

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

316 470 269 330 255 923 143 453 723 949 337 516 054 106 188 475 264 644 140
 304 176 732 811 247 493 069 368 692 043 185 121 611 837 856 726 816 539 985
 465 097 356 123 432 645 179 673 853 590 577 238 179 357 900 876 426 103 943
 782 376 494 591 742 934 588 497 117 587 146 916 972 984 761 159 060 873 250
 939 462 085 575 740 754 577 098 620 558 011 779 529 884 042 198 287 643 319
 330 465 064 455 234 988 142 139 565 785 447 474 023 546 353 758 537 324 801
 838 120 387 600 868 416 525 400 790 381 285 888 256 687 085 855 456 231 577
 527 939 305 920 811 766 585 308 670 132 129 155 221 804 381 548 625 787 943
 020 694 528 015 999 221 718 191 557 761 789 038 539 522 349 746 808 797 476
 907 664 050 601 248 473 206 874 133 194 663 585 334 983 805 734 803 620 705
 778 270 910 561 716 767 680 954 814 415 310 034 502 440 445 161 332 363 611
 749 326 163 346 444 542 332 941 724 120 365 148 892 204 420 675 302 563 534
 393 044 688 859 445 173 161 934 549 310 336 116 821 178 855 375 531 041 423
 821 706 430 796 012 246 288 037 483 476 218 396 982 916 073 816 451 058 991
 831 512 686 327 488 459 585 043 246 778 160 788 873 343 661 684 676 258 006
 436 582 840 222 063 757 785 048 077 389 404 912 747 062 648 672 186 003 349
 751 782 781 879 120 470 020 388 873 779 589 349 589 877 119 954 283 343 288
 199 886 936 593 732 250 320 339 998 610 072 339 381 292 833 594 919 318 294
 607 585 610 592 445 446 058 872 982 335 095 667 132 127 175 014 425 218 125
 214 413 231 078 371 985 641 017 807 775 785 493 244 577 889 145 039 577 777
 188 174 108 486 988 317 893 130 592 966 383 813 432 499 006 567 940 128 890
 939 479 244 323 108 485 896 276 588 430 953 410 742 355 843 709 083 268 647
 257 603 685 755 576 432 496 460 615 685 892 047 540 436 050 783 692 197 618
 658 469 334 121 647 320 471 115 721 375 248 270 317 298 667 413 885 986 449
 190 158 090 512 335 150 379 099 138 100 399 341 ... 12 976 785 Stellen folgen...

Eine mathematische Zeitschrift
 für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
 1980 gegründet von Martin Mettler
 gegenwärtig herausgegeben vom
 Institut für Mathematik an der
 Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz



Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben! **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den „Neuen Aufgaben“, „Wer forscht mit?“ und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.02.2009.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107

Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

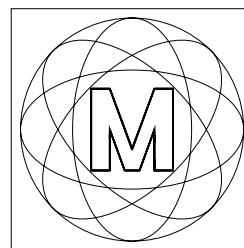
Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville. Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: **das Goldene M.**

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den „Neuen Aufgaben“ und den „Mathespielereien“, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Achtundzwanzig durch sieben

Eine mathematische Unterhaltung

von Martin Mattheis

Was ergibt $28 : 7$? Etwas Voreilige antworten jetzt vielleicht: 4. – Leider falsch; das richtige Ergebnis wäre 13 gewesen. Ja, richtig gelesen, wenn man genau nachrechnet, erhält man $28 : 7 = 13$. Hier der Beweis:

$28 : 7 =$	Die 7 geht nicht in die 2, also heben wir uns die 2 für später auf.
$28 : 7 = 1$	Die 7 geht einmal in die 8, also 1 hinters Gleichheitszeichen
$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 1 \end{array}$	7 unter die 8 geschrieben und Strich drunter.
	8 minus 7 = 1, also die 1 hinschreiben.
$28 : 7 = 1$	Wir erinnern uns an die vorhin für später aufgehobene 2.
$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 21 \end{array}$	Diese kommt jetzt zum Einsatz:
	Einfach wieder an die richtige Stelle schreiben!
$28 : 7 = 13$	Und jetzt wird es ganz einfach:
$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 21 \end{array}$	Die 7 geht 3-mal in die 21.
	Also einfach die drei hinters Gleichheitszeichen und fertig.

Immer noch nicht überzeugt? Machen wir einfach die Probe:

$13 \cdot 7$	
$\begin{array}{r} 21 \\ 7 \\ \hline 28 \end{array}$	7 mal 3 ist 21.
	7 mal 1 ist 7.
	7 und 1 ergibt 8, noch die 2 dazu geholt und wir haben 28.

Skeptiker aus Prinzip, was? Dann eben eine weitere Probe nur mit Addieren:

13	Wir addieren zuerst die Dreien:	3
+13		6
+13		9
+13		12
+13		15
+13		18
+13		21
$\begin{array}{r} 13 \\ +13 \\ +13 \\ +13 \\ +13 \\ +13 \\ +13 \\ \hline 28 \end{array}$	Und dazu noch die Einsen: 22, 23, 24, 25, 26, 27 und 28.	

Auch beim reinen Addieren erhalten wir also wieder das Ergebnis $13 \cdot 7 = 28$, womit wohl auch die größten Zweifler überzeugt wären...

Die Idee zu diesem Beweis entstammt einer Szene aus dem Spielfilm *In The Navy* (USA 1941) mit Bud Abbott and Lou Costello, womit wieder einmal klar wäre: Mathematik ist überall!

Mathematische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

Angelika Brox, Karen Grol: „rätselhaft + wunderbar. Eine literarische Reise in die Welt der Zahlen“

Im Jahr der Mathematik sind erfreulich viele sehr schöne Bücher zu unterschiedlichsten mathematischen Themen neu erschienen. Einige davon bieten als Sammlung verschiedener Kurzbeiträge, die verschiedenste Facetten der Mathematik beleuchten, einen mehr oder weniger umfassenden Überblick über diese lebendige Wissenschaft. Unter allen diesen Sammelbänden stellt der von Angelika Brox und Karen Grol herausgegebene Band „rätselhaft + wunderbar – Eine literarische Reise in die Welt der Zahlen“ eine Besonderheit dar. Die darin abgedruckten 27 äußerst unterhaltsamen Kurzgeschichten sind das Ergebnis eines Literaturwettbewerbs, den der Verlag Stories and Friends zum Jahr der Mathematik ausgeschrieben hatte.

Neben mathematischen Inhalten unter anderem aus den Bereichen Arithmetik, Stochastik, Analysis, Geometrie und Logik bestechen die Kurzgeschichten vor allem durch die literarische Kreativität und Qualität, mit der diese Inhalte umgesetzt werden.

Gruppirt wurden die verschiedenartigen Geschichten in die sechs Rubriken: Mathematik macht Spaß, Mathematik ist spannend, Mathematik ist praktisch, Mathematik ist wunderbar, Mathematik ist romantisch und Mathematik ist sexy.

Für alle Leser, denen die literarische Umsetzung der mathematischen Inhalte alleine zu wenig ist, wurde nach jeder Kurzgeschichte eine kurze Erläuterung der mathematischen Hintergründe angefügt. Leser, denen es nur auf die Kurzgeschichte selbst ankommt, können diese Seiten getrost überblättern.

Fazit: Die literarische Reise in die Welt der Zahlen ist den Herausgebern vollständig und abwechslungsreich gelungen. Verschiedene Kurzgeschichten sprechen verschiedene Leser an: Von mathematischen Laien bis hin zu Fachleuten ist für Jeden etwas dabei.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Brox, Angelika/Grol, Karen: rätselhaft + wunderbar. Eine literarische Reise in die Welt der Zahlen; Stories & Friends, 2008, ISBN 978-3-9811560-3-4, gebunden, 297 Seiten, 17,90 €

Art des Buches:	Sammelband literarischer Kurzgeschichten zu mathematischen Inhalten
Mathematisches Niveau:	meistens leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Wer war's?

von Wolfgang J. Bühler

Sein Urgroßvater floh wegen der Unterdrückung der protestantischen Niederländer durch die katholischen Spanier (unter dem Herzog von Alba¹ – dies ist auch das Thema von Goethes² Trauerspiel „Egmont“) 1570 mit seiner Familie aus Antwerpen zunächst nach Frankfurt. Der Großvater wurde 1622 Bürger der Stadt Basel. Der Vater, Ratsherr in Basel, drängte den Gesuchten zum Studium der Theologie, das er auch im Alter von 23 Jahren abschloss. Daneben ging er insgeheim seiner Neigung zur Mathematik und zur Astronomie nach. 1684 soll er eine ihm angebotene Professur in Heidelberg abgelehnt haben, anscheinend weil er sich in Basel verheiraten wollte. Von 1687 bis zu seinem Tod war er Professor der Mathematik in Basel. Sein Hauptwerk über die „Kunst des Vermutens“ wurde erst acht Jahre nach seinem Tod durch einen Neffen, ebenfalls Mathematiker, veröffentlicht.

Des Rätsels Lösung



Der Gesuchte ist Jakob I. Bernoulli, * 06.01.1655 in Basel, † 16.08.1705 ebenda.*** Nachdem er sein Theologiestudium abgeschlossen hatte, reiste er über Genf und Frankreich in die Niederlande und nach England und knüpfte Kontakte zu den bedeutendsten Mathematikern und Physikern seiner Zeit. In Genf hatte er sich als Hauslehrer einer Blinden verdingt und (circa 150 Jahre vor Braille!) eine Blindenschrift entwickelt. Seine Beschäftigung mit der Astronomie führte zu einer (unrichtigen) Theorie über Kometen. Nach seiner Rückkehr in die Schweiz hielt er als Privatdozent bedeutende Vorlesungen über Mechanik von Flüssigkeiten und von Festkörpern.

¹ Don Fernando Álvarez de Toledo y Pimentel, 3. Herzog von (Duque de) Alba, * 29.10.1507 in Piedrahita Kastilien, † 11.12.1582 in Lissabon; spanischer Edelmann, Feldherr und Staatsmann im Dienste des Kaisers und spanischen Königs. Von 1567 bis 1573 war Alba Statthalter der Spanischen Niederlande.

² Johann Wolfgang Goethe, * 28.08.1749 in Frankfurt am Main, † 22.03.1832 in Weimar; Dichter, Theaterleiter, Kunsttheoretiker und Staatsmann, wurde 1782 geadelt.

Am bekanntesten ist Jakob I. Bernoulli heute für seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Sein wichtigstes Werk ist hier die *Ars conjectandi* (Kunst des Vermutens), die er nicht mehr vollständig fertigstellen konnte. Sein Neffe Nikolaus Bernoulli gab dieses Werk mit Hilfe anderer hinterlassener Aufzeichnungen 1713 heraus. Es behandelt unter anderem Gewinnchancen bei verschiedenen Glücksspielen, enthält aber auch wichtige theoretische Resultate wie Erwartungswert, bedingte Wahrscheinlichkeit und das (schwache) Gesetz der großen Zahlen.

Die Ungleichung

$$(1 + a)^n > 1 + na$$

heißt *Bernoullische Ungleichung*, benannt nach Jakob I. Bernoulli*. Sie war al-

³ Die Bezeichnung Jakob I. dient zur Unterscheidung von seinem Großneffen Jakob II. Bernoulli (* 17.10.1759 in Basel, † 03.07.1789 in St. Petersburg; Schweizer Mathematiker und Physiker). Die Lebensdaten sind nach dem damals in Basel gültigen julianischen Kalender angegeben, im gregorianischen Kalender entsprechen diese Tage dem 27.12.1654 beziehungsweise 16.08.1705. Jakob Bernoulli ist mein akademischer Ururururururur-großvater, – siehe dazu den Artikel „Mathematische Ahnen“ im nächsten Heft.

⁴ siehe Artikel „Das Isochronen-Problem“ auf Seite 38 in diesem Heft

5 Johann Bernoulli, * 06.08.1667 in Basel, † 01.01.1748 in Basel; schweizer Mathematiker und Arzt. Auch seine Söhne Daniel Bernoulli und Johann II. Bernoulli wurden bedeutende Mathematiker. zu seinen Schülern gehörte unter anderem Leonhard Euler.

* Zu den biographischen Daten lies bitte den Artikel „Wer war's“ ab Seite 5.

lerdings schon vor Bernoulli von Isaac Barrow** gefunden worden.

- a) Zeige, dass die Bernoullische Ungleichung gilt für $-1 < a < \infty$, $a \neq 0$ und $n = 2, 3, 4, \dots$!
- b) Zeige, dass die Bernoullische Ungleichung gilt für $-2 < a < -1$ und $n = 2, 3, 4, \dots$!
- c) Was kannst Du über den Fall $a < -2$ sagen?

Lösung

- a) Wir verwenden die Methode der vollständigen Induktion mit Induktionsanfang bei $n = 2$: $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$.
Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir die Gültigkeit der Bernoullischen Ungleichung für $n = k$ an, also $(1 + a)^k > 1 + ka$ und schließen daraus

$$\begin{aligned}(1 + a)^{k+1} &= (1 + a)(1 + a)^k \\ &> (1 + a)(1 + ka) = 1 + (k + 1)a + ka^2 > 1 + (k + 1)a.\end{aligned}$$

Bei der ersten Abschätzung $>$ haben wir verwendet, dass $1 + a > 0$ ist. Somit gilt die Ungleichung auch für $n = k + 1$.

- b) Für gerade n gilt die Ungleichung wegen $(1 + a)^n > 0 > 1 + na$.
Im Fall ungerader n verwenden wir wieder vollständige Induktion, diesmal in Zweierschritten und beginnend bei $n = 3$: $(1 + a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$. Die Ungleichung gilt also dann, wenn $3a^2 + a^3 > 0$, das heißt wenn $3 + a > 0$ beziehungsweise $a > -3$ ist. Dies folgt aber aus der Voraussetzung $a > -2$. Gilt die Ungleichung für $n = k$ für ein ungerades k , so ist

$$\begin{aligned}(1 + a)^{k+2} &= (1 + a)^2(1 + a)^k \\ &> (1 + 2a + a^2)(1 + ka) \\ &= 1 + (k + 2)a + (2k + 1)a^2 + ka^3\end{aligned}$$

und dies ist größer als $1 + (k + 2)a$, falls $a > -\frac{2k+1}{k}$. Die letzte Ungleichung folgt wieder aus $a > -2$. Damit gilt die Bernoullische Ungleichung also für $n = k + 2$, das heißt den nächsten ungeraden Wert und somit alle ungeraden Werte.

- c) Wie im Teil b) sieht man, dass die Bernoullischen Ungleichung für gerade n gilt, aber auch, dass sie schon für $n = 3$ nicht gilt, wenn $a < -3$ ist. Allgemein sieht man für ungerade n , dass für $a < -2$ die Potenz $(1 + a)^n$ schneller gegen $-\infty$ strebt als der lineare Ausdruck $1 + na$. Damit kann die Bernoullische Ungleichung für hinreichend große ungerade n nicht gelten.

** Isaac Barrow, * Oktober 1630 in London, † 04.05.1677 in London, englischer Geistlicher und Mathematiker.

Wie viele Brüche gibt es?

von Wolfgang J. Bühler

Rationale Zahlen sind Quotienten $\frac{m}{n}$ von ganzen Zahlen m und n , auch kurz *Brüche* genannt. Wir wollen uns im Folgenden auf positive rationale Zahlen $\frac{m}{n}$ beschränken. Dann sind m und n natürliche Zahlen. Wir können uns diese Zahlen zum Beispiel so aufschreiben:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$		...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$			...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$				...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$					...
$\vdots$						

Dabei können wir die markierten Brüche weglassen, weil sie in der Liste schon weiter oben vorkommen (beispielsweise können wir $\frac{2}{2}$ auf $\frac{1}{1}$ kürzen).

Wir haben so eine Methode gefunden, die rationalen Zahlen abzuzählen: $\frac{1}{1}$ ist die erste, $\frac{1}{2}$ die zweite, $\frac{2}{1}$ die dritte, ..., $\frac{3}{4}$ die vierzehnte, ... Es gibt also *abzählbar viele* rationale Zahlen, das heißt gleich viele wie natürliche Zahlen, denn zu jeder natürlichen Zahl n gehört die n -te rationale Zahl in der Liste und umgekehrt gehört zur n -ten rationalen Zahl der Liste die natürliche Zahl n .

Diese Methode heißt nach ihrem Entdecker *erstes Cantorsches Diagonalverfahren**, denn wenn wir uns den zurückgelegten Weg beim Abzählen ansehen, so beschreibt er in oben vorgenommener Anordnung parallele Diagonalen von links unten nach rechts oben.

Um zu sehen, dass es auch irrationale Zahlen gibt, das heißt solche, die sich nicht als Brüche von ganzen Zahlen schreiben lassen, betrachten wir die Länge c der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{4}$. Nach dem Satz des Pythagoras** ist dann $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$. Wir nehmen nun an, dass c sich darstellen lässt als $c = \frac{m}{n}$, wobei wir m und n so

* Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, * 03.03.1845 in Sankt Petersburg, † 06.01.1918 in Halle (Saale); deutscher Mathematiker, insbesondere Begründer der Mengenlehre.

** Pythagoras (Πυθαγόρας), * um 570 v. Chr., † nach 510 v. Chr. in Metapont in der Basilicata; griechischer Mathematiker, Naturwissenschaftler, Musiktheoretiker und Phi-

wählen, dass man diesen Bruch nicht weiter kürzen kann. Dann ist $\frac{m^2}{n^2} = \frac{5}{16}$; also ist $16m^2 = 5n^2$ durch 5 teilbar. Das ist nur möglich, wenn m durch 5 teilbar ist, also $m = 5k$ und damit $5n^2 = 16 \cdot 25k^2$ oder $n^2 = 16 \cdot 5k^2$ mit einer ganzen Zahl k . Demnach muss auch n durch 5 teilbar sein, der Bruch $\frac{m}{n}$ also durch 5 kürzbar, was wir aber ausgeschlossen haben. Unsere Annahme $c = \frac{m}{n}$ führt also zu einem Widerspruch. Sie muss also falsch sein und die Zahl c ist damit nicht rational. Solche Zahlen heißen *irrational*.

Die Zahl c existiert aber, da wir die Zahl als Dreiecksseite konstruieren können. Außerdem ist sie Lösung der Gleichung $16x^2 - 5 = 0$. Man kann mit einigen Tricks beim Abzählen zeigen, dass sich die Menge aller Lösungen von Gleichungen der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit einer natürlichen Zahl n und ganzen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, wobei $a_n \neq 0$, abzählen lässt. Auch wenn n die Menge der natürlichen Zahlen durchläuft, ist die Menge dieser Zahlen oder Lösungen noch abzählbar.

Heißt das womöglich, dass wir die Menge aller reellen Zahlen, also die Vereinigung der rationalen und irrationalen Zahlen, immer noch abzählen können? Die Antwort ist nein, was wir als nächstes zeigen wollen.***

Dazu nehmen wir zunächst an, wir hätten eine Abzählung gefunden. Dann können wir die Zahlen nacheinander, also in der Reihe der ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen, als Dezimalzahlen aufschreiben. Wir wollen uns im Folgenden sogar auf die reellen Zahlen x mit $0 \leq x < 1$ beschränken. So haben wir vor dem Komma eine 0 und nach dem Komma eine Folge von Ziffern aus $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Wir konstruieren nun eine Zahl $z = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$ auf folgende Weise: Wir schauen uns die erste Zahl in unserer Liste an. Ist ihre erste Ziffer nach dem Komma eine 5, so setzen wir $z_1 = 8$, sonst wählen wir $z_1 = 5$. Zur Wahl von z_2 gehen wir ähnlich vor: Ist die zweite Nachkommaziffer der zweiten Zahl eine 5, so setzen wir $z_2 = 8$, sonst $z_2 = 5$. In der entsprechenden Weise bestimmen wir alle Ziffern von z : Ist die n -te Nachkommaziffer unserer n -ten Zahl eine 5, so setzen wir $z_n = 8$, sonst $z_n = 5$.

Wir behaupten nun, dass z keine Zahl aus unserer Liste sein kann. Käme nämlich z in unserer Liste vor, so hätte sie eine Nummer, zum Beispiel 328; wir brauchen dann nur die 328. Nachkommaziffer dieser Zahl mit z_{328} vergleichen und stellen fest, dass sie sich an dieser Stelle unterscheiden, da eine und nur eine der beiden Ziffern 5 ist. Wir haben also eine neue Zahl konstruiert; es gibt also mehr als abzählbar viele Zahlen: Die Menge aller reellen Zahlen ist so groß, dass wir sie nicht abzählen können.

Auch dieses Verfahren wurde von Cantor entdeckt und weil der Reihe nach

Iosoph. Gründete auch einen religiösen Geheimbund, dessen Motto „Alles ist Zahl“ war. Die Pythagoreer blieben auch nach seinem Tod kulturgeschichtlich bedeutsam.

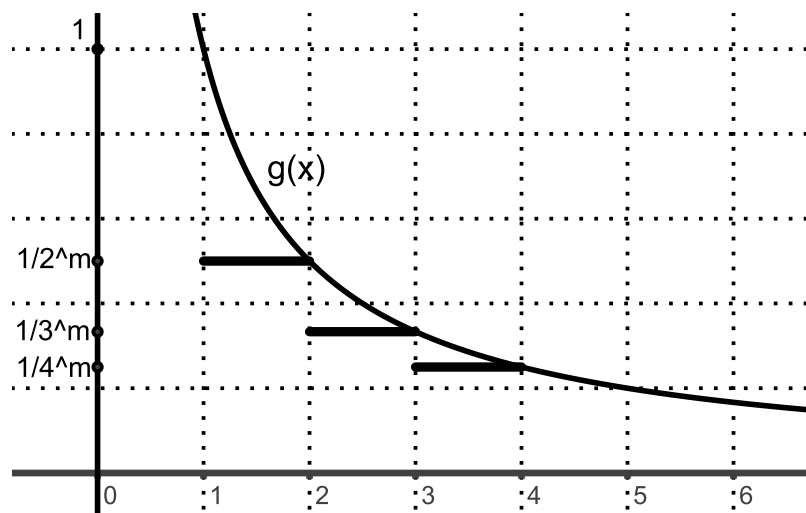
*** Das bedeutet insbesondere auch, dass es reelle Zahlen gibt, die nicht Lösung einer Gleichung wie oben sind.

die Nachkommastellen entlang einer Diagonalen geändert werden, heißt diese Methode *zweites Cantorsches Diagonalverfahren*.

Was bedeutet das für die Frage aus unserer Überschrift: „Wie viele Brüche gibt es?“ Zunächst überlegen wir uns, dass wir zu jeder reellen Zahl x eine rationale Zahl finden können, die sich von x um weniger als 10^{-n} unterscheidet. Dazu reicht es, die Dezimaldarstellung von x nach der n -ten Stelle abubrechen. Die rationalen Zahlen liegen also *dicht* in der Menge der reellen Zahlen.

Eine andere Überlegung zeigt uns, dass trotzdem der Anteil der rationalen Zahlen an der Menge aller reellen Zahlen verschwindend gering ist. Dazu denken wir uns die rationalen Zahlen abgezählt, das heißt als Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$ aufgeschrieben und wählen eine natürliche Zahl m . Um x_n legen wir dann ein Intervall der Länge $\frac{1}{(n+1)^m}$. Die Längen dieser Intervalle addieren sich dann zu $L_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots$. L_m ist die Fläche unter einer Treppenfunktion f_m mit

$$f_m(x) = \frac{1}{(1+n)^m} \quad \text{für } n < x \leq n+1 \text{ mit } n = 1, 2, 3, \dots$$



Diese liegt ganz unterhalb des Graphen von $g(x) = \frac{1}{x^m}$. Damit gilt $L_m < I_m$ mit

$$I_m = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^m} dx = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{x^{m-1}} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{m-1},$$

weil $\frac{1}{x^{m-1}}$ für x gegen ∞ „verschwindet“.

Durch Wahl von m können wir I_m und damit L_m so klein machen, wie wir wollen. Da jede rationale Zahl für jedes m in mindestens einem der Intervalle liegt, sehen wir, dass der Anteil der rationalen Zahlen kleiner ist als jedes $\frac{1}{m-1}$. Es gibt also „fast keine“ rationalen Zahlen.

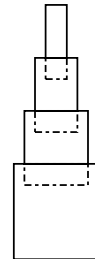
Hättest Du es gewusst?

Was ist die Teleskop-Technik in der Mathematik?

von Hartwig Fuchs

Als im Jahre 1608 der Niederländer Lipperhey* seine Erfindung eines Teleskopes publik machte, verbreitete sich die Nachricht von dem neuen Gerät sehr rasch. Und schon 1609 begann Galilei** damit, ebenfalls ein Teleskop für seine astronomischen Forschungen zu bauen. Gleich in der ersten Nacht, in der er sein Teleskop benutzte – am 7. Januar 1610 – entdeckte er drei Jupitermonde! Auch die Militärs erkannten schnell die Nützlichkeit der neuen Erfindung – konnten die Kriegsherren doch damit von ihren Feldherrenhügeln die Bewegung ihrer künftigen Opfer im Gelände unbemerkt ausspähen.

Allerdings waren Teleskope für solche Verwendungen anfangs noch ziemlich unhandlich – sie waren einfach zu lang. Aber eine technische Fortentwicklung brachte Abhilfe: Man zerlegte das Rohr des Teleskops in mehrere ineinander schiebbare Teile; die mit dieser Technik möglichen Längenänderungen heißen *teleskopisch*.



Das Konstruktionsprinzip der Teleskope ist auch heute noch nicht veraltet: Man denke zum Beispiel nur an die ein- und ausfahrbaren Radioantennen der Autos. Was aber hat die Teleskop-Technik der Maschinen- und Instrumentenbauer mit der Mathematik zu tun?

Die mathematische Teleskop-Technik

Manchmal ist eine mathematische Größe festgelegt durch ein System (1) von Gleichungen, deren besondere Struktur es möglich macht, sie zu einer Gleichung (2) zusammenzufassen, in der im Wesentlichen nur noch die gesuchte Größe eine Rolle spielt. Das könnte so aussehen:

$$\begin{array}{rcl}
 & x_1 & = a_1 \\
 & x_2 - x_1 & = a_2 \\
 (1) \quad & x_3 - x_2 & = a_3 \\
 & \ddots & \vdots \\
 & x_n - x_{n-1} & = a_n
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \\ \\ + \\ \\ \downarrow \end{array}$$

* Hans Lipperhey, oft finden sich auch die Schreibweisen Jan Lipperhey oder Hans Lippershey, * um 1570 in Wesel, † September 1619 in Middelburg; hauptberuflich Brillenmacher.

** Galileo Galilei, * 15.02.1564 in Pisa, † 08.01.1642 in Arcetri bei Florenz; Mathematiker, Physiker und Astronom.

$$(2) \implies x_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Durch Addition der Gleichungen (1) erhält man die Gleichung

$$(x_1 - x_1 + x_2 - x_2 + x_3 - x_3 + \dots - x_{n-1}) + x_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

in der sich die Terme in der Klammer paarweise aufheben und so entsteht die Gleichung (2) – anschaulich formuliert: Die Gleichungen (1) lassen sich ähnlich wie ein Teleskop zu der Gleichung (2) „zusammenschieben“.

Ein solches Berechnungsverfahren heißt *Teleskop-Technik*.

Wir veranschaulichen an Beispielen, wie diese Technik funktioniert.

Anwendungen der Teleskop-Technik

Beispiel 1: Nullsummen

Von einer Folge $r_1, r_2, r_3, \dots$ reeller Zahlen seien $r_1 \neq 0$ und $r_2 \neq 0$ gegeben und r_n für $n \geq 3$ definiert durch die Bedingung $r_n = r_{n-1} - r_{n-2}$.

(3) Kann man dann zu jedem n , mit $n = 3, 4, 5, \dots$, aus der Menge $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ stets n Zahlen so auswählen, dass deren Summe den Wert 0 hat?

Wir wollen zunächst die Summe $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{n+2}$ mit Hilfe der Teleskop-Technik berechnen. Das dazu benötigte Gleichungssystem vom Typ (1) ist durch die Definitionsgleichung für die r_i , mit $3 \leq i \leq n+2$, unmittelbar gegeben:

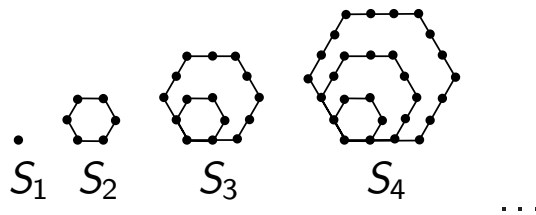
$$\begin{array}{rcl}
 r_2 & = & r_2 \\
 r_1 & = & r_1 \\
 r_3 & = & -r_1 + r_2 \\
 r_4 & = & -r_2 + r_3 \\
 & \vdots & \ddots \\
 r_{n+2} & = & -r_n + r_{n+1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow + \\
 \downarrow
 \end{array}$$

$$\implies r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{n+2} = r_2 + r_{n+1}$$

Daraus folgt nun, dass $r_1 + r_3 + r_4 + r_5 + \dots + r_n + r_{n+2} = 0$ ist für $n = 3, 4, 5, \dots$, sodass die Frage (3) zu bejahen ist.

Beispiel 2: Sechseck-Zahlen

Es sei S_1 ein Punkt und S_n , mit $n = 2, 3, 4, \dots$, seien Figuren aus ineinander geschachtelten regelmäßigen Sechsecken mit Punkten auf den Sechseckseiten, deren Bildungsregel aus den hier angegebenen Figuren S_2 , S_3 und S_4 ablesbar ist. Es sei $H(n)$ die Anzahl der Punkte der Figur S_n ; $H(n)$ heißt die n -te *Sechseck-* oder auch *Hexagonalzahl*.



(4) Wie groß ist die n -te Sechseckszahl $H(n)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$?

Da wir vermuten, dieses Problem könnte mit der Teleskop-Technik lösbar sein, versuchen wir als erstes ein Gleichungssystem vom Typ (1) zur Berechnung von $H(n)$ aufzustellen.

Das größte Sechseck in der Figur S_n enthält n Punkte auf jeder seiner sechs Seiten. Auf seinem Umfang befinden sich daher $6n - 6$ Punkte, da die Eckpunkte des Sechsecks, die ja zu jeweils zwei Seiten gehören, nicht doppelt gezählt werden dürfen. Von diesen $6n - 6$ Punkten kommen jedoch bereits $(n - 1) + (n - 2)$ Punkte im zweitgrößten Sechseck der Figur S_n vor.

Daher hat die Figur S_n insgesamt $6n - 6 - (n - 1) - (n - 2) = 4n - 3$ Punkte mehr als die Figur S_{n-1} , deren Punktezahl $H(n - 1)$ ist. Es gilt also $H(n) = H(n - 1) + 4n - 3$.

Die gleiche Überlegung wie für $H(n)$ gilt nun auch für $H(n - 1)$, dann für $H(n - 2)$, ..., und schließlich für $H(2)$. Also ist

$$H(i) = H(i - 1) + 4i - 3, \quad \text{für } i = 2, 3, 4, \dots \text{ und } H(1) = 1.$$

Mit dieser Formel kann das gesuchte Gleichungssystem vom Typ (1) leicht hingeschrieben werden.

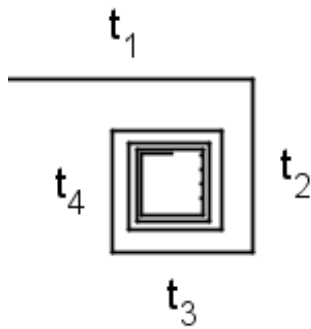
$$\begin{array}{rcl}
 H(n) - H(n - 1) & = & 4n - 3 \\
 H(n - 1) - H(n - 2) & = & 4(n - 1) - 3 \\
 H(n - 2) - H(n - 3) & = & 4(n - 2) - 3 \\
 \vdots & & \vdots \\
 H(2) - H(1) & = & 4 \cdot 2 - 3 \\
 H(1) & = & 4 \cdot 1 - 3
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \downarrow \end{array}
 \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ + \end{array}$$

$$\Rightarrow H(n) = 4(n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1) - 3n = 4 \cdot \frac{1}{2}n(n + 1) - 3n = 2n^2 - n$$

Damit ist das Sechseckszahl-Problem (4) gelöst: Es ist $H(n) = 2n^2 - n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

Beispiel 3: Spiralfiguren

Die Teleskop-Technik kann auch von Nutzen sein, wenn Ungleichungen statt Gleichungen im Spiel sind.



Eine Spiralfigur F_m bestehe aus m Teilstrecken t_l der Länge $\frac{1}{\sqrt{l}}$, mit $l = 1, 2, 3, \dots, m$.

- (5) Wie viele Teilstrecken sollte die Spirale besitzen, damit ihre Länge insgesamt mindestens n beträgt, wobei n eine gegebene natürliche Zahl ist?

Wegen $(\sqrt{i+1} + \sqrt{i})(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = 1$ gilt $\sqrt{i+1} - \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} < \frac{1}{\sqrt{i+1}}$. Damit erhält man das folgende Ungleichungssystem, mit dem man die Länge einer Spiralfigur F_m nach unten abschätzen kann:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{\sqrt{1}} & \geq & \sqrt{1} \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} & > & -\sqrt{1} + \sqrt{2} \\
 \frac{1}{\sqrt{3}} & > & -\sqrt{2} + \sqrt{3} \\
 \vdots & & \ddots \\
 \frac{1}{\sqrt{m}} & > & -\sqrt{m-1} + \sqrt{m}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ + \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m}} > \sqrt{m}$$

Da die Summe $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m}}$ die Länge der Spiralfigur F_m mit m Teilstrecken angibt, wähle man $m = n^2$, damit dann die aus n^2 Teilstrecken bestehende Spiralfigur F_{n^2} eine Länge $> \sqrt{n^2} = n$ besitzt.

Aufgaben zum Neuen Jahr

von Hartwig Fuchs

Zum Raten und Rechnen

Bestimme die Zahlen $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{16}$ und addiere sie. Wie groß ist ihre Summe?

Hinweis: Die letzte Ziffer von Z_i ist zugleich die erste Ziffer von Z_{i+1} für $i = 1, 2, 3, \dots, 15$.

Z_1 : größte Primzahl < 200

Z_2 : Summe der Form $1 + 2 + 3 + \dots + n$ (zweiziffrig)

Z_3 : n -te Wurzel aus 38 579 489 651 (dreiziffrig)

Z_4 : kleinste zweiziffrige Spiegelzahl (Palindromzahl)

- Z_5 : Quadratzahl (dreiziffrig)
- Z_6 : Produkt der Form $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ (dreiziffrig)
- Z_7 : Letzte zwei Ziffern von 3^{842}
- Z_8 : Zahl mit Ziffernprodukt 27 (zweififfrig)
- Z_9 : zwei letzten Ziffern von $\frac{24!}{10^4}$
- Z_{10} : größte ganzzahlige Lösung von $x^3 - 63x^2 - 4x + 252 = 0$
- Z_{11} : Quersumme von $10^{39} - 7$
- Z_{12} : Potenz von 2 (dreiziffrig)
- Z_{13} : Kubikzahl (zweififfrig)
- Z_{14} : Primzahl mit Quersumme 8
- Z_{15} : dreiziffrige Zahl abc (a, b, c Ziffern) mit $abc = a^1 + b^2 + c^3$
- Z_{16} : Anzahl der echten Teiler von 2009

Ziffernsumme 2009

Es sei n eine natürliche Zahl, in deren Dezimaldarstellung nur die Ziffern 2 und 9 vorkommen und welche die Ziffernsumme (Quersumme) 2009 besitzt.

- a) Wie heißt die kleinste der Zahlen n ?
- b) Wie heißt die größte der Zahlen n ?

Wahr oder falsch?

Gibt es natürliche Zahlen a und b derart, dass gilt

$$(a + b)(a - b) = 2009?$$

Hat die Gleichung eine Lösung?

Bestimme alle Lösungen (n, p) der Gleichung

$$n^2 = 2009 \cdot p + 1,$$

wobei n eine natürliche Zahl und p eine Primzahl sei – sofern es überhaupt Lösungen gibt.

Kann man so 2009 erreichen?

Gegeben sei die Menge $M_0 = \{21, 50\}$.

Wir vergrößern M_0 um eine weitere Zahl, welche die Summe von zwei nicht notwendig verschiedenen Elementen von M_0 ist. Diese Summe kann also $21 + 21 = 42$, $21 + 50 = 71$ oder $50 + 50 = 100$ sein. Dadurch erhalten wir eine der Mengen $\{21, 42, 50\}$, $\{21, 50, 71\}$ oder $\{21, 50, 100\}$, welche wir mit M_1 bezeichnen.

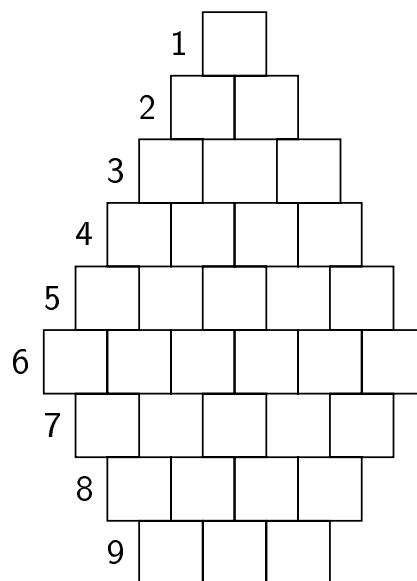
Ganz ebenso können wir eine neue vierelementige Menge aus M_1 bilden. Diese Menge nennen wir M_2 . Und so fortfahrend konstruieren wir die Mengen M_3 , M_4 , M_5 , ...

Kann man eine Menge M_n bilden, welche die Zahl 2009 enthält?

Unser Wunsch

Schreibe in die Kästchen der Figur die Ziffern der für die Zeilen 1 bis 9 so festgelegten Zahlen:

- 1: kleinste ungerade Primzahl
- 2: gerade Zahl mit Querprodukt 10
- 3: ungerade Palindrom-Zahl mit Quersumme 23
- 4: Zahl der Form $n^n + 67$
- 5: größte ganze Zahl, die kleiner als $\frac{1}{20}$ der Zahl aus Zeile 6 ist
- 6: größte Quadratzahl mit lauter verschiedenen Ziffern $\neq 0$
- 7: $2 +$ die vierte Potenz einer Primzahl
- 8: größte gerade Zahl mit den Ziffern aus Zeile 4
- 9: Zahl mit der Zifferndarstellung $(z^{n+2})(z^{n+1})(z^n)$



Ersetze dann eine Ziffer durch einen Buchstaben – und zwar so:

1	2	3	4	5
F oder S	J, N oder R	E	D oder H	I oder S
6	7	8	9	0
C oder R	G, O oder T	A, H oder L	U	B, U oder Ü

Zeilenweise gelesen ergeben die Buchstaben einen Wunsch der Redaktion für unsere L(o)eser

Die Lösungen findet Ihr auf Seite 34

Mathis machen mathematische Entdeckungen

In Heft 93 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Aufgabe: Vierecke im Quadrat

In einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 liegt ein Viereck V mit den Eckpunkten A, B, C, D und den Seitenlängen a, b, c, d . Das Viereck V kann ohne oder mit nach innen einspringender Ecke – also konvex oder nicht konvex – sein (die zwei Viereckstypen):



Für die Eckpunkte von V soll gelten: Entweder liegen sie alle oder nur einige oder aber keine von ihnen auf dem Rand von Q .

Untersuche nun die Fragen:

Für welchen Viereckstyp V gilt stets $a + b + c + d < 4$?

Gibt es Vierecke V mit $a + b + c + d = 4$ oder mit $a + b + c + d > 4$?

Tipp: Die so genannte Dreiecksungleichung könnte Dir von Nutzen sein (vgl. MONOID 93, Seite 9). (H.F.)

Ergebnisse

Nur **Alexey Tyukin** vom Gymnasium Gonsenheim in Mainz hat sich mit diesen Fragestellungen auseinander gesetzt. Hier seine Resultate.

- Für welchen Viereckstyp gilt stets $a + b + c + d < 4$?

Diese Frage ist mit „gar keinen“ zu beantworten, denn es gibt ein konvexes Viereck mit $a + b + c + d = 4$, nämlich genau dann, wenn A, B, C und D auf den Eckpunkten des Quadrates Q liegen. Alle weiteren konvexen Vierecke werden tatsächlich einen Umfang < 4 haben.

Nehmen wir an, dass alle Eckpunkte von V auf dem Rand von Q liegen, da solche Formen stets Extremfälle aller anderen sind.

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung stellt man auf:

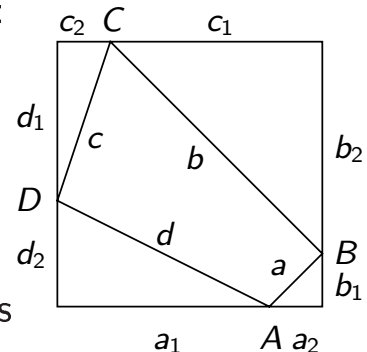
$$a_2 + b_1 > a$$

$$b_2 + c_1 > b$$

$$c_2 + d_1 > c$$

$$d_2 + a_1 > d$$

Addiert man alle vier Gleichungen, so ergibt das $a + b + c + d < 4$.

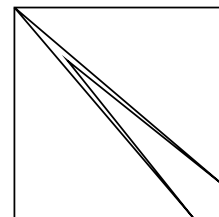
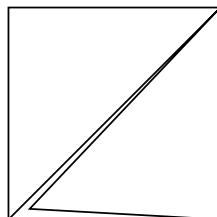
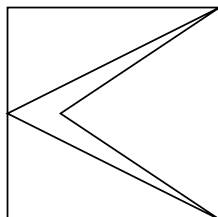


- Gibt es Vierecke V mit $a + b + c + d = 4$?

Ja, wenn die Ecken von V auf den Ecken von Q liegen.

- Gibt es Vierecke V mit $a + b + c + d > 4$?

Ja, es gibt nicht-konvexe Formen, die einen Umfang < 4 haben. Drei Beispiele:



Dabei lässt sich bei Vierecken des dritten Typs der größte Umfang erreichen (bis fast zur vierfachen Diagonalenlänge, also $4\sqrt{2} \approx 5,656$).

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 95

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Zahlen-Zählung

Wie viele fünfziffrige natürliche Zahlen < 70250 gibt es, deren Einerziffer 4 ist und die durch 3 teilbar sind? (nach Martin Mettler†)

Lösung:

Die kleinste fünfstellige durch 3 teilbare Zahl mit Einerziffer 4 ist 10014.

Addiert man 10, 20, 40, 50, 70, 80, ... zu einer durch 3 teilbaren Zahl, so ist die jeweilige Summe nicht durch 3 teilbar; addiert man dagegen ein Vielfaches von 30, dann ist die Summe durch 3 teilbar.

Nun ist 70224 die größte fünfstellige durch 3 teilbare Zahl < 70250 mit Einerziffer 4.

Wegen $70224 = 10014 + 2007 \cdot 30$ sind die Zahlen $10014 + i \cdot 30$, mit $i = 0, 1, 2, \dots, 2007$ durch 3 teilbar und haben die Einerziffer 4 – und weitere gibt es nicht.

Mithin gibt es 2008 solcher Zahlen.

Wasser zu Wein verwandeln – oder: In vino veritas

Winzer Kröger verkauft Wein für 1,50 € pro Liter. Albrecht Diskaunter ist zwar reich und sehr vermögend, aber auch mindestens so geizig. Daher ist ihm dieser Preis zu teuer. Er möchte maximal 1,20 € pro Liter bezahlen.

Da er ein Großkunde ist, kann Winzer Kröger es sich nicht leisten, ihn zu verlieren und muss sich auf diesen niedrigeren Preis einlassen.

In welchem Verhältnis muss Winzer Kröger den Wein mit Wasser „verdünnen“, welches ihm als Leitungswasser fast kostenlos zur Verfügung steht, um dennoch „seinen“ Preis zu erzielen? Wieviel Wein ist tatsächlich in einer 0,75-Liter-Flasche? (MG)



Lösung:

Das zu 1 Liter Wein hinzugefügte Wasser habe das Volumen x . Dann soll gelten:

$$1 \text{ l} \cdot 1,50 \frac{\text{€}}{\text{l}} + x \cdot 0 \frac{\text{€}}{\text{l}} = (1 \text{ l} + x) \cdot 1,20 \frac{\text{€}}{\text{l}} = 1,20 \text{ €} + x \cdot 1,20 \frac{\text{€}}{\text{l}}.$$

Damit ergibt sich:

$$x = \frac{1,50 \text{ €} - 1,20 \text{ €}}{1,20 \frac{\text{€}}{\text{l}}} = \frac{0,30 \text{ €}}{1,20 \frac{\text{€}}{\text{l}}} = \frac{1}{4} \text{ l}.$$

Also ist das Mischverhältnis von Wasser zu Wein 1 : 4.
In 0,75 l „Weingemisch“ befinden sich also nur 0,6 l reiner Wein.

Lösungsvariante:

Luis Ressel (Klasse 7, Friedrich-List-Gymnasium, Reutlingen) hat die Aufgabe mit dem Verfahren gelöst, das in Heft 90 vorgestellt wurde*:

Als erwünschtes Verhältnis schreibt man 1,20 € in die Mitte. An die linken Ecken kommen 1,50 € und 0,00 € (Preise von Wein und Wasser). Als Ergebnis erhält man das Mischverhältnis Wein : Wasser = 1,2 : 0,3 = 4 : 1.

Eine 0,75-l-Flasche enthält also $0,75 \text{ l} \cdot \frac{4}{5} = 0,6 \text{ l}$ Wein.

Wie erklärst Du das?

Nimm eine beliebige dreiziffrige Zahl, multipliziere sie mit 11 und danach noch mit 91 – Du erhältst so eine bemerkenswerte Zahl.

Kannst Du begründen, wie Dein Ergebnis zu Stande kommt? (H.F.)

Lösung:

Für jede dreiziffrige Zahl abc mit den Ziffern a , b und c gilt:

$$abc \cdot 11 \cdot 91 = abc \cdot 1001 = abc \cdot 1000 + abc = abc000 + abc = abcabc.$$

Niemals eine Primzahl?

Wenn $p \neq 3$ eine Primzahl ist, dann ist $p^2 + 2$ niemals eine Primzahl.

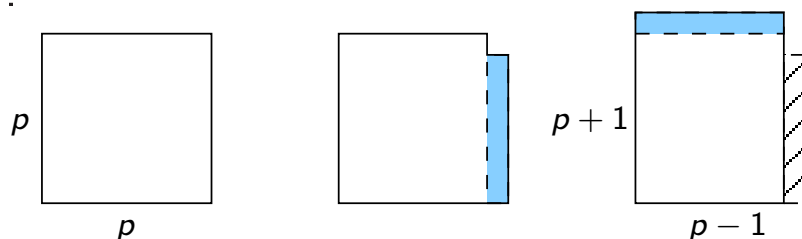
Stimmt das? (H.F.)

Lösung:

Lars Grütter (Röntgen-Gymnasium, Würzburg) stellte fest, dass alle Zahlen $p^2 + 2$, wobei p nicht durch 3 teilbar ist, durch 3 teilbar sind. Denn p lässt sich schreiben als $p = 3n + 1$ oder $p = 3n - 1$. Dann ist $p^2 + 2 = (3n + 1)^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 1 + 2 = 9n^2 + 6n + 3 = 3(3n^2 + 2n + 1)$ oder $p^2 + 2 = (3n - 1)^2 + 2 = 9n^2 - 6n + 1 + 2 = 9n^2 - 6n + 3 = 3(3n^2 - 2n + 1)$, also ist $p^2 + 2$ ein Vielfaches von 3, insbesondere also auch keine Primzahl.

Etwas länger ist der Beweis von Magdalena Winkelvoß (Klasse 6, Rabanus-Maurus-Gymnasium, Mainz). Auch sie stellte fest, dass $p^2 + 2$ immer durch 3 teilbar ist. Dann ist aber auch $p^2 - 1$ durch 3 teilbar.

Da sie in der 6. Klasse die Binomischen Formeln noch nicht kennt, leitet sie sich diese her:



* siehe Heike Winkelvoß: Apfelschorle gut gemischt; In: Monoid 90 (Juni 2007), Seiten 3–4

Von einem Quadrat der Seitenlänge p wird eine Ecke (1×1 -Quadrat) weggestrichen. Danach nimmt man eine der Reihen, an der ein Feld fehlt, und legt sie an der anderen Reihe, an der ein Feld fehlt, an. Damit hat man in dem Rechteck $p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$.

Die Zahlen $p - 1$, p und $p + 1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen, von denen genau eine durch 3 teilbar ist. Da $p \neq 3$ eine Primzahl ist, ist p nie durch 3 teilbar. Deshalb muss eine der Nachbarzahlen von p durch 3 teilbar sein und deshalb auch das Produkt $(p - 1) \cdot (p + 1) = p^2 - 1$ und somit $p^2 + 2$. Der Beweis gilt allgemein für jede natürliche Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, also zusätzlich auch für 1, 4, 8, ...

Multiplikative magische Quadrate

Bettina hat schon viele magische Quadrate ausgefüllt. Nun möchte sie etwas Neues ausprobieren. Aber was? Plötzlich hat sie eine Idee: „Ein *multiplikatives magisches Quadrat* ist (analog zu einem additiven magischen Quadrat) ein $n \times n$ -Quadrat, in welches n^2 verschiedene Zahlen eingetragen werden und zwar so, dass jede Spalte, jede Zeile und die beiden Diagonalen dasselbe Produkt ergeben.“

Die Einträge müssen nicht fortlaufend sein.

- Sogleich macht sie sich für das 3×3 -Quadrat an die Arbeit. Und tatsächlich! Nach kurzer Zeit hat sie ein multiplikatives magisches Quadrat mit dem Produkt 4096 gefunden. — Gib ein solches Quadrat an!
- Da Bettina gerne knobelt, gibt sie sich damit nicht zufrieden und füllt immer mehr Quadrate aus. Bald stellt sie fest: „Bei allen 3×3 -Quadraten, die ich gefunden habe, ist stets das ‚magische Produkt‘ gleich der dritten Potenz der mittleren Zahl. Ob das immer gilt oder ist es nur Zufall?“

(MG)

Lösung:

- Eine mögliche Lösung ist:

32	64	2
1	16	256
128	4	8

Dabei hat Bettina natürlich auch festgestellt, dass sie ganz leicht von einem additiven magischen Quadrat zu einem multiplikativen kommt: Sie muss nur jeweils in einem Feld, in dem für das additive Quadrat die Zahl n steht, die Potenz 2^n berechnen.

b) Es gilt nach Voraussetzung

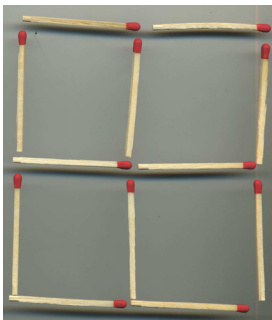
$$abc = def = ghi = adg = beh = cfi = aei = ceg =: \Pi$$

Damit ist

$$e^3 = \frac{aei \cdot beh \cdot ceg}{abc \cdot ihg} = \frac{\Pi^3}{\Pi^2} = \Pi.$$

Dieser Zusammenhang ist also kein Zufall sondern gilt für alle multiplikativen magischen Quadrate.

a	b	c
d	e	f
g	h	i



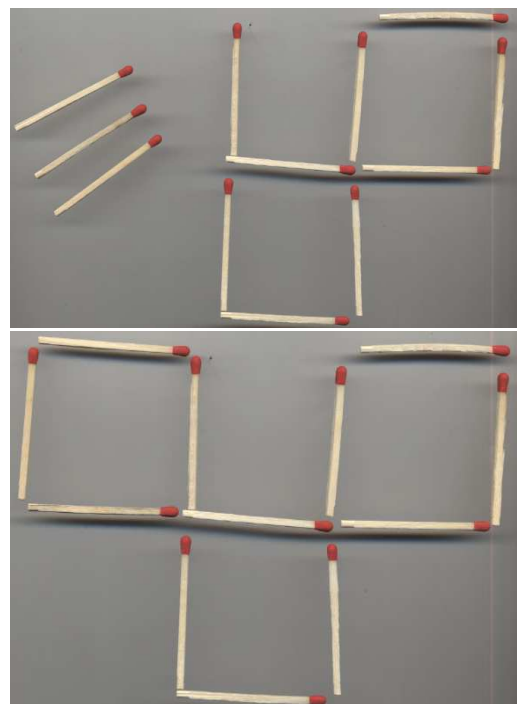
Zwölf Zündhölzer

Zwölf Zündhölzer bilden wie in der Abbildung vier gleich große Quadrate. Es sollen nur drei Zündhölzer so verlegt werden, dass eine Figur aus drei Quadraten entsteht, die alle drei gleich groß wie die vier Ausgangsquadrate sind. (WK)

Lösung:

Wir überlegen uns, dass von den vier Ausgangsquadern wohl zwei aufzulösen sind. Da nur drei Hölzer verlegt werden dürfen, können aus einem der aufzulösenden Quadrate zwei Hölzer und aus dem anderen ein Holz weggenommen werden, wobei darauf zu achten ist, dass die beiden anderen Quadrate erhalten bleiben. Einen Zwischenstand zeigt die nebenstehende Abbildung.

Die drei freien Zündhölzer werden nun an das eine einzelne Zündholz angehängt und es entsteht das dritte Quadrat.



Sitzordnung

An einem runden Tisch sitzen acht Personen, die mit A, B, C, D, E, F, G und H bezeichnet seien. Für ihre Sitzordnung gilt:

- (1) A sitzt diametral gegenüber B.
- (2) B sitzt neben H.
- (3) C hat A als rechten Nachbarn und sitzt diametral gegenüber von D.

- (4) E und F sind verfeindet und sitzen daher weder nebeneinander noch einander (diametral) gegenüber.
- (5) A ist kein Nachbar von F.

Bestimme die Sitzordnung der acht Personen.

(H.F.)

Lösung:

Die Sitzordnung kann in sechs logischen Schritten bestimmt werden:

1. Wähle A beliebig; mit (1) folgt die Position von B.
2. Aus (3) folgt zunächst die Position von C und daraus die Position von D.
3. Die Position von H folgt aus (2).
4. Die Position von F kann wegen (5) nur zwischen C und H sein. Wäre nämlich F ein Nachbar von D, dann wäre die Bedingung (4) für E unerfüllbar.
5. Mit der Position von F ist auch der Sitzplatz von E bestimmt.
6. G muss diametral gegenüber von F sitzen, da alle anderen Plätze bereits besetzt sind.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

In eigener Sache

Ihr haltet nun das Heft 96 in den Händen, bald können wir also Jubiläum, das 100. feiern.

Bei den Neuen Aufgaben sind wir auch schon weit im 900-er Bereich mit der Aufgabennummerierung, es steht also auch die 1000. Aufgabe kurz bevor.

Doch welches dieser beiden Ereignisse werden wir früher feiern können? Fallen diese Ereignisse vielleicht sogar zusammen?

Hinweis: Wir stellen in der Regel in jedem Heft sieben Neue Aufgaben. – Zusatzfrage für Zusatzpunkte: War es immer so, dass pro Heft sieben Neue Aufgaben gestellt wurden?(MG)

Die magische 7 und die auch noch viermal

Simone geht auf Entdeckungsreise durch die Welt der Zahlen. Ihr hat es die magische Sieben angetan. Sie entdeckt:

$$1 = 77 : 77$$

$$2 = 7 : 7 + 7 : 7$$

$$3 = (7 + 7 + 7) : 7$$

Jetzt sucht sie natürlich andere Zahlen, die ebenfalls nur mit Hilfe von genau vier Siebenen, Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und Klammern dargestellt werden können. Stelle die Zahlen 4 bis 10 so dar! (WK)

Wie lang ist das Schiff, wie alt der Kapitän?

Seeleute verbringen viel Zeit auf hoher See, und da kommt es schon mal vor, dass sich die Leute gegenseitig kleine Rätsel aufgeben. Ein junger Matrose will von seinem Kapitän wissen, wie lang eigentlich ihr Schiff ist. Der Kapitän testet seinen Mitarbeiter ein wenig und sagt: „Ich habe nicht weniger als drei Kinder. Deren Altersunterschied ist jeweils genau zwei Jahre. Wenn man die Alterszahlen meiner Kinder multipliziert, so kommt mein Alter heraus und das Schiff ist fünfmal so lang, wie ich alt bin.“ Jetzt kann der Matrose berechnen, wie lang das Schiff ist, und er weiß sogar, wie alt der Kapitän ist. (WK)

Staatsflagge

In einem neu gegründeten Staat soll die neue Staatsflagge aus drei horizontalen Streifen bestehen, wobei natürlich benachbarte Streifen nicht gleichfarbig sein dürfen. Für die Streifen stehen sechs Farben zur Auswahl.

Wie viele verschiedene Flaggen sind möglich? (H.F.)

Rechteck-Zerlegung

Zerlege das Rechteck, dessen Seiten 43 cm und 611 cm lang sind, in möglichst wenige Quadrate. (H.F.)

Finanzkrise

Jetzt wird es politisch... Euch dürfte aus den Nachrichten nicht entgangen sein, dass überall die Rede von einer weltumspannenden Finanz- oder Bankenkrise ist. Um noch größeren Schaden zu vermeiden, hat die Bundesregierung am 13. Oktober 2008 beschlossen, bis zu 480 Milliarden Euro für Hilfe zur Verfügung zu stellen.

- a) Das Geld muss auch irgendwo herkommen und Geld bekommt der Staat in erster Linie vom Steuerzahler. Angenommen die Hälfte aller in Deutschland lebenden 82 Millionen Einwohner zahlt Steuern: Wie viel muss jeder einzelne Steuerzahler aufbringen, um die 480 Milliarden Euro bereit zu halten?
- b) Deutsche Jugendämter empfehlen für 13- bis 15-Jährige Taschengeld in Höhe von 20 Euro monatlich. Wie lange muss Elena, die so viel bekommt, sparen, um diesen Pro-Kopf-Betrag zusammen zu haben?
- c) Ein 100-Euro-Schein hat die Abmessung 147 mm × 82 mm und ist 0,11 mm dick. Wie lang wäre die Strecke, wenn die 480 Milliarden Euro in solchen Scheinen (längs) aneinander gelegt würden (vergleiche die Länge mit dem Erdumfang) beziehungsweise wie hoch wäre ein Stapel aus solchen Scheinen übereinander?
- d) Ein Bankmanager, Josef Ackermann, verdiente 14 Millionen Euro im Jahr 2007*, ein ausgelernerter Bankangestellter nach Tarifvertrag rund 2000 Euro

* vgl. Vorstandschef Ackermann verdiente 14 Millionen Euro; In: Mitteldeutsche Zeitung,

monatlich (brutto). Wie lange muss ein solcher arbeiten, damit er so viel Geld bekommt, wie sein oberster Chef in einem Monat? Was fällt Dir an dieser Zahl auf?

- e) Ein Zinssatz von 1 % ist sehr gering. Wie viel Zinsen würde der Bankmanager pro Tag bekommen, wenn er sein Geld trotzdem zu diesem Prozentsatz anlegte? (Zum Vergleich: Der Regelsatz bei Hartz-IV beträgt für eine alleinstehende Person (Single) 351 € im Monat.) (MG)

Mittelwertfolgen

Katrin ist begeisterte Knoblerin und angespornt vom Artikel „Pappos und die Mittelwerte“ aus MONOID 94 entwickelt sie eine Zahlenfolge: Sie beginnt mit den Zahlen 1, 5 und jede folgende Zahl ist halb so groß wie ihr Vorgänger und ihr Nachfolger zusammen (arithmetisches Mittel!).

- a) Wie heißen die nächsten fünf Zahlen von Katrins Folge?
- b) Welches ist die 96. Zahl der Folge?
- c) Gehören die Zahlen 97 und 2009 zu Katrins Folge?
- d) Da Katrin es sehr anstrengend findet, alle Folgenglieder ausrechnen zu müssen, um irgend ein spätes Folgenglied bestimmen zu können, möchte sie eine explizite Formel herleiten, mit der sie direkt das n -te Folgenglied, mit $n \in \mathbb{N}$ berechnen kann. Nach kurzer Überlegung findet sie auch eine solche Formel. Wie lautet diese?
- e) Welches Phänomen tritt auf, wenn Katrin nicht „jede folgende Zahl ist halb so groß wie ihr Vorgänger und ihr Nachfolger zusammen“ festgelegt hätte, sondern „jede folgende Zahl ist halb so groß wie ihre beiden Vorgänger zusammen“? (MG)

Bislang größte Primzahlen gefunden – Teil 1

Wie Ihr im Artikel *Bislang größte Primzahlen gefunden* von Ulrike Müller lesen könnt, wurden vor Kurzem zwei neue, sehr große Primzahlen entdeckt, bei denen es sich um sogenannte Mersenne-Primzahlen handelt.

- a) Die damit größte bislang bekannte Primzahl ist die 45. Mersenne-Primzahl. Auf eine Seite in einem Monoid-Heft passen (bei normalem Satz) 43 Zeilen mit 65 Zeichen. Wieviele Seiten werden benötigt, um die komplette Zahl mit allen Ziffern abzudrucken?
- b) Ist die Mersenne-Zahl für $n = 3$ und $n = 11$ eine Primzahl?
- c) Ist die Mersenne-Zahl für $n = 4$ eine Primzahl?

Zwei weitere Aufgaben zu diesem Thema findet Ihr bei der Neuen Aufgabe 953. (Marcel Gruner und Ulrike Müller)

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 953: Bislang größte Primzahlen gefunden – Teil 2

Wie Ihr im Artikel *Bislang größte Primzahlen gefunden* von Ulrike Müller lesen könnt, wurden vor Kurzem zwei neue, sehr große Primzahlen entdeckt, bei denen es sich um sogenannte Mersenne-Primzahlen handelt.

- a) Wie lautet die letzte Ziffer der 45. Mersenne-Primzahl?
- b) Zeige: Ist $n = rs$ eine zusammengesetzte Zahl, dann kann die Mersenne-Zahl $2^n - 1$ keine Primzahl sein.

(Marcel Gruner und Ulrike Müller)

Aufgabe 954: Division mit der Parabel

Im Heft 95 hatten wir Euch im Artikel „Hättest Du es gewusst? – Wie wir mit Parabeln rechnen können“ einen Algorithmus vorgestellt, wie mit Hilfe der Normalparabel geometrisch multipliziert und dividiert werden kann. Allerdings hatten wir die Richtigkeit nur für die Multiplikation gezeigt. Als ich Lioba das nächste Mal besuchte, hatte sie zwischenzeitlich auch den Beweis für die Division aufgeschrieben.

Zeige, dass der Algorithmus für die Division das korrekte Ergebnis liefert! (MG)

Aufgabe 955: Sudoku mit Fehlern

Steht in einem Sudoku in der gleichen Zeile (oder der gleichen Spalte oder dem gleichen Teilquadrat) eine Ziffer doppelt (und fehlt dafür eine andere), so ist dies ein Fehler.

- a) Ist es möglich, ein Sudoku so auszufüllen, dass es in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem Teilquadrat jeweils einen Fehler hat, aber auch nur einen Fehler?
- b) Ist es möglich, ein Sudoku so auszufüllen, dass es insgesamt nur einen Fehler enthält, also entweder nur in einer Spalte oder nur in einer Zeile oder nur in einem Teilquadrat?
- c) Wie viele Fehler entstehen, wenn die in zwei Positionen stehenden Ziffern vertauscht werden?

(WJB)

Aufgabe 956: Parallelogrammdiagonale

Im Rechteck mit den Seiten a und b gilt für die Diagonale $d^2 = a^2 + b^2$.

Zeige, dass im Parallelogramm mit den Seiten a und b und den Diagonalen d_1 und d_2 gilt:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

(WJB)

Aufgabe 957: Summe reziproker Wurzeln

Bestimme (ohne Computer) ein möglichst kleines ganzzahliges Intervall, in dem die Zahl S liegt, wenn

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1009020}}$$

ist.

Tipp: Ein Lösungsansatz ist, dass Du zunächst beweist, dass für $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Mit elementaren Methoden haben wir nur ein Intervall der Länge 2 berechnen können, was wir im Sinne der Aufgabenstellung auch als „möglichst kleines“ ansehen.

(nach Martin Mettler†)

Aufgabe 958: Abstandssumme im Fünfeck

$ABCDE$ sei ein regelmäßiges Fünfeck und P sei ein Punkt im Inneren des Fünfecks. Die Abstände des Punktes P von den Seiten des Fünfecks seien mit d_1, d_2, d_3, d_4 und d_5 bezeichnet.

Zeige, dass gilt: Die Summe $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$ hat für jede Position des Punktes P im Inneren des Fünfecks den gleichen Wert. (H.F.)

Aufgabe 959: Proposed Problem

Sei $x_1 := 1$ und $2x_n^2 + 1 = 2x_n x_{n+1}$ für alle $n \geq 1$, dann gilt:

$$n \leq x_n^2 \leq n + \frac{1 + \ln n}{n}, \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

(Mihaly Bencze, Kronstadt, Rumänien; Übersetzung MG)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 95

Klassen 8–13

Aufgabe 946: Sedemichras Bauklötze

Der kleine Sedemichra hat drei Holzbauklötze

- eine Kugel,
- einen runden Zylinder, der so groß ist, dass die Kugel dort gerade hineinpassen würde (also mit gleichem Durchmesser und gleicher Höhe),
- einen (symmetrischen) Kegel, der so groß ist, dass er gerade in den Zylinder hineinpassen würde (also mit gleicher Grundfläche und Höhe wie dieser).



Da dies nur wenige Klötze sind und Sedemichra ein mathematisches Wunderkind ist, baut er nicht nur mit diesen Bauklötzen, sondern betrachtet diese ausgiebig und überlegt. Schließlich behauptet er:

- Kugel und Kegel haben zusammen das gleiche Volumen wie der Zylinder.
- Der Kegel hat das gleiche Volumen wie ein Doppelkegel mit gleicher Grundfläche und gleicher (Gesamt-)Höhe wie dieser einfache Kegel hätte.

Beweise oder widerlege Sedemichras Behauptungen! (MG)

Lösung:

Die Abmessungen resp. Parameter der Bauklötze sind:

- Kugel: Radius r
- Zylinder: Grundfläche ist ein Kreis mit Radius r , Zylinderhöhe $h = 2r$
- Kegel: Grundfläche ist ein Kreis mit Radius r , Kegelhöhe $h = 2r$

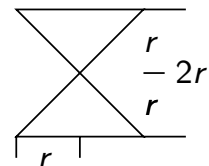
Mit den bekannten Volumenformeln ergeben sich

- für den Vergleich von Kugel und Kegel mit dem Zylinder:

$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Kegel}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}Gh = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \pi r^2 \cdot 2r \\ &= Gh = V_{\text{Zylinder}} \end{aligned}$$

- für Kegel und Doppelkegel:

$$\begin{aligned} V_{\text{Doppelkegel}} &= 2 \cdot V_{\text{kleiner Kegel}} \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r \right) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{1}{3}Gh \\ &= V_{\text{Kegel}} \end{aligned}$$



Beide Behauptungen stimmen also!

Aufgabe 947: Merkregel für eine Pin

Mathis trägt in seiner Brieftasche einen Zettel mit sich herum, auf dem der unauffällige Term

$$\frac{2008p - 11343}{2p + 1}$$

notiert ist.

Auf die Frage, welche Bedeutung dieser Term für ihn besitzt, antwortet Mathis: „Ich kann mir die vierziffrige Pin-Nummer meiner Bankkarte nicht merken. Deshalb merke ich mir nur: Dieser Bruchterm ist ganzzahlig für meine Pin-Nummer p und irgendwie ist darin eine fünfziffrige Primzahl versteckt.“

Wie heißt Mathis Pin? (H.F.)

Lösung:

Es gilt

$$\frac{2008p - 11343}{2p + 1} = \frac{1004(2p + 1) - 12347}{2p + 1} = 1004 - \frac{12347}{2p + 1}$$

Damit der Term ganzzahlig ist, muss $\frac{12347}{2p+1}$ ganzzahlig sein. Also ist $2p + 1$ ein Teiler von 12347, wobei $p \neq 0$ ist. Da 12347 eine fünfziffrige Primzahl ist – die im Aufgabentext erwähnt ist –, muss $2p + 1 = 12347$ und somit $p = 6173$ sein. Mathis Pin ist also 6173.

Aufgabe 948: Vergleich benachbarter Wurzeln

Es ist $\sqrt{2009} - \sqrt{2008} < \sqrt{2008} - \sqrt{2007}$.

Ist das Zufall oder gilt allgemein

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \text{ für jedes } n = 1, 2, 3, \dots? \quad (\text{H.F.})$$

Lösung:

Für $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt wegen $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > \sqrt{n-1}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \sqrt{n} - \sqrt{n-1} &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, so dass die Ungleichung immer zutrifft.

Aufgabe 949: Deutsches Institut für Normung – Teil III

DIN A₀ hat die Fläche 1 m², DIN B₀ hat die Fläche $\sqrt{2}$ m² und DIN C₀ hat die Fläche $\sqrt{\sqrt{2}}$ m². Den drei DIN-Reihen ist gemeinsam, dass die längere Seite a_n sich zur kürzeren Seite b_n wie $\sqrt{2}$ zu 1 verhält. Dabei erhält man das $(n+1)$ -te Format der Reihe durch Halbieren des n -ten Formats, d. h. $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

- Zeige, dass bei geeigneten Seitenverhältnissen $\frac{a_n}{b_n}$ dieses beim Dritteln statt Halbieren der längeren Seite erhalten bleibt.
- Für welche Verkleinerungsfaktoren v außer $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gibt es ein solches geeignetes Seitenverhältnis? (WJB)

Lösung:

- b) Die Angaben in der Aufgabe bedeuten $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = va_n$ und $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$, also $a_{n+1}b_n = a_nb_{n+1}$.

Daraus folgt $b_n^2 = a_{n+1}b_n = a_nb_{n+1} = va_n^2$ und somit $\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{v}$ bzw.

$$\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\frac{1}{v}}.$$

Da a_n die größere Seite sein soll, muss $0 < v < 1$ sein.

- a) ergibt sich aus b) als Spezialfall für $v = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 950: Wahr oder falsch?

Für jede natürliche Zahl n gilt:

- a) Ist n ungerade, dann ist $n^2 = 8k + 1$ für eine natürliche Zahl k ;
b) ist $n \neq 2$ gerade, dann ist $n^2 = 8k$ oder $n^2 = 8k + 4$ für eine natürliche Zahl k . (H.F.)

Lösung:

- a) Die Gleichung $n^2 = 8k + 1$ ist gleichbedeutend mit $n^2 - 1 = (n-1) \cdot (n+1) = 8k$. Weil n ungerade ist, sind $n-1$ und $n+1$ gerade. Also kann man $n-1$ auch als $2m$ schreiben mit einer natürlichen Zahl m .

Aus $n-1 = 2m$ folgt $n+1 = 2m+2 = 2(m+1)$. Daraus folgt

$$(n-1) \cdot (n+1) = 2m \cdot 2(m+1) = 4m(m+1).$$

Von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen, hier also m und $m+1$, ist eine auf jeden Fall gerade. $4m(m+1)$ ist also das Produkt von 4 und einer weiteren geraden Zahl, also durch 8 teilbar.

Also ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar. Folglich stimmt die Aussage.

- b) Wenn n gerade ist, ist entweder n durch 4 teilbar oder $n+2$ durch 4 teilbar.
Fall 1: n ist durch 4 teilbar.

Dann ist $n = 4m$ mit einer natürlichen Zahl m .

Daraus folgt $n^2 = (4m)^2 = 16m^2 = 8 \cdot 2m^2$ ist durch 8 teilbar.

Fall 2: $n+2$ ist durch 4 teilbar.

Dann ist $n+2 = 4m$ mit einer natürlichen Zahl m , also $n = 4m - 2$.

Daraus folgt $n^2 = (4m-2)^2 = 16m^2 - 16m + 4 = 8(2m^2 - 2m) + 4$.

Im Fall 1 setze $k = 2m^2$ und im Fall 2 setze $k = 2m^2 - 2m$. Also stimmt die Behauptung.

(Dorothea Winkelvoß, Klasse 8, Leibnizgymnasium, Wiesbaden)

Bemerkung: Dorotheas Lösung zur zweiten Teilaufgabe zeigt sogar die noch stärkere (also allgemeinere und schwierigere) Behauptung: Ist $n \neq 2$ gerade, dann ist $n^2 = 16k$ oder $n^2 = 16k + 4$ für eine natürliche Zahl k .

Aufgabe 951: Ein Messproblem

Fritz will genau 5 l Wasser in einen Quader, der oben offen ist, füllen. Der Quader hat die Innenmaße $L \times B \times H = 60 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Fritz kann das Wasser aus dem Wasserhahn direkt in den Quader füllen, ihm stehen jedoch keine weiteren Hilfsmittel zur Verfügung.

Wie muss Fritz vorgehen, um genau 5 l Wasser abzumessen?

(Thomas Geiß, 11, Leibniz-Gymnasium, Östringen)

Lösung:

Der Quader hat ein Volumen von $60 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 30000 \text{ cm}^3 = 30 \text{ l}$, also muss Fritz genau $\frac{1}{6}$ des Quaders füllen.

Fritz muss dazu den Quader schief stellen und so lange Wasser einfüllen, bis das die Hälfte des Bodens entlang seiner Diagonalen bedeckt beziehungsweise nur noch die andere Hälfte freigibt. Die Wassermenge hat jetzt die Form einer Pyramide.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} G_{\text{Quader}} h_{\text{Quader}} = \frac{1}{6} V_{\text{Quader}}$$

Die Wassermenge hat folglich das Volumen 5 l.

(Robin Fritsch, Klasse 8, Gymnasium Lehrte;
Alexey Tyukin, Klasse 13, Gymnasium Gonsenheim, Mainz.)

Aufgabe 952: Berechnung einer Potenz

Man soll für ein reelles x die Potenz x^{2008} in möglichst wenigen Schritten durch Multiplikation mit schon errechneten Potenzen berechnen.

Ein Beispiel mit 15 Schritten ist: $x \xrightarrow{\cdot x} x^2 \xrightarrow{\cdot x^2} x^4 \xrightarrow{\cdot x^4} x^8 \xrightarrow{\cdot x^8} x^{16} \xrightarrow{\cdot x^4} x^{20} \xrightarrow{\cdot x^{20}} x^{40} \xrightarrow{\cdot x^{20}} x^{60} \xrightarrow{\cdot x^{60}} x^{120} \xrightarrow{\cdot x^{120}} x^{240} \xrightarrow{\cdot x^{240}} x^{480} \xrightarrow{\cdot x^{480}} x^{960} \xrightarrow{\cdot x^{960}} x^{1920} \xrightarrow{\cdot x^{60}} x^{1980} \xrightarrow{\cdot x^{20}} x^{2000} \xrightarrow{\cdot x^8} x^{2008}$.

Kannst Du auch x^{2008} mit 14 oder weniger als 14 Multiplikationen berechnen? (H.F.)

Lösung:

Durch

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\cdot x} x^2 \xrightarrow{\cdot x^2} x^4 \xrightarrow{\cdot x^4} x^8 \xrightarrow{\cdot x^8} x^{16} \xrightarrow{\cdot x^{16}} x^{32} \xrightarrow{\cdot x^{32}} x^{64} \xrightarrow{\cdot x^{16}} x^{80} \xrightarrow{\cdot x^{80}} x^{160} \\ &\xrightarrow{\cdot x^{160}} x^{320} \xrightarrow{\cdot x^{320}} x^{640} \xrightarrow{\cdot x^{640}} x^{1280} \xrightarrow{\cdot x^{640}} x^{1920} \xrightarrow{\cdot x^{80}} x^{2000} \xrightarrow{\cdot x^8} x^{2008} \end{aligned}$$

ist x^{2008} mit nur 14 Multiplikationen berechnet.

Die Frage, ob man auch mit weniger als 14 Multiplikationen zum Ziel kommt, ist vermutlich zu bejahen.

Wer forscht mit?

In Heft 93 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Aufgabe: n -te Potenzen mit n Ziffern

Wir wollen eine n -ziffrige Zahl, die eine n -te Potenz ist, eine n -Zahl nennen.
Beispiel: Die Zahl 32768 ist eine 5-Zahl, weil sie fünfziffrig und $32768 = 8^5$ ist.
Untersuche nun die Fragen:

- a) Gibt es endlich oder unendlich viele n -Zahlen?
- b) Wenn es nur endlich viele n -Zahlen gibt, dann gibt es eine größte. Wie heißt sie gegebenenfalls? (H.F.)

Ergebnisse

Mit der Forscheraufgabe haben sich beschäftigt: **Lennart Adam** und **Christian Behrens** (Gymnasium am Römerkastell, Alzey), **Laura Biroth** (Humboldtschule, Bad Homburg), **Philipp Delhounge** (Otto-Hahn-Gymnasium, Hanau), **Florian Schweiger** (Gymnasium Marktoberdorf) und **Alexey Tyukin** (Gymnasium Gonsenheim, Mainz), ferner außer Konkurrenz Dipl.-Ing. (FH) Martin Schuler (Ulm).

Alle haben gezeigt, dass es nur endlich viele n -Zahlen gibt und haben die größte berechnet, nämlich $9^{21} = 109\,418\,989\,131\,512\,359\,209$. Einige haben darüber hinaus ermittelt, wie viele n -Zahlen es gibt (nämlich 49), und teilweise diese auch berechnet. Wir geben hier die Lösung von Lennart Adam wieder:

- a) Für eine n -Zahl z^n gilt, da sie n Stellen besitzt: $10^{n-1} \leq z^n \leq 10^n$, wobei $z \in \mathbb{N}$. Es folgt aus $n^n < 10^n$, dass

$$(1) \quad z < 10.$$

Da $z \in \mathbb{N}$, gilt also $z \leq 9$.

Da 9 die größte mögliche Zahl für z ist, kann die Beschränkung für n wie folgt gefunden werden:

$$\begin{aligned} 10^{n-1} &< 9^n && | \lg \\ \iff n-1 &< n \cdot \lg 9 && | : n \\ \iff 1 - \frac{1}{n} &< \lg 9 && | - 1 \\ \iff -\frac{1}{n} &< -1 + \lg 9 && | \cdot (-1) \\ \iff \frac{1}{n} &> 1 - \lg 9 \end{aligned}$$

und somit

$$(2) \quad n < \frac{1}{1 - \lg 9} = 21,8543\dots$$

Also gibt es nur endlich viele n -Zahlen.

Um die Gesamtanzahl der n -Zahlen zu bestimmen, muss man nur für 9 in der Ungleichung (2) die Zahlen 1 bis 8 einsetzen und den rechte Seite der Ungleichung abrunden. Die Summe aller abgerundeten Werte ist die Gesamtanzahl, da für n Zahlen nur die Ungleichungen (1) und (2) zutreffen müssen. In der folgenden Tabelle wurde diese Anzahl berechnet:

z	$n < \dots$	abgerundet
1	1,00	1
2	1,43	1
3	1,91	1
4	2,51	2
5	3,32	3
6	4,51	4
7	6,46	6
8	10,32	10
9	21,85	21
Summe:		49

- b) Die größte n -Zahl ist die Zahl mit dem maximalen n und maximalen z , also $9^{21} = 109\,418\,989\,131\,512\,359\,209$.

Die Seiten für den Computer-Fan

Eine spezielle Summendarstellung für natürliche Zahlen

Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ besitzt eine Darstellung der Form $n = p + m^2$ mit einer Primzahl p und dem Quadrat einer natürlichen Zahl m als Summanden. Überprüfe diese Aussage auf ihre Richtigkeit für alle $n < 10^4$. (H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2009 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte für den Forscherpreis zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de).

Ab diesem Schuljahr werden die Punkte ebenfalls bei der Wertung für den Forscherpreis berücksichtigt, den wir 2008 erstmals vergeben haben. Da es auch bei diesen Aufgaben um ein Forschen und Entdecken geht, erscheint uns dies passender und angemessener als eine Wertung wie bisher zusammen mit den Mathematik- und Knobelaufgaben.

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 94

Aufgabe: Das ungelöste Problem von Brocard

Henri Brocard*, französischer Ingenieur und Meteorologe, beschäftigte sich in seiner Freizeit mit elementarer Geometrie und Zahlentheorie. Dabei stieß er auf folgende Frage:

Für welche natürlichen Zahlen n ist $n! + 1$ eine Quadratzahl?
(Dabei bedeutet $n!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.)

Bis heute sind nur drei Lösungen mit „kleinem“ n bekannt.

- Bestimme diese drei Lösungen des Problems!
- Versuche weitere Lösungen $n < 10^t$ mit nicht zu kleinem t zu finden!
- Wandle das Brocardsche Problem ab, indem Du $n! + m$ mit einigen $m > 1$ untersuchst!
- Auch ist die Frage interessant, für welche n und m sich mit $n! + m$, $m \geq 1$, dritte Potenzen ergeben. (nach H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Problemstellung beschäftigt haben sich **Lennart Adam** (Gymnasium am Römerkastell, Alzey), **Laura Biroth** (Humboldtschule, Bad Homburg), **Philipp Delhougne** (Otto-Hahn-Schule, Hanau), **Florian Schweiger** (Gymnasium Marktoberdorf) und **Alexey Tyukin** (Gymnasium Gonsenheim, Mainz).

- Alle haben die drei bekannten Lösungen mit „kleinem“ n gefunden:

$$4! + 1 = 5^2, 5! + 1 = 11^2 \text{ und } 7! + 1 = 71^2.$$

- Weitere Lösungen wurden nicht gefunden, wobei die Einzelnen je nach benutztem System (Taschenrechner, Visual Basic, C++, Delphi) unterschiedlich große beziehungsweise eigentlich nur relativ kleine Bereiche untersuchen konnten.
- Für das abgewandelte Problem $n! + m = \text{Quadratzahl}$ mit $m > 1$ haben Lennart Adam, Philipp Delhougne, Florian Schweiger und Alexey Tyukin zahlreiche Lösungen gefunden; hier seien einige Beispiele herausgegriffen:
 $2! + 2 = 2^2$, $3! + 3 = 3^2$, $3! + 19 = 5^2$, $4! + 12 = 6^2$, $4! + 25 = 7^2$,
 $5! + 49 = 13^2$, ...
Erwähnt sei noch, dass Philipp Delhougne zusätzliche Untersuchungen für Zahlen m von spezieller Struktur anstellt.
- Auch für dritte Potenzen wurden Lösungen gefunden; wieder nur ein paar Beispiele: $2! + 6 = 2^3$, $3! + 21 = 3^3$, $4! + 3 = 3^3$, $5! + 5 = 5^3$, $5! + 96 = 6^3$,
 $6! + 611 = 11^3$, ...

* Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard, *12.05.1845 in Vignot, †16.01.1922 in Bar-le-Duc

Lösungen zu den Aufgaben zum Neuen Jahr von Seite 14

Zum Raten und Rechnen

$Z_1: 199$	$Z_5: 121$	$Z_9: 36$	$Z_{13}: 27$
$Z_2: 91$ für $n = 13$	$Z_6: 120$ für $n = 5$	$Z_{10}: 63$	$Z_{14}: 71$
$Z_3: 131$ für $n = 5$	$Z_7: 09$ ($3^{20} = \dots 01$)	$Z_{11}: 345$	$Z_{15}: 175$
$Z_4: 11$	$Z_8: 93$	$Z_{12}: 512$	$Z_{16}: 5$

Damit ist $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_{16} = 2009$.

Ziffernsumme 2009

- a) Die kleinste der Zahlen n befindet sich unter denjenigen Zahlen, welche die geringste Anzahl von Stellen besitzen. Wegen $2009 = 223 \cdot 9 + 1 \cdot 2$ hat die Zahl 223-mal die Ziffer 9 und einmal die Ziffer 2, wobei die Ziffern 9 die letzten Ziffern sind.

Folglich ist $\underbrace{2\,999\dots 9}_{223\text{-mal}}$ die kleinste der Zahlen n .

- b) Wegen $2009 = 1000 \cdot 2 + 1 \cdot 9$ befindet sich die größte der Zahlen n unter denjenigen Zahlen, die 1000-mal die Ziffer 2 und einmal die Ziffer 9 haben, wobei die Ziffern 2 die letzten Ziffern sind.

Folglich ist $9\,\underbrace{222\dots}_{1000\text{-mal}}$ die größte der Zahlen n .

Wahr oder falsch?

Wegen $2009 = 49 \cdot 41$ setze man $a = \frac{49+41}{2} = 45$ und $b = \frac{49-41}{2} = 4$. Dann ist $(45 + 4)(45 - 4) = 2009$.

Hat die Gleichung eine Lösung?

Aus $n^2 = 2009p + 1$ folgt $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = 2009p$. Daher sind $n - 1$ und $n + 1$ Teiler von $2009p = 7^2 \cdot 41 \cdot p$.

Für $n \pm 1$ kommen daher nur die folgenden zwölf Werte in Frage: 1, 7, 41, 49, 287, 2009, p , $7p$, $41p$, $49p$, $287p$, $2009p$.

Prüft man nun nach, für welche dieser Werte die Gleichung $p = \frac{(n-1)(n+1)}{2009}$ ganzzahlige Lösungen $p \geq 2$ besitzt, dann findet man $p = 2007$ oder $p = 2011$. Da nur 2011 eine Primzahl ist, hat die gegebene Gleichung nur die eine Lösung $(n, p) = (2010, 2011)$.

Kann man so 2009 erreichen?

Eine Zahl m aus einer Menge M_i , $i > 0$, ist die Summe zweier Zahlen aus einer Menge M_{i-1} ; diese beiden Zahlen sind selbst Summe zweier Zahlen aus der

Menge M_{i-2} und so weiter absteigend, bis M_0 ergibt sich: m ist die Summe einer Anzahl x von Summanden 21 und einer Anzahl y von Summanden 50, also $m = x \cdot 21 + y \cdot 50$, mit $x \geq 0$, $y \geq 0$ aber $xy \neq 0$.

Annahme, es gibt eine Menge M_n , die 2009 enthält. Dann ist

$$(*) \quad 2009 = x \cdot 21 + y \cdot 50 \text{ für ein } x \text{ und ein } y.$$

Damit folgt aus $x \cdot 21 \leq 2009$, dass $x \leq 95$. Ferner ist $y \geq 1$, denn $(*)$ ist unerfüllbar für $y = 0$.

Da $y \cdot 50$ die Einerziffer 0 hat, muss $x \cdot 21$ die Einerziffer 9 haben, also ist $x \in \{9, 19, 29, \dots, 89\}$.

Die Zehnerziffer von $y \cdot 50$ ist 0 oder 5, je nachdem, ob y gerade oder ungerade ist. Also muss die Zehnerziffer von $x \cdot 21$ ebenfalls 0 oder 5 sein – das aber trifft nur zu für $x = 29$ oder $x = 79$.

Dann aber ist $y = 28$ oder $y = 7$ wegen $(*)$.

Aus $2009 = 29 \cdot 21 + 28 \cdot 50 = 79 \cdot 21 + 7 \cdot 50$ folgt, dass es Mengen M_n gibt, die 2009 enthalten; zum Beispiel ist

$$M_{85} = \{21, 42, 63, \dots, 1659, 50, 100, 150, \dots, 350, 2009\}$$

eine solche Menge, die man nach 85-facher Anwendung der gegebenen Konstruktionsregel erhalten kann. Es gibt aber noch weitere, insbesondere auch kleinere Mengen.

Unser Wunsch

Es sind

$$\begin{array}{lll} 1: 3 & 4: 5^5 + 67 = 3192 & 7: 2 + 17^4 = 83523 \\ 2: 52 & 5: 43617 & 8: 9312 \\ 3: 797 & 6: 934^2 = 872356 & 9: 842 \end{array}$$

Der Wunsch der Redaktion lautet:

EIN GUTES UND ERFOLGREICHES NEUES JAHR

Bislang größte Primzahlen gefunden

von Ulrike Müller

Am 23. August und 6. September 2008 war folgende Schlagzeile in der Presse zu finden: „Bislang größte Primzahl gefunden!“ Was verbirgt sich hinter dieser sensationellen Entdeckung?

Bei den Rekorden handelt es sich um die 45. und 46. Mersenne-Primzahlen, die von Mathematikern im Rahmen des Internet-Projektes GIMPS (= Great Internet Mersenne Prime Search; siehe <http://www.mersenne.org>) entdeckt worden sind. In diesem Projekt werden weltweit möglichst viele Computer an der Primzahlsuche beteiligt und die dafür benötigte Software kostenlos zur Verfügung gestellt.



Die ursprüngliche Theorie der Mersenne-Zahlen stammt von dem Mönch Marin Mersenne*, der auf der Suche nach einer Ordnung in den Primzahlen auf folgende Formel zur Erzeugung von Primzahlen stieß: $2^n - 1$. Bald jedoch fand Mersenne heraus, dass sich mit dieser Formel jedoch nicht immer Primzahlen erzeugen lassen. Nur für Primzahlen im Exponenten kann $2^n - 1$ eine Primzahl sein, aber auch dann nicht für alle. Probiere die Formel doch einmal für $n = 11$ aus!

Während die 45. Mersenne-Primzahl $2^{43112609} - 1$ (12978189 Stellen) von einem UCLA Mathematics Departments Computer entdeckt wurde, den Edson Smith installierte, stieß Hans-Michael Elvenich aus der Nähe von Köln, der Eigentümer der Homepage www.primzahlen.de, auf die 46. Mersenne-Primzahl $2^{37156667} - 1$ (11185272 Stellen).** Beide Zahlen haben somit den Rekord, eine Primzahl mit über 10 Millionen Stellen zu finden, gebrochen, doch nur der erste von beiden, Edson Smith, erhält den von EFF (= Electronic Frontier Foundation) ausgesetzten Preis von 100000\$, der innerhalb des Projektes aufgeteilt wird. Die ersten Stellen der 45. Mersenne-Primzahl könnt Ihr auf dem Titelblatt sehen.

* Marin Mersenne * 08.09.1588 in Sountière bei Bourg d'Oizé (Frankreich), † 01.09.1648 in Paris; Theologe, Mathematiker und Musiktheoretiker.

** Die Nummerierung bezieht sich auf die Reihenfolge der Entdeckung, daher ist die 45. Mersenne-Primzahl größer als die 46.

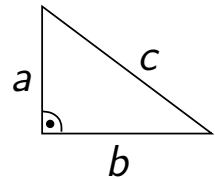
Pythagoras im Raum

von Hartwig Fuchs

Der Satz des Pythagoras „spielt“ in der Ebene. Er handelt von drei Strecken, die den Rand eines Dreiecks bilden, und von einer für die Mathematik fundamentalen Beziehung, die zwischen den Längen der drei Strecken besteht, sobald zwei Strecken orthogonal zueinander sind. Obgleich jeder sich an diesen berühmten Satz aus seiner Schulzeit erinnern wird, sei er hier noch einmal hingeschrieben:

Für ein Dreieck, bei dem zwei Seiten der Längen a , b orthogonal sind und die dritte Seite die Länge c hat, gilt:

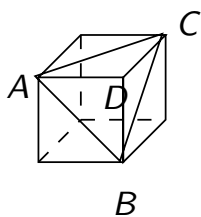
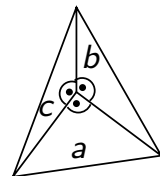
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Wir wollen nun eine im Raum gültige analoge Form des Satzes von Pythagoras finden. Dazu überlegen wir: Die „Mitspieler“ sollten eine um 1 höhere Dimension besitzen als die ihnen entsprechenden Objekte in dem für die Ebene gültigen Satz. Also statt drei Strecken, die ein Dreieck begrenzen, vier Dreiecke, die die Oberfläche eines Tetraeders bilden; statt Streckenlängen nun Flächeninhalte der Dreiecke: Zwischen den vier Flächeninhalten sollte dann eine dem Satz des Pythagoras entsprechende Aussage gelten, sobald drei der vier Dreiecke eine geeignete Orthogonalitätsbedingung erfüllen. Und so eine Bedingung lässt sich tatsächlich angeben! Unser „Satz des Pythagoras im Raum“ lautet dann:

Für ein Tetraeder, bei dem drei in einer Ecke zusammenstoßende Dreiecke mit den Flächeninhalten a , b und c rechtwinklig sind und dessen viertes Dreieck den Flächeninhalt d hat, gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

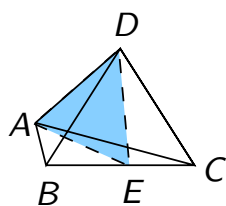


Damit ist

Dass es so etwas gibt, sehen wir an jeder Quaderecke: Speziell beim Einheitswürfel haben die Dreiecke $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ und $\triangle BCD$ alle den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$, während das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ die Fläche $\frac{1}{2}\sqrt{2}h$ mit der Höhe $h = \sqrt{\frac{3}{2}}$ besitzt.

$$|\triangle ABC|^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 = \frac{3}{4} = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = |\triangle ABD|^2 + |\triangle ACD|^2 + |\triangle BCD|^2.$$

Kehren wir zum allgemeinen Fall zurück und versuchen wir, den räumlichen Satz zu beweisen.



Es seien $\triangle_1 = \triangle ABD$ mit $|\triangle_1| = c$, $\triangle_2 = \triangle BCD$ mit $|\triangle_2| = a$ und $\triangle_3 = \triangle CAD$ mit $|\triangle_3| = b$ die drei im Tetraedereckpunkt D zusammenstoßenden rechtwinkligen Dreiecke; $\triangle_4 = \triangle ABC$ mit $|\triangle_4| = d$ sei das vierte Dreieck. Die Längen der von D ausgehenden Tetraederkanten DA, DB, DC seien L_A, L_B, L_C .

Die Ebene durch AD , welche auf der Strecke $\overline{BC}$ senkrecht steht, schneide $\overline{BC}$ im Punkt E . Dann ist DE die Höhe von $\triangle_2$ – ihre Länge sei L_E . Wegen der Rechtwinkligkeit von $\triangle_2$ bei D ist $|\overline{BC}|^2 = L_B^2 + L_C^2$, sodass gilt: $|\triangle_2| = \frac{1}{2}|\overline{DE}||\overline{BC}| = \frac{1}{2}L_E\sqrt{L_B^2 + L_C^2}$ sowie $|\triangle_2| = \frac{1}{2}|\overline{DB}||\overline{DC}| = \frac{1}{2}L_B L_C$. Durch Gleichsetzung erhält man

$$(1) \quad L_E = \frac{L_B L_C}{\sqrt{L_B^2 + L_C^2}}.$$

Nach Voraussetzung ist $\overline{DA} \perp \overline{DB}$ und $\overline{DA} \perp \overline{DC}$, also gilt $\overline{DA} \perp \triangle_2$, woraus $\overline{DA} \perp \overline{DE}$ folgt. Dann aber ist mit (1):

$$|\overline{AE}|^2 = |\overline{DA}|^2 + |\overline{DE}|^2 = L_A^2 + L_E^2 = \frac{L_A^2 L_B^2 + L_A^2 L_C^2 + L_B^2 L_C^2}{L_B^2 + L_C^2}$$

und daher

$$(2) \quad |\triangle ABC|^2 = d^2 = \left(\frac{1}{2}|\overline{BC}||\overline{AE}|\right)^2 = \frac{1}{4}(L_A^2 L_B^2 + L_A^2 L_C^2 + L_B^2 L_C^2).$$

Wenn wir bedenken, dass $c^2 = \left(\frac{1}{2}L_A L_B\right)^2$, $b^2 = \left(\frac{1}{2}L_A L_C\right)^2$, $a^2 = \left(\frac{1}{2}L_B L_C\right)^2$ ist, dann folgt damit aus (2) der räumliche Satz des Pythagoras.

Das Isochronen-Problem

von Wolfgang J. Bühler

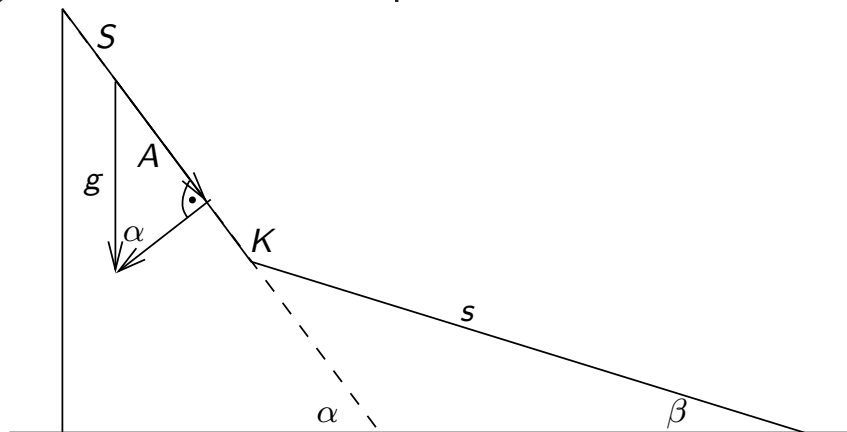
„Auch für tiefsinnige mathematische Überlegungen ist dies der rechte Platz. Es war im linken Trankessel der ‚Pequod‘, wo mir, während ich emsig mit dem Seifenstein im Kreis herumfuhr, die bemerkenswerte Tatsache zum Bewusstsein kam, dass in der Geometrie alle Körper, die an der Zykloide entlanggleiten, wie zum Beispiel mein Seifenstein, von jedem Punkt aus in der gleichen Zeit unten ankommen.“

Dies berichtet Ishmael, der Ich-Erzähler in Herman Melvilles* Roman *Moby Dick*. Ist dieses Phänomen, dass ein Gegenstand, der nur unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang einer Kurve nach unten gleitet, von jedem Punkt aus gleich lang braucht, um unten anzukommen, möglich, oder braucht er notwendig für einen längeren Weg mehr Zeit? Sollte Ishmaels Aussage stimmen, so könnte

* Herman Melville, * 01.08.1819 in New York, † 28.09.1891 ebenda; US-amerikanischer Schriftsteller.

man das so erklären, dass der Gegenstand im oberen, steileren Teil der Kurve genau so viel Schwung bekommt, dass er im unteren Teil entsprechend weniger Zeit benötigt, wie er oben gebraucht hat.

Dass so etwas möglich ist, wollen wir an einem vereinfachten Beispiel untersuchen: Wir wählen eine Kurve, die aus zwei Geradenstücken zusammengesetzt ist, ein oberes der Länge S , das mit der Waagerechten den Winkel α bildet, und ein unteres der Länge s mit dem kleineren Winkel β , und fragen uns, ob wir S , s , α und β so wählen können, dass ein Gegenstand, der oben mit Anfangsgeschwindigkeit 0 startet, genau so schnell oder sogar schneller unten ankommt wie ein Gegenstand der seine Rutschpartie an der Knickstelle K startet.



Die Erdbeschleunigung g zerlegen wir im oberen Teil in die Anteile $A = g \sin \alpha$ in Richtung der Geraden und $g \cos \alpha$ senkrecht dazu; entsprechend haben wir im unteren Teil in Bewegungsrichtung die Beschleunigung $a = g \sin \beta$. Somit ist $A = ab$ mit $b = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Wir betrachten zunächst die Bewegung im unteren Teil. Dabei beginnen wir zur Zeit t_0 mit der Geschwindigkeit v_0 . Daraus ergibt sich $v(t_0 + t) = v_0 + at$ und für den bis zur Zeit $t_0 + t$ zurückgelegten Weg $s(t_0 + t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$. Die für das untere Teilstück benötigte Zeit t_1 ergibt sich also aus $s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} at_1^2$ zu

$$t_1 = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2s}{a}} = \frac{1}{a} \left(\sqrt{v_0^2 + 2sa} - v_0 \right).$$

Starten wir mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so vereinfacht sich dies zu

$$\tau_1 = \frac{1}{a} \sqrt{2sa}.$$

Entsprechend ergibt sich für die Laufzeit durch den oberen Teil

$$T_1 = \frac{1}{A} \sqrt{2SA}$$

und Ankunft im Punkt K mit Geschwindigkeit $V_1 = AT_1$.

Dies ist nicht die Anfangsgeschwindigkeit für den unteren Teil, sondern diese ergibt sich durch Zerlegung in zwei zueinander senkrechte Komponenten $v_0 = V_1 \cos(\alpha - \beta)$ in Richtung der Bewegung und $V_1 \sin(\alpha - \beta)$ senkrecht dazu.

Somit haben wir in diesem Fall die Gesamtlaufzeit

$$\begin{aligned} t_{\text{ges}} &= T_1 + t_1 = \frac{1}{A} \sqrt{2SA} + \frac{1}{a} \left(\sqrt{v_0^2 + 2sa} - v_0 \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\sqrt{\frac{2Sa}{b}} + \sqrt{v_0^2 + 2sa} - v_0 \right). \end{aligned}$$

Halten wir nun s und β und damit a fest, so können wir S und α und damit b so wählen, dass einerseits

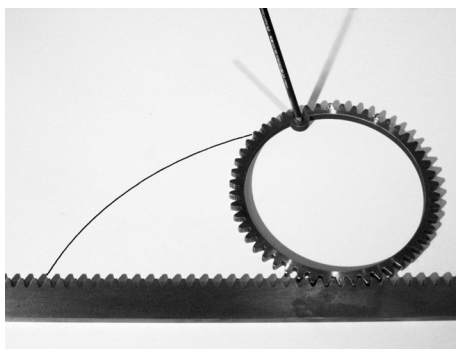
$$\frac{S}{b} = \frac{s}{4}$$

ist und mit diesem Wert andererseits $\sqrt{v_0^2 + 2sa} - v_0 < \frac{1}{2} \sqrt{2sa}$ wird. Damit ist dann

$$T_1 + t_1 < \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2sa} + \frac{1}{2} \sqrt{2sa} \right) = \tau_1.$$

Ein Gegenstand gleitet also unter dem Einfluss der Schwerkraft von ganz oben schneller nach unten als vom Punkt K aus.

Dass es tatsächlich eine Kurve gibt, deren Steigung sich stetig so verändert, dass die benötigte Zeit von jedem Startpunkt aus gleich ist, wurde sowohl von Jakob Bernoulli als auch von seinem jüngeren Bruder Johann Bernoulli** im Jahr 1690 gezeigt. Diese Kurve nennt man wegen der beschriebenen Eigenschaft *Isochrone**** oder *Tautochrone*. Auf dem nebenstehenden Bild sieht Ihr ein Modell zu dieser Kurve aus der Ausstellung Mathematik be-greifen (www.mathematik-begreifen.de), an welcher die beschriebene Eigenschaft experimentell überprüft werden kann.



Die Isochrone ist eine Variante der Kurve, die ein Punkt auf dem Rand eines rollenden Rades zurücklegt, also eine Zykloide. Setzen wir $x(u) = C(u - \sin u)$ und $y(u) = c(1 - \cos u)$ und lassen wir u das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchlaufen, so durchlaufen die Punkte $(x(u), y(u))$ eine solche Kurve.

** Zu den biographischen Daten der beiden Bernoullis lies den Artikel „Wer war’s?“ in diesem Heft ab Seite 5.

*** Isochrone kommt aus dem Griechischen: iso = gleich + chronos = Zeit.

Ein Blick hinter die Kulissen

Der Trick des Topologen

von Hartwig Fuchs

In der Fernseh-Unterhaltungssendung *Illusionen? – Illusionen!*, in der Zaubereien und Kartentricks vorgeführt, aber auch Rätsel und Geschicklichkeitsaufgaben den Zuschauern gestellt werden, tritt ein Mann auf, der sich selbst der „Topologe“ nennt. Dieser stellt eine große Tafel vor die Kamera, auf der ein Gewirr aus Punkten und Linien zu sehen ist (Abbildung 1).

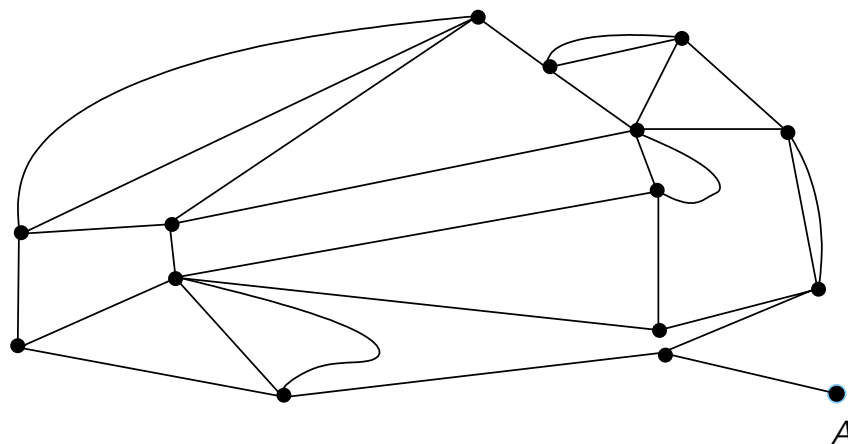


Abbildung 1

Der „Topologe“ behauptet theatralisch: „Ich allein vermag es, einen zusammenhängenden Weg in der Abbildung zu finden, der im Punkt A beginnt und der durch alle Linien so verläuft, dass dabei jede Linie nur ein einziges Mal benutzt wird.“

Um seine Behauptung zu beweisen, bittet er ein Dutzend Zuschauer auf die Bühne und gibt jedem von ihnen eine Tafel mit einer Abbildung, von der sie sich zunächst überzeugen können, dass sie mit der Abbildung des Topologen vollständig übereinstimmt. Die Aufgabe für die Zuschauer: Sie sollen einen Lösungsweg in ihre Figur einzeichnen.

Nach einer längeren Zeitspanne – ausgefüllt vom Auftritt einer Musikgruppe – geben die Zuschauer frustriert auf: Keiner von ihnen hat einen Lösungsweg gefunden. Daraufhin sammelt der Topologe ihre Tafeln ein und bringt sie hinter die Bühne.

Dann wendet er sich seiner Tafel zu, betrachtet diese mit gespielter höchster Konzentration und zeichnet in sie einen Lösungsweg ein. Dessen Verlauf haben wir in der Abbildung 2 dadurch kenntlich gemacht, dass wir seine Teilstrecken in der Reheinfolge nummeriert haben, in der sie vom Punkt A aus zum Punkt B hin durchlaufen werden.

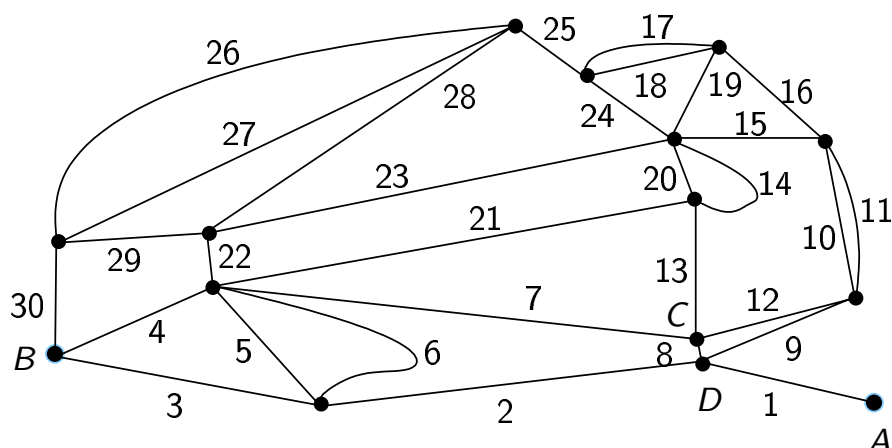


Abbildung 2

Wieso kann der Topologe die Aufgabe lösen, während die mitspielenden Zuschauer erfolglos blieben?

Er arbeitet mit einem Trick!

Als er sich nämlich zur Lösung der Aufgabe seiner Tafel zuwendet, verdeckt er sie für einen Moment mit seinem Körper sowohl vor der Kamera als auch vor den Blicken der Mitspieler. In diesem kurzen Augenblick zeichnet er unbemerkt in seine Abbildung eine Verbindungsstrecke zwischen den sehr nahe liegenden Punkten C und D (Abbildung 2). Da die Mitspieler ihre eigenen Tafeln nicht mehr vor Augen haben – sie sind ja weggeräumt – werden sie die „geringfügige“ Änderung der Abbildung nicht bemerken. Aber tatsächlich ist es genau dieser kleine Unterschied zwischen den beiden Figuren, welcher über die Lösbarkeit und Unlösbarkeit der Aufgabe entscheidet. Wieso?

Wenn Ihr das wissen möchtet, dann müsst Ihr Euch noch bis zum Heft 97 gedulden, denn dort werdet Ihr die Auflösung dieses „Zaubers“ lesen können!

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz

Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Freie Autorin dieses Heftes: Ulrike Müller

Zusammenstellung und Satz: Marcel Gruner

Internet: Juliane Gutjahr

Betreuung der Abonnements: Katherine Pillau

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

- Wir wünschen allen unseren Lesern erholsame Ferien, frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2009.
- Unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de könnt Ihr Euch die Aufgaben zur ersten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2009 ansehen und ausdrucken. Dieser Schülerwettbewerb ist für alle an Mathematik Interessierten und richtet sich an Schüler, die eine zur allgemeinen Hochschulreife führende Schule besuchen. Die Aufgaben müssen als Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. Weitere Informationen findet Ihr ebenfalls auf der angegebenen Internet-Seite. Einsendeschluss ist der 1. März 2009.

Im März-Heft werden wir in MONOID auf die Lösungen der Aufgaben eingehen.

(MG)

Die MONOID-Preisträger 2008

Sonderpreis: Kevin Schmitt (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey)

1. Preis: Lennart Adam, Alia'a Ahmed Doma, Laura Biroth, David Feiler, Martin Alexander Lange, Felix Liebrich, Malte Meyn, Connor Röhrich, Frank Schindler, Florian Schweiger, Alexey Tyukin;

2. Preis: Shaima'a Ahmed Doma, Stefan Albert, Tobias Braun, Chantal Graversen, Heiko Kötzsche, Madeline Kohlhaas, Vivien Kohlhaas, Valentin Kuhn, Dominik Meier, Andreas Pitsch, Luis Ressel, Thorsten Roth, Anselm Schäfer, Maike Stanischewski, Annkatrin Weber, Magdalena Winkelvoß;

3. Preis: Lena Baum, Christian Behrens, Andrea Behrent, Laura Tabea Galkowski, Sebastian Ludwig, Tim Lutz, Philipp Mayer, Janina Müller, Alexander Rettkowski, Freya Roth, Niklas Schliesmeier, Leonard Wagner, Valentin Walther;

MONOID-Jahresabonnenment 2009: Bianca Bellchambers, Vita Bellchambers, Lutz Bischoff, Stephan Böhmer-Horländer, Jonathan Bohlen, Niklas Braun, Arne Broszukat, Eike Broszukat, Lea Clemens, Carl Degitz, Philipp Delhougne, Robin Fritsch, Alexander Gerharz, Vera Hartmann, Paulina Hauser, Lisa Janker, Anna Katharina Lange, Anna Lena Meier, Sören Rathgeber, Martin Reinhardt, Max Rose, Kai Roth, Julia Scherner, Philipp Scherrer, Jana Scholz, Julia Yeopeters;

Forscherpreis: Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf)

Der Forscherpreis und die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet, der Sonderpreis von Texas Instruments.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Endstand nach Heft 94

Die Klassenangaben beziehen sich auf das Schuljahr 2007/08.

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:

Lars Weinheimer 11; **Kl. 5:** Arne Broszukat 36, Sophie Gatzemeier 3, Maximilian Kiefer 9, Kira Köhler 3;

Kl. 6: Matthias Blitzer 12, Laura Tabea Galkowski 51, Sebastian Ludwig 54, Benedikt Maurer 11, Kareem Ramadan 7, Samuel Rischke 7, Julia Scherner 46, Sebastian Schröder 14;

Kl. 7: Lara Bergjohann 30, Eike Broszukat 38, Lea Clemens 34, Jochen Dahlem 21, Chantal Graversen 61, Heidrun Kabus 17, Sina Knappe 10, Dominik Meier 66, Andreas Pitsch 75, Sören Rathgeber 43, Max Rose 41, Freya Roth 52, Philipp Scherrer 41, Selina Weinheimer 21;

Kl. 8: Maximilian Haist 20, Kevin Schmitt 131; **Kl. 9:** Philipp Mayer 56,

Kl. 11: Max de Zoeten 10;

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:

Kl. 5: Tim Höflein 4, Luisa Kirsch 6, Stefanie Schmid 6;

Kl. 6: Jana Ballweber 21, Vincent Brugger 10;

Kl. 10: Lena Baum 51; **Kl. 11:** Felix Liebrich 86, Martin Reinhardt 33.

Altötting, König-Karlmann Gymnasium: Kl. 13: Amelie Hüttner 23.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:

Anna Katharina Lange 44; **Kl. 9:** Alexander Gerharz 35;

Kl. 11: Lennart Adam 102; **Kl. 12:** Christian Behrens 57, Martin Alexander Lange 89.

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber):

Kl. 5: Friederike Kienle 2, Lars Oberhofer 4;

Kl. 6: Janina Bast 19, Anna Gast 7, André Grenzendorf 1;

Kl. 8: Katharina Albert 8, Roberto Rossi 14, Alexander Schneider 4, David Wander 23;

Kl. 10: Rüdiger Bährle 12, Jonathan Bohlen 47, Carl Degitz 39, Lisa-Marie Kienel 6, Susanne Nelke 3; **Kl. 11:** Anselm Schäfer 62.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 13: Laura Biroth 92.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 7: Frank Schindler 118.

Donzdorf, Rechberg-Gymnasium:

Kl. 7: Christian Geiger 9, Florian Salamat 20, Alihan Tax 2.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):

Kl. 6: Julia Hahn 4, Lukas Vogel 14; **Kl. 8:** Paulina Hauser 32.

Erlangen, Ohm-Gymnasium: Kl. 10: Malte Meyn 107.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik:

Kl. 7: Vera Hartmann 35, Marie-Sophie Mahr 17, Janina Müller 52, Jana Scholz 44, Sebastian Winkler 4.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):

Kl. 5: Philipp Arndt 13, Mara Koch 23, Njomza Krasniqi 6, Lars Prepens 13, Justus Reitz 9, Joachim Roth 30, Julius Schultheis 9, Henrik Stenger 23;

Kl. 6: Thorsten Roth 70; **Kl. 7:** Projeethana Balachandran 11; **Kl. 9:** Kai Roth 34.

Hamburg, Gymnasium Hochrad: Kl. 9: Connor Röhricht 107.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium: Kl. 9: Philipp Delhougne 46.

Herzogenaurach, Gymnasium Herzogenaurach: Kl. 12: Lisa Janker 40.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrer: Christoph Straub):

Kl. 7: Shaima'a Ahmed Doma 61, Belkais Khaled 0, Aya Mohamed Mostafa 1;

Kl. 10: Alia'a Ahmed Doma 85; **Kl. 11:** Noha Abdel Wahab 8, Ghada Hisham 7, Hayat Selim 18; **Kl. 12:** Alia'a el Bolock 8.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 5: Argawan Dashti 2, Thomas Rothenbäcker 25, Niklas Staiger 6, Maike Stanischewski 64, Timur Can Zorlu 5;

Kl. 6: Alexander Erb 15, Maurice Remmers 2.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Robin Fritsch 43.

Lich: Dominique Hermens 14.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 10: Michaela Beck 4.

Ludwigshafen, Theodor-Heuss-Gymnasium:

Kl. 9: Stephan Böhmer-Horländer 35.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis):

Kl. 5: Pauline Erning 30, Victor Jans 30, Askar Alexander Kleefeld 9, Marcos Rizig-Mursal 4, Catalin Schach 17, Lena Stenger 9, Meike Volk 1;

Kl. 6: Niklas Braun 37;

Kl. 7: Muriel Korz 15, Maraike Meder 3, Hannah Mies 9, Niklas Schliesmeier 54, Ronja Spannwald 21;

Kl. 8: Ann-Kathrin Hientzsch 6.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 12: Alexey Tyukin 106.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 5: Magdalena Winkelvoß 67.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Wittekindt):

Kl. 5: Leonard Wagner 55;

Kl. 8: Steffen Hettler 28, Tim Lutz 50, Tobias Soldan 28.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 10: Florian Schweiger 112.

Mössingen, Quenstedt-Gymnasium: Kl. 8: Jack Rodin 16.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):

Kl. 7: Sophia Allex 15, Kendra Belthle 11, Ariane Bialas 7, Carolin Bialecki 4, Anna Braun 7, Viviane Brockerhoff 16, Sarah Doll 4, Eva Drews 4, Tabea Faust 8, Leoni Fechter 3, Vanessa Funkel 8, Nina Gerlach 11, Carolin Heimes 7, Clara Jenker 8, Marika Kaules 11, Olivia Langwald 5, Colette Perillieux 12, Amelie Steentjes 7, Nicole Vergin 8;

Kl. 9: Vivien Kohlhaas 72;

Kl. 10: Madeline Kohlhaas 63.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:

Kl. 10: Wladimir Fust 4, Fynn Niclas Krause, Tristan Langenberg 8, Malte Sanders.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium:

Kl. 6: Ruwen Bergen 10, Tom Klein 5, Fabian Mertes 5, Janina Vogel 10;

Kl. 9: Céline Didierlaurent 15;

Kl. 10: Bettina Wiebe 15.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):

Kl. 5: Michael Arasim 7, Julius Asal 6, Georg Auburger 9, Andrea Behrent 57, Lutz Bischoff 48, Nils Blaschke 15, Annika Brinkmann 8, Michaela Czermin 12, Christina Diel 2, Paul Döbert 4, Yannic Döring 8, Marcus Dörner 1, Yasmina Gab 5, Michael Grunwald 17, Anna-Lena Hock 15, Jannik Hoffmann 15, Anna-Maria Klaas 24, Kathi Klauda 9, Lucas Köhler 14, Heiko Kötzsche 59, Lea Leopold 1, Nataly Lipp 3, Selma Mezger 3, Martin Müller 10, Thi Thao Nguyen 6, Mariam Rahi 9, Jonas Schramm 3, Felix Sobotta 13, Nild Thoma, Richard von Mutius 5, Leonie Wietfeld 4;

Kl. 6: Matthias Bonarens 20, Alix Hieronymi 5, Viktoria Kunz 29, Miriam Lindert 10, Jeanne Merswolken 23, Camilla Metz 14, Anna Michel 7, Hannah Nagel 18, Franziska Peterka 5, Julia Yeo-Peters 49;

Kl. 7: Tobias Braun 65, Valentin Kuhn 64, Agnes Valenti 17, Daniel Worring Pozo 19;

Kl. 8: Aline Endreß 20;

Kl. 10: Bianca Bellchambers 37, Vita Bellchambers 31, Markus Gierenstein 8, Larissa Habel 14, Kilian Valenti 9;

Kl. 11: Valentin Walther 50, Annkatrin Weber 77, Elena Weil 4, René Weil 3;

Kl. 12: Stefan Albert 59.

Oerlinghausen, Niklas-Luhmann-Gymnasium:

Kl. 8: Natalie Laumann 8.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch):

Kl. 8: Simone Marquard 8. **Kl. 11:** Thomas Geiß 3.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner):

Kl. 6: Caroline Alfter 4, Eric Amann 12, David Anders 11, Frederik Bartl 11, Lisa Marie Kiko 5, Alexander Knoop 19, Fabian Kreuzberg 5, Matthia Loevenich 4, Max Müthrath 4, Florian Peter 14, Sören Rauert 13, Jonathan Rochert 2, Alexandra Schwinges 4, Rebecca Simo 4, Eva Weber 6, Charlotte Wulff 6;

Kl. 8: David Feiler 111.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 6: Luis Ressel 62.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 9: Alexander Rettkowski 56.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 7: Dorothea Winkelvoß 8.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Kuntz):

N. N. 3;

Kl. 5: Markus Baldermann 17, Judith Geib 24, Anna Lena Meier 38, Lena Mohr 3, Elina Porz 16;

Kl. 6: Lorena Ritzmann 29, Paul Schädlich 15;

Kl. 8: Joel Jung 4.

ohne Angaben Christopher Ölmüller 25.

Inhalt

Martin Mattheis: Achtundzwanzig durch sieben	3
Martin Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	4
Wolfgang J. Bühler: Wer war's?	5
Wolfgang J. Bühler: Die besondere Aufgabe	6
Wolfgang J. Bühler: Wie viele Brüche gibt es?	8
Hartwig Fuchs: Hättest Du es gewusst? – Was ist die Teleskop-Technik	11
Aufgaben zum Neuen Jahr	14
Mathis machen mathematische Entdeckungen	16
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 95	18
Neue Mathespielereien	22
Neue Aufgaben	25
Gelöste Aufgaben aus MONOID 95	26
Wer forscht mit?	31
Die Seiten für den Computer-Fan	32
Lösungen zu den Aufgaben zum Neuen Jahr	34
Ulrike Müller: Bislang größte Primzahlen gefunden	36
Hartwig Fuchs: Pythagoras im Raum	37
Wolfgang J. Bühler: Das Isochronen-Problem	38
Hartwig Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen – Der Trick des Topologen	41
Impressum	42
Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion	43
Die MONOID-Preisträger 2008	43
Rubrik der Löser und Löserinnen	44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>