Vorbemerkung erhält man  $81 \cdot (2^{n-1} - 1)$  mögliche  $n$ -stellige Zahlen mit den geforderten Eigenschaften.

- und b) Man setzt die Werte für  $n$  ein und erhält:

$$n = 5: \quad 81 \cdot (2^{5-1} - 1) = 1215 \text{ mögliche Ziffernkombinationen}$$

$$n = 6: \quad 81 \cdot (2^{6-1} - 1) = 2511 \text{ mögliche Ziffernkombinationen}$$

$$n = 7: \quad 81 \cdot (2^{7-1} - 1) = 5103 \text{ mögliche Ziffernkombinationen}$$

# Mathematik am Nil

## Mathematik baut Brücken 2008

von Felix Liebrich

Vom 2. bis zum 9. März dieses Jahres fand in Kairo bereits zum zweiten Mal die Veranstaltung „Mathematik baut Brücken“ statt, eine Art Austausch mit mathematischem Hintergrund, der jedoch weit mehr als bloßes fachliches Wissen vermitteln möchte.

18 Teilnehmer der 3. Runde des Landeswettbewerbs Mathematik Rheinland-Pfalz hatten Glück: Sie waren schnell genug, um sich erfolgreich für die geplante Fahrt nach Kairo – den krönenden Bonus – anzumelden, die von Wettbewerbsleiter Herr May zusammen mit den dortigen Deutschen Schulen, der DSB und der DEO, organisiert wurde. Ägypten – nicht die schlechteste Kulisse für eine mathematisch orientierte Exkursion.



Trotz der Komplikationen beim Hinflug erwies sich die Veranstaltung im Ganzen als sehr gut durchgeplant; an vier Tagen wurde mathematisch-physikalisches Programm an der German University of Cairo geboten, die übrigen drei Tage dienten dem Kontakte knüpfen, dem „Brücken bauen“, und abwechslungsreicher Freizeitgestaltung.

Fachlich gesehen mutete man uns einiges zu; das übergeordnete Thema Chaostheorie wurde aus mehreren Blickwinkeln betrachtet: Fraktale, Nichtlinearität und sogar praktische Anwendungen, wie die physikalischen Vorgänge bei der Dünenbildung. Alle Referenten besaßen fundiertes Fachwissen, doch es bereitete ihnen ab und an Schwierigkeiten, komplizierte Sachverhalte verständlich zu erläutern.

Die Unterbringung in ägyptischen Gastfamilien, der enge Kontakt mit den Schülern der Deutschen Schulen, die allabendlichen Unternehmungen abseits des touristischen Kairos, das Kennenlernen der Stadt und der Menschen... Überall war man offen, überall gastfreundlich. Selbst im sozialen Brennpunkt Dar el Salam, den wir besuchten, war man uns Europäern gegenüber nicht feindselig eingestellt. Und nicht zuletzt das Essen bleibt wohl vielen angenehm im Gedächtnis.

Man kann die Veranstaltung wohl getrost als vollen Erfolg bezeichnen. Der einzige Wermutstropfen ist, dass sich diese Chance den Teilnehmern nur alle zwei Jahre bietet. Umso glücklicher kann man sich schätzen, dabei gewesen zu sein.

# Wahrscheinlichkeit

## Von der Wirklichkeit zur Mathematik

von Wolfgang J. Bühler

*Der Zufall ist ein Rätsel,  
welches das Schicksal dem Menschen aufgibt.*  
Friedrich Hebbel\*

### Hundert Babys

Als ich unserer vierjährigen Louise sagte, dass ihr neues Geschwisterchen sehr wahrscheinlich ein Mädchen würde, wollte sie wissen, was „sehr wahrscheinlich“ heißt. Auf meine Erklärung „Wenn wir 100 Babys bekämen, wären ca. 95 Mädchen dabei“ hin schaute sie mich ungläubig an.

(Zitat aus der Mail, die mir ein werdender Vater schickte.)

Auch wenn Louise diese Aussage nicht verstehen konnte, hat sie eine sinnvolle Bedeutung: Der Frauenarzt hat die Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen mit 95 % angegeben, weil er bisher in etwa 95 von 100 Fällen mit ähnlich gearteter Information (Ultraschallbilder, Laborwerte, Befinden der werdenden Mutter etc.) erlebt hat, dass das Kind weiblich war. Dies ist die *Häufigkeitsinterpretation* der Wahrscheinlichkeit. Sie geht von der Beobachtung aus, dass sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei sehr häufiger Wiederholung eines Experiments oder einer Beobachtung (unabhängig und unter gleichen Bedingungen) um einen Wert zu stabilisieren (gegen ihn zu konvergieren?) scheint. Man ist dann gewillt, diesen Wert die zugehörige Wahrscheinlichkeit zu nennen.

