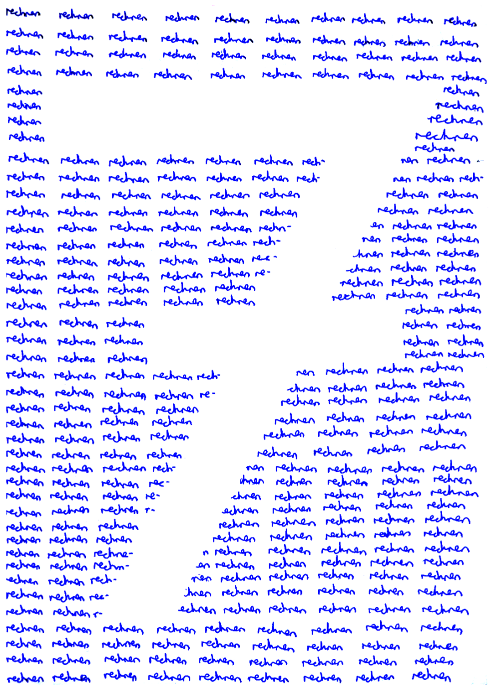
Jahrgang 29 Heft 98 Juni 2009

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.
Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Alle Schüler, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern abgeben.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **09.09.2009.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen Ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im Monoid in der „Rubrik der Löser“ und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: *das Goldene M*.

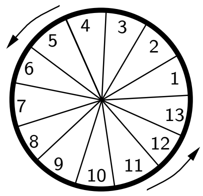
Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Beiträge zur *Seite für den Computer-Fan*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Ein Blick hinter die Kulissen
Ein Wurfpfeilspiel mit unerwartetem Ausgang

von Hartwig Fuchs

Auf einem Jahrmarkt gibt es ein Wurfspiel, bei dem man angeblich Geld gewinnt. Mit einem Einsatz von 5 € kann man das Spiel spielen und das geht so:
Zunächst erhält der Spieler sechs Wurfpfeile. Dann wird eine Scheibe, die in dreizehn gleich große Sektoren eingeteilt ist, in schnelle Drehbewegung versetzt. Der Spieler wirft seine Pfeile auf die Scheibe.



Er hat verloren, wenn mindestens zwei Pfeile den gleichen Sektor einschließlich, dessen linken Rand treffen. Landen dagegen seine Pfeile in sechs verschiedenen Sektoren, dann hat er gewonnen und erhält 10 €. Jeder Wurf, der die Scheibe verfehlt, muss wiederholt werden.

Ein Spieler könnte nun so überlegen: Die Chancen, bei dreizehn Sektoren genau sechs verschiedene zu treffen, stehen zu meinen Gunsten. Mit mehreren Spielen könnte ich daher so viel gewinnen, dass ein schöner Abend auf der Festwiese finanzierbar ist. Stimmt das?

Wenn der erste Wurfpfeil im Sektor s_1 landet, dann verliert der Spieler nur dann nicht bereits bei dem zweiten Wurf, wenn sein zweiter Pfeil jetzt in einem Sektor s_2 mit $s_2 \neq s_1$ stecken bleibt. Dafür gibt es zwölf Möglichkeiten. Also ist $W(s_2 \text{ mit } s_2 \neq s_1) = \frac{12}{13}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $s_2 \neq s_1$. Ganz entsprechend ist $W(s_3 \text{ mit } s_3 \neq s_2, s_3 \neq s_1) = \frac{11}{13}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der dritte Pfeil in einem von s_2 und s_1 verschiedenen Sektor s_3 landet und so weiter.

Schließlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Pfeil in einem von s_1, s_2, $\ldots$, s_5 verschiedenen Sektor s_6 trifft, $W(s_6 \text{ mit } s_6 \neq s_i, i = 1, 2, \ldots, 5) = \frac{8}{13}$.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit P, dass der Spieler sein Spiel gewinnt, dass er also mit seinen sechs Wurfpfeilen sechs Sektoren s_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, trifft, von denen keine zwei übereinstimmen?

Es gilt: $P = W(s_2) \cdot W(s_3) \cdot W(s_4) \cdot W(s_4) \cdot W(s_5) \cdot W(s_6) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{13^5} \approx 0,256$.

Dieser P-Wert bedeutet: Wenn der Spieler viele Spiele spielt, wird er durchschnittlich 25,6% davon gewinnen. Spielt er n Spiele, so kostet ihn das $5 \cdot n$€ Einsatz; nur bei durchschnittlich jedem viertem Spiel erhält er 10 € zurück. Bei n Spielen verliert er also $(5n - 10 \cdot \frac{n}{4}) = 2{,}5n$ €; oder: Bei jedem Spiel verliert er durchschnittlich 2,50 €.

Unser Redaktionsmitglied Wolfgang J. Bühler schlägt unseren Lesern vor, sich zu überlegen:
Sei $p > 1$ die Anzahl der Pfeile und s die der Sektoren und zum Beispiel $s - p = 4$.
Für welche Paare (p, s) ist dann das Spiel günstig für den Spieler?

„Gute" Zahlen – Gute Idee!

von Tom Ballik

Definition

Die natürliche Zahl n heiße „gut", wenn natürliche Zahlen a_i existieren, so dass folgende beiden Eigenschaften gelten:

1. $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$;
2. $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$.

Problem 1 (Olympiade-Aufgabe 1978 in den USA)

Beweise unter der Annahme, dass die Zahlen von 1000 bis 2007 „gut" sind, dass dann auch alle weiteren Zahlen größer als 2007 „gut" sind!

Lösung

Die Idee besteht darin, aus bereits bekannten „guten" Zahlen neue zu produzieren:
Angenommen, *m ist „gut"*, dann gilt:

$$m = a_1 + a_2 + ... + a_k$$

und

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Daraus folgt der Reihe nach:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = 1. \quad [A]$$

Außerdem gilt:

$$2 + 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_k = (2 + 2m).$$

Also ist $(2 + 2m)$ „gut".

> *Regel:* Einfach alle Summanden einer „guten" Zahl verdoppeln und 2 addieren – fertig ist die Zusammensetzung der neuen „guten" Zahl!

Den Bruch $\frac{1}{2}$ kann man auf zwei verschiedene Arten aufsplitten:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Damit ergibt sich in Gleichung [A]:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = 1$$

oder

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = 1.$$

Daher sind auch die beiden Zahlen $4 + 4 + 2a_1 + 2a_2 + ... 2a_k = (8 + 2m)$ und $3 + 6 + 2a_1 + 2a_2 + ... 2a_k = (9 + 2m)$ „gut".

> *Regel:* Einfach alle Summanden einer „guten" Zahl verdoppeln und 8 beziehungsweise 9 addieren – fertig ist die Zusammensetzung der neuen „guten" Zahl!

Man könnte den Bruch $\frac{1}{2}$ in Gleichung [A] auch genauso durch eine andere „gute" Zahl darstellen:
Angenommen, auch *n ist „gut"*, dann gilt:

$$n = b_1 + b_2 + ... + b_i \text{ und } \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + ... + \frac{1}{b_i} = 1$$

und genauso wie für m:

$$\frac{1}{2b_1} + \frac{1}{2b_2} + ... + \frac{1}{2b_i} = \frac{1}{2}.$$

Insgesamt ergibt das

$$\frac{1}{2b_1} + \frac{1}{2b_2} + ... + \frac{1}{2b_i} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = 1.$$

Wir haben also die „gute" Zahl $2b_1 + 2b_2 + ... + 2b_i + 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_k = 2(m + n)$ kreiert!

> *Regel:* Einfach jeweils alle Summanden zweier „guter" Zahlen verdoppeln und addieren – fertig ist die Zusammensetzung der neuen „guten" Zahl!

Für die Lösung des Problems 1 reicht uns freilich aus, dass man aus der „guten" Zahl m die beiden „guten" Zahlen $(2m+8)$ und $(2m+9)$ kreieren kann:

Mit 1000 sind dann auch $2 \cdot 1000 + 8 = 2008$ und $2 \cdot 1000 + 9 = 2009$ „gut".
Mit 1001 sind dann auch $2 \cdot 1001 + 8 = 2010$ und $2 \cdot 1001 + 9 = 2011$ „gut".
Mit 1002 sind dann auch $2 \cdot 1002 + 8 = 2012$ und $2 \cdot 1002 + 9 = 2013$ „gut" und so weiter!
Insgesamt ist vorausgesetzt, dass alle m mit $999 < m < 2008$ „gut" sind.
Nennen wir dieses Intervall von 1000 bis 2007 unser erstes Zahlenintervall I.

$(2m+8)$ ergibt für alle diese „guten" m die geraden Zahlen von 2008 bis 4022.
$(2m+9)$ ergibt für alle diese „guten" m die ungeraden Zahlen von 2009 bis 4023.

Insgesamt sind also alle Zahlen von 2008 bis 4023 abgedeckt. Dieses ist unser zweites Zahlenintervall II.

Nun hat man die Situation, dass alle m des zweiten Zahlenintervalls mit $2007 < m < 4024$ „gut" sind. Dies ist aber exakt die gleiche Ausgangsposition wie vorhin, weil die nächtse kleinste Zahl, die nicht im Intervall liegt, wieder durch die kleinste Zahl des Intervalls kreiert werden kann: $4024 = 2 \cdot 2008 + 8$. Man erhält also im nächsten Schritt die „guten" Zahlen 4024 bis 8055. Diese ist unser drittes Zahlenintervall III et cetera.

Alle Zahlenintervalle aneinander gereiht ergeben die natürlichen Zahlen > 999, wobei jedes Zahlenintervall doppelt so viele Elemente hat wie sein Vorgänger.

Zahlenintervall	von ... bis	Anzahl der Elemente
I	1000 bis 2007	1008
II	2008 bis 4023	2016
III	4024 bis 8055	4032
...	...	...

Also sind alle Zahlen größer als 2007 unter der Annahme, dass die Zahlen von 1000 bis 2007 „gut" sind, ebenfalls „gut".

Problem 2 (Bundeswettbewerb Mathematik 2008)

Man stelle die Zahl 2008 so als Summe natürlicher Zahlen dar, dass die Addition der Kehrwerte der Summanden die Zahl 1 ergibt.

Lösung
Die Angabe klingt zwar etwas anders, aber wenn man sie in Gleichungen aufschreibt, sieht man, dass es sich de facto um das gleiche Problem handelt:

$$2008 = a_1 + a_2 + ... + a_k \text{ und } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Wir sollen also eine geeignete Aufsplittung der „guten" Zahl 2008 finden.
Diese Beispiel wurde schon in Monoid 93 (Seiten 29–41) vorgestellt und mit zwei verschiedenen Lösungsvorschlägen durchgerechnet. Mit unserem Wissen

aus dem vorherigen Beispiel kann man nun etwas anders an die Fragestellung herangehen:

Wir wissen bereits: Ist m „gut", so sind auch die Zahlen $(2m+2), (2m+8)$ und $(2m+9)$ „gut". Wenn m und n „gut" sind, dann ist auch $(2m+2n)$ „gut".

Eine obligate Möglichkeit, dieses Beispiel für den konkreten Fall 2008 zu lösen, besteht also darin, mit kleinen „guten" Zahlen zu beginnen und daraus größere zu kreieren, bis man irgendwann bei 2008 landet.
Kurioserweise reicht für diese Zwecke eine einzige, nämlich die kleinste „gute" Zahl, also 1 – offensichtlich ist $1 = \frac{1}{1}$.
Als quasi Ursprungs-„Gute"-Zahl entwickelt sie genügend andere „gute" Zahlen:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \ \ 4, 10, 11; \\ 10 &\rightarrow 22, 28, 29; \\ 11 &\rightarrow 24, 30, 31. \end{aligned}$$

Dieses Spielchen könnte man natürlich weiterführen, um irgendwann mit etwas Glück bei 2008 zu landen. Schneller geht es allerdings, wenn man von 2008 rückwärts rechnet: Um zu beweisen, dass

2008 „gut" ist, reicht es zu zeigen, dass 1000 „gut" ist.
1000 „gut" ist, reicht es zu zeigen, dass 496 „gut" ist.
496 „gut" ist, reicht es zu zeigen, dass 244 „gut" ist.
244 „gut" ist, reicht es zu zeigen, dass 118 „gut" ist.

Hinweis: Alle vier Reduktionen funktionieren mit dem „$(2m+8)$-Trick".

118 bekommt man aber schon als Kombination der beiden „guten" Zahlen 29 und 30:

$$118 = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 29.$$

Sicher kann man sich 2008 auch auf viele andere Arten konstruieren – der Leser ist eingeladen, andere Möglichkeiten zu finden!

Nun geht es also noch um eine konkrete Darstellung: Um eine neue „gute" Zahl zu erschaffen, müssen wir folgendes tun: Die Summanden einer „guten" Zahl werden verdoppelt und zu diesen 2, $4+4$, $3+6$ oder die verdoppelten Summanden einer anderen „guten" Zahl addiert.

Beginnen wir mit 29:

„gute" Zahl:	1	$\rightarrow$	$10 = 2 \cdot 1 + 8$	$\rightarrow$	$29 = 2 \cdot 10 + 9$
Aufsplittung:	1		$4+4+2$		$3+6+8+8+4$

Nun kommt 30:

„gute“ Zahl:	$1 \quad \rightarrow$	$11 = 2 \cdot 1 + 9 \quad \rightarrow$	$30 = 2 \cdot 11 + 8$
Aufsplittung:	1	$3 + 6 + 2$	$4 + 4 + 6 + 12 + 4$

118:

„gute“ Zahl:	$118 = 2 \cdot (29 + 30)$
Aufsplittung:	$6 + 12 + 16 + 16 + 8 + 8 + 8 + 12 + 24 + 8$

244:

„gute“ Zahl:	$244 = 2 \cdot 118 + 8$
Aufsplittung:	$4 + 4 + 12 + 24 + 32 + 32 + 16 + 16 + 16 + 24 + 48 + 16$

496:

„gute“ Zahl:	$496 = 2 \cdot 244 + 8$
Aufsplittung:	$4 + 4 + 8 + 8 + 24 + 48 + 64 + 64 + 32 + 32 + 32 + 48$ $+96 + 32$

1000:

„gute“ Zahl:	$1000 = 2 \cdot 496 + 8$
Aufsplittung:	$4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 48 + 96 + 128 + 128 + 64 + 64$ $+64 + 96 + 192 + 64$

2008:

„gute“ Zahl:	$2008 = 2 \cdot 1000 + 8$
Aufsplittung:	$4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 32 + 32 + 96 + 192 + 256 + 256$ $+128 + 128 + 128 + 192 + 384 + 128$

Und tatsächlich:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{96} + \tfrac{1}{192} + \tfrac{1}{256} \\
&+ \tfrac{1}{256} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{192} + \tfrac{1}{384} + \tfrac{1}{128} \\
=&\tfrac{192+192+96+96+48+48+24+24+8+4+3+3+6+6+6+4+2+6}{768} = \tfrac{768}{768} = 1
\end{aligned}$$

Somit ist eine Aufsplittung von 2008 gefunden!

Anmerkung und Ausblick I

Bei diesem Themenkomplex drängen sich zwei Fragen förmlich auf:

(1) Welche Zahlen sind nicht „gut“?

(2) Wie viele Darstellungen existieren für „gute“ Zahlen – speziell für 2008?

Wer es selbst herausfinden will, nicht weiterlesen!

Tatsächlich gibt es nämlich überhaupt nur 13 Zahlen, die nicht „gut“ sind!
Es handelt sich um $2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21$ und 23.

Die kleinste Zahl, die mehrere Darstellungsformen zulässt, ist 22:

$$22 = 2 + 4 + 8 + 8 = 2 + 5 + 5 + 10 = 3 + 3 + 4 + 12.$$

Ab dann steigt die Anzahl der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten für „gute“ Zahlen schnell in die Höhe:

Zahl	Anzahl	Zahl	Anzahl	Zahl	Anzahl
24	1	50	8	76	44
25	1	51	4	77	28
26	1	52	10	78	47
27	1	53	9	79	48
28	2	54	9	80	43
29	3	55	11	81	44
30	2	56	8	82	59
31	2	57	13	83	49
32	1	58	13	84	51
33	2	59	15	85	72
34	2	60	16	86	65
35	2	61	21	87	64
36	4	62	18	88	79
37	5	63	16	89	70
38	5	64	22	90	78
39	2	65	19	91	87
40	4	66	18	92	98
41	5	67	30	93	83
42	5	68	24	94	110
43	9	69	19	95	103
44	4	70	26	96	96
45	4	71	28	97	126
46	6	72	26	98	101
47	4	73	29	99	134
48	4	74	35	100	137
49	7	75	29		

Beim Betrachten dieser Tabelle scheint klar, dass es für 2008 sehr viele Darstellungen gibt. Aber wie viele genau?

*Mit meinen bescheidenen Programmierkenntnissen konnte ich leider nicht auf die Lösung kommen. Aber vielleicht gibt es unter den Lesern Experten, die Aufklärung betreiben können!?**

* Rückmeldungen bitte an die MONOID–Redaktion und an thomas.ballik@chello.at – Wir freuen uns auf Eure Zusendungen!

Anmerkung und Ausblick II

Viele von Euch werden das klassische „Kamelproblem“ kennen, welches übrigens wunderbar von Ian Stewart im Spektrum der Wissenschaft 3/1993 erläutert wird:

> Ein Scheich vererbt seine 17 Kamele an seine drei Söhne. Ein Sohn soll die Hälfte, einer ein Drittel und einer ein Neuntel vom Erbe erhalten. Nach seinem Tod wissen die Söhne nicht so recht, was sie tun sollen, da sie kein Kamel teilen wollen. Da kommt ein alter, weiser Mann zu ihnen und borgt den Brüdern sein eigenes Kamel. Damit sind es insgesamt 18 Kamele – der Älteste bekommt nun die Hälfte, also neun Kamele, der Zweitälteste erhält ein Drittel, also sechs Kamele und der Jüngste erhält ein Neuntel, also zwei Kamele. Das sind zusammen 17 Kamele, sodass sie dem alten Mann sein eigenes Kamel wieder zurück geben können. Nun sind alle zufrieden.

Der alte Weise kann deshalb helfen, weil die Addition der Erbteile *nicht* eins ergibt:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}<1.$$

Borgt er den Brüdern nun sein eigenes Kamel, so geht es wunderbar auf.

Bei Verallgemeinerung der Fragestellung (andere Anzahl an Söhnen und Kamelen) kann man erkennen, dass diese Geschichte auch etwas mit „guten“ Zahlen zu tun hat:
Seien $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_k}$ die Bruchanteile des Erbes der k Söhne und $(d-1)$ die Anzahl der zu vererbenden Kamele, so kann man folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_k}=\frac{d-1}{d}.$$

Nach Umformung erhält man:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{d},$$

also

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{d}=1.$$

Also ist die Summe $(a_1+a_2+\dots+a_k+d)$ eine „gute“ Zahl.

Frage: Wie kann die Geschichte vom Scheich und seinen Söhnen abgeändert werden, wenn er 39 Kamele auf vier Söhne zu vererben hat?

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Tony Crilly: „50 Schlüsselideen Mathematik“.

Dass Mathematik mehr ist, als einfach nur rechnen, wird jedem klar, der sich nur ein bisschen damit befasst. Aber worum genau geht es eigentlich in der Mathematik? Welche grundlegenden Ideen haben die Menschen so beschäftigt, dass sie damit die Mathematik grundlegend vorangebracht haben? Genau damit beschäftigt sich das Buch „50 Schlüsselideen Mathematik“ von Tony Crilly. Der englische Mathematiker hat in 50 jeweils vierseitigen Essays die verschiedensten Themen durchleuchtet. Die behandelte Themenpalette reicht dabei von der Null, sonstigen spannenden Zahlen wie π, e, und i, über geometrische Grundlagen wie das Parallelenpostulat, Dimensionen und Konstruktionen bis hin zu den großen Problemstellungen wie dem Vier-Farben-Problem, dem Problem des Handlungsreisenden, dem Satz von Wiles oder der Riemannschen Vermutung. In der Fußzeile der ersten beiden Seiten jedes Essays befindet sich eine Zeitleiste, der man entnehmen kann, wann die beschriebene Idee geboren wurde und wie sie sich dann zeitlich entwickelt hat. Zusätzlich wurden viele Inhalte durch Skizzen und Zeichnungen illustriert.

Fazit: Auch wenn man die meisten der vorgestellten Probleme in vielen ähnlichen Sammelwerken findet, so handelt es sich doch um eine gelungene Zusammenstellung, die man immer wieder zur Hand nehmen wird, um ein neues Kapitel zu lesen. Abzüge in der Bewertung gibt es für die durchgehende schwarz-weiße Gestaltung. Farbige Abbildungen würden das Buch nicht nur bunter sondern auch ansprechender machen.

Gesamtbeurteilung: gut ☺☺

Angaben zum Buch: Crilly, Tony: 50 Schlüsselideen Mathematik. Spektrum 2009, ISBN 978-3-8274-2118-0, gebunden, 208 Seiten, 24,95 €

Art des Buches:	Sammelband grundlegender mathematischer Ideen
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahre

Die Primzahlensammler von Tschebyschew

von Hartwig Fuchs

Die Frage, wie die Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen verteilt sind, beschäftigt die Mathematiker seit sie bermerkten, dass Primzahlen einen ganz besonderen Zahlentyp darstellen – sie sind die „Atome", aus denen Nichtprimzahlen multiplikativ aufgebaut sind.
Eine erste grundlegende Aussage über die Primzahlen-Verteilung hat Euklid (um 300 v. Chr.) hergeleitet:

> Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Über 2000 Jahre vergingen, bevor der nächste Fortschritt erzielt wurde.
Leonhard Euler (1707–1783), der bedeutendste Mathematiker (mindestens) des 18. Jahrhunderts bewies:
Die unendliche Reihe der reziproken Primzahlen $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots$ hat keine endliche Summe, während die unendliche Reihe der reziproken Quadratzahlen $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$ einen endlichen Wert besitzt. Daraus folgerte er:

> In der Menge der natürlichen Zahlen liegen die Primzahlen dichter als die Quadratzahlen.

Eine weitere Aussage über die Verteilung der Primzahlen, die nun schon sehr viel konkreter als der Satz von Euler ist, machte Joseph Louis François Bertrand (1822–1900) – der sie allerdings nicht beweisen konnte.

> Für jedes $n > 1$ gilt: Zwischen n und $2n$ befindet sich stets eine Primzahl.

Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (1821–1894), der Bertrands Vermutung beweisen konnte, glaubte eine weitere mögliche Verteilungseigenschaft der Primzahlen entdeckt zu haben.
Jede ungerade Primzahl p ist von der Form $p = 4n+1$ oder $p = 4n+3$. Tschebyschew verglich nun die Häufigkeit des Vorkommens dieser beiden Primzahl-Typen und er gelangte dabei zu einer Vermutung:

> Für jede natürliche Zahl $x \geq 43$ gilt:
> Unter den Primzahlen p, $43 \leq p \leq x$, gibt es stets mehr Primzahlen vom Typ $p = 4n+3$ als vom Typ $p = 4n+1$.

Eine Überprüfung der Tschebyschew-Vermutung für ein Anfangsstück der Folge N der natürlichen Zahlen wollen wir uns als einen Wettbewerb zwischen zwei Primzahlen-Sammlern P_1 und P_3 vorstellen. Während P_1 und P_3 die Zahlenfolge N bis zur Marke x entlang laufen, sammelt P_1 die Primzahlen p vom Typ

$p = 4n + 1$ und P_3 die vom Typ $p = 4n + 3$. Die Anzahl der Primzahlen, die sie dabei gefunden haben, sei mit $\pi_1(x)$ beziehungsweise mit $\pi_3(x)$ bezeichnet. Tschebyschew behauptet also: Für jede natürliche Zahl x gilt: Ist $x \leq 42$, dann ist $\pi_3(x) \geq \pi_1(x)$; ist $x \geq 43$, dann ist $\pi_3(x) > \pi_1(x)$ oder $\pi_3(x) - \pi_1(x) > 0$.
Bis zur Marke $x = 250$ verläuft der Sammelwettbewerb so:

x	$1, 2, \dots, 42$	$43, \dots, 126$	$127, \dots, 198$	$199, \dots, 210$	$211, \dots, 250$
$\pi_3(x) - \pi_1(x)$	≥ 0	≥ 1	≥ 2	≥ 3	≥ 4

Die Tabelle vermittelt den Eindruck, Tschebyschews Vermutung könnte vielleicht richtig sein.

Bei Fortsetzung des Sammelwettbewerbs über $x = 250$ hinaus ergibt sich bei $x = 26\,861$, dass $\pi_3(x) = 1\,472$ und $\pi_1(x) = 1\,473$ und mithin $\pi_3(x) < \pi_1(x)$ ist – also ist Tschebyschews Vermutung falsch.
Übrigens gilt $\pi_3(x) < \pi_1(x)$ erstmals für $x = 26\,861$.
Mit einer von John Edensor Littlewood (1885–1977) entwickelten Methode lässt sich beweisen, dass ein Wechsel von $\pi_3(x) > \pi_1(x)$ zu $\pi_3(x) < \pi_1(x)$ und umgekehrt unendlich oft stattfindet.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Lösung der Aufgabe aus Heft 95

In Heft 95 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Aufgabe: Versteckte Potenzen in Zahlenquadraten

Untersuche die $n \times n$-Zahlenquadrate für $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\boxed{1}\,,\quad \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{matrix}}\,,\quad \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{matrix}}\,,\quad \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{matrix}}\,, \dots$$

Diese Zahlenquadrate weisen interessante Eigenschaften auf – finde einige davon heraus! Achte insbesondere auf versteckte Potenzen! (H.F.)

Ergebnisse

Vier unserer Leser haben uns die Ergebnisse ihrer Untersuchungen an diesen Zahlenquadraten zugeschickt.

Magdalena Winkelvoß (Klasse 6, Rabanus-Maurus-Gymnasium, Mainz) hat die Reihe der Quadrate um das 5×5-Zahlenquadrat erweitert und mit Recht festgestellt, dass auch die Potenzen aller ungeraden Zahlen in diesen Quadraten aus fortlaufenden ungeraden Zahlen auftreten müssen, da sie ebenfalls ungerade sind. Tatsächlich enthält das $n \times n$-Quadrat in der ersten Zeile alle ungeraden Zahlen $2k + 1$ von 1 bis $2n - 1$ (für $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$) und insgesamt alle ungeraden Zahlen $2k + 1$ von 1 bis $2n^2 - 1$ (für $k = 0, 1, 2, ..., n^2 - 1$).
Dazu bemerkt **Alexey Tyukin** (Klasse 13, Gymnasium Mainz-Gonsenheim), dass die Summe der Zahlen in jeder der beiden Diagonalen n^3 ergibt, während sich die Summen der Zahlen je zweier benachbarter Spalten um $2n$ unterscheiden.

An weiteren Eigenschaften stellt **Shaima'a Ahmed Doma** (Klasse 8, Deutschen Schule der Borromäerinnen, Kairo) zum Beispiel fest, dass die Summe der Zahlen der ersten Zeile n^2 beträgt, dieses n^2 bei ungeradem n genau im Mittelpunkt des Quadrates auftaucht, während die Addition der Zahlen, die n^2 umringen, $8n^2$ ergibt; bei ungeradem n stehen in der Spalte, in der n auftritt, ungerade Vielfache von n, deren Summe n^3 beträgt.

Unter den insgesamt acht Feststellungen von **Robin Fritsch** (Klasse 8, Gymnasium Lehrte), die er auch allgemein beweist – zumindest für gerade n –, befinden sich einige der bereits erwähnten Beobachtungen. Hinzu kommt seine Aussage, dass die Summe aller Zahlen des $n \times n$-Quadrats n^4 beträgt; denn die Summe aus erster und letzter Zahl, zweiter und vorletzter Zahl und so weiter ergibt immer $2n^2$, so dass wir bei geradem n insgesamt $\frac{n^2}{2}$ Paarungen und somit das Gesamtergebnis $\frac{n^2}{2} \cdot 2n^2 = n^4$ haben; bei ungeradem n gibt es dagegen nur $\frac{n^2-1}{2}$ Paare, dafür steht n^2 in der Quadratmitte, so dass sich auch jetzt für die Gesamtsumme der Wert $\frac{n^2-1}{2} \cdot 2n^2 + n^2 = n^4$ ergibt. Nach dem gleichen Schema lassen sich die übrigen Erkenntnisse von Robin Fritsch beweisen, nämlich dass die Summe aller Zahlen in der m-ten Zeile $n^2 \cdot (2m - 1)$ beträgt, die aller Zahlen in der m-ten Spalte $n^3 - n^2 + n \cdot (2m - 1)$, die aller Zahlen in jeder der beiden Diagonalen n^3 und schließlich – bei geradem n – die aller Zahlen in der oberen Quadrathälfte $\frac{n^4}{4}$, so dass für die untere Hälfte $\frac{3}{4}n^4$ verbleiben.

Abschließend sei noch auf eine Anregung des Aufgabenstellers verwiesen, wonach sich interessante Ergebnisse finden lassen, wenn man die Summe aller Zahlen im gesamten $n \times n$-Quadrat mit den Zahlensummen darin konzentrisch* eingeschlossener kleinerer Quadrate, zum Beispiel im Falle $n = 6$ des enthaltenen konzentrischen 4×4- und 2×2–Quadrates vergleicht.

* Das heißt: Viele symmetrische, um eine gemeinsamen Mittelpunkt angeordnete Figuren des selben Typs.

Die besondere Aufgabe
Eine Gratwanderung des Gottfried Wilhelm Leibniz
von Hartwig Fuchs

Im Jahre 1672, am Beginn seiner steilen wissenschaftlichen Karriere, die ihn zum bedeutendsten Universalgelehrten des 17. Jahrhunderts machen sollte, reiste der junge Gottfried Wilhelm Leibniz* in einem diplomatischen Auftrag des Kurfürsten von Mainz nach Paris.
Dort lernte er neben vielen anderen Wissenschaftlern auch den vielseitigen Astronomen, Physiker, Mathematiker und Erfinder Christiaan Huygens** kennen.
Und Hugens war es, der dem mathematisch hoch interessierten Diplomaten bei einem Zusammentreffen die Frage stellte:

Welchen Wert hat die unendliche Reihe – heute würde man sagen: Gegen welchen *Grenzwert konvergiert* die Reihe

(1) $L = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots$?

Leibniz, der kaum eine mathematische Ausbildung und daher damals auch nur wenige mathematische Kenntnisse besaß, konnte dennoch die huygenssche Aufgabe lösen und das in einer Weise, die bereits das mathematische Genie des jungen Mannes erkennen lässt.

In seinem ersten Lösungsschritt transformierte er mit der Beziehung

(2) $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Reihe (1) in die Reihe

(3) $L = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots$

Hier hätte es nun nahe gelegen, mit den arithmetischen Regeln

$$(a - b) = a + (-b) \text{ und } (-b) + (b - c) = b - b + (-c)$$

die Reihe (3) so zu schreiben

(4) $L = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$

Da in (4) beginnend mit $+\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ je zwei benachbarte Glieder zusammen 0 ergeben, sollte die Reihe (4) den Grenzwert $L = 1$ haben. Aber Leibniz beschreitet diesen verführerisch einfachen Weg (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ $L = 1$ nicht. Ihm muss klar

* Gottfried Wilhelm Leibniz (*1. Juli 1646 in Leipzig; †14. November 1716 in Hannover) deutscher Philosoph und Wissenschaftler, Mathematiker, Diplomat, Physiker, Historiker, Politiker, Bibliothekar und Doktor des weltlichen und des Kirchenrechts.

** Christiaan Huygens (*14. April 1629 in Den Haag; †8. Juli 1695 eben da), auch Christianus Hugenius.

gewesen sein, dass er sich damit auf eine Gratwanderung begeben hätte, die ihn unweigerlich in eine ganz vertrackte mathematische Problemzone geführt hätte. Etwa in diese:

Mit der Beziehung – auf die er leicht gestoßen sein konnte –

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{t}\left(\frac{n+t}{n} - \frac{n+1+t}{n+1}\right) \text{ für } t = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } n = 1, 2, 3, \ldots$$

hätte sich nach dem Muster (3) $\Rightarrow$ (4) die Reihe (1) zunächst in die unendlich vielen Reihen

$$L = \frac{1}{t}\left(\frac{1+t}{1} - \frac{2+t}{2}\right) + \frac{1}{t}\left(\frac{2+t}{2} - \frac{3+t}{3}\right) + \frac{1}{t}\left(\frac{3+t}{3} - \frac{4+t}{4}\right) + \ldots$$

und diese dann in die Reihen

(5) $L = \frac{1}{t}\frac{1+t}{1} + \frac{1}{t}\frac{2+t}{2} - \frac{1}{t}\frac{2+t}{2} + \frac{1}{t}\frac{3+t}{3} - \frac{3+t}{3} + \ldots$

mit dem Grenzwert $L = \frac{1}{t}(1+t)$ umformen lassen. Und so wäre er gestrandet in einem mathematischen Minenfeld von lauter widersprechenden Aussagen

(6) $L = 1$ und $L = \frac{1}{t}(1+t)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$,

aus denen es nur einen Ausweg gab, nämlich anzunehmen: Die Reihe (1) hat überhaupt keinen Grenzwert. So aber hätte Leibniz die huygenssche Aufgabe falsch gelöst. Dazu ist es jedoch nicht gekommen.

Ein weiterer Grund, warum Leibniz die „Herleitung“ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ $L = 1$ für einen Irrweg, zumindest aber für einen ungesicherten Weg halten musste: Die arithmetischen Regeln, mit denen die Reihe (3) in die Reihe (4) transformiert wurde, sind ja zunächst nur auf Summen mit endlich vielen Gliedern anwendbar. Beim Übergang (3) $\Rightarrow$ (4) wurde aber so gehandelt, als erstrecke sich ihr Gültigkeitsbereich auch auf unendliche Reihen und dürfe dort unendlich oft angewendet werden. Leibniz bezweifelte, dass ein solches Vorgehen immer zulässig sei und damit stets zu richtigen Ergebnissen führe.

Wie sehr sein Zweifel berechtigt war, zeigt ein bekanntes Beispiel von Bernhard Riemann***, welches auf nachdrückliche Weise deutlich machte:
Man darf Rechenregeln für endliche Reihen nicht immer ohne unerwünschte Folgen bei unendlichen Reihen anwenden.
Dieses Beispiel ist der bemerkenswerte

> *Satz von Riemann:*
> Bei bestimmten Reihen (sie müssen konvergent, dürfen aber nicht absolut konvergent sein) mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern kann man durch Umordnen dieser Glieder stets erreichen, dass die umgeordnete Reihe *jede beliebige vorgegebene* Zahl als Grenzwert besitzt.

*** Georg Friedrich Bernhard Riemann (*17. September 1826 in Breselenz (Elbe); †20. Juli 1866 in Selasca (Lago Maggiore)); deutscher Mathematiker, der auf vielen Gebieten wirkte.

Wie hat nun Leibniz die Aufgabe von Huygens gelöst?
Um den logischen Probleme aus dem Weg zu gehen, die entstehen, wenn man die unendliche Reihe L als Ganzes arithmetisch bearbeitet, entwickelte Leibniz eine Methode zur Grenzwertbestimmung, bei der nur endliche Teilsummen L_n von L eine Rolle spielen und bei der alle Regeln der Arithmetik verwendet werden dürfen.
Die L_n sind Anfangstücke von L:

$$L_n := \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \ n = 1, 2, 3, ...$$

Das Leibniz-Verfahren wird später im 19. Jahrhundert als Ausgangspunkt zu einer präzisen Definition der Begriffe *Konvergenz* und *Grenzwert* dienen! Wir wollen es hier anschaulich – also nicht mit dem in der Mathematik üblichen Formalismus – beschreiben.

Wenn man die Umformung (2) auf die Teilsumme L_n von L anwendet und dann die umgeformte Teilreihe zusammenfasst – was ja bei endlichen Summen zulässig ist – so erhält man:

(7) Für $n = 1, 2, 3, ...$ ist $L_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Daraus folgt: Die Abstände der Teilsummen $L_n,\ n = 1, 2, 3, ...$, von 1 betragen $1 - L_n = \frac{1}{n+1}$. Und diese Abstände tendieren gegen 0, wenn n immer größer gewählt wird. Die Teilsummen L_n unterscheiden sich also immer weniger von 1, je größer n gewählt wird.
Man beschreibt diesen Sachverhalt kurz so: $\lim\limits_{n \to \infty} L_n = 1$; und man sagt: Die Folge der Teilsummen $L_n,\ n = 1, 2, 3, ...$, *konvergiert* gegen den *Grenzwert* 1.

Da die Teilsummen $L_1,\ L_2,\ L_3, ...$ nacheinander immer größere Anfangsstücke der Reihe (1) darstellen, machte Leibniz nun eine kühne Konstruktion, mit der er die Kluft zwischen endlichen Reihen und einer unendlichen Reihe überbrückte, indem er definierte:
Da die Teilsummen L_n der Reihe (1) den Grenzwert 1 besitzen, hat auch die Reihe (1) selbst den Grenzwert $L = 1$.
Dies war Leibnizens Lösungsvorschlag der Aufgabe, den Grenzwert der Reihe zu bestimmen – den Huygens so akzeptierte.

Schlussbemerkung

Nach Leibniz hat die Reihe (1) den Grenzwert $L = 1$. Wie sind dann die Aussagen (6) zu erklären? Im Satz von Riemann wird festgestellt, dass es konvergente Reihen gibt, deren jeweiliger Grenzwert sich ändert, wenn man sie in andere Reihen umformt.
So ein Fall liegt wohl bei der Reihe (1) von Huygens vor. Ihre Umformungen führen zu den Reihen (4) und (5) – die von (1) verschiedene Reihen darstellen und die deshalb auch durchaus andere Grenzwerte als (1) haben können.

Danach ist (6) keine Ansammlung einander widersprechender Aussagen, sondern die Menge der Grenzwerte der Reihen (4) und (5) – die wir allerdings in irreführender Weise alle mit dem gleichen Symbol L bezeichnet hatten.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 97

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Geburtstagsmathematik

Bei einem Spaziergang mit ihrem Mann Hans-Werner letztes Jahr (2008) stellte Ute fest: „Meine Schwester ist vom Jahrgang '52 und so alt bin ich jetzt. Meine Schwester ist nun 56 Jahre alt und das ist mein Jahrgang!" Der Geburtsjahrgang besteht aus den letzten beiden Ziffern des Geburtsjahres.*

a) Sie stellt sich nun die Frage: Ist das Zufall oder gibt es bei jedem Paar ein Jahr, in dem dieses Phänomen auftritt? Ihr Mann – ein Mathematiker – stellt wilde Theorien auf. Kannst Du ihnen helfen? Wie lautet die Antwort auf Utes Frage?

b) Ihre Töchter sind in den Jahren 1980 und 1983 geboren. Gibt es für die beiden auch ein solches Jahr? Gib das Jahr an oder begründe, warum es dieses nicht gibt.

c) Ute und Hans-Werner stellen fest, dass es für sie auch ein solches Jahr gibt, nämlich 2009. In welchem Jahr wurde Hans-Werner geboren? (MG)

Lösung:

a) Es seien a und b die Jahrgänge zweier Personen, also $1900 + a$ und $1900 + b$ ihre Geburtsjahre. (Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass diese Personen beide im 20. Jahrhundert geboren wurden, für jedes andere Jahrhundert verlaufen die Rechnungen analog. Wobei korrekterweise das 20. Jahrhundert von 1901 bis 2000 ging, aber darüber sehen wir hier einmal hinweg...) Im fraglichen Jahr soll jeder das Alter erreichen, welches dem Jahrgang des anderen entspricht. Es soll also gelten: $(1900 + a) + b = a + (1900 + b)$. Wegen des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes gilt dies für alle Zahlen a und b. Allerdings gilt das nur, wenn beide Personen im selben Jahrhundert geboren wurden. Ansonsten wäre die Gleichung beispielsweise $(1900 + a) + b = a + (2000 + b)$, was

* Für alle, die mit der Schreibweise vertraut sind, dasselbe noch mal mathematisch formuliert: Für den Jahrgang j zum Geburtsjahr J gilt $j \equiv J \mod 100$ mit $0 \leq j \leq 99$.

nicht lösbar ist.

b) Aus vorangegangener Überlegung ist klar, dass es ein solches Jahr gibt und dieses $1900 + 80 + 83 = 2063$ sein muss.

c) Sei j Hans-Werners Geburtsjahrgang. Wegen $2009 = (1900 + j) + 56$ muss er 1953 geboren worden sein.

Größenvergleich

Die Seitenflächen eines Quaders haben die Flächeninhalte $220\,\text{cm}^2$, $264\,\text{cm}^2$ und $270\,\text{cm}^2$; die Flächeninhalte der Seitenflächen eines zweiten Quaders sind $176\,\text{cm}^2$, $198\,\text{cm}^2$ und $450\,\text{cm}^2$.

Welcher der Quader hat das größere Volumen – oder haben sie etwa das gleiche Volumen? (H.F.)

Lösung:

Die Seitenkanten des ersten Quaders seien x, y und z lang, die des zweiten Quaders seien u, v und w.

Dann gilt für den ersten Quader zum Beispiel $xy = 220\,\text{cm}^2$, $xz = 264\,\text{cm}^2$, $yz = 270\,\text{cm}^2$ und sein Volumen ist $V_1 = xyz$. Daraus folgt

$$V_1^2 = x^2y^2z^2 = xy \cdot xz \cdot zy = 220\,\text{cm}^2 \cdot 264\,\text{cm}^2 \cdot 270\,\text{cm}^2 = 15681600\,\text{cm}^6.$$

Für den zweiten Quader gilt analog $uv = 176\,\text{cm}^2$, $uw = 198\,\text{cm}^2$, $vw = 450\,\text{cm}^2$ und sein Volumen ist $V_2 = uvw$. Daraus folgt

$$V_2^2 = u^2v^2w^2 = uv \cdot uw \cdot vw = 176\,\text{cm}^2 \cdot 198\,\text{cm}^2 \cdot 450\,\text{cm}^2 = 15681600\,\text{cm}^6.$$

Aus $V_1^2 = V_2^2$ folgt $V_1 = V_2 = 3960\text{cm}^3$, die beiden Quader haben also gleiches Volumen.

Noch eine Variante der Goldbach-Vermutung**

Jede natürliche Zahl $n > 5$ ist die Summe aus einer Primzahl und einer Nichtprimzahl.

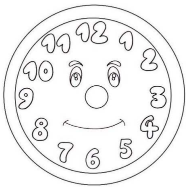
(Malte Meyn, Kl. 11, Ohm-Gymnasium, Erlangen)

Lösung:

Ungerade Zahlen n kann man als Summe $3 + (n - 3)$, gerade Zahlen n als $2 + (n - 2)$ schreiben.

2 und 3 sind Primzahlen, der zweite Summand ist in beiden Fällen gerade und größer als 2, also nicht prim.

** Nach Christian Goldbach, *18.03.1690 in Königsberg, †20.11.1764 in Moskau (in manchen Quellen steht 01.12.1764 in St. Petersburg). Seine berühmte Vermutung formulierte er 1742 in einem Brief an Leonhard Euler. Diese besagt: Jede gerade natürliche Zahl lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben. Bis heute ist dies nur eine Vermutung und noch nicht bewiesen oder widerlegt!



Uwes Uhr

Uwes Uhr geht $2\frac{1}{2}$-mal so schnell, wie sie sollte. Er stellt sie um Mitternacht. Wann hat sie zum ersten Mal wieder die richtige Zeigerstellung? (WJB)

Lösung:

In x Stunden geht Uwes Uhr $2{,}5 \cdot x$ Stunden weiter. Da $x = 2,5 \cdot x$ nicht möglich ist, muss $2{,}5 \cdot x > 12$ gelten. Die Gleichung $2{,}5 \cdot x = x + 12$ hat die Lösung $1{,}5 \cdot x = 12$, also $x = 8$.

Nach 8 Stunden ist die Uhr um $2{,}5 \cdot 8 = 20$ Stunden weiter. Die Zeigerstellung ist dann wieder die gleiche wie bei 8.00 Uhr.

Noch mehr Flaggen

Ein Verband von Vereinen oder Staaten usw. beschließt, dass jedes seiner Mitglieder eine Flagge mit drei Streifen haben soll. Alle Flaggen sollen längsgestreift sein und jeweils drei verschiedene der vier Farben rot, schwarz, gelb und weiß tragen.

a) Ist es mit dieser Vorschrift möglich, alle derzeitigen Mitglieder der Europäischen Union mit verschiedenen Flaggen auszurüsten?

b) Wie viele verschiedene Flaggen sind möglich, wenn wir lediglich gleiche Farbe benachbarter Streifen verbieten?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Fahnen m verschiedene Streifen aus n verfügbaren Farben haben sollen?

d) Wie viele verschiedene Fahnen sind möglich, wenn wir (wie in Teil b) Farbwiederholungen zulassen, aber nicht gleiche Farbe auf benachbarten Streifen? (WJB)

Lösung:

a) Es gibt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten, 4 für den ersten, 3 für den zweiten und 2 für den dritten Streifen. Das ist zu wenig für die 27 EU-Mitglieder.

b) Hier sind für den dritten Streifen wieder drei Farben erlaubt, das heißt es gibt $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten.

c) Mit der gleichen Argumentation wie in a) ergibt sich die Anzahl

$$n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

d) Analog zu b) findet man $n(n-1)^{m-1}$ Möglichkeiten.

Einerziffer

Ulrike beschäftigt sich gerne mit Zahlentheorie. So forscht sie im Bereich der Zahlen und geht auch der Frage nach: Welche Einerziffer haben die Zahlen k^{2009} für ganze Zahlen k?

Sie macht dabei auch tatsächlich eine interessante Entdeckung... (MG)

Lösung:

Wir schreiben $k = 10a + b$ mit $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $0 \leq b \leq 9$. Wegen $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$ und analog weiter für höhere Potenzen, genügt es, die Untersuchungen auf die Potenzen b^n der Einerziffern der Basen k zu beschränken.

Berechnen wir für die Einerziffern b die ersten Potenzen b^2, b^3, b^4, ..., so stellen wir fest, dass die Einerziffer von b^5 wieder die Einerzifer b ist und (spätestens) ab jetzt wiederholen sich die Einerziffern der Potenzen periodisch. Also haben k^n, k^{n+4}, k^{n+8}, ... dieselben Einerziffer, allgemein alle k^{4m+n} für natürliche Zahlen m.

Wegen $n = 2009 = 4 \cdot 502 + 1$ beziehungsweise $2009 - 4 \cdot 502 = 1$ hat also $k^{2009} = k^{4 \cdot 502+1}$ die Einerziffer von k.

Ungleichungen am Dreieck

Zeige: Die Länge einer Dreiecksseite ist stets kleiner als der halbe Dreiecksumfang.

Hinweis: Versuche es mal mit der sogenannten Dreiecksungleichung: Die Längen zweier Dreiecksseiten sind zusammen stets größer als die Länge der dritten Seite des Dreiecks. (H.F.)

Lösung:

Die Seitenlängen eines Dreiecks seien a, b und c.

Dann gilt für die Länge einer beliebigen Dreiecksseite – zum Beispiel für die Länge a – nach der Dreiecksungleichung $a < b + c$.

Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung jeweils a, so erhält man $a + a < a + b + c$, also $a < \frac{1}{2}(a + b + c)$ und hier ist $\frac{1}{2}(a + b + c)$ der halbe Dreiecksumfang – die Behauptung gilt daher.

Errata zu Monoid 97

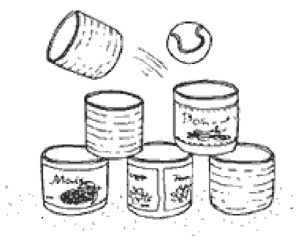
- Auf Seite 7 muss die Formel (1) folgendermaßen lauten:
  $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ...$
  Andernfalls ergibt das Produkt auf der rechten Seite $\frac{3}{4} \cdot \pi$.
- Auf Seite 11 muss in der dritten Zeile unterhalb der Formulierung (4) $n_4 > n_5 > n_6 > n_7 > ...$ stehen und in der fünften bzw. sechsten Zeile unterhalb von (4) entsprechend $n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > ....$

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Dosenwerfen

Am Rudi-Winzig-Gymnasium findet ein Schulfest statt. Herr Stütze möchte mit seiner Klasse für die Besucher Dosenwerfen anbieten: „Die Dosen bauen wir zu einer Pyramide auf. Ganz oben steht eine Dose, in der Reihe darunter drei Dosen, dann fünf und so weiter... Wir haben genau 55 Dosen zur Verfügung, die wir alle verwenden werden." Herr Stütze beginnt mit dem Aufbau. Doch er hat noch nicht die ersten beiden Dosen aufgestellt, da wird er von Bettina, einer Schülerin der Klasse, unterbrochen:



„Aber das kann doch gar nicht klappen. Dann bleiben entweder Dosen übrig oder es fehlen welche" – „Ach was, das passt schon, warte ab!" – „Dann müssen Sie die Dosen aber anders aufbauen", entgegnet Bettina ihm, „nämlich immer auf Lücke, also in die oberste Reihe eine Dose, in der Reihe darunter zwei Dosen, dann drei und so weiter..." – „Du glaubst mir also immer noch nicht?", fragt Herr Stütze ungläubig.

a) Wer hat Recht? Auf welche Weise lassen sich die 55 Dosen zu einer Pyramide aufbauen: Nach der Idee von Herrn Stütze, der Idee von Bettina, nach beiden oder gar keiner?

b) Gib jeweils eine allgemeine Formel an, mit welcher Herr Stütze und Bettina ausrechnen können, welche Anzahlen von Dosen sie (in n Reihen) aufbauen können.

c) Es gibt Anzahlen, die sowohl Herr Stütze als auch Bettina aufbauen können. Gib (mindestens) eine solche Anzahl außer der trivialen Anzahl 1 an. (MG)

Eine unmögliche Dreieckszerlegung

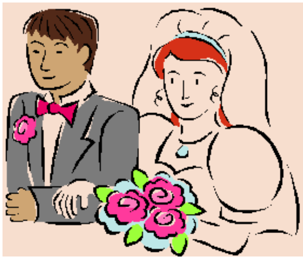
Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn keiner seiner drei Innenwinkel $\geq 90°$ ist. Man kann kein Dreieck in zwei Dreiecke zerlegen, die beide spitzwinklig sind. Du siehst es – kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Von Kindern, Katzen und Beinen

In einem Bus sitzen sieben Kinder. Jedes Kind hat sieben Rucksäcke, in denen jeweils sieben Katzen sitzen. Jede Katze hat sieben Junge.
Wie viele Beine befinden sich im Bus?

(Kevin Schmitt, Klasse 9, Elisabeth-Langässer-Gymnasium, Alzey)

Ein Heiratsproblem



In längst vergangenen Zeiten wollte ein Stammesherzog seine Töchter Adelheid (A) und Brunhilde (B) verheiraten. Chlodwig (C) sollte eines der beiden Mädchen zur Frau bekommen. Von jedem anderem Bewerber verlangte der Herzog, dass er für beide Frauen einen Brautpreis anbieten müsse – ganz gleich ob er nun Adelheid oder Brunhilde zur Frau haben wolle. Üblicher Weise wurden damals Brautpreise mit Pferden bezahlt.
Der ehrgeizige Dietrich (D), der 30 Pferde besaß, machte das beste Angebot: 26 Pferde für Adelheid – das hübschere der beiden Mädchen – und 20 Pferde für Brunhilde.
Weil nun sowohl Chlodwig als auch Dietrich Adelheid haben wollten, befahl der Herzog, dass auch Chlodwig ein Angebot für Adelheid abgeben müsse. Dann werde er seine Entscheidung so treffen, dass sie ihm die größt mögliche Anzahl von Pferden einbringen werde.
Chlodwig, der unsterblich in Adelheid verliebt war und deshalb nur sie zur Frau haben wollte, schien chancenlos gegenüber Dietrich zu sein, denn er besaß nicht einmal $\frac{1}{3}$ der Anzahl an Pferden von Dietrich.
Doch schließlich gab der Herzog Chlodwig seine Tochter Adelheid zur Frau.
Wieviele Pferde besaß Chlodwig und welches Angebot hatte er dem Herzog gemacht?

(H.F.)

Auch wenn auf der nächsten Seite eine neue Überschrift steht, gehen dort die Mathespielereien noch weiter!

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Bereits ab Seite 22 findet Ihr Mathespielereien!

Urlaubspost

Die Sommerferien stehen vor der Tür. Da sie sich dann nicht sehen können, versprechen die drei Freundinnen Julia, Kerstin und Linda einander, dass jede den beiden anderen jeweils eine Postkarte aus dem Urlaub schreibt.

a) Wieviele Postkarten werden geschrieben?

b) Als Melanie von der Vereinbarung mitbekommt, möchte sie gerne mitmachen. Wie viele Postkarten sind es dann?

c) Die vier Freundinnen überlegen sich, dass es auch schön wäre, wenn die ganze Klasse mitmachen würde. In der Klasse sind 28 Schüler. Wie viele Karten würden dann geschrieben?

d) Wie viele wären es allgemein bei n beteiligten Personen?

e) Unter den 28 Schülern der Klasse sind auch Bastian und Sebastian, die Zwillingsbrüder sind. Die beiden bekommen jeweils eine eigene Karte von den Klassenkameraden, verschicken selbst aber jeweils nur eine gemeinsam.

f) Die Klasse einigt sich darauf, dass auch die Lehrerin Frau Schwarz von jedem eine Karte bekommen soll. Wie viele Karten werden nun insgesamt geschrieben (ohne Berücksichtigung, dass zwei Schüler Zwillingsbrüder sind)?

(MG)

Ziffernübereinstimmung

a) Finde das kleinste Paar (n, m) mit $1 < n < m$ derart, dass die letzten beiden Ziffern von 2009^n und 2009^m übereinstimmen!

b) Gibt es Paare (n, m) mit $1 < n < m$ so, dass die letzten 2009 Ziffern von 2009^n und 2009^m übereinstimmen? (WJB)

Englische Zahlenknobelei

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & T & W & O \\ + & & & T & H & R & E & E \\ + & & & S & E & V & E & N \\ \hline & T & W & E & L & V & E \end{array}$$

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern und zwar so, dass verschiedenen Buchstaben auch verschiedene Ziffern entsprechen, wobei den ersten Buchstaben von links nicht die Ziffer 0 zugeordnet wird – so dass eine korrekte Addition entsteht.

(gefunden von H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 967: Niemals eine Quadratzahl

Überlege, warum es keine natürliche Zahl n gibt, für die $n(n+2)$ eine Quadratzahl ist. (H.F.)

Aufgabe 968: Der Teiler 2009

Es seien $a \geq 1$, $b \geq 1$ ganze Zahlen mit $a + b = 2009$

Gibt es Zahlenpaare a, b, für die gilt: 2009 ist ein Teiler von $a \cdot b$?

Wenn ja: Welches sind die Paare? (H.F.)

Aufgabe 969: Abschätzung einer Vierecksfläche

Im Viereck $ABCD$ seien in der üblichen Bezeichnung a, b, c, d die Längen der vier Seiten und F sei die Vierecksfläche.

Zeige, dass dann gilt: $F \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$. (H.F.)

Aufgabe 970: Zwei Teilmengen einer Menge

Eine Menge $\mathbb{M}$ bestehe aus 15 verschiedenen natürlichen Zahlen ≤ 2009.

Begründe: Aus $\mathbb{M}$ kann man stets zwei verschiedene Teilmengen so auswählen, dass für sie die Summen ihrer Elemente übereinstimmen.

Hinweise: Eine Menge aus n Elementen hat 2^n verschiedene Teilmengen, die leere Menge und die ganze Menge mitgezählt.

Die beiden ausgewählten Teilmengen können gemeinsame Elemente haben, der Schnitt muss also nicht leer sein. (H.F.)

Aufgabe 971: Familienstatistik

Nach einer Bekanntmachung des Statistischen Bundesamtes (Stand März 2004) leben von den Kindern unter 18 Jahren in Deutschland 25 % ohne Geschwister, 47 % mit einem Geschwisterkind, 19 % mit zwei Geschwistern und 9 % mit mindestens drei Geschwistern. Die in Apotheken erhältliche Zeitschrift *Baby und Familie* von Mai 2006 schließt daraus: „Paare, die sich für ein zweites oder drittes Kind entscheiden, sind eindeutig in der Überzahl.“

Bei der Lösung der folgenden Aufgabe machen wir keinen großen Fehler, wenn wir annehmen, dass die 9 % der Kinder mit mindestens drei Geschwistern genau drei Geschwister haben.

a) Wie groß sind (unter allen Familien mit mindestens einem Kind) die Anteile der Familien mit 1, 2, 3 beziehungsweise 4 Kindern?

b) Was hälst Du von der Schlussfolgerung aus *Baby und Familie*? (WJB)

Aufgabe 972: Variation über den Satz des Pythagoras
In einem Dreieck mit Winkel $\gamma = 90°$ gilt $c^2 = a^2 + b^2$.
Gibt es einen Winkel Γ derart, dass im Dreieck mit $\gamma = \Gamma$ gilt $c^3 = a^3 + b^3$? (WJB)

Aufgabe 973: Karl Krauses Kies
Karl Krause will seine Garagenzufahrt 15 cm hoch mit Kies belegen. Die Zufahrt ist 4 m breit und 14 m lang. Herr Krause muss den Kies nach Gewicht kaufen. Deshalb stellt er fest, wie schwer der Kies ist, indem er vier Kiesel auf die Waage legt. Diese wiegen 980 g. Danach füllt er einen Messbecher mit $\frac{1}{2}$l Wasser und legt dann die Steine hinein. Damit steigt die Anzeige des Messbechers auf 940ml. Er rechnet dann: $\frac{0{,}15 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 980}{940 - 500} = 18{,}7$ und bestellt 19 Tonnen Kies. Bei der Lieferung staunt er.
Hat Herr Krause viel zu viel oder viel zu wenig Kies bekommen und warum? (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 97
Klassen 8–13

Aufgabe 960: Professor Altermann und alte Hölzchen
Prof. Altermann ist Archäologe. Bei Ausgrabungen findet er ein Kästchen mit Hölzchen paarweise verschiedener Längen. Er stellt fest, dass das kürzeste Hölzchen eine Länge a_1 hat und das jeweils nächstlängere Hölzchen sich vom vorhergehenden jeweils um eine feste Längendifferenz d unterscheidet, also $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$,...
Prof. Altermann und seine Mitarbeiter vermuten, dass mit diesen Hölzchen früher Längen von Strecken gemessen wurden. Außerdem bemerken sie, dass $a_1 + a_2$ die Länge 13 ergibt und $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ die Länge 74.

a) Wie lang ist das n-te Hölzchen?
b) Welche Hölzchen müssen kombiniert werden, um die Längen 67 und 2 zu erhalten? (MG)

Lösung:

a) Es ist $a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + d = 2a_1 + d = 13$ und $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d = 4a_1 + 18d = 74$.
Das daraus resultierende Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2a_1 + d &= 13 \\ 4a_1 + 18d &= 74 \end{aligned}$$
hat die Lösung $d = 3$ und $a_1 = 5$.
Damit hat das n-te Hölzchen die Länge $a_n = 5 + 3(n - 1)$.

b) Es ist $67 = 26+17+11+8+5 = a_8+a_5+a_3+a_2+a_1$, sodass die Hölzchen 1, 2, 3, 5 und 8 zu kombinieren sind. Aber auch andere Kombinationen sind möglich.
Wegen $2 = 13 - 11 = 8 + 5 - 11 = a_2 + a_1 - a_3$ müssen für die Länge 2 zunächst die Hölzchen 1 und 2 und dann das Hölzchen 3 vom Ende in die entgegengesetzte Richtung gelegt (also wieder abgezogen) werden.

Aufgabe 961: Zahlendreiecke

a) Ergänze das folgende Dreieck so, dass jeweils in der nachfolgenden Zeile die Summe zweier benachbarter Zahlen der vorausgehenden Zeile steht.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & x & & 7 & & x & & 3 \\ & 8 & & x & & x & & x & \\ & & x & & x & & 22 & & \\ & & & x & & x & & & \\ & & & & 92 & & & & \end{array}$$

b) Dieses Dreieck hat die Seitenlänge 5, und es sind 5 Zahlen vorgegeben. Lässt sich jedes Dreieck richtig ergänzen, wenn Seitenlänge und Anzahl der vorgegebenen Zahlen übereinstimmen?

c) Wenn sich ein Dreieck ergänzen lässt, gibt es dann immer nur eine mögliche Ergänzung? (WJB)

Lösung:

a) Die Zahl 22 ist die Summe aus 3 und 7 und zweimal der Zahl, die zwischen 3 und 7 steht, also $\frac{(22-7-3)}{2} = 6$. Die dritte und vierte Zahl in der zweiten Zeile sind also $7+6 = 13$ und $6+3 = 9$. Nennen wir die zweite Zahl in der zweiten Zeile z, so ergibt sich $92 = ((8+z)+(13+z))+((13+z)+22) = 56+3z$ und somit $z = \frac{92-56}{3} = 12$. Die restlichen Zahlen lassen sich einfach ergänzen und liefern:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & & 5 & & 7 & & 6 & & 3 \\ & 8 & & 12 & & 13 & & 9 & \\ & & 20 & & 25 & & 22 & & \\ & & & 45 & & 47 & & & \\ & & & & 92 & & & & \end{array}$$

b) und c) Außer für die Zahlen der ersten Zeile gibt es für jede Zahl im Dreieck eine Gleichung der Form $z = x + y$, also so viele Gleichungen wie zu bestimmende Zahlen. Auf den ersten Blick könnte man also vermuten, dass es immer genau eine Lösung für dieses Gleichungssystem gäbe. Hier sind aber Gegenbeispiele:

zu b)

1 2 1 x 4
x x x x
5 x x
x x
x

zu c)

1 2 1 x x
3 x x x
6 x x
x x
x

im Gegenbeispiel zu b) widersprechen sich die Vorgaben, in dem zu c) können wir zum Beispiel die beiden fehlenden Zahlen der ersten Zeile beliebig wählen und dann das Dreieck ergänzen.

Aufgabe 962: Galileis Gleichungskette

Galileo Galilei (1564–1642) – Physiker, Astronom und Mathematiker – behauptete die Gültigkeit der folgenden bemerkenswerten unendlich langen Gleichungskette:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

Finde einen Beweis dafür! (H.F.)

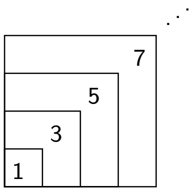
Lösung:

Der Zähler des $(n+1)$-ten Bruches in der Gleichungskette lautet $1+3+\dots+(1+2n)$ und sein Nenner ist $(1+2n+2)+\dots+(1+2n+2n+2)$.

Der $(n+1)$-te Bruch ist somit

$$\frac{1+3+\dots+(1+2n)}{(1+2n+2)+\dots+(1+2n+2n+2)}.$$

Galilei behauptet nun: Der $(n+1)$-te Bruch hat den Wert $\frac{1}{3}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$



Zum Nachweis dieser Behauptung benötigen wir eine Formel für die Summe S_n der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Mit einer Methode, die von den griechischen Mathematikern stammt, erkennt man ohne lange Rechnungen aus der nebenstehenden Figur, dass gilt:

$$S_{n+1} = 1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2.$$

Also hat der $(n+1)$-te Bruch den Wert:

$$\frac{S_{n+1}}{S_{2n+2} - S_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)^2 - (n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{4(n+1)^2 - (n+1)^2} = \frac{1}{3}$$

Damit trifft Galileis Behauptung zu und die von ihm angegebene Gleichungskette ist richtig.

Aufgabe 963: Meteoriten-Einschlag

Drei Meteoriten fallen auf die Erde.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ihre Einschlagpunkte auf ein und derselben Halbkugel (deren Äquator eingeschlossen) befinden?
Hinweis: Die Erde wird als eine Kugel betrachtet und mit Äquator ist hier jeder Großkreis gemeint; dieser teilt die Kugel in zwei Halbkugeln. (H.F.)

Lösung:
Durch zwei beliebige Punkte auf der Oberfläche einer Kugel kann man stets einen Großkreis (=Äquator) legen. Dann liegt jeder beliebige weitere Punkt entweder auch auf dem Äquator oder auf einer der beiden vom Äquator festgelegten Halbkugeln.
Die Wahrscheinlichkeit ist also 1, dass die drei Meteroiten auf einer Halbkugel samt Äquator einschlagen.

Aufgabe 964: Summe 2009
Die natürlichen Zahlen a, b, c und d sollen so bestimmt werden, dass für den Ausdruck $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gilt:

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 2009.$$

Ist das möglich? (H.F.)

Lösung:
Wegen $f(0) = d$, $f(1) = a + b + c + d$, $f(2) = 8a + 4b + 2c + d$ und $f(3) = 27a + 9b + 3c + d$ gilt

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 36a + 14b + 6c + 4d$$

und das ist eine gerade Zahl, während 2009 eine ungerade Zahl ist. Die gesuchte Darstellung von $f(x)$ ist also nicht möglich.

Aufgabe 965: Mittelwertfolge
Céline ist begeisterte Knoblerin und, angespornt vom Artikel „Pappos und die Mittelwerte“ aus Monoid 94, entwickelt sie eine Zahlenfolge: Sie beginnt mit zwei vorgegebenen Werten und jede folgende Zahl ist das geometrische Mittel ihres Vorgängers und ihres Nachfolgers, es gilt also $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

a) Céline beginnt mit 2 und 4. Berechne die nächsten fünf Folgenglieder.
b) Da Céline es sehr anstrengend findet, alle Folgenglieder ausrechnen zu müssen, um irgend ein spätes Folgenglied bestimmen zu können, möchte sie eine explizite Formel herleiten, mit der sie direkt das n-te Folgenglied mit $n \in \mathbb{N}$ berechnen kann. Nach kurzer Überlegung findet sie auch eine solche Formel. Wie lautet diese?

c) Für die Startwerte 2 und 4 werden die Folgenglieder immer größer. Wie müsste sie die Startwerte wählen, damit die Folgenglieder immer kleiner werden? Kann Céline die Startwerte auch so wählen, dass die Glieder konstant bleiben? (MG)

Lösung:

a) Aus dem geometrischen Mittel $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ folgt $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$.
Damit lassen sich aus den Startwerten $a_1 = 2$ und $a_2 = 4$ die nächsten Folgenglieder berechnen: 8, 16, 32, 64, 128.

b) Die ersten Folgenglieder lassen vermuten, dass die Folgenglieder immer das doppelte des vorherigen sind. Dann ist die explizite Folgenvorschrift $a_n = 2^n$. Das müssen wir nun beweisen, etwa durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $1 \leq n \leq 7$ haben wir das bereits vorgerechnet.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $n-1$ und n.
Induktionsschritt: Mit der Rekursionsvorschrift erhalten wir

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-n+1} = 2^{n+1}.$$

c) In Célines Folge war jedes Folgenglied doppelt so groß wie das vorherige. Wir hätten auch zeigen können, dass $a_n = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_n$ mit $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ ist. Allgemein ist also ein Folgenglied immer $\frac{a_n}{a_{n-1}}$-mal so groß wie das vorherige.
Wählt Céline $a_1 > a_2 > 0$, so ist $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ und die Folgenglieder werden immer kleiner; die Folge konvergiert sogar gegen 0. Wählt Céline jedoch $a_1 = a_2 \neq 0$, so erhält sie eine konstante Folge.

Aufgabe 966: Das verstopfte Waschbecken

In einem Waschbecken mit dem Volumen $V = 14000\,\text{cm}^3$ fließt aus einem Wasserhahn mit dem Durchmesser $d_H = 2\,\text{cm}$ das Wasser mit einer Geschwindigkeit $v = 0{,}04\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Das Abflussrohr ist aber stark verstopft, so dass nur ein Durchmesser von $d_A = 0{,}5\,\text{cm}$ frei ist. Man nehme an, das Wasser würde trotzdem mit derselben Geschwindigkeit v durch die Abflussöffnung fließen, wie es aus dem Hahn kommt.
Wie lange würde es dauern, bis das Wasser über den Rand des Beckens läuft?
(Alia'a Ahmed Doma, Klasse 11, Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo)

Lösung:
Es ist $v = 0{,}04\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.
Der Querschnitt Q_H des Wasserhahns ist $Q_H = \pi \left(\frac{d_H}{2}\right)^2 \approx 3{,}14\,\text{cm}^2$ groß. Daher fließt je Sekunde $V_H = Q_H \cdot v \approx 3{,}142\,\text{cm}^2 \cdot 4\,\text{cm} = 12{,}566\,\text{cm}^3$ Wasser neu in das Becken ein.

Beim Abfluss steht eine Fläche von $Q_A = \pi \left(\frac{d_A}{2}\right)^2 \approx 0{,}196\,\text{cm}^2$ zur Verfügung, so dass je Sekunde $V_A = Q_A \cdot v \approx 0{,}196\,\text{cm}^2 \cdot 4\,\text{cm} = 0{,}785\,\text{cm}^3$ Wasser abfließen kann. Das bedeutet, dass sich das Becken je Sekunde um $\Delta V = V_H - V_A \approx 12{,}566\,\text{cm}^3 - 0{,}785\,\text{cm}^3 = 11{,}781\,\text{cm}^3$ füllt.

Bis das Becken komplett gefüllt ist, vergeht die Zeit $t = \frac{V}{\Delta V/\text{s}} \approx \frac{14000\,\text{cm}^3}{11{,}781\,\text{cm}^3/\text{s}} \approx$ 1188s. Das Wasser läuft also nach etwa 1188 Sekunden, also 19 min und 48 s, über. (MG)

Wer forscht mit?

In Heft 95 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Eine Primzahlen-Vermutung

Mit $!p$ sei das Produkt aller Primzahlen $\leq p$ bezeichnet.

a) Berechne $!p + 1$ für die Primzahlen $p = 2, 3, 5, ..., 19$.
b) Bestimme die auf $!p + 1$ folgende Primzahl P für $p \leq 19$.
c) Berechne $P - !p$ für $p \leq 19$.

Vor einigen Jahren ist die Vermutung aufgetaucht:

Für jede Primzahl $p \geq 2$ ist $P - !p$ eine Primzahl.

Wills Du es mit dieser Vermutung „ein Stück weit“ aufnehmen?
Vielleicht findest Du dabei ein Gegenbeispiel. Du hättest dann die bis heute unbewiesene Vermutung widerlegt. (H.F.)

Ergebnisse

Sechs unserer Leser(innen) haben uns die Ergebnisse ihrer Beschäftigung mit dieser Primzahlen-Vermutung zugeschickt: **Philipp Delhougne** (Klasse 10,Otto-Hahn-Schule, Hanau), **Alia'a Ahmed Doma** und **Shaima'a Ahmed Doma** (Klasse 11 und 8, Deutschen Schule der Borromäerinnen, Kairo), **Alexey Tyukin** (Klasse 13, Mainz-Gymnasium Gonsenheim), **Florian Schweiger** (Klasse 11, Gymnasium Marktoberdorf), **Luis Ressel** (Klasse 7, Friedrich-List Gymnasium, Reutlingen). Ihre Ergebnisse haben sie in einer Tabelle der folgenden Art zusammengefasst:

p	$!p+1$	P	$P-!p$
2	3	5	3
3	7	11	5
5	31	37	7
7	211	223	13
11	2311	2333	23
13	30031	30047	17
17	51011	510529	19
19	9699691	9699713	23

Alexey Tyukin hat noch $p = 23$ einbezogen, wofür sich $P-!p = 37$ ergibt, und Florian Schweiger hat mit einem kleinen Programm auf seinem TI–Voyage 200 $P-!p$ fzogen, wofür sich $P-!p = 37$ ergibt, und Florian Schweiger hat mit einem kleinr alle Primzahlen p unterhalb 100 berechnet: Stets ergab sich eine Primzahl. Darüber hinaus hat er gezeigt, dass $P-!p$ eine Primzahl sein muss, wenn $P <!p+(p+1)^2$ ist; denn sonst müsste $P-!p$ einen echter Primteiler $\leq p$ haben, der dann ein Teiler von $!p$ und folglich von P wäre, was im Widerspruch dazu stünde, dass P eine Primzahl ist.
Übrigens lassen sich die Untersuchungen recht elegant mit dem CAS Derive und den Funktionen NTH_PRIME(n) für die n-te Primzahl und NEXT_PRIME(k) für die nächste Primzahl nach k sowie der Überprüfungsfunktion PRIME? durchführen.
Dafür setzen wir M_Prod(k):=PRODUCT(NTH_Prime(n),n,1,k). Dann liefert der Befehl

VECTOR(PRIME?(NEXT_PRIME(M_Prod(k)+1)–M_Prod(k)),k,1,100)

tatsächlich hundertmal true.

Die Goldbach-Vermutung
und einige Exkursionen in ihrer Umgebung

von Hartwig Fuchs

Vorgeschichte

Christian Goldbach (1690–1764), ein Jurist, der eine steile Karriere im Dienste des preußischen Königs und später des russischen Zaren machte, war ein Mann von umfassender Bildung und ausgedehnten wissenschaftlichen Kenntnissen. Sein größtes Interesse aber galt der Mathematik, zu der er sogar eigenständige Beiträge in der Zahlentheorie und Analysis leistete.
Das brachte ihn in Kontakt mit den besten Mathematikern seiner Zeit, darunter Gottfried Wilhelm Leibniz, Daniel Bernoulli und besonders Leonhard Euler, mit

dem er viele Jahre im Briefwechsel stand. Von ihrer umfangreichen Korrespondenz sind fast 200 Briefe erhalten, die als wichtige Quelle für die Wissenschaftsgeschichte des 18. Jahrhunderts dienen.

Einer dieser Briefe ist die „Geburtsurkunde“ für die berühmte *Goldbach-Vermutung*. Am 7.6.1742 schreibt Goldbach an Euler:

> „Es scheint wenigstens, dass eine Zahl* > 2 ein *aggregatum trium numerorum primorum* sei“ – also aus drei Primzahlen zusammengesetzt sei.

Heute formuliert man die Goldbach-Vermutung getrennt als Behauptung über gerade Zahlen und als Behauptung über ungerade Zahlen (siehe (1) und (2)). Das ist deshalb gerechtfertigt, weil aus diesen die Goldbach-Vermutung für $n \geq 6$ folgt.
Es seien nämlich (1) und (2) bewiesen.
Für jede gerade Zahl $n - 2$ mit $n - 2 \geq 4$ gilt dann nach (1): $n - 2 = p_1 + p_2$ mit Primzahlen p_1 und p_2. Also ist $n = 2 + p_1 + p_2$ für $n \geq 6$. Daraus und aus (2) ergibt sich die Goldbach-Vermutung für $n \geq 6$

Bemerkung:
Goldbach hat seine Vermutung für Zahlen > 2, also insbesondere auch für $n = 3, 4, 5$, ausgesprochen. Dazu muss man wissen, dass zu seiner Zeit die Zahl 1 als Primzahl galt und er daher $3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 1 + 3$ als Primzahlsummen betrachtete.

Die erste Version der Goldbach-Vermutung

(1) Jede gerade Zahl $n \geq 4$ ist eine Summe aus zwei Primzahlen.

Beispiel:

n	4	6	8	10	...	22	...
$p_1 + p_2$	$2+2$	$3+3$	$3+5$	$3+7$		$3+19$	
				$5+5$		$5+17$	
						$11+11$	

Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, hat einmal (1) für alle geraden Zahlen $n \leq 1000$ überprüft und stets bestätigt gefunden.
Mit einem Computer hat man sogar später berechnet:

> Die ersten Version der Goldbach-Vermutung gilt für alle geraden Zahlen n mit $4 \leq n \leq 10^{18}$ (Stand 2007**).

Die Tabelle oben zeigt, dass manche geraden Zahlen mehrere verschiedene Darstellungen als Primzahlsummen haben können.

---

* Das Wort Zahl steht hier und im Folgenden stets für eine positive ganze Zahl.
** Tomas Oliveira e Silva

Es sei $A(n)$ die Anzahl verschiedener solcher Primzahlsummen der geraden Zahl n, wobei Summen $a+b$ und $b+a$ nicht als verschieden gelten. Es sei n_{min} die kleinste der Zahlen n, für die $A(n)$ einen vorgegebenen Wert g hat, $g = 1, 2, 3, ...$

Beispiel:

$A(n) = g$	1	2	3	4	5	6	...
n_{min}	4	10	22	34	48	60	...

Ein in diesem Zusammenhang vermutlich ungelöstes Problem:

> Gibt es zu jeder Zahl g, $g = 1, 2, 3, ...$, jeweils (mindestens) eine gerade Zahl n, so dass $A(n) = g$ ist?

Das Beispiel oben scheint anzudeuten, dass die Frage eher zu bejahen sei. Um aber vor voreiligen Vermutungen zu warnen, geben wir noch ein Beispiel:

Beispiel:

n	82	84	86	88	90	92	94	96	98	...
$A(n) = g$	5	8	5	4	9	4	5	7	3	...

Hinweis: Computer-Freunde können der Frage nachgehen, ob es jeweils ein gerades n mit $A(n) = g$ für alle $g = 7, 8, 9, \dots, 20$ gibt.

Trotz aller Anstrengungen von Mathematikern seit Mitte des 18. Jahrhunderts gilt bis heute: Die erste Version der Goldbach-Vermutung ist immer noch nicht bewiesen.

Die zweite Version der Goldbach-Vermutung

(2) Jede ungerade Zahl $n \geq 7$ ist eine Summe aus drei Primzahlen.

Ein erster Schritt in die Richtung eines Beweises von (2) gelang Lew Schnirelman (1931), als er herleitete:

> Jede ungerade Zahl $n \geq 5$ kann als eine Summe aus höchstens 300 000 Primzahlen dargestellt werden!

Dieser Satz ist natürlich noch „Lichtjahre" entfernt von einem Beweis der Goldbach-Vermutung (2) und doch ist er von großer theoretischer Bedeutung: Konnte man vorher nicht ausschließen, dass zur Summendarstellung von immer größeren ungeraden Zahlen immer mehr Primzahlen benötigt werden, so zeigte Schnirelman, dass es keine ungerade Zahl gibt, für die die Summendarstellung eine beliebig große Anzahl von primen Summanden besitzt.

Schnirelmans Ergebnis erfuhr 46 Jahre später eine enormen Verbesserung durch Robert Charles „Bob" Vaughan:

Jede ungerade Zahl $n \geq 5$ kann aus maximal 27 Primzahlen additiv zusammengesetzt werden.

Einen völlig anderen Weg zu einem Beweis von (2) mit guten Aussichten auf Erfolg schlug Iwan Winogradow ein, als er 1937 herleitete:

Es gibt eine konkret berechenbare Zahl w, so dass gilt: Jede ungerade Zahl $n \geq w$ kann als eine Summe aus drei Primzahlen geschrieben werden.

Winogradow selbst konnte keinen Wert für w bestimmen. Das war der Anlass für eine intensive Suche nach einer konkreten Winogradow-Zahl w. Und tatsächlich gelang es, für w einen zunächst gigantischen Wert zu ermitteln, nämlich $w = e^{e^{e^{41,96}}}$, der später auf den Wert $w = 3^{3^{15}}$ heruntergedrückt werden konnte. Damit ist (2) nur noch zu beweisen für ungerades $n < 3^{3^{15}}$. Aber (2) gilt bereits für ungerades n mit $7 \leq n \leq 10^8 + 3$. Denn für jedes gerade $n - 3$, $4 \leq n - 3 \leq 10^8$, ist $n - 3 = p_1 + p_2$ mit Primzahlen p_1 und p_2, so dass $n = 3 + p_1 + p_2$ gilt.

Wir fassen zusammen:
Während die erste Version der Goldbach-Vermutung für gerade Zahlen im Wesentlichen noch unbewiesen ist, gilt im Falle der zweiten Version für ungerade Zahlen:

Jede ungerade Zahl n, $n \geq 7$ mit Ausnahme der endlich vielen Zahlen n, mit $10^8 + 5 \leq n \leq 3^{3^{15}}$, ist eine Summe aus drei Primzahlen.

Wer glaubt, die Ausnahmeziffern seien mit nicht zu hohem Rechenaufwand für einen Computer überprüfbar, der sei gewarnt: $3^{3^{15}}$ hat 6 846 169 Stellen.

Exkursionen in die Umgebung der Goldbach-Vermutung

Erster Ausflug
Zu jeder Zahl $n \geq 4$ gibt es stets zwei Zahlen $k \geq 2$ und $m \geq 2$, so dass $n = k + m$ ist. Dabei darf man nicht annehmen, dass stets k und m als Primzahlen wählbar sind:
Für ungerade n zeigen dies Beispiele wie $n = 17$ oder $n = 27$ und für gerade n rät die unbewiesene erste Version der Goldbach-Vermutung zur Vorsicht.
Deshalb sollte man zunächst bei einem beliebigen n davon ausgehen, dass k und m jeweils Primzahlprodukte sind.
Hier liegt dann der Schluss nahe: Je größer n ist, umso größer ist die Anzahl der Primfaktoren in k oder m. Aber das ist nicht der Fall!
Viggo Brun hat nämlich um 1920 herausgefunden, dass für fast alle n gilt:

Jede hinreichend große Zahl n ist die Summe zweier Zahlen k und m, von denen jede höchstens 9 Primfaktoren besitzt.

Die Zahl 9 im Satz von Brun hat wohl Chen Jingrun zu der Untersuchung veranlasst, ob man nicht mit weniger Primfaktoren auskommt. Tatsächlich gelang es ihm 1966, das Ergebnis von Brun für gerade Zahlen wesentlich zu verbessern:

> Jede hinreichend große gerade Zahl n ist die Summe aus einer Primzahl k und einer Zahl m mit höchstens zwei Primfaktoren.
> Etwa so: $100\,000 = 10\,859 + 13 \cdot 6\,857$, wobei alle rechts vorkommenden Zahlen prim sind.

Der Satz von Chen lässt sich leicht auf ungerade Zahlen n übertragen. Für eine hinreichend große gerade Zahl $n-3$ mit $n-3 = k+m$, k prim und m mit höchstens zwei Primfaktoren, gilt: $n = 3+k+m$, n ungerade.
Mit seinem Satz ist Chen bisher am nächsten an einen Beweis der Goldbach-Vermutung (1) herangekommen – es ist ja „nur" noch zu zeigen, dass m weniger als zwei Primfaktoren besitzt, damit (1) für hinreichend große n zutrifft.

Zweiter Ausflug
Goldbach hat neben (1) und (2) noch eine kaum bekannte weitere Vermutung aufgestellt, die mit der Aussage von Chen eine gewisse Ähnlichkeit aufweist:

(3) Jede ungerade Zahl n, $n \geq 5$ und $n \neq 17$, lässt sich als eine Summe $n = k + 2m^2$ mit $k \geq 3$ eine Primzahl und $m \geq 1$ darstellen.

Diese Vermutung (3) ist falsch, denn $n = 5\,777$ ist ein Gegenbeispiel.

Letzter Ausflug
Hätte Goldbach seine Vermutung in die beiden Versionen (1) und (2) aufgespaltet, dann wäre er sicher auf die folgende, naheliegende Variante von (1) gestoßen:

(4) Jede gerade Zahl $n \geq 2$ ist die Differenz zweier Primzahlen p_1 und p_2.

Mit (4) sind wir in eine mathematisches „Hochgebirge" geraten. Zunächst kann man (4) für kleine n leicht bestätigen:

Beispiel:

n	2	4	6	8	10	12	...
$p_2 - p_1$	$5-3$	$7-3$	$11-5$	$11-3$	$13-3$	$17-5$	
	$7-5$	$11-7$	$13-7$	$13-5$	$17-7$	$19-7$	
	$13-11$	$23-19$	$17-11$	$19-11$	$29-19$	$23-11$	
	...	...	...	...	...	...	

Aber mit wachsendem n wird die Überprüfung von (4) immer aufwändiger – es ist bis heute unbewiesen, ob (4) für jedes gerade $n \geq 2$ gilt.

Das Beispiel zeigt, dass n mehrere Differenz-Darstellungen $p_2 - p_1$ besitzen kann. Damit stellt sich die Frage, ob ein bestimmtes n auf endlich viele oder sogar auf unendlich viele Arten als eine Primzahl-Differenz geschrieben werden kann – ein Problem, das zu den härtesten der Zahlentheorie zählt.

Nehmen wir nur den Fall $n = 2$. Wegen $2 = p_2 - p_1$ ist $p_2 = p_1 + 2$ und unsere Frage lautet jetzt:

> Gibt es endlich viele oder unendlich viele Primzahlzwillinge p_1, p_2 mit $p_2 = p_1 + 2$?

Zu diesem Problem wurden bereits Tausende von Seiten Material gesammelt. Doch eine definitive Antwort hat man immer noch nicht gefunden – und kaum etwas weiß man im Falle $n = p_2 - p_1$, also $p_2 = p_1 + n$, mit $n > 2$ und gerade.

Logisches Finale

Die Tatsache, dass (1) unbewiesen ist, bedeutet keineswegs, das man für ein konkretes n nicht entscheiden kann, ob $n = p_1 + p_2$ mit primen p_1 und p_2 gilt oder nicht. Denn es gibt ja nur endlich viele Primzahlen $p_1 < n$, $p_2 < n$, also auch nur endlich viele Summen $p_1 + p_2$ – und bei diesen kann man in endlich vielen Schritten stets überprüfen, ob sich unter ihnen eine mit $n = p_1 + p_2$ befindet oder nicht.

Ganz anders verhält es sich bei der ebenfalls unbewiesenen Vermutung (4).
Wenn wir für ein konkretes n eine Darstellung $n = p_2 - p_1$ angeben wollen, können wir nicht ausschließen, dass es eine solche Darstellung gar nicht gibt – was wir von vorne herein nicht wissen! Dann aber gelangten wir mit unserer Suche nach geeigneten primen p_1 und p_2 an kein Ende, weil wir unendlich viele Paare (p_1, p_2) in Betracht ziehen müssen.
Während also für jedes gegebene gerade n in endlich vielen Schritten entscheidbar ist, ob es eine Gleichung $n = p_1 + p_2$ mit primen p_1, p_2 gibt, kann es ungerade Zahlen n geben, bei denen auch nach einer beliebig großen Anzahl von Schritten immer noch nicht entschieden ist, ob eine Gleichung $n = p_2 - p_1$ mit primen p_1, p_2 besteht oder nicht.

Die Vermutungen (1) und (4) sind also von ganz unterschiedlicher logischer Struktur.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Die Strukturen des Mathematikers müssen
wie jene des Malers oder Dichters schön sein;
Die Gedanken müssen sich wie die Farben oder
die Worte harmonisch zusammenfügen (...)
Eine hässliche Mathematik kann in der Welt
nicht bestehen."

Godfrey Harold Hardy, 1877–1947

Magische Sterne von Zahlenquadraten

von Hartwig Fuchs

Wenn man die ersten neun ungeraden natürlichen Zahlen $1, 3, 5, \dots, 17$ in einem gleichlaufenden Muster wie in Figur 1, oder in einem gegenläufigen Muster, wie in Figur 2, als 3×3-Zahlenquadrat anordnet,

so

1	3	5
7	9	11
13	15	17

Figur 1

oder so

1	3	5
11	9	7
13	15	17

Figur 2

dann wird einem auffallen:
Addiert man die drei Zahlen, die jeweils auf einer der angedeuteten Linien liegen, dann erhält man stets die gleiche Summe 27.

Überprüfe nun selbst, ob Du für die 25 ersten ungeraden natürlichen Zahlen in einem 5×5-Zahlenquadrat ein vergleichbares Ergebnis erhältst.

Das Problem der magischen Sterne

Es sei n ungerade, $n \geq 3$. Wenn man dann die ersten n^2 ungeraden natürlichen Zahlen so wie in Figur 1 oder Figur 2 in einem $n \times n$-Zahlenquadrat anordnet, besitzt dann dieses Zahlenquadrat ebenfalls einen *magischen Stern* wie die beiden 3×3-Zahlenquadrate oben?
Das heißt: Haben in solchen $n \times n$-Zahlenquadrate, $n \geq 3$ ungerade, die Elemente der mittleren Zeilen, der mittlenen Spalte und der beiden Diagonalen jeweils eine gleiche sogenannte *magische Summe*?

Wir beschränken uns im Folgenden auf $n \times n$-Quadrate mit einem Anordnungsmuster der Zahlen wie in Figur 1.

Die Zahlen der mittleren Zeile des $n \times n$-Zahlenquadrates

Wenn man von der Anfangszahl A einer Zeile des $n \times n$-Quadrats um n Zahlen weitergeht, dann gelangt man zur Anfangszahl A' der nächsten Zeile.
Da sich nun zwei aufeinander folgende Zahlen stets um 2 unterscheiden, gilt für A': $A' = A + 2n$ – die Anfangszahlen zweier benachbarter Zeilen unterscheiden sich also um $2n$.
Daraus folgt für die nun mit $A_1, \dots, A_n$ bezeichneten Zeilenanfangszahlen:

(1) $A_1 = 1$, $A_2 = 1 \cdot 2n + 1$, $A_3 = 2 \cdot 2n + 1, \ldots, A_n = (n-1) \cdot 2n + 1$.

Da die mittlere Zeile des Quadrats in der Mitte zwischen der ersten und der n-ten Zeile liegt, ist ihre Nummer das arithmetische Mittel m der Zeilennummern 1 und n, mithin $m = \frac{1+n}{2}$.
Aus (1) ergibt sich die Anfangszahl A_m der mittleren Zeile:

$$A_m = (m-1) \cdot 2n + 1 = (n-1)n + 1$$

und deshalb lauten die n Zahlen der mittleren Zeile:

$$A_m,\ A_m + 1 \cdot 2,\ A_m + 2 \cdot 2,\ A_m + 3 \cdot 2, \ldots, A_m + (n-1) \cdot 2.$$

Mit $A_m = (n-1)n + 1$ folgt daraus:

(2) Die Zahlen der mittleren Zeile sind:
$(n-1)n + 1$, $(n-1)n + 3$, $(n-1)n + 5, \ldots, (n-1)n + 2n - 1$.

Die Zahlen der mittleren Spalte des n × n-Zahlenquadrates

Die mittlere Spalte des $n \times n$-Quadrates hat die gleiche Nummer $\frac{1+n}{2}$ wie die mittlere Zeile. Wenn man daher von der Anfangszahl A einer Zeile um $\frac{1+n}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$ Zahlen weitergeht, dann landet man bei der Zahl B der mittleren Spalte. Daher gilt:

$$B = A + \frac{n-1}{2} \cdot 2 = A + n - 1.$$

Damit sind die gesuchten Zahlen der mittleren Spalte unter Beachtung von (1):

$A_1 + n - 1 = n$, $A_2 + n - 1 = n + 1 \cdot 2n$, $A_3 + n - 1 = n + 2 \cdot 2n$, $\ldots$,
$A_n + n - 1 = n + (n-1) \cdot 2n$

– woraus folgt:

(3) Die Zahlen der mittleren Spalte sind: n, $3n$, $5n, \ldots, (2n-1)n$.

Die Zahlen der Diagonale des n × n-Zahlenquadrates

Die Zahlen der ersten Diagonalen (von links oben nach rechts unten) sind zunächst $A_1 = 1$, $A_2 + 1 \cdot 2$, $A_3 + 2 \cdot 2, \ldots, A_n + (n-1) \cdot 2$. Wegen (1) gilt also:

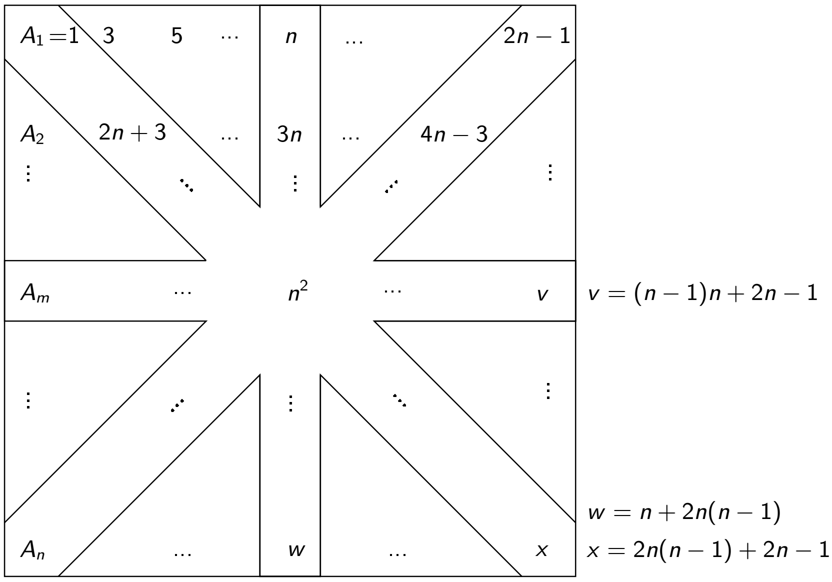
(4) Die Zahlen der ersten Diagonale sind:
1, $1 \cdot 2n + 3$, $2 \cdot 2n + 5, \ldots, (n-1) \cdot 2n + (2n-1)$

Die Zahlen der zweiten Diagonalen (von rechts oben nach links unten) sind:
$A_2 - 1 \cdot 2$, $A_3 - 2 \cdot 2$, $A_4 - 3 \cdot 2, \ldots, A_n - (n-1) \cdot 2$, A_n, so dass wegen (1) gilt:

(5) Die Zahlen der zweiten Diagonalen sind:
$1 \cdot 2n - 1$, $2 \cdot 2n - 3$, $3 \cdot 2n - 5, \ldots, n \cdot 2n - (2n-1)$

Der Stern des n × n-Zahlenquadrates

Die nachfolgende Figur 3 veranschaulicht den Stern eines $n \times n$-Quadrates – einige der Zahlen aus (1), (2), (3), und (4) sind in der Figur bereits eingetragen.



Figur 3

Zur Untersuchung des Sterns in Figur 3 benötigen wir zwei Summenformeln:

(6) $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1),\ k \geq 1,$

was man sich selbst leicht beweist.
Mit Hilfe von (6) leiten wir her:

(7) $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2,\ n \geq 1.$

Wegen $1+3+5+\ldots+2n-1 = (1+2+3+4+\ldots+2n-2+2n-1) - 2 \cdot (1+2+3+\ldots+n-1)$ und mit $k = 2n-1$ beziehungsweise $k = n-1$ in (6) folgt:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = \frac{1}{2}(2n-1) \cdot 2n - 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = n^2$$

.

Nun zeigen wir, dass der Stern des $n \times n$-Quadrates, $n > 1$ ungerade, bei gleichlaufender Anordnung – vergleiche Figur 1 und 3 – der ersten n^2 ungeraden Zahlen, magisch ist.

Die Summe Z der Zahlen der mittleren Zeile gemäß (2) und (7):

$$\begin{aligned} Z &= (n-1)n + 1 + (n-1)n + 3 + \ldots + (n-1)n + 2n - 1 \\ &= (n-1)n \cdot n + 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^3 - n^2 + n^2 \\ &= n^3. \end{aligned}$$

Die Summe S der Zahlen der mittleren Spalte nach (3) und mit (7):

$$\begin{aligned} S &= n + 3n + 5n + ... + (2n-1)n = n \cdot (1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1) \\ &= n^3. \end{aligned}$$

Die Summe D_1 der Zahlen der 1. Diagonalen gemäß (4), (6) und (7):

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 + 1 \cdot 2n + 3 + 2 \cdot 2n + 5 + ... + (n-1) \cdot 2n + 2n - 1 \\ &= 2n(1 + 2 + 3 + ... + n - 1) + (1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1) \\ &= 2n \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + n^2 = n^3. \end{aligned}$$

Die Summe D_2 der Zahlen der 2. Diagonalen nach (5) und (7):

$$\begin{aligned} D_2 &= 1 \cdot 2n - 1 + 2 \cdot 2n - 3 + ... + n \cdot 2n - (2n-1) \\ &= 2n(1 + 2 + 3 + ... + n) - (1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1) \\ &= 2n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n^2 = n^3. \end{aligned}$$

Wegen $Z = S = D_1 = D_2 = n^3$ gilt also:

> Jedes $n \times n$-Zahlenquadrat, n ungerade und $n \geq 3$, mit gleichlaufender Anordnung der ersten n^2 ungeraden natürlichen Zahlen besitzt einen magischen Stern; die magische Summe ist n^3.

Wir überlassen es unseren Lesern nachzuprüfen, ob auch der Stern eines $n \times n$-Quadrates mit gegenläufiger Zahlenanordnung magisch ist.
Zum Schluss noch zwei hübsche Eigenschaften unseres $n \times n$-Quadrates:

- Die Zahl im Zentrum des $n \times n$-Quadrates ist n^2;
- die Summe aller Zahlen des $n \times n$-Quadrates ist n^4.

Eine Aufgabe als Startpunkt für weiterführende Untersuchungen:

•	•	•	7	•	•	•
•	•	•	21	•	•	•
•	•	•	35	•	•	•
43	45	47	49	51	53	55
•	•	•	63	•	•	•
•	•	•	77	•	•	•
•	•	•	91	•	•	•

Gegeben sei das 7×7-Quadtrat mit gleichlaufender Anordnung der ersten 49 ungeraden natürlichen Zahlen. Untersuche, ob die vier in das 7×7-Quadrat eingezeichneten 3×3-Quadrate jeweils einen magischen Stern besitzen. Was gilt für ein 11×11-Quadrat mit gleichlaufender Zahlenanordnung, das vier 5×5-Quadrate enthält und so weiter?

Die Seite für den Computer-Fan

Teilbarkeit durch 37

Untersuche die Folgen der Zahlen 111, 10101, 1001001, 100010001, ... auf ihre Teilbarkeit durch 37 ohne Rest!

Was fällt Dir auf? Kannst Du Deine Vermutung eventuell beweisen?

(nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 9. September 2009 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte für den Forscherpreis zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 96

Eine spezielle Summendarstellung für natürliche Zahlen

Jede natürliche Zahl $n \geq 3$ besitzt eine Darstellung der Form $n = p + m^2$ mit einer Primzahl p und dem Quadrat einer natürlichen Zahl m als Summanden. Überprüfe diese Aussage auf ihre Richtigkeit für alle $n < 10^4$. (H.F.)

Ergebnisse:

Die Aussage ist bereits falsch für die Zahlen 5, 10, 13 und 25, was sich schnell von Hand überprüfen lässt, wie es **Philipp Delhougne** (Otto-Hahn-Schule, Hanau) für den Bereich bis $n = 16$ getan hat. Mit einem *Java*-Programm fand **Alexey Tyukin** (Gymnasium Mainz-Gonsenheim) insgesamt 74 Zahlen unterhalb 10000, welche die Behauptung widerlegen. Auch **David Wander** (Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum, Bad Bergzabern) untersuchte den Bereich unterhalb von 10^4. **Florian Schweiger** (Gymnasium Marktoberdorf) ist mit einem *Visual-Basic*-Programm noch darüber hinaus gegangen: Bis $n = 100000$ fand er 222 Werte von n, für welche die Behauptung nicht zutrifft. Lässt man $m = 0$ zu, wie es alle Einsender gemacht haben, erfüllen alle Primzahlen p in trivialer Weise die Behauptung.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Ich verstehe nicht, dass man die Mathematik nicht versteht.“

Henry Poincaré, 1854–1912

Mathkönig

von Martin Mattheis, frei nach Johann Wolfgang von Goethe

Wer rechnet so spät vor Mittag sich wund?
Ein Matheschüler, ich tu's dir kund;
Den Taschenrechner wohl in dem Arm,
Er fasst ihn sicher, er rechnet ihn warm.

„Mein Sohn, was birgst du so bang dein Gesicht?" –
„Siehst, Rechner, du all die Fehler nicht?
Wohin das führt mit Lohn und Streit?" –
„Mein Sohn, es ist heut Klassenarbeit." –

„Du liebes Kind, komm geh mit mir!
Gar schöne Aufgaben geb ich dafür;
Manch bunte Zeichnung ist an dem Rand,
Meine Arbeit hat ein gülden Gewand."

„Mein Rechner, mein Rechner, und siehest du nicht,
Wie jede Rechenregel leise hier bricht?" –
„Sei ruhig, bleibe ruhig, mein Kind;
Auf leeren Blättern säuselt kein Wind." –

„Willst, feiner Knabe, du mit mir gehen?
Meine Aufgaben sollen dich freuen schön;
Meine Aufgaben führen zu Folgen und Reihn
Und muss die Lösung zweiundvierzig nicht sein?"

„Mein Rechner, mein Rechner, und siehst du nicht dort
Eine Nulldivision am düsteren Ort?" –
„Mein Sohn, mein Sohn, ich seh es genau:
Es scheinen alle Ergebnis' so grau." –

„Ich liebe dich, mich reizt deine schöne Gestalt;
Und bist du nicht willig, so brauch ich Gewalt."
Dank Gauß, dank Leibniz, jetzt passt es sich an!
Es schreitet die Zeit zur Lösung voran! –

Dem Schüler grauset's, er rechnet geschwind,
Bis all die Aufgaben gelöset sind.
Am Tag darauf trotz Mühe und Not:
In seinen Armen die Arbeit war rot.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 96

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Anja Förster 12, Julian Langen 8, Sara-Teresa Vezely 12;

Kl. 6: Arne Broszukat 39, Sophie Gatzemeier 4, Juliane Schäfer 4;

Kl. 7: Matthias Blitzer 15, Marc de Zoeten 16, Mareike Förster 18, Laura Tabea Galkowski 25, Paul Gantner 9, Melanie Loos 24, Sebastian Ludwig 43, Benedikt Maurer 34, Raja Haider Mehmood 10, Alexander Rupertus 26, Julia Scherner 31, Elena-Laureen Schuster 14.

Kl. 8: Lara Bergjohann 4, Eike Broszukat 31, Lea Clemens 15, Jochen Dahlem 27, Chantal Graversen 24, Dominik Meier 32, Andreas Pitsch 40, Sören Rathgeber 8, Freya Roth 16, Philipp Scherrer 34;

Kl. 9: Kevin Schmitt 31;

Kl. 10: Philipp Mayer 12.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 6: Luisa Kirsch 14, Stefanie Schmid 7, Louisa Süss 1, Anna-Lena Woodbwy 9;

Kl. 7: Jana Ballweber 20;

Kl. 8: Henning Ballweber 18;

Kl. 12: Felix Liebrich 22, Martin Reinhardt 25.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen: (betreuende Lehrerinnen: Ute Frohs, Marie Claire Farag)
Kl. 6: Mariam Ahmed 15, Rehab Amr 16, Yara Ayman 11, Mona Sophie El Segini 15, Mira Hamed 2, Hoda Hazem 5, Malak Khaled 9, Marianne Michel 23, Maram Mohamed 9, Jessica Nabil 4, Chantal Ragy 14;

Kl. 7: Sansra Asziz 5, Farida Gaber 21, Sarah Mohamed 3;

Kl. 10: Nada Mohames ElAttar 13.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 21; **Kl. 12:** Lennart Adam 40;

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber)**:**
Kl. 6: Nadja Cuntz 18, Jeremy Ducoin 15, Friederike Kienle 6;

Kl. 9: Max Broda 9, Roberto Rossi 13; Alexander Schneider 7; David Wander 11.

Kl. 11: Rüdiger Bährle 6; Jonathan Bohlen 22.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 8: Frank Schindler 48.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob)**:**
Kl. 7: Katharina Bröhm 10, Julia Hahn 5, Lukas Vogel 15.

Erlangen, Freie Walldorfschule: Kl. 11: Malte Meyn 23.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik:
Kl. 7: Daniel Wilde 35,
Kl. 8: Janina Müller 16.

Grunheide, Gerhard-Hauptmann-Grundschule
Kl. 5: Sonja Witte 26.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin Frau Irmtrud Niederle)**:**
Kl. 5: Jamal Ageli 12, Sean Brauwers 11, Benedikt Hortkötter 9, Njomza Krasniqi 8, Nico Oschatz 8, Matthias Trinz 4.
Kl. 6: Philipp Arndt 13, Mara Koch 25, Lars Prepens 45, Joachim Roth 8;
Kl. 7: Rajeththanan Balachandran 10, Thorsten Roth 19.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 10: Connor Röhricht 26.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium: Kl. 8: Michael Delhougne 15, **Kl. 10:** Philipp Delhougne 15.

Herzogenaurach, Gymnasium Herzogenaurach: Kl. 13: Lisa Janker 32.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrer: Christoph Straub):
Kl. 8: Shaima'a Ahmed Doma 24, Nada Zaghloul 20;
Kl. 11: Alia'a Ahmed Doma 43.

Kelkheim, Eichendorffschule: Kl. 6: Thomas Rothenbächer 16, Maike Stanischewski 37.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 8: Robin Fritsch 46.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Lea Marie Kiekenbeck 14;
Kl. 6: Leonhard Conrath 34, Victor Jans 32, Matthias Niemann 25, Valentina Preuhs 9.
Kl. 7: Niklas Braun 44, Julia Braunschädel 7, Carolin Dürr 6, Lucas Feringa 4; Jana Veit 28.
Kl. 8: Laura Kleber 4, Eva Mülbüsch 6, Niklas Schliesmeier 15.
Kl. 9: Kira Bittner 9, Felix Braun 4, Hoang Giang Phi 5.

Mainz, Gutenberg–Gymnasium: Kl. 9: Alexandra Hofmann 2.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 13: Alexey Tyukin 46.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 6: Magdalena Winkelvoß 39.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Wittekindt)**:**
Kl. 5: Leo Lutz 36; **Kl. 6:** Leonhard Wagner 19;

Kl. 9: Steffen Hettler 1, Tim Lutz 24, Tobias Soldan 1.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 11: Florian Schweiger 50.

München, Max-Planck-Gymnasium: Kl. 6: Greta Sandor 6.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betr. Lehrerin Frau Cordula Langkamp)**:**
Kl. 6: Annika Schmitz 11, Friederike Tiedtke 8;
Kl. 10: Vivien Kohlhaas 18. **Kl. 11:** Madeline Kohlhaas 19.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:
Kl. 5: Kristina Thomsen 5;
Kl. 6: Daniel Linn 8; Nathalie Linn 8; Sarah Linn 8; Paul Nehrig 1.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich und Frau Elze)**:**
Kl. 5: Jakob Kuhn 35, Sarah Vogel 16, Leon Wietschorke 10, Julian Zimmer 14;
Kl. 6: Michael Arasim 10, Julius Asal 18, Andrea Behrent 38, Lutz Bischoff 32, Annika Brinkmann 13, Christina Diel 8, Yannic Döring 26, Marcus Dörner 13, Yasmina Gab 3, Michael Grunwald 25, Anna-Lena Hock 34, Tim Hoh 10, Anna-Maria Klaas 24, Kathi Klauda 30, Heiko Kötzsche 40, Lea Leopold 18, Nataly Lipp 21, Babette Marschner 21, Martin Müller 31, Thi Thao Nguyen 12, Mariam Rahi 13, Aurén Schmitt 1, Jonas Schramm 14, Felix Sobotta 26, Nils Thomas 15, Julian Tjardes 31, Eva-Marie Wagner 31, Leonie Wietfeld 9;
Kl. 7: Tobias Braun 11, Isabel winter 15;
Kl. 8: Valentin Kuhn 42; Yun Yeong-Chul 15;
Kl. 11: Bianca Bellchambers 11; Vita Bellchambers 11;
Kl. 12: Valentin Walther 45;
Kl. 13: Stefan Albert 41.

Oerlinghausen, Niklas-Luhmann-Gymnasium:
Kl. 9: Natalie Laumann 7.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner)**:**
Kl. 8: David Feiler 40.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 7: Luis Ressel 33.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 10: Alexander Rettkowski 8.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 8: Dorothea Winkelvoß 24.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Kuntz)**:**
Kl. 6: Sarah Grabelmann 9, Anna Lena Meier 24, Lena Mohr 9;
Kl. 7: Lorena Ritzmann 30.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (betr. Lehrerin Frau Elisabeth Maringer)**:**
Kl. 9: Anna Arendt 27.

Mitteilungen

- Wir möchten Euch an dieser Stelle noch einmal an unseren Malwettbewerb erinnern. Erstellt ein Bild oder ein anderes Kunstwerk zum Motto „Mathematik ist…“ und sendet es an die Monoid-Redaktion. Den Einsendeschluss haben wir dem der Aufgaben dieses Heftes angepasst und bis zum 9. September 2009 verlängert. Sowohl für das Motiv als auch die Technik lassen wir Euch sämtliche kreativen Freiräume. Weitere Informationen zum Wettbewerb findet Ihr im Sonderheft zum Jahr der Mathematik 2008 (Seite 32) und auf unserer Internetseite
`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`.
- Das Titelbild stammt von Lukas Zwickenpflug (Klasse 6) und ist im Rahmen eines Gedichtwettbewerbs am Frauenlobgymnasium in Mainz entstanden. Wenn auch Ihr einmal ein Titelbild mitgestalten möchtet, könnt Ihr das über den Malwettbewerb (siehe erste Mitteilung) oder schickt unabhängig davon ein mathematisches Bild an uns.
- Zur Zeit ist die Mitmachausstellung Mathematik be-greifen in Bad Kreuznach im Schlosspark-Museum zu sehen. Wenn Ihr dort Mathematik erleben möchtet, habt Ihr noch Gelegenheit bis zum 19. Juli 2009. Nähere Informationen findet Ihr unter `www.mathematik-begreifen.de`.
- Thomas Ballik aus Wien danken wir für seinen anregenden Beitrag „Gute“ Zahlen – Gute Idee!, zu dem ihn eine Aufgabe aus dem Bundeswettbewerb Mathematik 2008 angeregt hat und die in Monoid-Heft 93 bereits besprochen wurde.

(MG, E.K.)

Die Redaktion

Jahrgang 29 Heft 98 Juni 2009

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:
Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid