Jahrgang 28 Heft 95 September 2008

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.
Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben**! Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den „Neuen Aufgaben“, „Wer forscht mit?“ und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.11.2008.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zu den verschiedenen Forschungsaufgaben, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Überraschungen beim Quadrieren
Eine Übung in vollständiger Induktion

von Hartwig Fuchs

Mathis rechnet die vier kleinsten der Quadrate 6^2, 66^2, 666^2, 6666^2,... aus und schreibt die Ergebnisse als Dezimalzahlen auf. Aus jeder dieser Dezimalzahlen bildet er zwei neue Zahlen mit gleicher Ziffernanzahl. Wenn er diese zwei neuen Zahlen addiert, dann erhält er jeweils eine Zahl aus lauter Ziffern 9:

$$\begin{aligned} 6^2 &= 3\,6 & 3+6 &= 9\\ 66^2 &= 43\,56 & 43+56 &= 99\\ 666^2 &= 443\,556 & 443+556 &= 999\\ 6666^2 &= 4443\,5556 & 4443+5556 &= 9999 \end{aligned}$$

(a) Mathis behauptet: Gleiches gilt auch für jede Quadratzahl $666\ldots6^2$ aus n Ziffern 6, $n = 5, 6, 7, \ldots$ — Trifft Matthis Behauptung zu?

(b) Mathis behauptet ferner: Es gibt weitere Folgen von quadrierten Dezimalzahlen z^2, $(zz)^2$, $(zzz)^2$, ..., z eine Ziffer, bei denen die gleiche Summeneigenschaft wie bei 6^2, 66^2, 666^2, ...auftritt. — Stimmt das?

In Mathis Behauptungen ist jeweils stillschweigend vorausgesetzt, dass die betrachteten Quadratzahlen eine gerade Anzahl von Ziffern besitzen. Das werden wir in (1) auch bestätigen.

Zunächst eine Abkürzung: Für einen Ziffernblock aus n Ziffern z schreiben wir $[z \mid n]$, $[z \mid 0]$ bedeutet, dass z nicht auftritt.

Beweis der Behauptung (a)

Als erstes zeigen wir – angeleitet von Mathis vier Beispielen –, dass gilt:

(1) $[6 \mid n]^2 = [4 \mid n-1]3[5 \mid n-1]6$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $[6 \mid n]^2$ hat $2n$ Ziffern.

Diese Behauptung gilt für $n = 1, 2, 3, 4$, zum Beispiel ist (siehe oben) $[6 \mid 4]^2 = [4 \mid 3]3[5 \mid 3]6$.
Von dieser Basis ausgehend bauen wir einen sogenannten Induktionsbeweis auf, bei dem vom Fall n auf den Fall $n+1$ geschlossen wird.
Die Idee ist einfach: Statt zum Beispiel 66666^2 direkt auszurechnen, gehen wir auf den bereits bekannten Fall 6666^2 zurück, denn es gilt:

$$66666^2 = (6666 \cdot 10 + 6)^2 = 6666^2 \cdot 100 + 120 \cdot 6666 + 36,$$

also abgekürzt $[6 \mid 5]^2 = [6 \mid 4]^2 \cdot 100 + 120 \cdot [6 \mid 4] + 36$. Hierbei können wir auf $[6 \mid 4]^2 = [4 \mid 3]3[5 \mid 3]6$ zurückgreifen.

Für $120 \cdot [6 \mid 4] = 120 \cdot 6666 = 799920 = 7[9 \mid 3]20$ haben wir noch keine allgemeine Formel, vermuten aber:

(2) $120 \cdot [6 \mid m] = 7[9 \mid m-1]20 \quad$ für $m \geq 4$.

Wir schließen induktiv:
Induktionsanfang: Für $m = 4$ ist die Behauptung (2) richtig.*
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei richtig für $m \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Für $m > 4$ schließen wir induktiv von m auf $m+1$:

$$\begin{aligned} 120 \cdot [6 \mid m+1] &= 120 \cdot ([6 \mid m] \cdot 10 + 6) \\ &= 120 \cdot [6 \mid m] \cdot 10 + 720 \\ &\stackrel{*}{=} 7[9 \mid m-1]200 + 720 = 7[9 \mid m]20, \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle $*$ die Induktionsvoraussetzung verwendet haben.

Damit können wir nun auch die Behauptung (1) induktiv beweisen:
Induktionsanfang: Für $n = 1, 2, 3, 4$ ist die Behauptung (1) richtig.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei richtig für $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Für $n > 4$ schließen wir induktiv von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned} [6 \mid n+1]^2 &= ([6 \mid n] \cdot 10 + 6)^2 = [6 \mid n]^2 \cdot 100 + 120 \cdot [6 \mid n] + 36 \\ &\stackrel{*}{=} [4 \mid n-1]3[5 \mid n-1]6 \cdot 100 + 7[9 \mid n-1]20 + 36 \\ &= \begin{array}{lr} & [4 \mid n-1]35[5 \mid n-2]600 \\ + & 7[9 \mid n-2]920 \\ + & 36 \\ \hline \end{array} \\ &= \quad [4 \mid n-1]43[5 \mid n-2]556 \\ &= [4 \mid n]3[5 \mid n]6, \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle $*$ wieder die Induktionsvoraussetzung verwendet haben.
Zerlegt man die Zahl in (1) in zwei zu addierende Ziffernblöcke, so gilt für diese $[4 \mid n-1]3 + [5 \mid n-1]6 = [9 \mid n-1]9 = [9 \mid n]$, also hat Mathis Recht mit seiner ersten Behauptung.

Zur Behauptung (b) zwei Beispiele

Für die Folgen 3^2, 33^2, 333^2, ... und 9^2, 99^2, 999^2, ... gilt

$$[3 \mid n]^2 = [1 \mid n-1]0[8 \mid n-1]9 \text{ und } [1 \mid n-1]0 + [8 \mid n-1]9 = [9 \mid n],$$

$$[9 \mid n]^2 = [9 \mid n-1]8[0 \mid n-1]1 \text{ und } [9 \mid n-1]8 + [0 \mid n-1]1 = [9 \mid n],$$

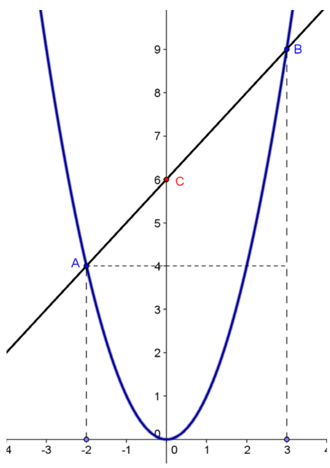
für $n = 1, 2, 3, \ldots$
Die Nachweise hierfür verlaufen ganz so wie bei (a), so dass wir sie unseren Lesern zur Übung überlassen.

---

* Sie ist auch für $n = 1, 2, 3$ richtig, aber da die Induktion der eigentlichen Behauptung (a) erst bei $m = 4$ beginnt, beginnen wir auch hier erst bei $m = 4$.

Hättest du es gewusst?
Wie wir mit Parabeln rechnen können
von Marcel Gruner

Jede Woche dienstags besuche ich Lioba, eine Freundin, die Psychologie studiert. Das ist allerdings nicht der Grund, weshalb ich sie aufsuche, denn mein Mathema-Tick ist wohl ohnehin nicht therapierbar. Nein, wir treffen uns, trinken Kaffee, unterhalten uns. Irgendwann kommt dann auch immer der Moment, da sie mich fragt: „Und was hast du mir heute mitgebracht?“ Damit ist aber kein materielles Geschenk gemeint. Vielmehr hat es sich eingebürgert, dass ich, wenn ich sie besuchen komme, ihr immer ein kleines mathematisches Kabinettstückchen mitbringe, meistens in Form eines mathematischen Zaubertricks. Und auch diesmal kommt die Frage. Aber heute habe ich keinen Zaubertrick dabei. „Weißt du noch, was eine Parabel ist?“, frage ich sie. – „Na klar, darüber schreibst du doch deine Examensarbeit. Das ist doch etwas wie $y = rx^2 + s$.“ Beides ist so weit korrekt. Zwar ist eine Parabel noch weit mehr als eine solche Gleichung oder der zu dieser gehörende Graph, aber für meine Zwecke heute reicht das völlig aus, wir wollen uns sogar auf die Normalparabel $y = x^2$ beschränken.
„Und heute zeige ich dir, wie wir damit rechnen können!“ Das Einzige, das wir benötigen – abgesehen von Bleistift, Papier und eventuell einem Lineal –, ist eine solche Normalparabel. Auf ein Blatt Papier zeichne ich eine in ein Koordinatensystem ein. Und schon kann das Rechnen beginnen.
„Welche Zahlen sollen wir denn multiplizieren?“ – „Wie wäre es mit $2 \cdot 3$?“, schlägt sie vor.
„Kein Problem. Dann müssen wir auf der Abszisse* des Koordinatensystems 2 ‚nach links‘ gehen, also zu -2, und den Parabelpunkt an dieser Stelle markieren.“ – „Wegen $(-2)^2 = 4$ ist das der Punkt mit den Koordinaten $(-2, 4)$“, ergänzt Lioba.



„Für den zweiten Faktor 3 müssen wir auf der Abszisse um 3 ‚nach rechts‘ gehen und wieder den zugehörigen Parabelpunkt markieren.“ – „Also $(3, 9)$.“
„Und nun kommt das Entscheidende. Diese beiden Punkte werden mit einer Geraden verbunden. Diese Gerade hat einen Schnittpunkt mit der Ordinaten. Diesen müssen wir nur noch ablesen und wir erhalten das Ergebnis der Multiplikation. Möchtest du das machen?“

* Abszisse, vom lateinischen abscissa = die abgeschnittene Linie, bezeichnet in kartesischen Koordinatensystemen die horizontale Achse (auch x-Achse), senkrecht auf ihr steht die Ordinate (auch y-Achse).

Natürlich macht Lioba dies: „In unserem Beispiel ist der Schnittpunkt $(0, 6)$, das Ergebnis also 6.“ – „Und genau das ist das richtige Ergebnis: $2 \cdot 3 = 6$“
Lioba fasst alles noch einmal zusammen: „Das heißt für die allgemeine Multiplikation $a \cdot b$ muss ich immer die folgenden ‚Rechenschritte‘ durchführen:

1. Markiere den Parabelpunkt an der Stelle $-a$.
2. Markiere den Parabelpunkt an der Stelle b.
3. Verbinde diese beiden Punkte mit einer Geraden.
4. Der Schnittpunkt mit der Ordinaten liefert das Produkt.“

„Genau!“ – „Aber warum ist das so?“
Mit dieser Frage hätte ich rechnen müssen! Denn immer wenn ich Lioba etwas gezeigt habe, möchte sie auch verstehen, warum es so geklappt hat. Manchmal ist sie da noch hartnäckiger als jeder Mathematiker. Aber es ist doch schön, wenn sich Nicht-Mathematiker so für diese Wissenschaft interessieren und begeistern, was ja leider nicht selbstverständlich ist. Aber zurück zur Frage: Warum können wir so multiplizieren?
„Die Faktoren identifizieren wir mit den Parabelpunkten $a \mapsto (-a, a^2)$ resp. $b \mapsto (b, b^2)$.
Durch zwei verschiedene Punkte ist immer eindeutig eine Gerade gegeben. Wir bestimmen nun diese Gerade $y = mx + c$. Erinnerst du dich noch, wie man die Steigung m berechnet?“ – „Über das Steigungsdreieck.“
Auf das Papier schreibe ich:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - a^2}{b - (-a)} = \frac{(b + a)(b - a)}{b + a} = b - a.$$

„Um den Ordinatenabschnitt c der Geraden zu bestimmen, müssen wir nur einen der beiden Parabelpunkte in die Geradengleichung einsetzen. Welchen sollen wir nehmen?“ – „Den zweiten: (b, b^2)“. Also schreibe ich $b^2 = y = mx + c = (b - a)b + c = b^2 - ab + c$. Wir addieren auf beiden Seiten $-b^2 + ab$ und erhalten dann

$$ab = c.$$

Nun machen wir uns noch mal die Bedeutung dieser Gleichung klar und überlegen gemeinsam: Die Variable c ist der Ordinatenabschnitt der Geraden, liefert also deren Schnittpunkt mit der Ordinaten, und hat den Wert des Produktes $a \cdot b$, welchen wir ja berechnen wollten. „Genau das wollten wir doch zeigen“, ruft Lioba begeistert auf, „q.e.d.“ – Sogar diese Abkürzung hat sie schon gelernt.
Wissbegierig, wie sie ist, fragt sie weiter: „Damit kann man also alle beliebigen reellen Zahlen multiplizieren? Wie geht das denn dann bei negativen Zahlen?“
„Der Beweis impliziert schon, dass es kein Problem ist, beliebige reelle Zahlen zu multiplizieren: Die Formeln stimmen auf jeden Fall, da wir weder ausgenutzt haben, dass a und b ganze Zahlen sind, noch dass diese positiv sind.

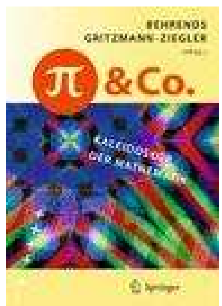
Bei negativen Zahlen müssen wir allerdings beim Zeichnen, also beim konkreten Rechnen mit der Parabel, dann beim ‚Nach-links-' resp. ‚Nach-rechts-Gehen' rückwärts gehen.
Lautet die Multiplikation also zum Beispiel $-2 \cdot 3$, so müssen wir -2 nach links gehen, das heißt 2 nach rechts. So kommen wir an die Stelle $+2$, was auch aus der Formel klar ist, weil $-(-2) = +2$ ist. Die Gerade muss dann entsprechend so lang gezeichnet werden, dass der Schnittpunkt mit der Ordinaten abgelesen werden kann."
„Toll! Ich kann also wirklich alle Zahlen multiplizieren!"
„Na ja, es gibt da doch noch ein ganz kleines Problem", gestehe ich kleinlaut, „nämlich die Multiplikationen der Form $-a \cdot a$ lassen sich nicht ausführen: In der Parabel wären die beiden erhaltenen Punkte identisch, so dass wir keine eindeutige Gerade ziehen können und im Beweis würden wir dann auch durch 0 dividieren!" – „Und das darf man nicht, ich weiß. Aber wer die Normalparabel hat und diese Multiplikation derart durchführen möchte,... na ja, darüber schweigt die Höflichkeit!"

Wir lachen.
„Ein Vorteil bei dieser graphischen Methode ist sicher, dass es schneller geht als langwierige schriftliche Rechnungen, besonders für größere Zahlen", sage ich als wir wieder ernst sind. „Aber das ist noch nicht alles, denn wir können mit der Parabel auch dividieren. In der Division liegt wohl auch der größte Vorteil, denn während die Meisten auch auf herkömmliche Weise noch sicher multiplizieren können, ist die Division schon fehleranfälliger – besonders wenn es sich auch noch um gebrochene Zahlen handelt. Doch mit der Parabel geht das nun ganz einfach und auch wieder deutlich schneller. Also ein guter Geheimtipp für alle Schüler, denn eine Parabelschablone hat wahrscheinlich jeder in seinem Mäppchen, so dass sich die Normalparabel recht exakt zeichnen lässt. Hast du denn eine Ahnung, wie die Division gehen könnte?"
Sie überlegt kurz: „Na klar, dazu müssen wir den Algorithmus nur rückwärts durchführen. Lautet die Aufgabe also $c : b$, dann müssen wir zunächst den Punkt $(0, c)$ auf der Ordinaten markieren, ebenso den zu b gehörenden Parabelpunkt, also (b, b^2). Diese beiden Punkte werden wieder mit der eindeutigen Geraden verbunden und diese soweit verlängert, dass ein weiterer Schnittpunkt mit der Parabel entsteht. Dieser hat die Koordinaten $(-a, a^2)$ und a ist der Quotient! Lautet die Aufgabe etwa $6 : 3$, müssen wir den Ordinatenpunkt $(0, 6)$ und den Parabelpunkt $(3, 9)$ markieren. Die Gerade durch diese Punkte schneidet dann die Parabel im Punkt $(-2, 4)$ und deshalb ist 2 das Ergebnis!"
Ich nicke zustimmend, sie lächelt verschmitzt und sagt: „In der nächsten Statistikklausur werde ich das mal praktisch ausprobieren!"