So führt die Beobachtung des Geschlechts sehr vieler Neugeborener (etwa aller in einer deutschen Stadt innerhalb längerer Zeit geborener Kinder) zu der Erfahrung, dass 51,4 % der Babys männlich sind. Damit sehen wir 0,514 als die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt an.

### Eine Wette

Chiara und Monika spielen Tischtennis. Ihre Freunde Carlo und Michael wollen eine Wette auf den Ausgang des Spiels abschließen. Sie einigen sich darauf, dass 3 : 5 eine faire Wette wäre, das heißt Carlo setzt 3 € und Michael 5 €. Gewinnt Chiara, so erhält Carlo die 8 €, sonst Michael. Das bedeutet, dass die beiden sich auf die *subjektive Wahrscheinlichkeit*  $\frac{3}{8}$  für Chiaras Sieg festgelegt haben.

---

\* Christian Friedrich Hebbel, \*18.03.1813 in Wesselburen, †13.12.1863 in Wien; Dramatiker und Lyriker

Mit diesem Wert für die Wahrscheinlichkeit erwartet nämlich Carlo im Mittel  $\frac{3}{8} \cdot 8 \text{ €} + \frac{5}{8} \cdot 0 \text{ €} = 3 \text{ €}$ , also gerade seinen Einsatz, und das Entsprechende gilt für Michael:  $\frac{3}{8} \cdot 0 \text{ €} + \frac{5}{8} \cdot 8 \text{ €} = 5 \text{ €}$ .

## Symmetrie

Bei einem sorgfältig gearbeiteten Spielwürfel gibt es keinen Grund zu der Annahme, dass nicht jeder Augenzahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit geworfen werde. Wir setzen deshalb für jede Augenzahl die Wahrscheinlichkeit gleich  $\frac{1}{6}$ . Ebenso verlassen wir uns beim Zahlenlotto darauf, dass jeder der insgesamt  $N = \binom{49}{6} \cdot 43 \cdot 10$  möglichen Ausgänge der Ausspielungen (6 Richtige, eine Zusatzzahl und die Superzahl) die gleiche Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{N}$  hat und somit zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in der Gewinnklasse 2 (6 Richtige ohne die Superzahl) gleich  $\frac{43 \cdot 9}{N} \approx 8 \cdot 10^{-8}$  ist, da alle 43 Werte für die Zusatzzahl und neun der zehn Werte für die Superzahl zu diesem Ereignis beitragen.

Allgemein gilt für Fälle, in denen wir uns auf solche Symmetrieüberlegungen berufen dürfen: Gibt es  $N$  mögliche Fälle, deren Wahrscheinlichkeit wir als gleich ansehen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  gleich dem Quotienten aus der „Anzahl der (für  $A$ ) günstigen Fälle“ und der „Anzahl der möglichen Fälle“. Diese Form der „Definition“ der Wahrscheinlichkeit geht auf Pierre Simon Laplace\*\* zurück.

Zeichnen wir vor einem Gewitter auf der Straße einen Kreis  $K$  vom Radius  $R$  und beobachten, auf welche Stelle des Kreises der erste Regentropfen fällt, so können wir in ähnlicher Weise argumentieren, dass kein Punkt des Kreises vor anderen Punkten ausgezeichnet ist. Da es aber mehr als endlich viele Punkte im Kreis gibt, müssen wir unsere Überlegung etwas abändern. Wir kommen dann in natürlicher Weise dazu, einem Teilbereich des Kreises eine Wahrscheinlichkeit proportional zu seiner Fläche zuzuordnen. Ein Viertelkreis hätte demnach die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  und ein kleinerer Kreis vom Radius  $r$ , der ganz in  $K$  liegt, die Wahrscheinlichkeit  $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$ .

## Kolmogorov

Die oben beschriebenen Ansätze zur Definition des Begriffs *Wahrscheinlichkeit* sind offensichtlich nicht in jeder realen Situation anwendbar und führen teilweise auch zu logischen Problemen. Sie haben jedoch eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten gemeinsam:

- (1) Jedem Ereignis  $A$  wird als Wahrscheinlichkeit ein Wert  $P(A)$  zugeordnet, der zwischen 0 und 1 liegt, wobei einem „unmöglichen Ereignis“ (das nie

---

\*\* Pierre-Simon (Marquis de) Laplace, \*28.03.1749 in Beaumont-en-Auge in der Normandie, †05.03.1827 in Paris; beschäftigte sich besonders mit der Wahrscheinlichkeitstheorie und Differentialgleichungen.

eintritt) der Wert 0 und einem „sicheren Ereignis“ (das zuverlässig eintritt) der Wert 1 entspricht.

- (2) Können zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  nie gleichzeitig auftreten und besteht das Ereignis  $C$  darin, dass  $A$  oder  $B$  eintritt, so gilt  $P(C) = P(A) + P(B)$ .

Ausgehend davon hat Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov\*\*\* den Begriff der Wahrscheinlichkeit als mathematischen Begriff abstrakt axiomatisch definiert. Dazu betrachtet er eine nichtleere Menge  $\Omega$  als die Gesamtheit der möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments (bzw. einer Beobachtung). Ereignisse sind dann Teilmengen von  $\Omega$ . Jeder Menge  $A$  aus dem System  $\mathfrak{A}$  dieser Teilmengen wird ein Wahrscheinlichkeitswert  $P(A)$  zugeordnet und zwar so, dass gelten:

- (1)  $P(\emptyset) = 0$  und  $P(\Omega) = 1$ .  
(2') Ist  $A_1, A_2, A_3, \dots$  eine Folge von Ereignissen und gilt  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , so ist  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

Die hier geforderte Bedingung (2') heißt  $\sigma$ -Additivität und ist stärker als die in (2) beobachtete Additivität. In der geometrischen Situation, die wir im Abschnitt Symmetrie betrachtet haben, ist sie erfüllt und erlaubt uns zum Beispiel die Fläche (und damit die Wahrscheinlichkeit) eines Bereichs, den wir als Vereinigung von abzählbar vielen Rechtecken darstellen können, zu berechnen, indem wir deren Flächen summieren.

Ist die Menge  $\Omega$  der möglichen Ausgänge eines betrachteten Experiments „groß“, so lässt sich auf dem System aller Teilmengen von  $\Omega$  eine Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P$  mit den Eigenschaften (1) und (2') nicht definieren (der mathematische Beweis dieser Tatsache ist nicht einfach). Deshalb beschränkt Kolmogorov die Betrachtung auf ein System  $\mathfrak{A}$  mit Eigenschaften, die insbesondere gewährleisten, dass die Forderungen (1) und (2') sinnvoll erfüllt werden können, das heißt dass  $\emptyset \in \mathfrak{A}$ ,  $\Omega \in \mathfrak{A}$  und dass  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathfrak{A}$ , wenn  $A_1, A_2, A_3, \dots$  zu  $\mathfrak{A}$  gehören. Ein solches System nennt man  $\sigma$ -Algebra. In allen für die Anwendung relevanten Fällen kann man eine solche  $\sigma$ -Algebra angeben oder konstruieren, die alle „interessierenden“ Mengen als Ereignisse enthält.

Damit ist ein *Wahrscheinlichkeitsraum* definiert als ein Tripel  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , in dem das nichtleere  $\Omega$  als Menge der möglichen Beobachtungen, die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  als System der Ereignisse und die auf  $\mathfrak{A}$  definierte Funktion  $P$  mit den Eigenschaften (1) und (2') als Wahrscheinlichkeit auftreten.

Inwiefern ein solcher Wahrscheinlichkeitsraum geeignet ist als Modell für eine reale Situation, in welcher der Zufall eine Rolle spielt, muss im Einzelfall beurteilt werden. Methoden für eine solche Beurteilung stellt uns die Mathematische Statistik zur Verfügung.

---

\*\*\* Mehr über Kolmogorov könnt Ihr im Artikel „Wer war's?“ von Wolfgang J. Bühler auf Seite 13 in diesem Heft nachlesen.

# Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 92

## **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

**Kl. 5:** Arne Broszukat 11, Maximilian Kiefer 9;

**Kl. 6:** Laura Tabea Galkowski 18, Sebastian Ludwig 23, Kareem Ramadan 7, Samuel Rischke 7, Julia Scherner 27;

**Kl. 7:** Lara Bergjohann 15, Eike Broszukat 10, Jochen Dahlem 10, Chantal Graversen 26, Dominik Meier 26, Andreas Pitsch 48, Sören Rathgeber 29, Max Rose 29, Freya Roth 27;

**Kl. 8:** Maximilian Haist 10, Kevin Schmitt 64;

**Kl. 9:** Philipp Mayer 28;

**Kl. 11:** Max de Zoeten 10.

## **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

**Kl. 5:** Luisa Kirsch 6, Stefanie Schmid 6;

**Kl. 6:** Jana Ballweber 13, Vincent Brugger 10;

**Kl. 10:** Lena Baum 30;

**Kl. 11:** Felix Liebrich 40, Martin Reinhardt 33.

## **Alzey, Gymnasium am Römerkastell:**

Anna Katharina Lange 27; **Kl. 9:** Alexander Gerharz 22;

**Kl. 11:** Lennart Adam 44;

**Kl. 12:** Christian Behrens 35, Martin Alexander Lange 51.

## **Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber):**

**Kl. 5:** Friederike Kienle 2; **Kl. 6:** Janina Bast 19, Anna Gast 7;

**Kl. 8:** Roberto Rossi 5, Alexander Schneider 4, David Wander 6;

**Kl. 10:** Jonathan Bohlen 19, Carl Degitz 21; **Kl. 11:** Anselm Schäfer 28.

**Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 13:** Laura Biroth 44.

## **Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:**

**Kl. 7:** Frank Schindler 63.

## **Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:**

**Kl. 7:** Christian Geiger 9, Florian Salamat 18, Alihan Tax 2.

## **Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**

**Kl. 6:** Julia Hahn 4; **Kl. 8:** Paulina Hauser 22.

**Erlangen, Ohm-Gymnasium: Kl. 10:** Malte Meyn 48.

## **Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik:**

**Kl. 7:** Vera Hartmann 12, Marie-Sophie Mahr 8, Janina Müller 22, Jana Scholz 15.

**Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):**

**Kl. 5:** Philipp Arndt 13, Mara Koch 10, Joachim Roth 19, Henrik Stenger 11;

**Kl. 6:** Thorsten Roth 38;

**Kl. 9:** Kai Roth 18.

**Hamburg, Gymnasium Hochrad: Kl. 9:** Connor Röhricht 53.

**Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betreuender Lehrer: Christoph Straub):**

**Kl. 7:** Shaima'a Ahmed Doma 23, Belkais Khaled, Aya Mohamed Mostafa 1;

**Kl. 10:** Alia'a Ahmed Doma 41;

**Kl. 11:** Noha Abdel Wahab 8, Ghada Hisham 7, Hayat Selim 18;

**Kl. 12:** Alia'a el Bolock 8.

**Kelkheim, Eichendorffschule:**

**Kl. 5:** Argawan Dashti 2, Thomas Rothenbächer 18, Niklas Staiger 6, Maike Stanischewski 36, Timur Can Zorlu 5;

**Kl. 6:** Alexander Erb 9, Maurice Remmers 2.

**Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 10:** Michaela Beck 4.

**Ludwigshafen, Theodor-Heuss-Gymnasium:**

**Kl. 9:** Stephan Böhmer-Horländer 26.

**Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis):**

**Kl. 5:** Jans Victor 15; **Kl. 6:** Niklas Braun 9; **Kl. 7:** Niklas Schliesmeier 16.

**Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 12:** Alexey Tyukin 46.

**Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 5:** Magdalena Winkelvoß 25.

**Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Wittekindt):**

**Kl. 5:** Leonhard Wagner 13;

**Kl. 8:** Steffen Hettler 13, Tim Lutz 24, Tobias Soldan 13;

**Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 10:** Florian Schweiger 51.

**Mössingen, Quenstedt-Gymnasium: Kl. 8:** Jack Rodin 16.

**Neuss, Gymnasium Marienberg (betr. Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**

**Kl. 7:** Sophia Alex 15, Kendra Belthle 11, Ariane Bialas 7, Carolin Bialecki 4, Anna Braun 7, Viviane Bockerhoff 16, Sarah Doll 4, Eva Drews 4, Tabea Fausten 8, Leoni Fechter 3, Vanessa Funkel 8, Nina Gerlach 11, Carolin Heimes 7, Clara Jenker 8, Marika Kaules 11, Olivia Langwald 5, Colette Perillieux 12, Amelie Steentjes 7, Nicole Vergin 8;

**Kl. 9:** Vivien Kohlhaas 32; **Kl. 10:** Madeline Kohlhaas 27.

**Neuss, Quirinus-Gymnasium:**

**Kl. 10:** Wladimir Fust 4, Fynn Niclas Krause, Tristan Langenberg 8, Malte Sanders.

**Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium:**

**Kl. 6:** Ruwen Bergen 10, Tom Klein 5, Fabian Mertes 5, Janina Vogel 10;

**Kl. 9:** Celine Didierlaurent 15, Bettina Wiebe 15.

**Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):**

**Kl. 5:** Georg Auburger 9, Andrea Behrent 31, Lutz Bischoff 18, Nils Blaschke 15, Michaela Czernin 12, Paul Döbert 4, Yasmina Gab 1, Michael Grunwald 13, Anna-Lena Hock 15, Jannik Hoffmann 15, Anna-Maria Klaas 5, Lucas Köhler 14, Heiko Kötzsche 25, Selma Mezger 3, Martin Müller 10, Thi Thao Nguyen 3, Mariam Rahi 8, Felix Sobotta 8, Richard von Mutius 5, Leonie Wietfeld 3;

**Kl. 6:** Alix Hieronymi 5, Viktoria Kunz 22, Miriam Lindert 5, Jeanne Merswolken 23, Camilla Metz 14, Anna Michel 3, Hannah Nagel 6, Julia Yeo-Peters 23;

**Kl. 7:** Tobias Braun 32, Valentin Kuhn 35, Agnes Valenti 17, Daniel Worrington Pozo 6;

**Kl. 8:** Aline Endreß 20;

**Kl. 10:** Bianca Bellchambers 19, Vita Bellchambers 13, Markus Gierenstein 8, Larissa Habel 10, Kilian Valenti 9;

**Kl. 11:** Valentin Walther 16, Annkatrin Weber 39;

**Kl. 12:** Stefan Albert 25.

**Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

**Kl. 8:** Simone Marquard 8.

**Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner):**

**Kl. 6:** Caroline Alfter 4, Eric Amann 8, David Anders 11, Frederik Bartl 5, Alexander Knoop 11, Matthia Loevenich 4, Max Müthrich 4, Florian Peter 10, Sören Rauert 10, Jonathan Rochert 2, Alexandra Schwinges 4, Rebecca Simo 4, Eva Weber 4, Charlotte Wulff 6;

**Kl. 8:** David Feiler 63.

**Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 6:** Luis Ressel 27.

**Stendal, Winckelmann-Gymnasium:**

**Kl. 9:** Alexander Rettkowski 29.

**Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 7:** Dorothea Winkelvoß 8.

**Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Kuntz):**

N. N. 3;

**Kl. 5:** Markus Baldermann 17, Judith Geib 14, Anna Lena Meier 19, Lena Mohr 3, Elina Porz 16;

**Kl. 6:** Lorena Ritzmann 22, Paul Schädlich 15;

**Kl. 8:** Joel Jung 4.

**ohne Angaben** Christopher Ölmüller 25.

## Inhalt

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Hartwig Fuchs: Pappos und die Mittelwerte . . . . .                                                | 3  |
| Hartwig Fuchs: Hättest Du es gewusst? – Was ist das Basler Problem?                                | 8  |
| Martin Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik                                | 12 |
| Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion . . . . .                                               | 13 |
| Wolfgang J. Bühler: Wer war's? . . . . .                                                           | 13 |
| Hartwig Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen – Wie man das Differenzen-<br>Spiel gewinnt . . . . . | 15 |
| Die Seiten für den Computer-Fan . . . . .                                                          | 16 |
| Mathis machen mathematische Entdeckungen . . . . .                                                 | 17 |
| Die Redaktion . . . . .                                                                            | 18 |
| Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 93 . . . . .                                              | 19 |
| Neue Mathespielereien . . . . .                                                                    | 23 |
| Neue Aufgaben . . . . .                                                                            | 25 |
| Gelöste Aufgaben aus MONOID 93 . . . . .                                                           | 26 |
| Marcel Gruner, Juliane Gutjahr: Lösungsvielfalt zur Neuen Aufgabe 931                              | 31 |
| Wer forscht mit? . . . . .                                                                         | 35 |
| Mathematik-Wettbewerb Rheinland-Pfalz – Lösungen der 2.Runde 2008                                  | 37 |
| Felix Liebrich: Mathematik am Nil – Mathematik baut Brücken 2008 . .                               | 41 |
| Wolfgang J. Bühler: Wahrscheinlichkeit – Von der Wirklichkeit zur Ma-<br>thematik . . . . .        | 42 |
| Rubrik der Löser und Löserinnen . . . . .                                                          | 45 |

**Abonnementbestellungen** per Post oder über die Homepage.

Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

**Herausgeber:** Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,  
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,  
Gymnasium Oberursel.

**Anschrift:** Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,  
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz

**Telefon:** 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389

**E-Mail:** [monoid@mathematik.uni-mainz.de](mailto:monoid@mathematik.uni-mainz.de)

**Homepage:** <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>