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Behrends/Gritzmann/Ziegler: „π und Co. Kaleidoskop der Mathematik“. Passend zum Jahr der Mathematik haben die drei Universitätsmathematiker Behrends, Gritzmann und Ziegler den Sammelband „π und Co. Kaleidoskop der Mathematik“ herausgegeben. Wie in einem echten Kaleidoskop spiegeln sich darin die verschiedensten Facetten der Mathematik.
Das Buch ist in verschiedene Bereiche untergliedert und umfasst unterschiedlichste inhaltliche Niveaustufen der Mathematik von leicht bis schwer verständlich. Durch diese Verschiedenartigkeit bietet es allerdings wirklich für jeden etwas: „von feuilletonistischen Einwürfen über fachliche Überblicke bis hin zu spezielleren mathematischen Texten“, wie es im Vorwort treffend beschrieben wird.
Von Überlegungen, wie Mathematik mehr gesellschaftliche Anerkennung erreichen kann, über die Klassiker wie Primzahlen, Unendlichkeit, Wahrscheinlichkeiten, Kryptologie und Optimierung spannt sich der Bogen bis zur Fermatschen Vermutung und der $P = NP$-Problematik. Daneben werden auch Bezüge der Mathematik zu Kunst, Architektur, Musik, Medizin und gerechten Wahlen aufgezeigt.
Der Sammelband „π und Co. Kaleidoskop der Mathematik“ ist zurecht Bestandteil des im Jahr der Mathematik erstmals verliehenen *Abiturpreises für besondere Leistungen in Mathematik* der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und macht beim Durchlesen Appetit auf mehr.
Fazit: Der Sammelband „π und Co. Kaleidoskop der Mathematik“ ist kein Buch, dass man am Stück lesen wird. Obwohl darin keine neuen Beiträge veröffentlicht wurden, wird man durch die gelungene Zusammenstellung trotzdem immer wieder gerne danach greifen, um ein neues Kapitel anzugehen. Ob sich bei der Unterschiedlichkeit der mathematischen Niveaustufen eine eigene Anschaffung lohnt, muss jeder selbst entscheiden; es handelt sich aber auf jeden Fall um ein Werk, dass in keiner (Schul-)Bibliothek fehlen sollte.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Behrends, Ehrhard/Gritzmann, Peter/Ziegler, Günter M.: π und Co. Kaleidoskop der Mathematik; Springer, 2008, ISBN 978-3-540-77888-2, gebunden, 387 Seiten, 24,95€



Art des Buches:	Kaleidoskop der Mathematik
Mathematisches Niveau:	von leicht bis schwer verständlich
Altersempfehlung:	ab 15 Jahren

Ein Blick hinter die Kulissen
Die Würfelwette
von Hartwig Fuchs

Mathis wirft mehrmals einen Würfel und addiert die bei den Würfen auftretenden „Augenzahlen“. Das Würfeln ist beendet, wenn erstmals eine „Augensumme“ größer n, $n \geq 5$ eine fest vorgegebene Zahl, zum Beispiel $n = 21$, erreicht ist. Die Spieler wetten darauf, welche Augensumme zum Spielabbruch führt.

Mit welcher Zahl hat Mathis die größte Gewinnchance?

Lösung

Mathis muss eine der Augensummen $AS = n - 5, n - 4, \dots, n - 1, n$ erreicht haben, damit er die Möglichkeit hat, mit dem nächsten Wurf das Spiel zu beenden – bei Spielende ist nämlich $AS \geq n + 1$.

Durch welche Augenzahl des jeweils nächsten Wurfs das Spiel beendet und welche Augensumme dabei erreicht ist, entnimmt man folgender Tabelle:

Augensummen, bei denen die Beendigung des Spiels beim nächsten Wurf möglich ist	Augenzahlen des nächsten Wurfes, die zum Spielende führen	Augensummen, die beim Spielende möglich sind
$n - 5$	6	$n + 1$
$n - 4$	5, 6	$n + 1$, $n + 2$
$n - 3$	4, 5, 6	$n + 1$, $n + 2$, $n + 3$
$n - 2$	3, 4, 5, 6	$n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$
$n - 1$	2, 3, 4, 5, 6	$n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n + 5$
n	1, 2, 3, 4, 5, 6	$n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n + 5$, $n + 6$

Die Tabelle zeigt: Am häufigsten endet das Würfeln mit $AS = n + 1$ – man beachte, dass in jeder Zeile der Tabelle die möglichen Augensummen des letzten Wurfes mit jeweils der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten können.

Die größte Gewinnchance hat Mathis daher mit der Augensumme $AS = n + 1$, im Beispiel $n = 21$ also mit $AS = 22$.

Anhang: Noch einige Bemerkungen

von Marcel Gruner und Stefan Krause

Die Voraussetzung $n \geq 5$ war nötig, da für kleinere $n \in \mathbb{N}$ die Argumentation, so wie hier geführt, nicht ganz zutreffend ist.
Wird beispielsweise $n = 1$ gewählt, so würden jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ die Augenzahlen 2, 3, 4, 5 und 6 zum sofortigen Spielende führen. Bei der Aufgenzahl 1 ist ein weiterer Wurf nötig, der dann aber ebenfalls zum Abbruch führt. Nach diesem zweiten Wurf sind alle Augensummen von 2 bis 7 möglich, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Damit sind insgesamt die Augensummen 2, 3, 4, 5 und 6 alle „die wahrscheinlichsten", jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{36}$. Es ist also wieder $n + 1$ am wahrscheinlichsten, aber dieses Maximum ist nicht eindeutig, sondern es gibt fünf Augensummen mit dieser Wahrscheinlichkeit.
Ähnlich ist es für $n = 2$ (vier Augensummen), $n = 3$ (drei Augensummen) und $n = 4$ (zwei Augensummen). Erst ab $n = 5$ ist das Maximum eindeutig.

Die Wahrscheinlichkeiten $P(AS)$ für die verscheidenen Augensummen bei Spielende lassen sich konkret berechenen. Für das im Text angegebene Beispiel $n = 21$ ergibt sich:

AS	22	23	24	25	26	27
$P(AS)$	0,286	0,238	0,190	0,143	0,095	0,048

Nun kann die Zahl n auch immer größer gewählt werden, was natürlich auch das Spiel verlängert. Dabei fällt auf, dass sich die Wahrscheinlichkeiten der Augensummen jeweils einem Wert annähern, also gegen eine Wahrscheinlichkeit *konvergieren*.
Diese Grenzwerte sind:

AS	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$n+6$
$P(AS)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

Die Redaktion

Wer war's?

von Hartwig Fuchs

Vor einigen Jahren wurde sein lange verloren geglaubtes Buch mit dem Titel „Bauchschmerzen“ in einem etwas fragmentarischen Zustand wieder aufgefunden. Diese Schrift liegt nun in rekonstruierter Form vor und die in ihr angeschnittenen Fragen bilden – nach nicht ganz unbestrittener Auffassung – den Schlüssel, mit dem der Zugang zu einer völlig neuen mathematischen Disziplin geöffnet wurde.
Also: Er war ein genialer Mathematiker – aber nicht nur das! Mit Hilfe seiner Mathematik machte er auch in der Physik, besonders der Mechanik, Entdeckungen von großer Tragweite.
Man sagt ihm nach, er habe sich so tief in seine mathematische Welt vergraben können, dass auch der größte „Lärm“ des Lebens um ihn herum nicht mehr zu ihm vordrang – was letztendlich mitverantwortlich für seinen gewaltsamen Tod sein mochte.
Wer war's?

Des Rätsels Lösung

Vor 2222 Jahren setzte Rom eine Streitmacht nach Sizilien in Marsch. Ihr Auftrag: Eroberung der Stadt Syrakus, die mit Karthago, dem damaligen Erzfeind Roms, verbündet war. Für die Strategen am Tiber sollte es wohl nur ein kurzer Feldzug werden – aber es kam anders.
In Syrakus lebte der bedeutendste Mathematiker der Antike – und der war zugleich ein technisches Genie: *Archimedes*[1].
Gegen die von ihm erfundenen ballistischen Kriegsmaschinen (Katapulte) kämpften die Römer zwei Jahre lang vergebens an. Als sie dann doch 212 v. Chr. die Stadt einnehmen konnten, fand dabei Archimedes den Tod.
Über seinen Tod gibt es mehrere Versionen:
Eine besagt, er habe wertvolle goldene Geräte vor den Römern in Sicherheit bringen wollen und ein Soldat, der es auf das Gold abgesehen hatte, habe ihn erschlagen.
Eine andere besagt, er habe bei der Einnahme von Syrakus – gerade in ein geometrisches Problem vertieft – in einer ruhigen Ecke gesessen, als ein vorbeikommender Soldat auf seine in den Sand gezeichneten Figuren getreten sei, worauf ihn Archimedes mit „Störe meine Kreise nicht!“[2] angeherrscht habe – und da habe ihn der erboste Soldat erschlagen.

[1] Auf dem Titelbild dieses Heftes könnt Ihr die Fields-Medaille sehen, die alle vier Jahre verliehen wird und als die höchste mathematische Auszeichnung gilt. Auf der Medaille ist ein phantasievolles Bildnis des Archimedes abgebildet.

[2] Griechisch: *Μη μου τους κυκλους ταρατTε*; lateinisch: Noli turbare circulos meos.

Archimedes wurde um 287 v. Chr. in Syrakus geboren und er verbrachte dort fast sein ganzes Leben als Ingenieur im Dienste des Königs. In seinem Beruf war das technische Genie Archimedes überaus erfolgreich – er soll allein über 40 neuartige Geräte erfunden haben. Dabei wendete er geschickt seine physikalischen Entdeckungen an, die ihn so nebenbei zu einem Mitbegründer der mathematischen Physik machten: Er fand die Hebelgesetze, das Prinzip des Auftriebs und des Schwerpunktes.

Aber seine bemerkenswertesten Leistungen, durch die er sich den Ruf des größten Wissenschaftlers der antiken Welt erwarb, erbrachte er in der Mathematik. Die Probleme, die er untersuchte, und die Methoden, die er zu deren Lösung ersann, stellen nicht nur gewaltige Fortschritte und Höhepunkte der damaligen Mathematik dar, sondern auch Ausgangspunkte für Entwicklungen, die lange Zeit später noch ganze Mathematiker-Generationen beschäftigen sollten.

Der Themenkatalog des Archimedes ist so umfangreich, dass hier nur einige wenige Facetten seiner Arbeit skizziert werden können.

Die Ausschöpfung

Die folgenreichsten mathematischen Arbeiten des Archimedes – wodurch er zum Begründer der Infinitesimalrechnung wurde – stellen seine Anwendungen der *Exhaustionsmethode* (Ausschöpfung) des Eudoxos von Knidos[3] dar, mit der er Flächen und Rauminhalte von Objekten mit gekrümmten Begrenzungen bestimmen konnte.

Ein schönes und noch elementares Beispiel ist seine Schneckenrechnung (Spiralrechnung) – siehe den Artikel „Die besondere Aufgabe – Die Spiralrechnung des Archimedes“ ab Seite 16 in diesem Heft.

Erst etwa 1850 Jahre später wurden die archimedischen Ideen von Gottfried Wilhelm Leibniz[4] und Isaac Newton[5] wieder aufgegriffen und zum Integral- und Differentialkalkül erweitert, aus denen sich dann die wohl heute wichtigste mathematische Disziplin, die Analysis, entwickelte.

Die Archimedischen Körper

Aus der Fülle der geometrischen Entdeckungen des Archimedes greifen wir ein räumliches und ein ebenes Beispiel heraus.

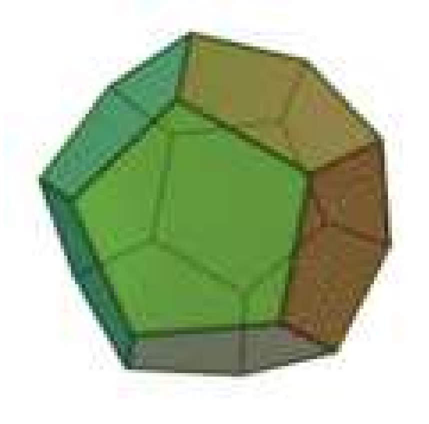
---

[3] Eudoxos von Knidos, ($E\upsilon\delta o\xi o\varsigma$) * um 410 v. Chr., † um 350 v. Chr.; griechischer Mathematiker, Astronom, Geograph und Arzt.

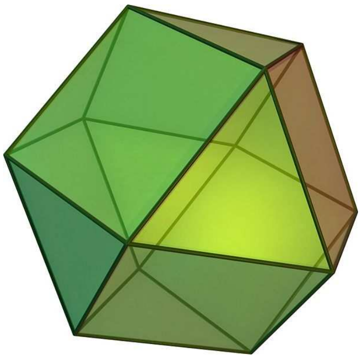
[4] Gottfried Wilhelm Leibniz, * 01.07.1646 in Leipzig, † 14.11.1716 in Hannover; Philosoph, Mathematiker, Physiker, Historiker, Bibliothekar, Diplomat und Doktor des weltlichen und des Kirchenrechts. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit.

[5] Sir Isaac Newton, * 04.01.1643 (resp. 25.12.1642 nach dem damals dort gültigen julianischen Kalender) in Woolsthorpe-by-Colsterworth (England), † 31.03.1727 (20.03.1727 jul.) in Kensington; Physiker, Mathematiker, Alchemist und Verwaltungsbeamter.

Archimedes war aus Euklids Buch *Elemente*, Kapitel XIII, bekannt, dass es nur fünf platonische Körper gibt – das sind konvexe Polyeder mit lauter kongruenten regelmäßigen n-Ecken als Seitenflächen, von denen in jeder Polyederecke die gleiche Anzahl zusammenstößt, was wir mit $(n, n, ...)$ bezeichnen:
Tetraeder $(3, 3, 3)$, Würfel $(4, 4, 4)$, Dodekaeder $(5, 5, 5)$, Oktaeder $(3, 3, 3, 3)$ und Ikosaeder $(3, 3, 3, 3, 3)$.



$(5, 5, 5)$



$(3, 4, 3, 4)$

Archimedes hat nun untersucht, welche Polyeder möglich sind, wenn man unter sonst gleichen Voraussetzungen zulässt, dass in einer Polyederecke Vielecke von zwei oder sogar drei verschiedenen Typen (zum Beispiel Dreiecke und Fünfecke) zusammentreffen – vergleiche die Figur $(3, 4, 3, 4)$.

Und er hat herausgefunden, dass es nur 13 verschiedene Typen derartiger – später *archimedisch* genannter – Körper gibt.

Die zehn archimedischen Körper $(3, 6, 6)$, $(4, 6, 6)$, $(5, 6, 6)$, $(3, 8, 8)$, $(3, 10, 10)$, $(3, 4, 3, 4)$, $(3, 5, 3, 5)$, $(3, 4, 4, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 5)$ haben zwei verschiedene Vieleckstypen als Seitenflächen, während die drei archimedischen Körper $(4, 6, 8)$, $(4, 6, 10)$, $(3, 4, 5, 4)$ drei verschiedene Vieleckstypen als Seitenflächen aufweisen.

Die Schrift, in der er dies zeigt, ging verloren.

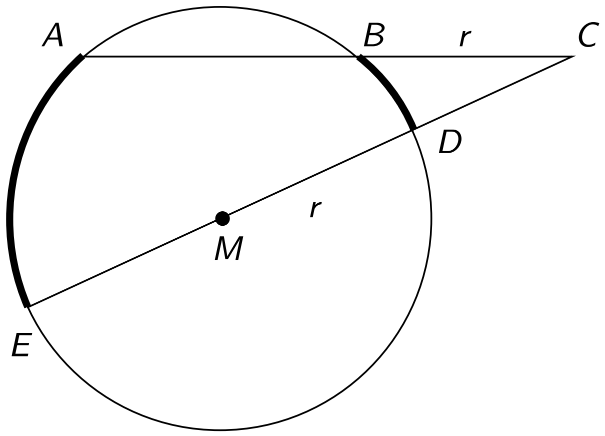
Viele Jahrhundrte danach griff Johannes Kepler[6] das Polyederthema wieder auf und es gelang ihm, alle 13 archimedischen Körper zu rekonstruieren.

Und daraus entwickelte sich die mathematische Theorie der Polyeder, angewendet als mathematisches Werkzeug zur Aufklärung von Kristallstrukturen in der Kristallographie.

[6] Friedrich Johannes Kepler, * 27.12.1571 in Weil der Stadt, † 15.11.1630 in Regensburg; Naturphilosoph, evangelischer Theologe, Mathematiker, Astronom, Astrologe und Optiker.

Die Winkeldreiteilung

Zeichne in einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r eine beliebige Sehne $\overline{AB}$, die kein Durchmesser des Kreises ist.
Dann verlängere $\overline{AB}$ um eine Strecke der Länge r bis zum Punkt C.
Die Verbindungsstrecke von C und M schneide den Kreis im Punkt D und ihre Verlängerung schneide ihn im Punkt E.
Welche Eigenschaft der Figur fällt Dir auf? Beachte die optischen Hilfen!

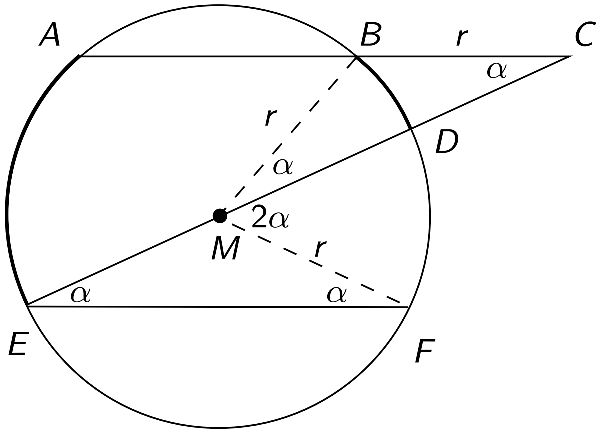


Du weißt vermutlich, in welcher „Richtung" eine Antwort zu suchen ist – aber hast Du sie auch gefunden? Archimedes jedenfalls hat sie gesehen:

($*$) Der Bogen $\widehat{AE}$ ist dreimal so lang wie der Bogen $\widehat{BD}$.

Bei einer Entdeckung wie dieser mag die Geschichte passiert sein, die man später von Archimedes erzählte: Wie er einmal im Bad zu einer mathematischen Einsicht gelangt sei, die ihn so begeistert habe, dass er nackt auf die Straße rannte und aller Welt laut schreiend seine neueste Erkenntnis mitteilte.

Beweis von ($*$):



Konstruiere die zu $\overline{AB}$ parallele Sehne $\overline{EF}$. Der Winkel $\sphericalangle MEF$ habe die Größe α – wir schreiben $|\sphericalangle MEF| = \alpha$.

Im gleichschenkligen Dreieck $\triangle MEF$ gilt: $|\sphericalangle EFM| = \alpha$, $|\sphericalangle FME| = 180° - 2\alpha$ – und daher ist $|\sphericalangle DMF| = 2\alpha$.
Als Stufenwinkel an Parallelen sind die Winkel $\sphericalangle MEF$ und $\sphericalangle ECB$ gleich groß, also $|\sphericalangle ECB| = \alpha$. Dann aber ist im gleichschenkligen Dreieck $\triangle CBM$ auch $|\sphericalangle BMC| = \alpha$ und somit $|\sphericalangle BMD| = \alpha$.
Daraus folgt: $|\sphericalangle BMF| = 3\alpha = 3|\sphericalangle BMD|$. Also ist $\widehat{BF}$ dreimal so lang wie $\widehat{BD}$ und weil nach Konstruktion $\widehat{BF}$ und $\widehat{AE}$ gleich lang sind, gilt die Behauptung ($*$).
Man vermutet, dass Archimedes versucht hat, mit einer Konstruktion wie im Beweis das alte Problem der Dreiteilung eines beliebigen Winkels allein mit

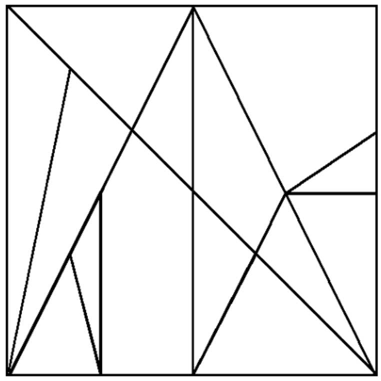
Zirkel und Lineal zu lösen.

Aber dazu hätte er – ausgehend von einem Bogen $\widehat{AE}$ und einer Geraden g durch E und den Mittelpunkt M des Kreises – eine Sehne $\overline{AB}$ so konstruieren müssen, dass deren Verlängerung die Gerade g in C schneidet und $|BC| = r$ gilt, wobei r der Radius des Kreises ist. Es gelang ihm nicht!

Das Problem dieser Konstruktion wurde nach Archimedes nicht zu den Akten gelegt. Durch die Jahrhunderte bis hinauf in die Neuzeit suchten Mathematiker immer wieder nach einer Lösung – vergebens. Bis man schließlich herausfand: Die archimedische Winkeldreiteilung ist allein mit Zirkel und Lineal nicht möglich!

Das Buch „Stomachion“

Archimedes hat das Buch *Stomachion* geschrieben, das von einem Geduldsspiel handelt, bei dem es um Folgendes geht: Eine quadratische Platte aus Elfenbein ist in elf Dreiecke, zwei Vierecke und ein Fünfeck zerlegt. Diese 14 Teile sollen wieder zu einem Quadrat (vgl. nebenstehende Abbildung) oder zu einer anderen Figur – zum Beispiel einem Dreieck – zusammengesetzt werden.



Die Schrift Stomachion galt bis vor kurzem als verschollen, so dass bis dahin auch die Frage ungeklärt blieb, warum ein so überragender Mathematiker wie Archimedes überhaupt eine Schrift über ein Puzzle verfasst und ihm dann auch noch den merkwürdigen Titel „Stomachion“ (griechisch $\Sigma\tau o\mu\alpha\chi\iota o\nu$ = Bauchweh) gegeben hat.

Dann aber tauchte 1998 ein theologisches Buch aus dem 13. Jahrhundert auf, bei dem man rasch erkannte: Es war auf Pergamentblätter geschrieben, von denen man vorher einen anderen Text abgeschabt hatte.

In mühevoller achtjähriger Arbeit gelang es einer Gruppe von Wissenschaftlern, den ursprünglichen Text zu rekonstruieren – mit einem sensationellen Ergebnis: Es handelt sich um drei archimedische Schriften in Kopien aus dem 10. Jahrhundert, darunter die verloren geglaubte *Stomachion*.

Das Studium des Stomachion-Textes führte zu der Annahme, dass Archimedes keineswegs ein Spiel kreieren, sondern einer von ihm als erstem gestellten Frage aus der Kombinatorik nachgehen wollte, nämlich: Auf wieviele Arten kann man die 14 Teile zu einem Quadrat zusammenlegen; und er hielt wohl diese Aufgabe für so schwierig, dass sie Bauchschmerzen macht – wir würden heute eher von Kopfzerbrechen reden. Tatsächlich hat man – und das nur mit Computerhilfe – herausgefunden, dass es, wenn man alle symmetrischen Lösungen mitzählt, insgesamt 17 152 Lösungsquadrate gibt.

Die besondere Aufgabe
Die Spiralrechnung des Archimedes
von Hartwig Fuchs

Archimedes von Syrakus* gilt als einer der größten Mathematiker, der je gelebt hat – durchaus ebenbürtig dem „Fürsten der Mathematik“ Carl Friedrich Gauß**.

Das Hauptwerk Archimedes’ und zugleich seine unvergängliche Leistung sind seine Berechnungen von Flächen krummlinig begrenzter ebener Figuren und der Volumina von Körpern mit gekrümmter Oberfläche.

Mit der Methode, die er dazu benutzte – die berühmte *Exhaustion* (Ausschöpfung) –, wurde er zum Begründer der Infinitesimalrechnung.

Ein schönes Beispiel für seine geniale Verwendung des Exhaustionsverfahrens beschreibt er in seiner Schrift „De lineas spiralibus“ (Über Spiralen), die uns in lateinischer Kopie erhalten ist.

Die Archimedische Spirale

Vorweg: Da wir im Folgenden nur den Gedankengang des Archimedes darstellen wollen, benutzen wir durchweg heutige mathematische Schreib- und Sprechweisen.

Archimedes erklärt in „De lineas spiralibus“ (nach §11), wie seine Spirale entsteht:

> Wenn eine Strecke $\overline{AB}$ sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Ebene um den Punkt B so lange dreht, bis ein Punkt P, der sich ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit von A aus längs $\overline{AB}$ bewegt, in den Punkt B gelangt ist, dann ist der „Weg“, den P dabei in der Ebene beschreibt, eine *Spirale*, die Kurve s im Bild 1.

* Archimedes, griechisch $A\varrho\chi\mu\eta\delta\eta\varsigma$, * um 287 v. Chr. vermutlich in Syrakus auf Sizilien, † 212 v. Chr. auf Syrakus; griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur. Mehr über ihn könnt Ihr im Artikel „Wer war’s“ auf Seite 11 erfahren.

** Johann Carl Friedrich Gauß, * 30.04.1777 in Braunschweig, † 23.02.1855 in Göttingen; Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Eine Biographie haben wir im Monoid-Heft 81 veröffentlicht.

Die Aufgabe des Archimedes

Archimedes stellt sich die Frage: „Wie groß ist die Fläche der Figur f, deren Rand die Strecke $\overline{AB}$ und die Spirale s bilden, wenn α, mit $0° < \alpha \leq 360°$, der Drehwinkel der Strecke $\overline{AB}$ ist (vgl. Bild 1)?"

Wir nennen f eine *Spiralfigur*.

Seine Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe:
Er kann die Fläche $|k|$ eines Kreises k vom Radius r und die Fläche $|s_\alpha|$ der Kreissektoren s_α mit dem Öffnungswinkel α näherungsweise berechnen: $|k| = \pi r^2$ und $|s_\alpha| = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$.

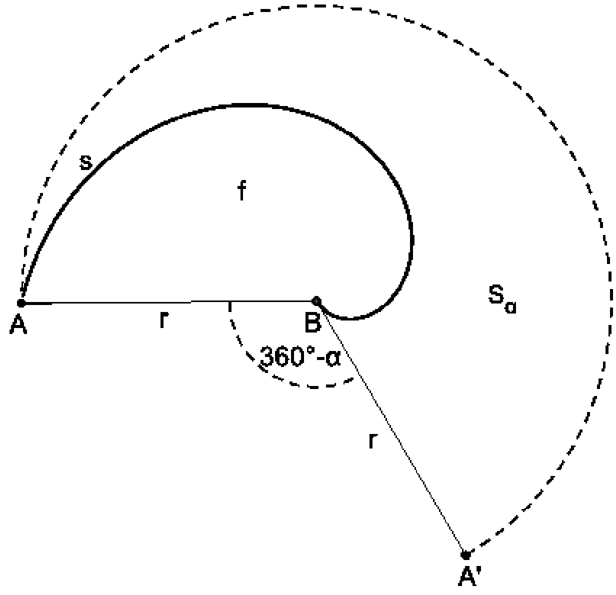


Bild 1

Denn für π kannte er einen recht guten Näherungswert. In seiner Schrift „Dimensio circuli" (Kreismessung) leitet er die Ungleichung $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$ her, aus der per Mittelbildung $\pi \approx \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{71} + 3 + \frac{10}{70}\right)$, also $\pi \approx 3{,}14185...$ folgt.

Die Spiralrechnung***

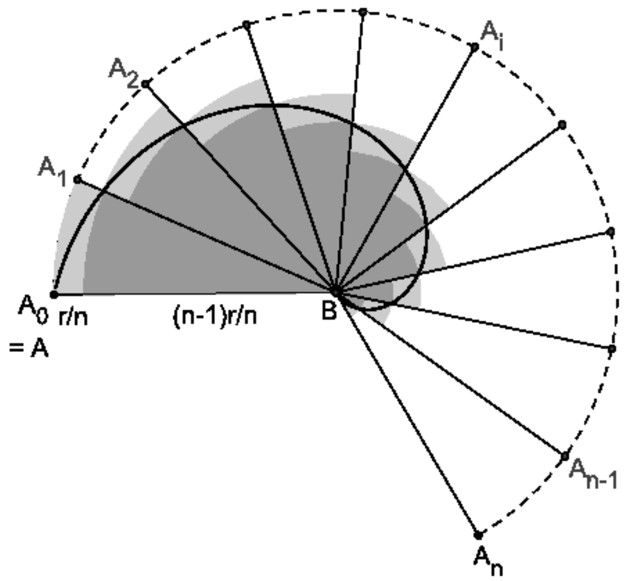


Bild 2

Zur Lösung der Aufgabe teilt Archimedes den Drehwinkel α von $\overline{AB}$ in n gleich große Teilwinkel ein. Damit kann er $2n - 1$ Kreissektoren mit den Öffnungswinkeln $\frac{\alpha}{n}$ konstruieren und zwar
zum Einen $n - 1$ Sektoren s_1, s_2, s_3, ..., s_{n-1} mit den Radien $(n-1)\frac{r}{n}$, $(n-2)\frac{r}{n}$, $(n-3)\frac{r}{n}$, ..., $\frac{r}{n}$, die alle bis auf n Punkte innerhalb des Spiralgebiets f liegen und
zum Anderen n Sektoren S_0, S_1, S_2, ..., S_{n-1} mit den Radien $n\frac{r}{n}$, $(n-1)\frac{r}{n}$, $(n-2)\frac{r}{n}$, ..., $\frac{r}{n}$, die alle bis auf $n+1$ Punkte außerhalb von f liegen (Bild 2).

*** Die Spiralrechnung enthält im letzten Teil für mehrere Folgerungen nur anschauliche Begründungen, da Archimedes noch keinen strengen Grenzwertbegriff besaß.

Dann gilt für die Sektoren s_i und S_i:

$s_i = S_i$, für $i = 1, 2, 3, ..., n-1$.

Wir setzen $|s_1|+|s_2|+|s_3|+...+|s_{n-1}| = \sum_U$ (Untersumme) und $|S_0|+|S_1|+|S_2|+...+|S_{n-1}| = \sum_O$ (Obersumme). Daraus ergibt sich für die Fläche $|f|$ der Spiralfigur f die Einschränkung

(1) $\sum_U < |f| < \sum_O$.

Archimedes begründet nun anschaulich, dass man den Abstand zwischen $\sum_U$ und $\sum_O$ beliebig klein machen kann.

Denkt man sich nämlich die im Bild gefärbten Gebiete in den Sektor $S_0 = B\widehat{A_0A_1}B$ hineingedreht, so füllen sie S_0 vollständig aus. Also gilt (wegen $s_i = S_i$):

$$\sum_O - \sum_U = |S_0| = \frac{1}{n}\pi r^2 \frac{\alpha}{360°} = \frac{1}{n}|s_\alpha| \quad (s_\alpha = B\widehat{A_0A_n}B \text{ – vgl. Bild 1}).$$

Man kann im Term $\frac{1}{n}|s_\alpha|$ die Zahl n nun stets so groß wählen, dass er kleiner als jede beliebig klein vorgegebene positive Zahl ist – man schreibt das heute zum Beispiel so: $\frac{1}{n}|s_\alpha| \longrightarrow 0$.

Dann aber ist (in gleicher Schreibweise) auch $\sum_O - \sum_U \longrightarrow 0$.

Wegen $\sum_O - \sum_U = (\sum_O - |f|) + (|f| - \sum_U)$ mit positiven $\sum_O - |f|$ und $|f| - \sum_U$ gilt also

(2) $\sum_O - |f| \longrightarrow 0$ und $|f| - \sum_U \longrightarrow 0$.

Dies interpretiert Archimedes so: Wenn n über jede Schranke „wächst“, dann stimmen „letztendlich“ $\sum_O$ und $|f|$ sowie $\sum_U$ und $|f|$ überein.

Wie groß ist $|f|$?

Die Sektoren s_i und S_i haben wegen $s_i = S_i$ den gleichen Radius $(n-i)\frac{r}{n}$, $i = 1, 2, 3, ..., n-1$, so dass

$$|s_i| = |S_i| = \pi\left((n-i)\frac{r}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\frac{\alpha}{360°} = \frac{1}{n^3}\pi r^2 \frac{\alpha}{360°}(n-i)^2 = \frac{1}{n^3}|s_\alpha|(n-i)^2.$$

Damit kann man (1) ausführlich so schreiben:

(3) $\sum_U = \frac{1}{n^3}|s_\alpha|\left((n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + 1^2\right)$
$< |f| < \frac{1}{n^3}|s_\alpha|\left(n^2 + (n-1)^2 + ... + 1^2\right) = \sum_O$.

Archimedes beweist durch eine trickreiche Rechnung, wir jedoch einfacher mit der Formel $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$, dass gilt

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + 1^2 < \frac{1}{3}n^3 < n^2 + (n-1)^2 + ... + 1^2.$$

Die linke Ungleichung ergibt sich so:

$(n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + 1^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) < \frac{1}{6}n \cdot n \cdot 2n = \frac{1}{3}n^3$; ganz entsprechend erhält man die rechte Ungleichung.

Insgesamt folgt mit dieser Ungleichung für (3): $\sum_U < \frac{1}{3}|s_\alpha| < \sum_O$.

Wie oben leitet man daraus wegen $\sum_O - \sum_U = \left(\sum_O - \frac{1}{3}|s_\alpha|\right) + \left(\frac{1}{3}|s_\alpha| - \sum_U\right)$ und $\sum_O - \sum_U \longrightarrow 0$ her, dass gilt:

(4) $\sum_O - \frac{1}{3}|s_\alpha| \longrightarrow 0$ und $\frac{1}{3}|s_\alpha| - \sum_U \longrightarrow 0$.

Wenn also n über jede Schranke „wächst", dann stimmern „letztendlich" $\sum_O$ und $\frac{1}{3}|s_\alpha|$ sowie $\sum_U$ und $\frac{1}{3}|s_\alpha|$ überein.

Mit (2) und (4) hat Archimedes mit *seiner* Mathematik bewiesen, dass $\sum_O$ und $\sum_U$ „letztendlich" sowohl mit $|f|$ als auch mit $\frac{1}{3}|s_\alpha|$ übereinstimmen, also $|f| = \frac{1}{3}|s_\alpha|$ ist.

Lösung der archimedischen Aufgabe

> Die Fläche einer Spiralfigur f beträgt $\frac{1}{3}$ der Fläche des zugehörigen Kreissektors s_α.

Die archimedische Spiralrechnung stellt ein Glanzstück der antiken Mathematik dar.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Versteckte Potenzen in Zahlenquadraten

Untersuche die $n \times n$-Zahlenquadrate für $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\boxed{1}\,,\quad \boxed{\begin{matrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{matrix}}\,,\quad \boxed{\begin{matrix}1 & 3 & 5\\ 7 & 9 & 11\\ 13 & 15 & 17\end{matrix}}\,,\quad \boxed{\begin{matrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 9 & 11 & 13 & 15\\ 17 & 19 & 21 & 23\\ 25 & 27 & 29 & 31\end{matrix}}\,, \ldots$$

Diese Zahlenquadrate weisen interessante Eigenschaften auf – finde einige davon heraus! Achte insbesondere auf versteckte Potenzen! (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2009 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden in Heft 98 veröffentlicht.

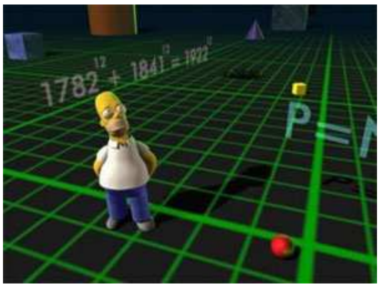
Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 94

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Simpson-Zahlen

Mit dem Dezimalsystem sind wir alle bestens vertraut: Es gibt genau zehn Ziffern von 0 bis 9, aus denen unsere Zahlen zusammengesetzt werden. Dabei bedeutet beispielsweise die Darstellung der Zahl 1958 im Dezimalsystem $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.

Dass unser Zahl-System auf der 10 beruht, verdanken wir wohl der Tatsache, zehn Finger zur Verfügung zu haben.



Betrachten wir nun die Hände der „Springfieldianer“: An jeder Hand ein Daumen und drei Finger; also insgesamt acht Finger. Würden die Simpsons ein eigenes Zahl-System entwickeln, gäbe es wohl nur acht Ziffern von 0 bis 7. In der Zahlendarstellung wäre der Übertrag zur nächsten Stelle also bereits bei 8. In diesem Zahl-System wird also mit Achter-Potenzen gerechnet statt mit Zehner-Potenzen, wie bei uns.

a) Die Simpsons wohnen in der Evergreen Terrace Nr. 742. Da diese Zahl aus Springfield stammt, gehen wir davon aus, dass sie im Oktalsystem aufgestellt wurde. Wie würde die Hausnummer im Dezimalsystem aussehen?

b) Wie würde die Jahreszahl 2008 in Springfield (im Oktalsystem) lauten?

(Christian Dreisbach, Mainz)

Lösung:

a) 742 im Oktalsystem bedeutet $7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 2$. Die Hausnummer wäre im Dezimalsystem also 482.

b) $\frac{2008}{8^3} = 3$ Rest $472 \longrightarrow \frac{472}{8^2} = 7$ Rest $24 \longrightarrow \frac{24}{8} = 3$ Rest 0. Also ist die Jahreszahl im Oktalsystem 3730.

Zukünftiger Wochentag

Wenn heute Montag ist, welchen Wochentag haben wir dann in 2008 Tagen?

(H.F.)

Lösung:

Wenn heute Montag ist, dann ist auch in einer Woche, in zwei Wochen, in drei Wochen, usw. Montag.

Weil nun 2008 Tage = 286 Wochen und 6 Tage sind, ist – von einem Montag aus gerechnet – in 286 Wochen wieder Montag und 6 Tage später ist Sonntag.

Summenspielerei

Bestimme die Summen (ohne Taschenrechner!):

a) $S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - ... + 2007 - 2008$

b) $S_2 = 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + ... - 2007 + 2008$ (H.F.)

Lösung:

a) Es ist $S_1 = (1-2)+(3-4)+...+(2007-2008) = (-1) \cdot 1004 = -1004$.

b) Es ist $S_1 + S_2 = 1 + 1 = 2$, also folgt $S_2 = 2 - S_1 = 2 - (-1004) = 1006$.

Eine schwierige Teilung

Eine ziemlich große Bande von Bankräubern will sich auflösen. Jeder Räuber soll dabei den gleichen Anteil des erbeuteten Geldes erhalten. Doch bei der Teilung der 3 992 003 € bleibt ein Rest übrig. Daher beschließen sie wieder auf Beutejagd zu gehen. Als sie nun die 4 056 716 € teilen wollen, bemerken sie, dass wieder derselbe Rest übrig bleibt. Deshalb rauben sie nochmals eine Bank aus. Beim Teilen der 4 077 621 € bleibt erneut derselbe Rest übrig.
Wie viele Bankräuber gehören der Bande an?

(Thomas Geiß, Kl. 11, Leibniz-Gymnasium, Östringen)

Lösung:

Weil beim Teilen jeweils derselbe Rest übrig bleibt, ist die Differenz zweier geraubter Beträge stets ohne Rest durch die Anzahl der Bankräuber teilbar.
Man bildet die Differenz aus 3992003 und 4056716 sowie 4056716 und 4077621:

$$4056716 - 3992003 = 64713 \quad \text{bzw.} \quad 4077621 - 4056716 = 20905$$

Anschließend zerlegt man die beiden Differenzen in Primfaktoren:

$$64713 = 3 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 53 \quad \text{bzw.} \quad 20905 = 5 \cdot 37 \cdot 113$$

Der einzige gemeinsame Primteiler ist 37.
Die Bande besteht also aus 37 Bankräubern.
Bemerkung: Darüberhinaus erhält man als Rest 36, zum Beispiel aus $3992003 : 37 = 107891$ Rest 36.

Rangfolge gesucht

Die fünf Schüler A, B, C, D und E einer Klasse haben bei einem Mathematik-Wettbewerb mitgemacht. Ihre Ergebnisse teilen sie ihrem Mathematik-Lehrer in verschlüsselter Form mit, nämlich so:
(1) A hat mehr Punkte als E.
(2) B hat weniger Punkte als C.
(3) C hat weniger Punkte als D.
(4) D hat weniger Punkte als A.
(5) E hat mehr Punkte als C.
(6) A hat weniger Punkte als C.
(7) E hat mehr Punkte als D.

Bei genau einer dieser sieben Aussagen haben die Schüler geschwindelt.
Gib die Namen der Schüler in der Reihenfolge wachsender Punktezahlen an. (H.F.)

Lösung:

Wenn X mehr (weniger) Punkte als Y hat, schreiben wir $X > Y$ ($X < Y$). Zunächst bestimmt man die falsche Aussage.

Betrachten wir die Behauptungen (3) $C < D$, (4) $D < A$ und (6) $A < C$: $\Longrightarrow A < C < D < A$, also $A < A \Longrightarrow$ Von den Aussagen (3), (4) und (6) ist eine falsch.

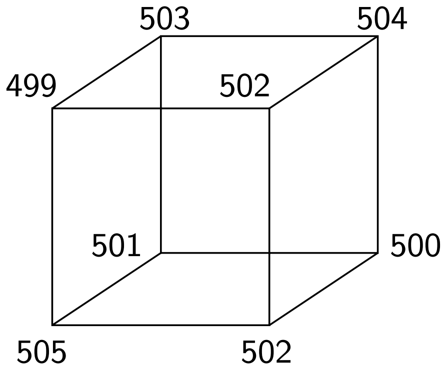
Schauen wir uns nun die Behauptungen (1) $A > E$, (5) $E > C$ und (6) $C > A$ an: $\Longrightarrow A > E > C > A$, also $A > A$. Unter den drei Aussagen (1), (5), (6) ist ebenfalls eine falsch.

Da es nur eine falsche Aussage gibt, muss es diejenige sein, die sowohl unter den Behauptungen (3), (4), (6), als auch unter den Behauptungen (1), (5), (6) vorkommt. Also ist (6) die Falschaussage.

Die Reihenfolge ergibt sich so: Aus (2) $B < C$, (3) $C < D$, (7) $D < E$ und (1) $E < A$ folgt: $B < C < D < E < A$.

Ein magischer Würfel

Man kann die Zahlen 499, 500, 501, 502, 502 (also zweimal!), 503, 504 und 505 so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilen, dass die Summe der Zahlen in den vier Ecken jeder der sechs quadratischen Würfelflächen jeweils den gleichen Wert S hat. Bestimme S und gib eine Verteilung der Zahlen an! (H.F.)



Lösung:

In jeder Würfelecke stoßen drei Quadrate aneinander. Das passiert sechsmal. Somit ist $6S = 3\cdot(499+500+\ldots+502+502+\ldots+505)$ $\Longrightarrow S = 2008$.

Wahr oder falsch?

Es sei $p \neq 5$ eine ungerade Primzahl. Dann ist $p^4 - 1$ ein Vielfaches von 10, das heißt, es hat die Einerziffer 0. (H.F.)

Lösung:

Eine Primzahl $p \neq 5$ kann nur eine Einerziffer $1, 3, 7$ oder 9 haben. Dann aber hat p^4 die Einerziffer von $1^4, 3^4, 7^4$ oder 9^4 und diese ist jeweils 1.
Folglich hat $p^4 - 1$ die Einerziffer 0 und deshalb ist $p^4 - 1$ ein Vielfaches von 10. Die Aussage ist also wahr.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Zahlen-Zählung

Wie viele fünfziffrige natürliche Zahlen < 70250 gibt es, deren Einerziffer 4 ist und die durch 3 teilbar sind? (nach Martin Mettler†)

Wasser zu Wein verwandeln – oder: In vino veritas

Winzer Kröger verkauft Wein für 1,50 € pro Liter. Albrecht Diskaunter ist zwar reich und sehr vermögend, aber auch mindestens so geizig. Daher ist ihm dieser Preis zu teuer. Er möchte maximal 1,20 € pro Liter bezahlen.

Da er ein Großkunde ist, kann Winzer Kröger es sich nicht leisten, ihn zu verlieren und muss sich auf diesen niedrigeren Preis einlassen.

In welchem Verhältnis muss Winzer Kröger den Wein mit Wasser „verdünnen", welches ihm als Leitungswasser fast kostenlos zur Verfügung steht, um dennoch „seinen" Preis zu erzielen? Wieviel Wein ist tatsächlich in einer 0,75-Liter-Flasche? (MG)

Wie erklärst Du das?

Nimm eine beliebige dreiziffrige Zahl, multipliziere sie mit 11 und danach noch mit 91 – Du erhälst so eine bemerkenswerte Zahl.

Kannst Du begründen, wie Dein Ergebnis zu Stande kommt? (H.F.)

Niemals eine Primzahl?

Wenn $p \neq 3$ eine Primzahl ist, dann ist $p^2 + 2$ niemals eine Primzahl.

Stimmt das? (H.F.)

Multiplikative magische Quadrate

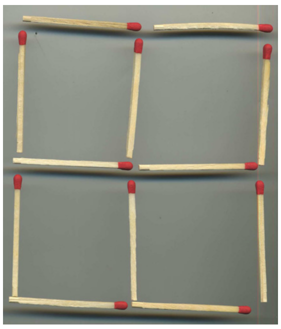
Bettina hat schon viele magische Quadrate ausgefüllt. Nun möchte sie etwas Neues ausprobieren. Aber was? Plötzlich hat sie eine Idee: „Ein *multiplikatives magisches Quadrat* ist (analog zu einem additiven magischen Quadrat) ein $n \times n$-Quadrat, in welches n^2 verschiedene Zahlen eingetragen werden und zwar so, dass jede Spalte, jede Zeile und die beiden Diagonalen dasselbe Produkt ergeben.“

Die Einträge müssen nicht fortlaufend sein.

a) Sogleich macht sie sich für das 3×3-Quadrat an die Arbeit. Und tatsächlich! Nach kurzer Zeit hat sie ein multiplikatives magisches Quadrat mit dem Produkt 4096 gefunden. — Gib ein solches Quadrat an!

b) Da Bettina gerne knobelt, gibt sie sich damit nicht zufrieden und füllt immer mehr Quadrate aus. Bald stellt sie fest: „Bei allen 3×3-Quadraten, die ich gefunden habe, ist stets das ‚magische Produkt‘ gleich der dritten Potenz der mittleren Zahl. Ob das immer gilt oder ist es nur Zufall?“

(MG)



Zwölf Zündhölzer

Zwölf Zündhölzer bilden wie in der Abbildung vier gleich große Quadrate. Es sollen nur drei Zündhölzer so verlegt werden, dass eine Figur aus drei Quadraten entsteht, die alle drei gleich groß wie die vier Ausgangsquadrate sind. (WK)

Sitzordnung

An einem runden Tisch sitzen acht Personen, die mit A, B, C, D, E, F, G und H bezeichnet seien. Für ihre Sitzordnung gilt:

(1) A sitzt diametral gegenüber B.

(2) B sitzt neben H.

(3) C hat A als rechten Nachbarn und sitzt diametral gegenüber von D.

(4) E und F sind verfeindet und sitzen daher weder nebeneinander noch einander (diametral) gegenüber.

(5) A ist kein Nachbar von F.

Bestimme die Sitzordnung der acht Personen. (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 946: Sedemichras Bauklötze

Der kleine Sedemichra hat drei Holzbauklötze

- eine Kugel,
- einen runden Zylinder, der so groß ist, dass die Kugel dort gerade hineinpassen würde (also mit gleichem Durchmesser und gleicher Höhe),
- einen (symmetrischen) Kegel, der so groß ist, dass er gerade in den Zylinder hineinpassen würde (also mit gleicher Grundfläche und Höhe wie dieser).

Da dies nur wenige Klötze sind und Sedemichra ein mathematisches Wunderkind ist, baut er nicht nur mit diesen Bauklötzen, sondern betrachtet diese ausgiebig und überlegt. Schließlich behauptet er:

a) Kugel und Kegel haben zusammen das gleiche Volumen wie der Zylinder.

b) Der Kegel hat das gleiche Volumen wie ein Doppelkegel mit gleicher Grundfläche und gleicher (Gesamt-)Höhe wie dieser einfache Kegel hätte.

Beweise oder widerlege Sedemichras Behauptungen! (MG)

Aufgabe 947: Merkregel für eine Pin-Nummer

Mathis trägt in seiner Brieftasche einen Zettel mit sich herum, auf dem der unauffälige Term

$$\frac{2008p - 11343}{2p + 1}$$

notiert ist.

Auf die Frage, welche Bedeutung dieser Term für ihn besitzt, antwortet Mathis: „Ich kann mir die vierziffrige Pin-Nummer meiner Bankkarte nicht merken. Deshalb merke ich mir nur: Dieser Bruchterm ist ganzzahlig für meine Pin-Nummer p und irgendwie ist darin eine fünfziffrige Primzahl versteckt."

Wie heißt Mathis Pin-Nummer? (H.F.)

Aufgabe 948: Vergleich benachbarter Wurzeln

Es ist $\sqrt{2009} - \sqrt{2008} < \sqrt{2008} - \sqrt{2007}$.

Ist das Zufall oder gilt allgemein

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \text{ für jedes } n = 1, 2, 3, ...? \qquad \text{(H.F.)}$$

Aufgabe 949: Deutsches Institut für Normung – Teil III

DIN A_0 hat die Fläche $1\,\mathrm{m}^2$, DIN B_0 hat die Fläche $\sqrt{2}\,\mathrm{m}^2$ und DIN C_0 hat die Fläche $\sqrt{\sqrt{2}}\,\mathrm{m}^2$. Den drei DIN-Reihen ist gemeinsam, dass die längere Seite a_n sich zur kürzeren Seite b_n wie $\sqrt{2}$ zu 1 verhält. Dabei erhält man das $(n+1)$-te Format der Reihe durch Halbieren des n-ten Formats, d. h. $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

a) Zeige, dass bei geeigneten Seitenverhältnissen $\frac{a_n}{b_n}$ dieses beim Dritteln statt Halbieren der längeren Seite erhalten bleibt.

b) Für welche Verkleinerungsfaktoren v außer $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gibt es ein solches geeignetes Seitenverhältnis? (WJB)

Aufgabe 950: Wahr oder falsch?

Für jede natürliche Zahl n gilt:

a) Ist n ungerade, dann ist $n^2 = 8k + 1$ für eine natürliche Zahl k;

b) ist n gerade, dann ist $n^2 = 8k$ oder $n^2 = 8k + 4$ für eine natürliche Zahl k. (H.F.)

Aufgabe 951: Ein Messproblem

Fritz will genau 5 l Wasser in einen Quader, der oben offen ist, füllen. Der Quader hat die Innenmaße $L \times B \times H = 60\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$. Fritz kann das Wasser aus dem Wasserhahn direkt in den Quader füllen, ihm stehen jedoch keine weiteren Hilfsmittel zur Verfügung.

Wie muss Fritz vorgehen, um genau 5 l Wasser abzumessen?

(Thomas Geiß, 11, Leibniz-Gymnasium, Östringen)

Aufgabe 952: Berechnung einer Potenz

Man soll für ein reelles x die Potenz x^{2008} in möglichst wenigen Schritten durch Multiplikation mit schon errechneten Potenzen berechnen.

Ein Beispiel mit 15 Schritten ist: $x \xrightarrow{\cdot x} x^2 \xrightarrow{\cdot x^2} x^4 \xrightarrow{\cdot x^4} x^8 \xrightarrow{\cdot x^8} x^{16} \xrightarrow{\cdot x^4} x^{20} \xrightarrow{\cdot x^{20}} x^{40} \xrightarrow{\cdot x^{20}} x^{60} \xrightarrow{\cdot x^{60}} x^{120} \xrightarrow{\cdot x^{120}} x^{240} \xrightarrow{\cdot x^{240}} x^{480} \xrightarrow{\cdot x^{480}} x^{960} \xrightarrow{\cdot x^{960}} x^{1920} \xrightarrow{\cdot x^{60}} x^{1980} \xrightarrow{\cdot x^{20}} x^{2000} \xrightarrow{\cdot x^{8}} x^{2008}$.

Kannst Du auch x^{2008} mit 14 oder weniger als 14 Multiplikationen berechnen? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 94

Klassen 8–13

Aufgabe 939: Durch 2008 teilbar?

Die Zahl $1 + 2007^{2009}$ ist ohne Rest durch 2008 teilbar.

Stimmt das? (H.F.)

Lösung:
Für ungerade natürliche Exponenten n gilt die Formel

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - ... - x^1y^{n-2} + y^{n-1}).$$

Man beweist dies leicht, in dem man die rechte Seite ausmultipliziert.
Setzt man nun $x^n = 1^{2009}$ und $y^n = 2007^{2009}$, dann folgt mit der Formel: $1^{2009} + 2007^{2009}$ ist ohne Rest durch $1 + 2007$, also durch 2008, teilbar.

Aufgabe 940: Wahr oder falsch?
Die Zahl $Z = 2009^{2008} - 2007^{2008}$ ist ein Vielfaches von 16.
Trifft das zu?
Hinweis: Z hat mehr als 6600 Ziffern – also versuche nicht zu dividieren. (H.F.)

Lösung:
Mit der Formel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ zerlegt man Z.

$$\begin{aligned} Z &= \left(2009^{1004}\right)^2 - \left(2007^{1004}\right)^2 \\ &= \left(2009^{1004} - 2007^{1004}\right)\left(2009^{1004} + 2007^{1004}\right) \\ &= \left(\left(2009^{502}\right)^2 - \left(2007^{502}\right)^2\right)\left(2009^{1004} + 2007^{1004}\right) = ... \\ &= \left(2009^{251} - 2007^{251}\right)\left(2009^{251} + 2007^{251}\right)\left(2009^{502} + 2007^{502}\right) \\ &\qquad \cdot \left(2009^{1004} + 2007^{1004}\right) \end{aligned}$$

Jeder Klammerterm ist Differenz oder Summe zweier ungerader Zahlen, also selbst gerade und somit ein Vielfaches von 2. Daraus folgt, dass die Behauptung wahr ist.

Aufgabe 941: Eine Quaderknobelei
Zwei Kanten eines Quaders haben die Längen 2 und 251; die Länge der dritten Kante ist $\frac{1}{757}$ der Maßzahl der Quaderoberfläche.
Welches Volumen hat der Quader? (H.F.)

Lösung:
Es sei x die Maßzahl der unbekannten Länge der dritten Quaderkante und O die Maßzahl der Quaderoberfläche.
Dann gelten $x = \frac{1}{757}O$ und $O = 2 \cdot (2 \cdot 251 + 2 \cdot x + x \cdot 251) = 1004 + 506x$, so dass $757x = 1004 + 506x$, woraus folgt: $x = 4$.
Dann aber gilt für das Volumen V des Quaders: $V = 2 \cdot 4 \cdot 251 = 2008$.

Aufgabe 942: Fehlerhafte Vergrößerung?
Augustine Schlechtmonat möchte eine DIN-A4-Vorlage auf DIN A3 vergrößern. Am Kopierer stellt sie fest, dass sie dazu die Vergrößerung 141% einstellen muss. Dabei möchte sie doch auf ein doppelt so großes Blatt vergrößern, also auf 200%.

Ist die Anzeige fehlerhaft? Oder gibt es gar eine plausible Erklärung – wie wäre dann die Einstellung für die umgekehrte Verkleinerung von DIN A3 auf A4? (MG)

Lösung:
Die Anzeige ergibt durchaus Sinn, denn der Vergrößerungsfaktor bezieht sich auf die Seitenlängen. Da bei den DIN-Größen die Seitenverhältnisse gleich bleiben (vgl. MONOID 92, Aufgabe 925), werden beide Seitenlängen im gleichen Verhältnis v gestreckt.
Wegen $vx_{\text{alt}} \cdot vy_{\text{alt}} = x_{\text{neu}} y_{\text{neu}} = A_{\text{neu}} = 2A_{\text{alt}} = 2x_{\text{alt}} y_{\text{alt}}$ ist $v^2 = 2$ und somit dieses Verhältnis $v = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. Daher ist die Anzeige 141% korrekt.
Die Verkleinerung auf die halbe (Flächen-)Größe bedeutet, dass die Seiten auf $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ verkürzt werden, also auf etwa 71%.

Aufgabe 943: Tinas Radtour
Tina wohnt in der Stadt und möchte mit dem Rad an einen Badesee im Umland fahren. Um 14.30 Uhr fährt sie los. Nach einer Strecke von 1763 m begegnet sie ihrem Onkel. Dieser wohnt am Badesee und ist um 14.30 Uhr ebenfalls mit dem Fahrrad losgefahren, um in der Stadt einzukaufen. Für den Einkauf in der Stadt benötigt er 138 Minuten, dann fährt er wieder zurück zum Badesee. Dort hat Tina nach ihrer Ankunft 2,3 Stunden mit Schwimmen und Sonnen zugebracht und befindet sich nun wieder auf dem Rückweg in die Stadt. Sie ist bereits 1058 m vom Badesee entfernt, als ihr Onkel ihr wieder entgegenkommt. Am Abend überlegt sich Tina, wie weit sie heute wohl gefahren ist...
Frage unter der Annahme, dass Tina und ihr Onkel beständig jeweils mit konstanter Geschwindigkeit gefahren sind, wobei sich beide Geschwindigkeiten unterscheiden können: Wieviele Meter hat Tina auf dem Rad zurückgelegt?
(Christian Dreisbach, Mainz)

Lösung:
Wir verwenden folgende Bezeichnungen:
v_T: Geschwindigkeit Tina (konstant!)
v_O: Geschwindigkeit Onkel (konstant!)
t_1: Zeit bis zur ersten Begegnung
t_2: Zeit bis zur zweiten Begegnung (ohne Berücksichtigung der Pausen)
S: Entfernung Stadt-Badesee

Tina und ihr Onkel starten gleichzeitig.
Wenn sich Tina und ihr Onkel das erste Mal begegnen, hat Tina eine Strecke von 1763 m zurückgelegt. Zusammen haben sie einmal die Entfernung Stadt-Badesee zurückgelegt. Also:

(1) $v_T \cdot t_1 + v_O \cdot t_1 = (v_T + v_O) \cdot t_1 = S, \quad \text{mit } v_T \cdot t_1 = 1763 \text{ m}$

Wenn der Onkel die Stadt erreicht, hat er alleine $1S$ zurückgelegt, ebenso Tina, wenn sie den Badesee erreicht.

Der Onkel unterbricht seine Fahrt für 138 min; Tina unterbricht ihre Fahrt für 2,3 h = 138 min. Da beide gleichlang ihre Fahrten unterbrechen, hat die Pause keinen Einfluss auf den Fortgang des Rätsels.
Wenn sich Tina und ihr Onkel das zweite Mal begegnen, hat Tina einmal die Strecke Stadt-Badesee und zusätzliche 1058 m zurückgelegt. Zusammen haben sie die dreifache Entfernung Stadt-Badesee zurückgelegt.

(2) $v_T \cdot t_2 + v_O \cdot t_2 = (v_T + v_O) \cdot t_2 = 3S, \quad$ mit $v_T \cdot t_2 = S + 1058\,\text{m}$

Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit 3 und setzen dann gleich. Dies ergibt $3 \cdot (v_T + v_O) \cdot t_1 = (v_T + v_O) \cdot t_2$ und somit ist $t_2 = 3 \cdot t_1$.
Damit erhalten wir

$$S + 1058\,\text{m} = v_T \cdot t_2 = v_T \cdot 3t_1 = \frac{1763\,\text{m}}{t_1} \cdot 3t_1 = 3 \cdot 1763\,\text{m}$$

und schließlich $S = 4231\,\text{m}$.
Aber: Tina ist nicht nur aus der Stadt an den Badesee gefahren, sondern auch wieder zurück, also ist sie $2S = 8462\,\text{m}$ mit dem Rad gefahren.
Bemerkung: Die Mobilfunktelefonnutzer unter Euch werden vielleicht bemerkt haben, dass „Tina" als Telefon-Tastenkombination genau die 8462 ist...

Aufgabe 944: Primzahlen
Wie groß muss eine Primzahl mindestens sein, welche das um 1 vermehrte Produkt der geraden Zahlen $2, 4, 6, 8, \dots, 50$ teilt? (H.F.)

Lösung:
$N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 50 + 1 = 2^{25} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 25 + 1$. Die Zahl $N - 1 = 2^{25} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 25$ ist durch alle Primzahlen ≤ 23 teilbar. N selbst ist aber durch keine von ihnen teilbar. Ein Primteiler von N muss daher > 23 sein. Folglich ist 29 der kleinstmögliche Primteiler von N – womit nicht behauptet ist, dass 29 tatsächlich ein Teiler von N ist.

Bemerkung: Die Aufgabe war so gedacht, dass Ihr mit Rechnungen eine Abschätzung für diese Zahl bestimmt – mit Papier und Bleistift. Mit Rechnereinsatz lässt sich die Primzahl, die N teilt genau bestimmen: 1 227 870 767. Und das ist zu groß für Papier und Bleistift!

Aufgabe 945: Eine seltsame Pflanze
Auf dem Stern Gerlach wächst seit einiger Zeit eine seltsame Pflanze. Am Anfang (quasi am nullten Tag) hatte sie ein einziges quadratisches Blatt mit der Seitenlänge 1 m, welches auf dem Boden lag. Einen Tag später sind an drei Seiten dieser Pflanze neue Blätter gewachsen und zwar an drei Seiten des Quadrates, jeweils in der Mitte. Auch diese Blätter sind quadratisch, haben jedoch nur ein Drittel der Seitenlänge der vorherigen Blattgeneration. Am zweiten Tag wachsen wieder quadratische Blätter...

a) Zeichne die Pflanze für jeden der ersten drei Tage ($n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$).

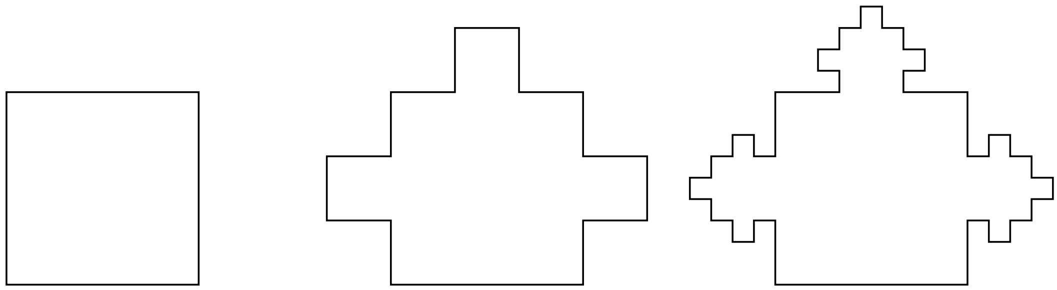
b) Die Gerlacher haben Angst, dass die Pflanze irgendwann den ganzen Stern bedecken wird. Ist ihre Angst begründet?

c) Wird der Rand der Pflanze irgendwann länger als 42 m?

d) Koschie ist ein besonders schlauer Gerlacher und möchte den Flächeninhalt und den Umfang der Pflanze genau berechnen. Wie lauten die entsprechenden Formeln? (MG)

Lösung:

a)



$n=0$ $\qquad$ $n=1$ $\qquad$ $n=2$

b) Wir betrachten die Fläche, welche von der Pflanze bedeckt wird. In jedem Schritt kommen dreimal so viele Blätter hinzu, wie in der vorherigen Generation gewachsen sind, jeweils mit einem Drittel deren Seitenlänge. Insgesamt wird also die Fläche

$$1+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+9\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+27\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{27}+81\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{81}+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i \overset{\text{geometr. Reihe}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

So lange der Stern Gerlach größer als $1{,}5\,\mathrm{m}^2$ ist, wovon wir ausgehen können, wird dieser nicht komplett von der Pflanze bedeckt.

c) Nun betrachten wir den Umfang. Dieser ist zunächst 4 m lang. Im nächsten Schritt kommen sechs Teilstrecken mit jeweils $\frac{1}{3}$ m Länge hinzu und in jedem weiteren Schritt jeweils dreimal soviele Teilstrecken mit jeweils einem Drittel der vorherigen Länge. Die können wir wieder in eine Formel packen, wobei wir $4=2+2\cdot 1$ setzen. Somit erhalten wir für den n-ten Tag:

$$2+2\cdot 1+6\cdot\frac{1}{3}+18\cdot\frac{1}{9}+54\cdot\frac{1}{27}+\ldots+2\cdot 3^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=2+\sum_{i=0}^{n}2\cdot 3^i\left(\frac{1}{3}\right)^i=2+\sum_{i=0}^{n}2\cdot 1=2+2(n+1)=2(n+2)$$

Somit hat die Pflanze am 19. Tag bereits einen Umfang von 42 m.

d) Im Prinzip haben wir die Formeln bereits in den beiden vorherigen Teilen verwendet. Sie lauten $A_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3-\frac{1}{3^n}}{2}$ für die Fläche und $U_n = 2(n+2)$ für den Umfang.

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2008

mit der Preisvergabe an die erfolgreichen Löser des Schuljahres 2007/08

am Samstag, dem 29. November 2008, Beginn 10 Uhr

in der Rotunde des Gymnasiums Oberursel,
Zeppelinstraße 24, 61440 Oberursel.

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.
Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite
`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`

Wer forscht mit?

Eine Primzahlen-Vermutung

Mit $!p$ sei das Produkt aller Primzahlen $\leq p$ bezeichnet.

a) Berechne $!p + 1$ für die Primzahlen $p = 2, 3, 5, ..., 19$.

b) Bestimme die auf $!p + 1$ folgende Primzahl P für $p \leq 19$.

c) Berechne $P-!p$ für $p \leq 19$.

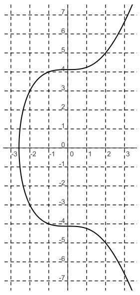
Vor einigen Jahren ist die Vermutung aufgetaucht:

Für jede Primzahl $p \geq 2$ ist $P-!p$ eine Primzahl.

Wills Du es mit dieser Vermutung „ein Stück weit“ aufnehmen?
Vielleicht findest Du dabei ein Gegenbeispiel. Du hättest dann die bis heute unbewiesene Vermutung widerlegt. (H.F.)

Hinweis: Eure Forschungsergebnisse könnt Ihr bis zum 15. Februar 2009 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. In Heft 98 werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen.

Die Seite für den Computer-Fan



Ganzzahlige Punkte auf kubischer Kurve

Wir betrachten in einem (x, y)-Koordinatensystem die Kurve k, die durch die kubische Gleichung $y^2 - x^3 = 17$ beschrieben wird. Falls es in dem Kreisgebiet, das durch die Ungleichung $x^2 + y^2 \leq 10^8$ definiert wird, Kurvenpunkte K auf k mit ganzzahligen Koordinaten gibt, bestimme man diese! (H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2008 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 93

Vertauschte Ziffernoperatoren

Es seien QS(n) die Ziffernsumme („Quersumme“) und QP(n) das Ziffernprodukt („Querprodukt“) einer natürlichen Zahl n.
Gibt es Zahlen $n \geq 10$, für die gilt:

$$\mathrm{QS}(\mathrm{QP}(n)) = \mathrm{QP}(\mathrm{QS}(n))?$$

(H.F.)

Lösung

In der Tat gibt es solche Zahlen; die kleinste ist 22, eine größte gibt es nicht; denn bildet man zum Beispiel die Zahl $z = 99999999990...0$ mit beliebig vielen Nullen, so ist stets $\mathrm{QP}(\mathrm{QS}(z)) = \mathrm{QP}(90) = 0 = \mathrm{QS}(0) = \mathrm{QS}(\mathrm{QP}(z))$. Vertauscht man in einer Zahl n, die die Bedingung $\mathrm{QS}(\mathrm{QP}(n)) = \mathrm{QP}(\mathrm{QS}(n))$ erfüllt, die Ziffern, erfüllen auch die neuen Zahlen diese Bedingung wie zum Beispiel $158, 185, 518, 581, 815, 851$.
Mit verschiedenen Programmen (C++, Delphi, Java, Visual-Basic) haben folgende sieben Monoid-Leser aus unterschiedlich großen Bereichen die Zahlen heraus gefiltert, die die geforderte Bedingung erfüllen: **Lennart Adam** (Gymnasium am Römerkastell, Alzey, Klasse 11), **Christian Behrens** (Gymnasium am Römerkastell, Alzey, Klasse 12), **Malte Meyn** (Ohm-Gymnasium, Erlangen, Klasse 10), **Alexander Rettkowski** (Winckelmann-Gymnasium, Stendal, Klasse 9), **Florian Schweiger** (Gymnasium Marktoberdorf, Klasse 10), **Alexey Tyukin** (Gymnasium Gonsenheim, Mainz, Klasse 12), **David Wander** (Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum). (Die Klassenangaben beziehen sich noch auf den Abgabetermin im Mai 2008.)

Spezielle Primzahlen
Bemerkungen zur Computer-Aufgabe aus Heft 92

von Wolfgang Moldenhauer

In Monoid 92 von Dezember 2007 wird in der Rubrik „Die Seiten für den Computer-Fan“ (Seite 13) danach gefragt, für welche n die Zahl $z(n) := n^n + 1$ eine Primzahl ist. Für $n = 1, 2, 4$ ergibt sich mit $2, 5, 257$ jeweils eine Primzahl ergibt, für $n = 3$ aber keine. Wie sich in den in Heft 94 (Seite 17) mitgeteilten Untersuchungen unserer Löser andeutet, scheinen sich für größere $n \in \mathbb{N}$ auch sobald keine weiteren Primzahlen einzustellen.
Nachfolgend werden wir eine notwendige Bedingung für n angeben, so dass $z(n) = n^n + 1$ eine Primzahl sein kann.

Zunächst ist für ungerades n mit $n > 1$ die Zahl $z(n)$ gerade und größer als 2, damit also keine Primzahl, da 2 die einzige gerade Primzahl ist.
Damit muss n notwenig gerade sein.
Wir nehmen zunächst an, dass n mindestens einen ungeraden Teiler besitzt und stellen n als $n = s^k(2m+1)$ mit $k \geq 1$, $m \geq 1$ dar. Sollte n weitere ungerade Teiler besitzen, fassen wir diese alle unter $2m + 1$ zusammen, da ein Produkt ungerader Zahlen ungerade ist.

Lemma 1:
Es ist $\left(n^{2^k} + 1\right) \mid \left(n^{2^k(2m+1)} + 1\right) = z(n)$, so dass $z(n)$ keine Primzahl sein kann.

Beweis:*
Es ist nacheinander $n^{2^k} + 1 \equiv 0 \mod \left(n^{2^k} + 1\right) \Longrightarrow 2^{2^k} \equiv -1 \mod \left(n^{2^k} + 1\right)$ $\Longrightarrow 2^{2^k(2m+1)} \equiv (-1)^{2m+1} \equiv -1 \mod \left(n^{2^k} + 1\right)$ und hieraus ergibt sich die Behauptung.

Damit hat n keinen ungeraden Teiler, ist also eine Potenz von 2, wenn $z(n)$ eine Primzahl ist.

Lemma 2:
Es sei $2^n + 1$ mit $n > 1$ eine Primzahl.
Dann ist $n = 2^k$.

Beweis:
Ist n keine Potenz von 2, so gilt $n = 2^k(2m+1)$ mit $m \geq 1$.
Dann ist $2^n + 1 = 2^{2^k(2m+1)} + 1$ nach Lemma 1 durch $2^{2^k} + 1$ teilbar.

* Man vergleiche hierzu auch die Ausführungen im Heft 94 auf Seite 32 im Artikel Lösungsvielfalt zur Neuen Aufgabe 931 von Marcel Gruner und Juliane Gutjahr.

Zusammenfassung

Damit $n^n + 1$ mit $n > 1$ eine Primzahl ist, gilt notwendig $n = 2^{2^k}$

Für $k = 0, 1$ erhalten wir mit 5 und 257 die schon bekannten Primzahlen.
Für $k = 2$ ergibt sich wegen $(2^4)^{2^4} + 1 = 16^{16} + 1 = 18446744073709551617 = 274177 \cdot 67280421310721$ keine Primzahl und für $k = 3$ ist $(2^8)^{2^8} + 1 = 256^{256} + 1$ ebenfalls keine Primzahl.
Für $k = 4$ muss man mit $(2^{16})^{2^{16}} + 1 = 65536^{65536} + 1$ eine Zahl untersuchen, die 315795 Stellen hat. Diese Stellenexplosion geht weiter.
So ergibt sich für $k = 5$ mit $(2^{32})^{2^{32}} + 1 = 4294967296^{4294967296} + 1$ eine Zahl mit mehr als $4{,}1 \cdot 10^{10}$ Stellen, also mehr als 41 Milliarden.**.

Fazit

Ob es außer 2, 5 und 257 weitere Primzahlen der Form $n^n + 1$ gibt, bleibt offen.

Periodenlängen von Dezimalbrüchen
Zur Wer-forscht-mit-Aufgabe aus Monoid 91
von Florian Schweiger

Vorbemerkung: Alle vorkommenden Zahlen sind nichtnegativ, n ist jeweils eine beliebige natürliche Zahl, p stets eine Primzahl.

Berechnung von Perioden

Für $p = 2$ oder $p = 5$ ergibt sich bei Berechnung von $\frac{1}{p}$ ein abbrechender Dezimalbruch, für alle anderen Primzahlen erhält man einen reinperiodischen Dezimalbruch. Die Periode dieses Dezimalbruchs kann man von Hand so berechnen, dass man die Division $1 : p$ so lange durchführt, bis erstmals wieder der Rest 1 auftritt. Das zu diesem Zeitpunkt entstandene Divisionsergebnis ist dann die Periode, deren Länge hier mit $l = L\left(\frac{1}{p}\right)$ bezeichnet wird.
Es ist also

$$\frac{1}{p} = 0{,}z_1 z_2 \dots z_l z_1 z_2 \dots z_l \dots = 0{,}\overline{z_1 z_2 \dots z_l} \text{ mit Ziffern } z_i.$$

Nun ist $\frac{10^l}{p} = z_1 z_2 \dots z_l{,}\overline{z_1 z_2 \dots z_l}$, und damit $\frac{10^l - 1}{p} = z_1 z_2 \dots z_l$.
Da $z_1 z_2 \dots z_l$ eine ganze Zahl ist, muss dies auch für $\frac{10^l - 1}{p}$ gelten. Daher ist eine notwendige Bedingung für eine Periode der Länge l, dass $10^l \equiv 1 \mod p$ ist.
Da l kleinstmöglich sein soll, ergibt sich daraus:

** Das ist mehr als die derzeit größte bekannte Primzahl, die „nur“ 9808358 Stellen hat.

(1) Die Periodenlänge l von $\frac{1}{p}$ für $p \neq 2$ und $p \neq 5$ ist die Zahl, für die $10^l - 1$ erstmals durch p teilbar ist.

Ein analoges Resultat gilt auch für die Periodenlänge von $\frac{1}{n}$, wenn dieser Bruch reinperiodisch, also n nicht durch 2 oder 5 teilbar ist.

Mögliche Periodenlängen

Für $p \neq 2$ und $p \neq 5$ ist nach dem kleinen Satz von Fermat* $10^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Daher muss $L\left(\frac{1}{p}\right) \leq p - 1$ sein, denn spätestens für $l = p - 1$ ist erstmals $10^l \equiv 1 \mod p$, also ist nach (1) die Periodenlänge höchstens $p - 1$. Es gilt also

(2) $1 \leq L\left(\frac{1}{p}\right) \leq p - 1$ für Primzahlen $p \neq 2$ und $p \neq 5$.

Daraus folgt sogar, wie man mittels Division mit Rest zeigt:

(3) $L\left(\frac{1}{p}\right)$ ist für Primzahlen $p \neq 2$ und $p \neq 5$ ein Teiler von $p - 1$.

Denn aus $p - 1 = lq + r$ mit $l = L\left(\frac{1}{p}\right) \leq p - 1$, größtmöglichem $q \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r$ folgt $1 \equiv 10^{p-1} = (10^l)^q \cdot 10^r \equiv 1^q \cdot 10^r = 10^r \mod p$.
Also ist $10^r - 1$ durch p teilbar. Wegen der Minimalität von l und weil $r < l$ ist, muss dann aber $r = 0$ sein. Also ist l ein Teiler von $p - 1$.

Man kann auch allgemeiner zeigen, dass gilt:

(4) $L\left(\frac{1}{p}\right)$ teilt jede Zahl y, für die $10^y \equiv 1 \mod p$ gilt, wenn $p \neq 2$ und $p \neq 5$ ist.

Die Aussage (3) kann man nun auch auf zusammengesetzte Zahlen n verallgemeinern, für die $\frac{1}{n}$ reinperiodisch ist.
Die Eulersche** φ-Funktion ist definiert als die Anzahl aller zu n teilerfremden Zahlen $< n$ (einschließlich 1). Nach dem Satz von Euler-Fermat ist nun $10^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$. Genau wie beim Beweis von (3) folgert man daraus:

$$L\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ist ein Teiler von } \varphi(n), \text{ wenn } \frac{1}{n} \text{ reinperiodisch ist.}$$

Da für eine Primzahl $\varphi(p) = p - 1$ ist, ist (3) ein Spezialfall hiervon.

---

* Pierre de Fermat, * November 1607 in Beaumont-de-Lomagne, † 12.01.1665 in Castres; Mathematiker und Jurist.

** Leonhard Euler, * 15.04.1707 in Basel, † 18.09.1783 in Sankt Petersburg; einer der bedeutendsten Mathematiker. Eine ausführliche Biographie findet Ihr in Monoid 89 vom März 2007.

Reduktion von Periodenlängen

Im Folgenden sollen Zusammenhänge zwischen der Periodenlänge $L\left(\frac{1}{n}\right)$ einer zusammengesetzten Zahl n mit reinperiodischem $\frac{1}{n}$ und den Periodenlängen ihrer Primfaktoren erarbeitet werden.

Dazu unterscheidet man mehrere Fälle:

1. Fall: $n = p_1 p_2 ... p_t$ mit paarweise verschiedenen Primfaktoren p_i, $p_i \neq 2$ und $p_i \neq 5$ für alle i.
   Es sei $l := L\left(\frac{1}{n}\right)$ und $l_i := L\left(\frac{1}{p_i}\right)$.
   Nach (1) ist nun $10^l - 1 \equiv 0 \mod p_1 p_2 ... p_t$. Daher ist insbesondere $10^l - 1 \equiv 0 \mod p_1$. Nach (4) ist nun l_1 ein Teiler von l. Analog schließt man, dass alle l_i Teiler von l sein müssen. Umgekehrt gilt auch, dass, wenn l_i Teiler von l ist, $10^l - 1 \equiv 0 \mod p_i$ gilt. Daher entspricht nun l offensichtlich der kleinsten Zahl, die von allen l_i geteilt wird, also dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der l_i. Man erhält also
   (5) $L\left(\frac{1}{p_1 p_2 \dots p_t}\right) = \mathrm{kgV}\left(L\left(\frac{1}{p_1}\right), L\left(\frac{1}{p_2}\right), \dots, L\left(\frac{1}{p_t}\right)\right)$, mit $p_i \neq 2$, $p_i \neq 5$ für alle i.
2. Fall: $n = p^a$ mit $p \neq 2$, $p \neq 5$ und $a \geq 1$.
   Hier zeigt man mit vollständiger Induktion nach a:
   (6) $L\left(\frac{1}{p^a}\right) = p^k \cdot L\left(\frac{1}{p}\right)$ für ein k mit $0 \leq k < a$, $p \neq 2$ und $p \neq 5$.

   Es sei $l'_i := L\left(\frac{1}{p^i}\right)$.
   Induktionsanfang: Für $a = 1$ gilt $L\left(\frac{1}{p}\right) = l'_1 = p^0 l'_1 = p^0 L\left(\frac{1}{p}\right)$.
   Induktionsannahme: Es sei $l'_a = p^k l'_1$ mit $0 \leq k < a$ für ein $a \in \mathbb{N}$.
   Induktionsschluss $a \to a+1$: Analog zu (1) ist $10^{l'_a} \equiv 1 \mod p^a$. Daher ist $10^{l'_a} = xp^a + 1$ für ein $x \in \mathbb{N}_0$.
   Nun ist $10^{pl'_a} = \left(10^{l'_a}\right)^p = (xp^a + 1)^p = x^p p^{pa} + ... + \binom{p}{p-1} \cdot xp^p + 1 \equiv 1 \mod p^{a+1}$, denn wegen $\binom{p}{p-1} = p$ ist jeder bis auf den letzten Summanden durch p^{a+1} teilbar.
   Wie aus (4) folgt, muss nun l'_{a+1} ein Teiler von pl'_a sein.
   Wegen $10^{pl'_{a+1}} \equiv 1 \mod p^{a+1}$ ist $10^{pl'_{a+1}} = yp^{a+1} + 1 = (yp)p^a + 1$ und deshalb $10^{pl'_{a+1}} \equiv 1 \mod p^a$.
   Daher muss l'_a, wieder nach (4), ein Teiler von l'_{a+1} sein. Da p Primzahl ist, muss damit $l'_{a+1} \in \{l'_a, pl'_a\}$, also nach der Induktionsannahme $l'_{a+1} \in \{p^k l'_1, p^{k+1} l'_1\}$ sein. Damit ist die Induktionsannahme auch für $a+1$ wahr, die Induktion abgeschlossen und (6) ist bewiesen.

   Vermutlich gilt sogar $L\left(\frac{1}{p^a}\right) = p^{a-1} \cdot L\left(\frac{1}{p}\right)$, falls $p \geq 7$, und $L\left(\frac{1}{p^a}\right) =$

$p^{a-2} \cdot L\left(\frac{1}{p}\right)$, falls $p = 3$. Einen Beweis dafür fand ich nicht, aber mit einem Computerprogramm habe ich berechnet, dass gilt:

(7) Wenn $7 \leq p \leq 200$ und $1 \leq a \leq 4$ ist, dann ist $L\left(\frac{1}{p^a}\right) = p^{a-1} \cdot L\left(\frac{1}{p}\right)$ und für $p = 3$ und $2 \leq a \leq 4$ ist $L\left(\frac{1}{3^a}\right) = 3^{a-2} \cdot L\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{a-2}$.

3. Fall: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$, $t \geq 1$, alle $p_i \neq 2$, $p_i \neq 5$, paarweise verschieden. Dies ist der allgemeine Fall, in dem die ersten beiden als Spezialfälle enthalten sind. Ähnlich wie bei (5) kann man, wenn man auch (6) verwendet, zeigen:

(8)
$$L\left(\frac{1}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}}\right) = \mathrm{kgV}\left(L\left(\frac{1}{p_1^{a_1}}\right), L\left(\frac{1}{p_2^{a_2}}\right), \dots, L\left(\frac{1}{p_t^{a_t}}\right)\right)$$
$$= \mathrm{kgV}\left(p_1^{k_1} L\left(\frac{1}{p_1}\right), p_2^{k_2} L\left(\frac{1}{p_2}\right), \dots, p_t^{k_t} L\left(\frac{1}{p_t}\right)\right)$$
mit $0 \leq k_i < a_i$ für alle i.

Wegen (7) gilt hier $k_i = a_i - 2$, falls $p_i = 3$ und $a_i \geq 2$, sowie $k_i = a_i - 1$, falls $7 \leq p_i \leq 200$. Vermutlich gilt letzteres auch für alle Primzahlen größer 200.

Als Beispiel zur Anwendung von (8) soll $L\left(\frac{1}{189}\right)$ bestimmt werden.

Es ist $189 = 3^3 \cdot 7$. Nun ist $L\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ und $L\left(\frac{1}{7}\right) = 6$. Wegen (7) ist $L\left(\frac{1}{3^3}\right) = 3 \cdot L\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ und damit ist $L\left(\frac{1}{189}\right) = \mathrm{kgV}(3, 6) = 6$.

Existenz von Primzahlen einer bestimmten Periodenlänge

Bis $l = 28$ gibt es, wie man durch Ausprobieren feststellt, jeweils Primzahlen mit der Periodenlänge l. Beweisen, dass es immer eine solche Primzahl gibt, konnte ich jedoch nur im Spezialfall, wenn l selbst eine Primzahl ist.

Es gilt die Formel $\mathrm{ggT}(10^a - 1, 10^b - 1) = 10^{\mathrm{ggT}(a,b)} - 1$***. Aus dieser Formel folgt für teilerfremde k und l, dass für jeden Exponenten $k \leq l - 1$ gilt: $\mathrm{ggT}(10^k - 1, 10^l - 1) = 10^{\mathrm{ggT}(k,l)} - 1 = 10^1 - 1 = 9$. Nun ist $10^l - 1 \geq 10^2 - 1 = 99 > 9$, daher besitzt $10^l - 1$ außer $3 \cdot 3$ noch mindestens einen weiteren Primfaktor $p \neq 3$. Wäre dies nicht der Fall, dann wäre $10^l - 1$ eine Dreierpotenz. Für $l \geq 2$ ist aber $10^l - 1 \equiv 99 \mod 100$, aber Dreierpotenzen sind nie $\equiv 99 \mod 100$, wie man durch Berechnen der Hunderterreste der Dreierpotenzen, die sich mit Periode 20 wiederholen, feststellt.

Nun kann p aber kein Teiler von $10^k - 1$ für $1 \leq k \leq l - 1$ sein, denn $10^k - 1$ haben ja nur den Teiler $3 \cdot 3$ mit $10^l - 1$ gemeinsam. Damit ist l der Exponent, für den $10^l - 1$ erstmals durch p teilbar ist, und nach (1) ist $L\left(\frac{1}{p}\right) = l$. Daher gilt:

Zu jeder Primzahl l gibt es eine Primzahl p mit $L\left(\frac{1}{p}\right) = l$.

*** Siehe beispielsweise Korsunski, A.: Der Euklidische Algorithmus. In: Bamler, Richard/Reiher, Christian: Ein-Blick in die Mathematik; Aulis Verlag Deubner, Köln, 2005.

Maximale Primzahlen

Nach (2) ist $L\left(\frac{1}{p}\right) \leq p-1$, daher sind Primzahlen p mit $L\left(\frac{1}{p}\right) = p-1$ in der Tat *maximal*, was heißen soll, dass ihre Kehrwerte maximale Periodenlänge haben.

Mit einem Computerprogramm habe ich nun ermittelt, dass es 29500 maximale Primzahlen bis 1000000 gibt. Es scheint nicht nur unendlich viele maximale Primzahlen zu geben, ihr Anteil unter allen Primzahlen scheint sich sogar bei etwa $0{,}375 = \frac{3}{8}$ zu stabilisieren, wie man nachfolgender Tabelle entnehmen kann. Im Bereich zwischen 10 und 100 schwankt dieser Anteil noch zwischen 0,167 und 0,5, während er im Bereich zwischen 10^5 und 10^6 nur noch zwischen 0,372 und 0,377 schwankt.

Bereich	10–10^2	10^2–10^3	10^3–10^4	10^4–10^5	10^5–10^6
Minimaler Anteil	0,167	0,321	0,353	0,375	0,372
Maximaler Anteil	0,5	0,404	0,410	0,391	0,377

Bei einer Internetrecherche fand ich nun eine Vermutung des Mathematikers Emil Artin****, die so genannte *Artinsche Vermutung* über Primitivwurzeln, die fast genau dies zur Aussage hat.

Diese Vermutung besagt, wenn man sie auf maximale Primzahlen anwendet, dass der Anteil der maximalen Primzahlen an allen Primzahlen genau eine bestimmte Konstante, nämlich der Wert des unendlichen Produkts

$$\prod_{p \text{ Primzahl}}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$$

ist. Diese Konstante beträgt etwa 0,3739558136. Damit gibt es also insbesondere unendlich viele maximale Primzahlen.

Diese Vermutung ist in Teilen bewiesen worden. Für die konkrete Anwendung maximaler Primzahlen ist sie jedoch nur eine Vermutung.

Es gibt also noch genügend offene Probleme auf diesem Gebiet...

**** Emil Artin, * 03.03.1898 in Wien, † 20.12.1962 in Hamburg; österreichischer Mathematiker und einer der führenden Algebraiker des 20.Jahrhunderts. Siehe auch `http://en.wikipedia.org/wiki/Artin%27s_conjecture_on_primitive_roots`

Zwischen den Zeilen

von Duco van Straten

John Wallis wurde am 3. Dezember 1616 in Ashford, Kent, geboren und starb am 8. November 1703 in Oxford.*

Auf der Schule lernte er Latein, Griechisch und Hebräisch, nicht aber Mathematik. Als er wärend der Weihnachtsferien 1631 seinen älteren Bruder, der eine Kaufmannslehre machte, beim Rechnen beobachtete, bat er ihn zu erklären, was er da mache. Das war der einzige Mathematikunterricht, den er jemals genoss. Später studierte er in Cambridge Ethik, Metaphysik, Geographie, Astronomie, und Anatomie und schrieb:

„Mathematik wurde damals nicht als ein akademisches Fach gesehen; vielmehr war es die Beschäftigung von Kaufmännern, Händlern, Seeleuten, Zimmerleuten, Landvermessern und ähnlichem Volk, oder vielleicht noch von dem einen oder andern Almanachmacher in London. Und von den mehr als 200*, die es zu meiner Zeit im College gab, kannte ich keinen, der mehr Ahnung von Mathematik hatte als ich, und das war sehr wenig; ich habe es nie ernsthaft studiert (anders als angenehmen Zeitvertreib) bis ich zum Professor ernannt wurde.“*

Im englischen Bürgerkrieg gelang es Wallis, die verschlüsselten Berichte der Royalisten zu entziffern. 1649 wurde er von Cromwell deswegen auf den Geometrielehrstuhl in Oxford berufen.

Sein Werk *Arithmetica Infinitorum* erschien 1655 und enthält die berühmte *Wallissche Produktformel* für die Zahl π.

---

* Beide Daten nach dem gregorianischen Kalender. Dies sind nach dem damals in England gültigen julianischen Kalender der 23.11.1916 und 28.10.1703.

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots}$$

Aufgabe: Probiere mit Hilfe dieser Formel und einem Taschenrechner, die ersten Dezimalen von π zu bestimmen!

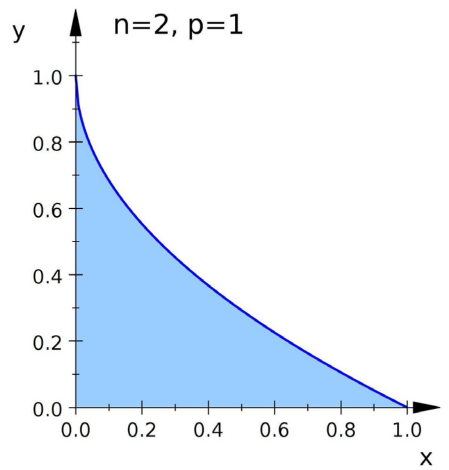
Wie entdeckte Wallis seine sonderbare Formel? Dazu musste er auch mathematisch „zwischen den Zeilen“ lesen.
Die Fläche unter der Kurve $y = \sqrt{1-x^2}$ für $0 \leq x \leq 1$ ist ein Viertel der Kreisfläche und beträgt somit $\frac{\pi}{4}$. Heutzutage schreibt man

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

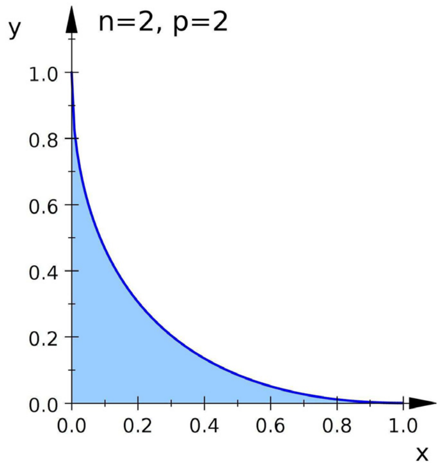
Aber zu Wallis Zeiten war die Integral- und Differentialrechnung noch nicht erfunden!
Wallis wusste, dass die Fläche unter der Kurve $y = x^{\frac{p}{q}}$ mit $0 \leq x \leq 1$ gegeben ist durch

$$\frac{1}{\frac{p}{q}+1}.$$

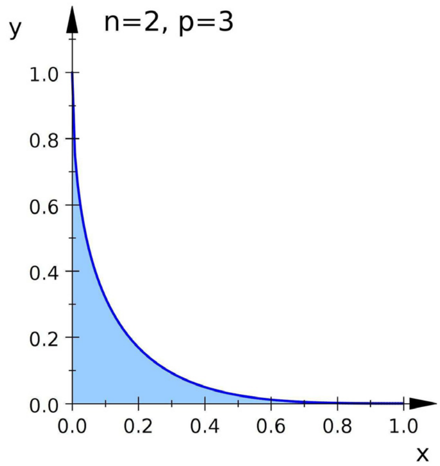
Ist $\frac{p}{q} = n$ eine natürliche Zahl, so beträgt diese Fläche $\frac{1}{n+1}$. Der Kehrwert $n+1$ ist dann ganzzahlig und drückt das *Verhältnis* zwischen der Fläche des Einheitsquadrats und der Fläche unter der Kurve $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$ aus.
Allgemeiner betrachtete Wallis nun das Verhältnis $A_{p,n}$ vom Einheitsquadrat zu der Fläche unter der Kurve $y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^n$ und $0 \leq x \leq 1$.



Die Kurve $y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^n$ *für* $n = 2,\ p = 1,\ 0 \leq x \leq 1$



Die Kurve $y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^n$ *für* $n = 2,\ p = 2,\ 0 \leq x \leq 1$



Die Kurve $y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^n$ *für* $n = 2,\ p = 3,\ 0 \leq x \leq 1$

Insbesondere interessierte sich Wallis für $p = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, da

$$A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

Für $p = 2$ und $n = 3$ geht es also um die Fläche unter der Kurve

$$\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 1 - 3x^{\frac{1}{2}} + 3x - x^{\frac{3}{2}},$$

also

$$1 - 3\frac{1}{\frac{1}{2}+1} + 3\frac{1}{1+1} - \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = 1 - 2 + \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Somit ist $A_{2,3} = 10$. So weitergehend konstruierte Wallis eine Tabelle für die $A_{p,n}$ für kleine Werte von n und p.

$p\backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3	1	4	10	20	35	56

Aufgabe: Rechne selbst einige der Einträge aus der Tabelle nach, zum Beispiel die Einträge mit $p = 1$ und $p = 3, n = 4$.

Die Zahlen hängen also höchst regelmässig von n und p ab. Ohne Mühe erkannte Wallis: *Binomialkoeffizienten, das Pascalsche Dreieck!*

$$A_{p,n} = \binom{n+p}{n}$$

Wallis versuchte nun *zwischen den Zeilen und Spalten zu lesen* und das Pascalsche Dreieck für *halbzahlige* Werte von n und p zu erweiteren. Insbesondere wollte Wallis auf diese Weise etwas über

$$X := A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

lernen. Für die Zahlen in der p-ten Zeile gilt die Beziehung

$$A_{p,n} = \frac{p+n}{n} A_{p,n+1}.$$

Aufgabe: Leite diese Beziehung aus der Formel für $A_{n,p}$ als Binomialkoeffizient her.

Er nahm nun an, dass dieser Sachverhalt auch gültig ist für $p = \frac{1}{2}$. Ausgehend von $A_{\frac{1}{2},0} = 1$ fand er

$$A_{\frac{1}{2},1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1} 1 = \frac{3}{2}, \quad A_{\frac{1}{2},2} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}, \ldots .$$

Für $p = \frac{1}{2}$ haben wir es mit die Fläche unter der Kurve $y = (1-x^2)^n$ zu tun, also können wir das Ergebniss auch direkt nachrechnen.

Aufgabe: Rechne dies nach für $n = 1, 2, \ldots$

Aufgabe: Sei $I_n := \int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx = (A_{\frac{1}{2},n})^{-1}$, $I_0 = 1$. Beweise mit Hilfe der *partiellen Integration*, dass gilt:

$$(1+2n)I_n = 2n \cdot I_{n-1}.$$

Also:

$$I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, \quad I_3 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \ldots$$

Wallis wendete nun dieselbe Regel für $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ an und fand

$$A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = X, \quad A_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}X = \frac{4}{3}X, \quad A_{\frac{1}{2},\frac{5}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} \cdot \frac{4}{3}X = \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 3}X, \ldots$$

Die Zeile für $p = \frac{1}{2}$ wird dann insgesamt zu

n	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
$A_{\frac{1}{2},n}$	1	X	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}X$	$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	$\frac{4\cdot6}{3\cdot5}X$	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$	$\frac{4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7}X$

Für festes p wachsen die Terme in einer Zeile des Pascalschen Dreiecks $A_{p,n}$ monoton mit n an und das Verhältnis zweier aufeinander folgender Terme $\frac{A_{p,n}}{A_{p,n+1}}$ strebt bei wachendem n monoton gegen 1.

Aufgabe: Für $p = 1$ und $p = 2$ ist dies klar. Kannst Du dies für $p = 3$ beweisen?

Wallis nahm an, dasselbe gelte für $p = \frac{1}{2}$ und fand so

$$X < \frac{3}{2}, \quad \frac{3}{2} < \frac{4}{3}X, \quad \frac{4}{3}X < \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}, \quad \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} < \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}X, \ldots$$

also durch Umstellung

$$X < \frac{3}{2}, \quad X > \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad X < \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 4}, \quad X > \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}, \ldots$$

und schließlich

$$X = \frac{4}{\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots$$

Was für eine herrliche Entdeckung!
Wallis konnte nicht alle seine Aussagen genau beweisen; die Mathematik stand noch ganz am Anfang und vieles musste noch erfunden werden.

Aufgabe: Kannst Du das Pascalsche Dreieck weiter fortsetzen? Was ist zum Beispiel $A_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}$?

Literatur:

1. John Stillwell, *Mathematics and its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1989. (p. 110-112).

2. Victor J. Katz, *A History of Mathematics, an introduction*, HarperCollins CollegePublishers, 1992. (p. 444-446).

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

- Bitte daran denken, den Abo-Beitrag (falls noch nicht geschehen) rechtzeitig auf das Monoid-Konto Nr. 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen! Das gilt auch für alle treuen Leser, die ihr Jahresabonnement im Schuljahr 2008/09 fortsetzen wollen.
- Am 29. November findet die Monoid-Feier mit der Preisvergabe 2008 statt. Eine Einladung findet Ihr auch auf Seite 31 und auf unserer Internetseite.
- Die Mitmachausstellung Mathematik be-greifen ist wieder zu sehen. Vom 24. Oktober bis zum 14. Dezember 2008 ist sie in Bernkastel-Kues zu Gast. Neben der Ausstellung gibt es auch wieder ein abwechslungsreiches Begleitprogramm. Nähere Informationen findet Ihr auf der Internetseite `www.mathematik-begreifen.de`.
- Zwar dauert es noch eine Weile, aber mittlerweile liegen ja auch schon die ersten Weihnachtsartikel in den Geschäften: Auch dieses Jahr wird es wieder einen interaktiven Adventskalender im Internet geben, bei dem es „hinter jedem Türchen“ eine mathematische Aufgabe gibt, die zu lösen ist. Für die erfolgreichsten Teilnehmer gibt es wieder Preise zu gewinnen. Adresse: `www.mathekalender.de`.

(MG)

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 93

Die Klassenangaben beziehen sich auf das Schuljahr 2007/08.

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Arne Broszukat 28, Sophie Gatzemeier 3, Maximilian Kiefer 9, Kira Köhler 3;
Kl. 6: Matthias Blitzer 12, Laura Tabea Galkowski 33, Sebastian Ludwig 42, Benedikt Maurer 11, Kareem Ramadan 7, Samuel Rischke 7, Julia Scherner 46, Sebastian Schröder 14;

Kl. 7: Lara Bergjohann 15, Eike Broszukat 27, Lea Clemens 12, Jochen Dahlem 10, Chantal Graversen 40, Sina Knappe 10, Dominik Meier 45, Andreas Pitsch 75, Sören Rathgeber 43, Max Rose 29, Freya Roth 41, Selina Weinheimer 10;

Kl. 8: Maximilian Haist 20, Kevin Schmitt 98; **Kl. 9:** Philipp Mayer 44,

Kl. 11: Max de Zoeten 10;

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 5: Luisa Kirsch 6, Stefanie Schmid 6;
Kl. 6: Jana Ballweber 13, Vincent Brugger 10;
Kl. 10: Lena Baum 41; **Kl. 11:** Felix Liebrich 62, Martin Reinhardt 33.

Altötting, König-Karlmann Gymnasium: Kl. 13: Amelie Hüttner 23.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 29; **Kl. 9:** Alexander Gerharz 35;
Kl. 11: Lennart Adam 76; **Kl. 12:** Christian Behrens 58, Martin Alexander Lange 60.

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber):
Kl. 5: Friederike Kienle 2, Lars Oberhofer 4;
Kl. 6: Janina Bast 19, Anna Gast 7, André Grenzendorf 1;
Kl. 8: Katharina Albert 8, Roberto Rossi 14, Alexander Schneider 4, David Wander 20;
Kl. 10: Jonathan Bohlen 31, Carl Degitz 33, Lisa-Marie Kienel 2, Susanne Nelke 3; **Kl. 11:** Anselm Schäfer 43.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 13: Laura Biroth 67.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 7: Frank Schindler 92.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:
Kl. 7: Christian Geiger 9, Florian Salamat 18, Alihan Tax 2.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 6: Julia Hahn 4, Lukas Vogel 7; **Kl. 8:** Paulina Hauser 27.

Erlangen, Ohm-Gymnasium: Kl. 10: Malte Meyn 76.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik:
Kl. 7: Vera Hartmann 35, Marie-Sophie Mahr 17, Janina Müller 34, Jana Scholz 26, Sebastian Winkler 4.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Philipp Arndt 13, Mara Koch 23, Lars Prepens 13, Justus Reitz 9, Joachim Roth 30, Julius Schultheis 9, Henrik Stenger 23;
Kl. 6: Thorsten Roth 56; **Kl. 9:** Kai Roth 34.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 9: Connor Röhricht 77.

Herzogenaurach, Gymnasium Herzogenaurach: Kl. 12: Lisa Janker 13.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrer: Christoph Straub):
Kl. 7: Shaima'a Ahmed Doma 44, Belkais Khaled 0, Aya Mohamed Mostafa 1;

Kl. 10: Alia'a Ahmed Doma 60; **Kl. 11:** Noha Abdel Wahab 8, Ghada Hisham 7, Hayat Selim 18; **Kl. 12:** Alia'a el Bolock 8.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Argawan Daschti 2, Thomas Rothenbächer 25, Niklas Staiger 6, Maike Stanischewski 46, Timur Can Zorlu 5;

Kl. 6: Alexander Erb 15, Maurice Remmers 2.

Lich: Dominique Hermens 14.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 10: Michaela Beck 4.

Ludwigshafen, Theodor-Heuss-Gymnasium:
Kl. 9: Stephan Böhmer-Horländer 35.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 5: Pauline Erning 11, Victor Jans 30, Askar Alexander Kleefeld 9, Lena Stenger 5, Meike Volk 1;

Kl. 6: Niklas Braun 9;

Kl. 7: Muriel Korz 7, Maraike Meder 3, Hannah Mies 9, Niklas Schliesmeier 35, Ronja Spannwald 21;

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 12: Alexey Tyukin 71.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 5: Magdalena Winkelvoß 46.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 5: Leonhard Wagner 13;

Kl. 8: Steffen Hettler 13, Tim Lutz 24, Tobias Soldan 13;

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 10: Florian Schweiger 79.

Mössingen, Quenstedt-Gymnasium: Kl. 8: Jack Rodin 16.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 7: Sophia Allex 15, Kendra Belthle 11, Ariane Bialas 7, Carolin Bialecki 4, Anna Braun 7, Viviane Brockerhoff 16, Sarah Doll 4, Eva Drews 4, Tabea Fausten 8, Leoni Fechter 3, Vanessa Funkel 8, Nina Gerlach 11, Carolin Heimes 7, Clara Jenker 8, Marika Kaules 11, Olivia Langwald 5, Colette Perillieux 12, Amelie Steentjes 7, Nicole Vergin 8;

Kl. 9: Vivien Kohlhaas 52;

Kl. 10: Madeline Kohlhaas 43.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:
Kl. 10: Wladimir Fust 4, Fynn Niclas Krause, Tristan Langenberg 8, Malte Sanders.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium:
Kl. 6: Ruwen Bergen 10, Tom Klein 5, Fabian Mertes 5, Janina Vogel 10;
Kl. 10: Celine Didierlaurent 15, Bettina Wiebe 15.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Georg Auburger 9, Andrea Behrent 45, Lutz Bischoff 32, Nils Blaschke 15, Michaela Czermin 12, Paul Döbert 4, Yasmina Gab 1, Michael Grunwald 13, Anna-Lena Hock 15, Jannik Hoffmann 15, Anna-Maria Klaas 5, Lucas Köhler 14, Heiko Kötzsche 37, Selma Mezger 3, Martin Müller 10, Thi Thao Nguyen 3, Mariam Rahi 8, Felix Sobotta 8, Richard von Mutius 5, Leonie Wietfeld 3;
Kl. 6: Matthias Bonarens 20, Alix Hieronymi 5, Viktoria Kunz 29, Miriam Lindert 10, Jeanne Merswolken 23, Camilla Metz 14, Anna Michel 3, Hannah Nagel 18, Julia Yeo-Peters 34;
Kl. 7: Tobias Braun 53, Valentin Kuhn 54, Agnes Valenti 17, Daniel Worring Pozo 6;
Kl. 8: Aline Endreß 20;
Kl. 10: Bianca Bellchambers 22, Vita Bellchambers 16, Markus Gierenstein 8, Larissa Habbel 14, Kilian Valenti 9;
Kl. 11: Valentin Walther 32, Annkatrin Weber 56;
Kl. 12: Stefan Albert 46.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 8: Simone Marquard 8. **Kl. 11:** Thomas Geiß 3.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 6: Caroline Alfter 4, Eric Amann 12, David Anders 11, Frederik Bartl 11, Lisa Marie Kiko 5, Alexander Knoop 19, Fabian Kreuzberg 5, Matthia Loevenich 4, Max Müthrath 4, Florian Peter 14, Sören Rauert 13, Jonathan Rochert 2, Alexandra Schwinges 4, Rebecca Simo 4, Eva Weber 6, Charlotte Wulff 6;
Kl. 8: David Feiler 93.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 6: Luis Ressel 46.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 9: Alexander Rettkowski 47.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 7: Dorothea Winkelvoß 8.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Kuntz):
N. N. 3;
Kl. 5: Markus Baldermann 17, Judith Geib 24, Anna Lena Meier 29, Lena Mohr 3, Elina Porz 16;
Kl. 6: Lorena Ritzmann 29, Paul Schädrich 15;
Kl. 8: Joel Jung 4.

ohne Angaben Christopher Ölmüller 25.

Jahrgang 28 | Heft 95 | September 2008

Inhalt

Hartwig Fuchs: Überraschungen beim Quadrieren 3
Marcel Gruner: Hättest du es gewusst – Wie wir mit Parabeln rechnen können 5
Martin Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik 8
Hartwig Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen – Die Würfelwette 9
Impressum 10
Hartwig Fuchs: Wer war's? 11
Hartwig Fuchs: Die besondere Aufgabe – Die Spiralrechnung des Archimedes 16
Mathis machen mathematische Entdeckungen 19
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 94 20
Neue Mathespielereien 23
Neue Aufgaben 25
Gelöste Aufgaben aus MONOID 94 26
Wer forscht mit? 31
Die Seite für den Computer-Fan 32
Wolfgang Moldenhauer: Bemerkungen zu „Spezielle Primzahlen“ 33
Florian Schweiger: Über Periodenlängen von Dezimalbrüchen 34
Duco van Straten: Zwischen den Zeilen 39
Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion 44
Rubrik der Löser und Löserinnen 44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid