

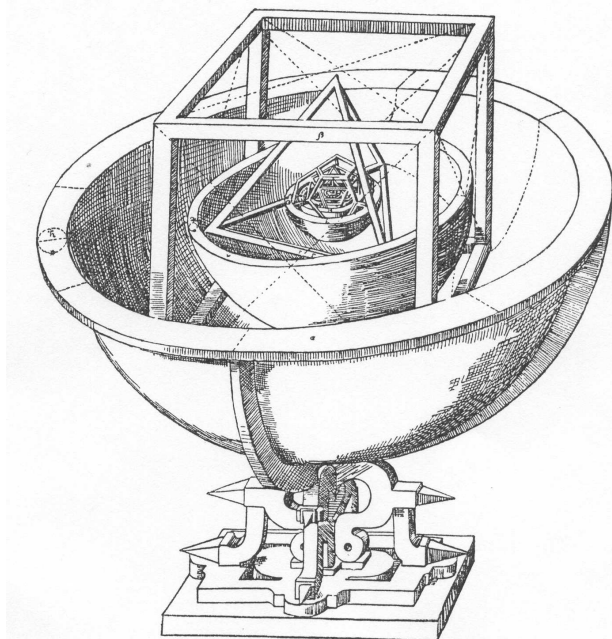
Jahrgang 29

Heft 99

September 2009

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz



Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5-7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.11.2009.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

55099 Mainz

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

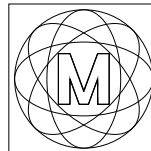
Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Frau Silke Schneider**.

Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville. Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: **das Goldene M**.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Euklid und die pythagoreischen Dreiecke

von Hartwig Fuchs

Jeder, der sich nicht nur vorübergehend mit Mathematik befasst, weiss: Euklid (um 300 v.Chr.), der einflussreichste Mathematiker der Mathematikgeschichte, hat als erster den wichtigen Satz bewiesen:

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

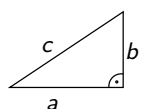
Viele kennen sogar den schönen Beweis hierfür.

Dagegen ist es weniger bekannt, dass Euklid auch für die folgende Aussage einen bemerkenswerten Beweis geliefert hat:

(2) Es gibt unendlich viele pythagoreische Dreiecke.

Er hat (2) – in unserer heutigen Sprechweise dargestellt – etwa so gezeigt:

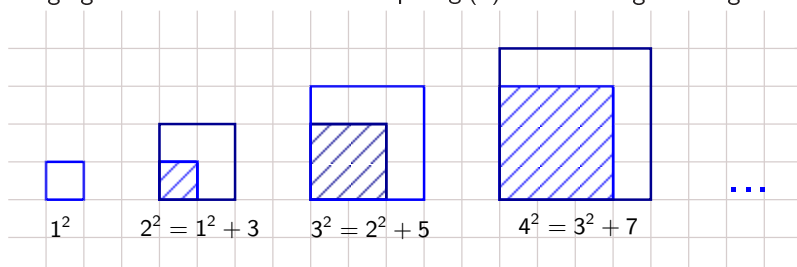
Zumindest seit der Zeit des Pythagoras (um 580 v.Chr.) – vermutlich aber schon früher – wusste man:



Ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c gegeben und sind a sowie b beide kleiner als c , dann gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ (und umgekehrt).

Ein rechtwinkliges Dreieck heißt nun *pythagoreisch*, wenn a, b und c ganzzahlig sind.

Euklid ging nun zum Beweis der Behauptung (2) von der Folge der Figuren aus:



Diese Figurenfolge zeigt, dass die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Quadraten stets eine ungerade Zahl ist und als Differenzen kommen alle ungeraden Zahlen 3, 5, 7, ... der Reihe nach vor – wir würden heute sagen: $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ und $2n+1$ durchläuft alle ungeraden Zahlen. Formal wird dies mit vollständiger Induktion bewiesen.

Folglich gilt auch für jedes $n \geq 1$:

Wenn man zu der Quadratzahl n^2 eine ganz bestimmte ungerade Zahl – nämlich $2n+1$ – addiert, erhält man eine weitere Quadratzahl, nämlich $(n+1)^2$.

Da es nun unter den ungeraden Zahlen 3, 5, 7, ... unendlich viele Quadratzahlen a^2 gibt, wobei wir $a^2 = 2m+1$ mit bestimmtem m setzen dürfen, gilt auch

unendlich oft die Gleichung $m^2 + a^2 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$ und dies besagt (Umkehr des Satzes von Pythagoras): Es gibt unendlich viele pythagoreische Dreiecke mit den Seitenlängen m , $a = \sqrt{2m+1}$ und $m+1$, wobei $\sqrt{2m+1}$ eine natürliche Zahl ist.

Ein Beispiel:

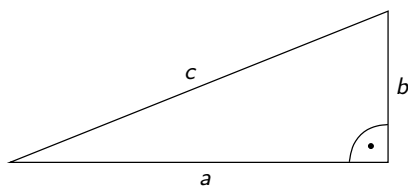
Es sei $a^2 = 49$. Dann ist – wenn wir $a^2 = 2m + 1$ setzen – offensichtlich $m = 24$. Tatsächlich gilt nun wegen $m^2 + a^2 = 24^2 + 49 = 625 = 25^2$ und wegen $(m+1)^2 = 25^2$ die Gleichung $m^2 + a^2 = (m+1)^2$, so dass das Dreieck mit den Seitenlängen 24, 7 und 25 pythagoreisch ist.

Pythagoras und einige seiner Verwandten

von Hartwig Fuchs

Der Satz über die rechtwinkligen Dreiecke

Als Pythagoras den später nach ihm benannten Satz über die Beziehung zwischen den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks öffentlich bekannt gab, da wussten seine Zeitgenossen, dass er damit zukünftig berühmt werden würde – obgleich schon damals hinter vorgehaltener Hand der Verdacht geäußert wurde, er habe bei seinem Theorem vermutlich Anleihen bei seinen babylonischen oder ägyptischen Kollegen gemacht.

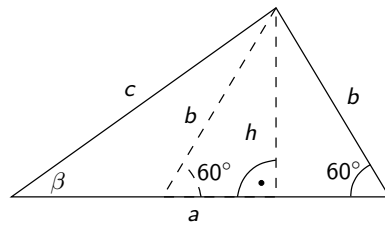


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Einige der jüngeren ehrgeizigen Mitglieder aus der Familie des Pythagoras waren ein wenig neidisch auf den Alten – auch sie hätten sich gerne einen Namen gemacht. Sie baten deshalb Pythagoras um geometrische Probleme, mit deren Lösungen sie bekannt werden wollten. Pythagoras überlegte nicht lange und schlug ihnen vor, sie sollten versuchen herauszufinden, ob es auch für 60°-Dreiecke, für 45°-Dreiecke und für 30°-Dreiecke Aussagen ähnlich seinem Satz gäbe. Die Jungen machten sich an die Arbeit und sie erzielten tatsächlich Resultate!

Der Satz über 60°-Dreiecke

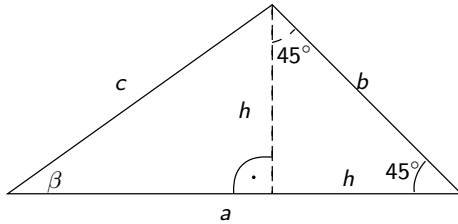
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab$$



Im gleichseitigen Dreieck mit den Seitenlängen b ist $h^2 = b^2 - (\frac{b}{2})^2 = \frac{3}{4}b^2$. Im rechtwinkligen Dreieck gilt daher:

$$c^2 = h^2 + (a - \frac{b}{2})^2 = \frac{3}{4}b^2 + a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Der Satz über 45°-Dreiecke



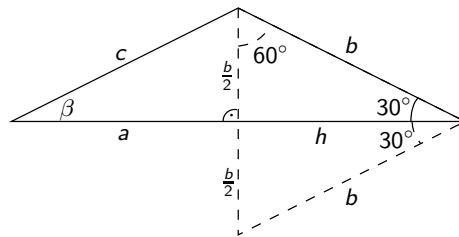
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}$$

Im gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkellängen h ist $h^2 + h^2 = b^2$, also $h^2 = \frac{1}{2}b^2$ und $h = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$c^2 = h^2 + (a - h)^2 = \frac{1}{2}b^2 + a^2 - 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}b + \frac{1}{2}b^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}$$

Der Satz über 30°-Dreiecke

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}$$



Im gleichseitigen Dreieck mit den Seitenlängen b ist $h^2 = b^2 - (\frac{b}{2})^2 = \frac{3}{4}b^2$ und $h = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$c^2 = (\frac{b}{2})^2 + (a - h)^2 = \frac{1}{4}b^2 + a^2 - 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}.$$

Überlege selbst, wie die Beweisfigur und der Beweis für einen Winkel $\beta \geq 90^\circ$ aussehen.

Merkregel für die vier Dreieckssätze

Als der jüngste der pythagoreischen Nachwuchsmathematiker die Ergebnisse der anderen sah, rief er freudig aus: „Es ist gewiss, dass ich berühmt werde wie Pythagoras. Denn ich habe eine wunderbare Merkregel für die vier Dreieckssätze entdeckt – und diese Regel gilt sogar für 0° -Dreiecke, bei denen ja $a = b + c$, also $c = a - b$ und damit $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ist.“

Merkregel:

$$90^\circ\text{-Dreiecke: } c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{0}$$

$$60^\circ\text{-Dreiecke: } c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{1}$$

$$45^\circ\text{-Dreiecke: } c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}$$

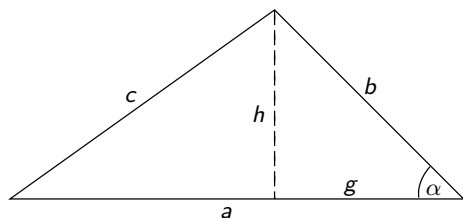
$$30^\circ\text{-Dreiecke: } c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}$$

$$0^\circ\text{-Dreiecke: } c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{4}$$

Wir wissen, wie die Sache mit dem erhofften Nachruhm ausgegangen ist: Es ist völlig in Vergessenheit geraten, wer die Sätze über 60° -, 45° - und 30° -Dreiecke als Erster bewiesen hat.

Das trifft sogar auch für den Mathematiker zu, der den folgenden Satz über Dreiecke mit beliebigem Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, gefunden hat.

Der Satz über α -Dreiecke mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

Nach Definition gilt $\sin \alpha = \frac{h}{b}$, $\cos \alpha = \frac{g}{b}$, woraus $h = b \sin \alpha$ sowie $g = b \cos \alpha$ und wegen $h^2 + g^2 = b^2$ auch $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{h^2}{b^2} + \frac{g^2}{b^2} = 1$ folgt. Im rechtwinkligen Dreieck gilt dann:

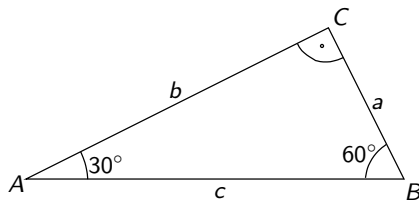
$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (a - g)^2 = (b \sin \alpha)^2 + (a - b \cos \alpha)^2 = b^2(\sin \alpha)^2 + a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2(\cos \alpha)^2 \\ &= a^2 + b^2((\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2) - 2ab \cos \alpha = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \end{aligned}$$

(Der Satz über α -Dreiecke gilt auch für Winkel α mit $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$).

Und das Ende der Geschichte: Der Ruhm des Mathematikers Pythagoras überstrahlt alle, die seinen Satz variiert oder verallgemeinert haben; nur sein Name und sein Theorem bleiben im Gedächtnis der wissenschaftlichen Welt.

Anhang

von Ekkehard Kroll



Für ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c , in dem sowohl ein 90° -Winkel als auch ein 60° -Winkel und folglich auch ein 30° -Winkel vorkommen (vgl. Figur), gelten folgende Beziehungen:

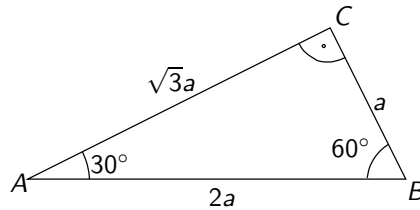
- (1) $c^2 = a^2 + b^2$ (Satz des Pythagoras)
- (2) $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ (Satz über 60° -Dreiecke)
- (3) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}$ (Satz über 30° -Dreiecke)

Durch Addition dieser Gleichungen lassen sich für dieses spezielle Dreieck weitere Zusammenhänge gewinnen. So liefert die Addition von (1) und (2), von (1) und (3) beziehungsweise von (2) und (3) die Beziehungen:

$$a = \frac{1}{2}c$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}c,$$

$$a + b\sqrt{3} = 2c,$$



wobei die dritte Beziehung auch direkt aus den beiden ersten folgt.

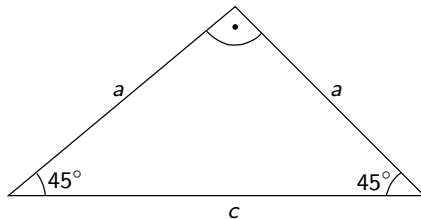
Schließlich ergibt sich durch Addition aller drei Gleichungen:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b\sqrt{3})c$$

(Kontrolle: Mit $a + b\sqrt{3} = 2c$ kommt wieder der Satz des Pythagoras heraus.)

Frage

Welche weiteren Formeln lassen sich für ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck herleiten?



Lösung: Sowohl aus $a^2 + a^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras) als auch aus $a^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{2}$ (Satz für 45° -Dreiecke) folgt $c = \sqrt{2}a$.

Hättest Du es gewusst?

Was ist der kleine Satz von Fermat?

von Hartwig Fuchs

Der Große Satz

Pierre de Fermat (1601–1665), einer der bedeutendsten Mathematiker des 17. Jahrhunderts mit bahnbrechenden Leistungen in der Zahlentheorie, machte 1637 eine sehr folgenreiche Entdeckung, nämlich:

- (1) Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ hat keine ganzzahligen Lösungen $\neq 0$ für $n > 2$.

Die Behauptung wird in der mathematischen Literatur der „*Große Satz von Fermat*“* genannt.

Wieso groß?

Die Behauptung (1) – für sich betrachtet – ist im Gefüge der Zahlentheorie nicht besonders wichtig. Ihre Bedeutung liegt viel mehr darin: Ein Beweis von (1), den Fermat vorgeblich besaß, den er aber niemals bekannt gab, stellte sich als ein überaus schwieriges Problem heraus – über 350 Jahre lang widersetzte es sich einer Lösung und erst 1993 konnte A. Wiles** die Vermutung von Fermat bestätigen.

Die bis dahin unternommenen Beweisversuche, die wohl eine Bibliothek füllen könnten, hatten ein so gewiss nicht beabsichtigtes Nebenergebnis im Gefolge: Sie bewirkten die Einführung einer wahren Flut neuer Begriffe und neuer Methoden in die Zahlentheorie, die bei ihr einen Entwicklungsschub enormen Ausmaßes auslösten – und das macht (1) so „groß“.

Der Kleine Satz

Es gibt aber auch noch den sogenannten „Kleinen Satz“ von Fermat – und hierfür ist ein Beweis von Fermat überliefert. Worum geht es dabei?

Ein zentrales Thema der Zahlentheorie ist die Frage, ob eine gegebene natürliche Zahl n durch eine bestimmte Primzahl p teilbar ist oder nicht.

Es gibt einen Weg, wie man für jedes n und p die Antwort findet: Man führt die Division $n : p$ aus!

Aber für sehr große n und p kann dieses Entscheidungsverfahren so umfangreiche Rechnungen notwendig machen, dass es dadurch praktisch unbrauchbar wird.

* Buchempfehlung: „Fermats letzter Satz: Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels“ von Simon Singh

** Andrew John Wiles, geb. 11.04.1953, Cambridge; britischer Mathematiker.

Beispiel 1: Eine praktisch unausführbare Division.

Es seien $n = 10^{701}$ und $p = 2^{86243} - 1$; n hat etwa $1,2 \cdot 10^{100}$ Stellen und die Primzahl p besitzt fast 26000 Stellen (wie viele Stellen hat n^p ?). Ist $n^p - n$ durch p teilbar?

Es besteht wenig Aussicht, ein für jedes n und p geltendes Teilbarkeitskriterium zu finden, das stets mit nicht zu großem Aufwand zum Ziel führt.

Deshalb wird man sich damit begnügen müssen, Teilbarkeitsregeln nur für jeweils bestimmte Sorten von Zahlen n und/oder p aufzustellen. Bei natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung sind solche Regeln zum Beispiel für die Teilbarkeit durch die Primzahlen $p = 2$, $p = 3$ und $p = 5$ jedem geläufig.

Im Beispiel 1 war nach der Teilbarkeit einer Zahl der Form $n^p - n$ durch eine Primzahl p gefragt.

Und siehe da: Es gibt ein Teilbarkeitskriterium für solche Fälle! Es ist uralt – war es doch bereits vor 2500 Jahren chinesischen Mathematikern bekannt.

Seine mathematische Begründung erfuhr es allerdings im 17. Jahrhundert durch P. de Fermat; es wird daher heute der „Kleine Satz“ von Fermat genannt.

Warum der Satz „klein“ genannt wird, ist nicht recht einzusehen – ist er doch ein überaus nützliches und mächtiges Werkzeug, das auch mit gigantischen Zahlen eines bestimmten häufigen Typs leicht fertig wird. Und dieses erstaunliche Teilbarkeitskriterium hat Fermat mit ganz elementaren Argumenten hergeleitet – wie wir nun zeigen wollen.

Herleitung des „Kleinen Satzes“

Im folgenden seien die Zahl n und die Primzahl p beliebig, aber fest vorgegeben, und p sei kein Teiler von n .

1. Schritt: Die Boxen $B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, ..., $B(p-1)$

Die natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, werden auf p Boxen*** $B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, ..., $B(p-1)$ aufgeteilt:

In die Box $B(0)$ kommen alle Vielfachen von p , sodass $B(0) = \{0, p, 2p, 3p, \dots\}$; in die Box $B(r)$ stecken wir alle Zahlen, die um r größer sind als ein Vielfaches von p , wobei r einer der Werte $1, 2, 3, \dots, p-1$ ist, also $B(r) = \{r, p+r, 2p+r, 3p+r, \dots\}$.

Danach befindet sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ in einer Box. Aber keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ befindet sich in zwei Boxen:

Wäre nämlich $n \in B(i)$ und $n \in B(j)$ mit $i \neq j$, etwa $i < j$, dann wäre $n = v \cdot p + i$ und $n = w \cdot p + j$ für bestimmte Zahlen v und w . Somit wäre $vp + i = wp + j$, sodass $(v - w)p = j - i$ und p wäre ein Teiler von $j - i$, was aber wegen $j - i < p$ nicht möglich ist.

*** Im mathematischen Sprachgebrauch heißen unsere Boxen „Restklassen mod p “

Beispiel 2: Zerlegung von $\mathbb{N}$ in 5 Boxen.

Es sei $p = 5$. Wir zerlegen $\mathbb{N}$ in die Boxen $B(0), B(1), \dots, B(4)$:

$$B(0) = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$$

$$B(1) = \{1, 5 + 1, 10 + 1, 15 + 1 \dots\}$$

$$B(2) = \{2, 5 + 2, 10 + 2, 15 + 2 \dots\}$$

$$B(3) = \{3, 5 + 3, 10 + 3, 15 + 3 \dots\}$$

$$B(4) = \{4, 5 + 4, 10 + 4, 15 + 4 \dots\}$$

2. Schritt: Die Folge $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine Primzahl p , die kein Teiler von n ist, bilden wir die Folge $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$. Wenn wir dann $\mathbb{N}$ in die p Boxen $B(0), B(1), B(2), \dots, B(p-1)$ zerlegen, wie werden dann die Folgenglieder auf die Boxen verteilt sein?

Beispiel 3: Verteilung einer Folge $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$

Es sei $p = 5$. Dann stellen die 5 Boxen $B(0), B(1), \dots, B(4)$ aus Beispiel 2 die zu $p = 5$ gehörige Zerlegung von $\mathbb{N}$ dar. Sei $n = 12$. Zu welchen Boxen gehören dann die $p-1 = 4$ Glieder der Folge $12, 2 \cdot 12, 3 \cdot 12, 4 \cdot 12$?

Aus $12 = 2 \cdot 5 + 2 \Rightarrow 12 \in B(2)$; aus $2 \cdot 12 = 4 \cdot 5 + 4 \Rightarrow 2 \cdot 12 \in B(4)$; aus $3 \cdot 12 = 7 \cdot 5 + 1 \Rightarrow 3 \cdot 12 \in B(1)$; aus $4 \cdot 12 = 9 \cdot 5 + 3 \Rightarrow 4 \cdot 12 \in B(3)$.

Für die Verteilung einer Folge $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$ auf die Boxen $B(0), B(1), B(2), \dots, B(p-1)$ gilt:

- (a) In jeder der $p-1$ Boxen $B(1), B(2), B(3), \dots, B(p-1)$ befindet sich genau eine der $p-1$ Zahlen $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$ – wir wissen allerdings nicht, welche Zahl in welcher Box ist – vergleiche unten (b).

Herleitung von (a)

- Keine der Zahlen $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$ ist in $B(0)$. Denn wäre eine Zahl xn mit einem x , $1 \leq x \leq p-1$, in $B(0)$, dann wäre xn ein Vielfaches von p (siehe oben die Definition von $B(0)$); also wäre p ein Teiler von xn . Aber p ist kein Teiler von n und wegen $x < p$ kann p auch kein Teiler von x sein.
- Keine zwei der Zahlen $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$ befinden sich in der gleichen Box. Denn wären etwa xn und yn in einer Box $B(r)$, $1 \leq x, y, r \leq p-1$ und etwa $x < y$, dann wäre $xn = vp + r$ und $yn = wp + r$ für bestimmte Zahlen v, w (vergleiche die Definition von $B(r)$). Aus $yn - xn = (y-x)n = (w-v)p$ folgt, dass p ein Teiler von $(y-x)n$ wäre. Aber p ist kein Teiler von n und auch kein Teiler von $y-x$ wegen $y-x < p$.

3. Schritt: Das Produkt $n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \dots \cdot (p-1)n$

Wir wollen annehmen, für die Zahlen $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$ gelte:

- (b) $n \in B(r_1), 2n \in B(r_2), 3n \in B(r_3), \dots, (p-1)n \in B(r_{p-1})$

Nach (a) sind keine zwei der Boxen-Nummern $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ gleich. Da aber für sie $1 \leq r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1} \leq p-1$ gilt, stimmen sie in irgend einer Reihenfolge mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots, p-1$ überein. Deshalb hat man den Zusatz zu (b):

$$(c) \quad r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) = (p-1)!$$

Es war nun Fermats genial einfache Idee, das Produkt $n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \dots \cdot (p-1)n$ ins Spiel zu bringen. Nach der Annahme (b) können wir schreiben:

$$n = v_1 p + r_1, 2n = v_2 p + r_2, 3n = v_3 p + r_3, \dots, (p-1)n = v_{p-1} p + r_{p-1}$$

mit geeigneten Zahlen $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{p-1}$.

$$\text{Damit ist } n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \dots \cdot (p-1)n = n^{p-1}(p-1)! = (v_1 p + r_1)(v_2 p + r_2)$$

$$(v_3 p + r_3) \dots (v_{p-1} p + r_{p-1}).$$

Denkt man sich hier den Klammerterm rechts ausmultipliziert, dann erhält man eine Summe aus $2^{p-1} - 1$ Summanden, die sämtliche Vielfache von p sind und deshalb zu dem Ausdruck vp mit einem geeigneten v zusammengefasst werden können und dem Summanden $r_1 r_2 r_3 \dots r_{p-1}$. Damit ist unter Beachtung von (c):

$$n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \dots \cdot (p-1)n = n^{p-1}(p-1)! = vp + r_1 r_2 r_3 \dots r_{p-1} = vp + (p-1)!$$

Daraus folgt: $n^{p-1}(p-1)! - (p-1)! = (n^{p-1} - 1)(p-1)! = vp$. Die Primzahl p ist daher ein Teiler von $(n^{p-1} - 1)(p-1)!$. Da p kein Teiler von $(p-1)!$ sein kann – jeder Faktor in $(p-1)!$ ist kleiner als p und p ist kein Produkt aus Faktoren $\leq p-1$ – muss also p ein Teiler von $n^{p-1} - 1$ sein.

Damit ist gezeigt:

(2) Der kleine Satz von Fermat:

Die Primzahl p ist ein Teiler der Zahl $n^{p-1} - 1$ und deshalb auch der Zahl $n^p - n$, wenn p kein Teiler der natürlichen Zahl n ist.

Die Stärke des Kleinen Satzes

Der Kleine Satz von Fermat zeigt seine Bedeutung und wahre Stärke so richtig erst bei seiner Anwendung auf Teilbarkeitsfragen bei einzelnen Zahlen und bei umfangreichen, ja sogar unendlichen Mengen von Zahlen gleichen Typs, die allein wegen ihrer Größe für numerische Methoden unerreichbar sind. Dies verdeutlichen wir an einigen Beispielen.

Beispiel 4: Anwendungen des Kleinen Satzes

- Die Primzahl $p = 2^{86143} - 1$ ist ein Teiler der gigantischen Zahl $(10^{701})^p - 10^{701}$ aus Beispiel 1, weil p kein Teiler von 10^{701} ist.
- Mit $1[m]$ sei eine natürliche Zahl bezeichnet, deren Dezimaldarstellung aus m Ziffern 1 besteht. Gibt es Zahlen $1[m]$, sodass 47 ein Teiler von $1[m]$ ist? Für jede Zahl $1[m]$ gilt: $1[m] = \frac{1}{9}(10^m - 1)$. Aufgrund des Kl. Satzes von Fermat teilt $p = 47$ jede Zahl der Form $n^{46} - 1$ sofern $47 \nmid n$. Insbesondere sind die Zahlen $10^{46} - 1, (10^2)^{46} - 1, (10^3)^{46} - 1$ also $10^m - 1$ mit $m = 46, 2 \cdot 46, 3 \cdot 46, \dots$ jeweils durch 47 teilbar. Folglich gilt: Jede Zahl $1[m]$ mit $m = 46, 2 \cdot 46, 3 \cdot 46, \dots$ hat den Teiler 47.

- c) $u|v$ bedeute: u ist ein Teiler von v . Es gilt: $3|(2^3)^2 - 1$, $5|(2^5)^4 - 1$, $7|(2^7)^6 - 1$. Kann man diese Aussagen-Kette beliebig weit analog fortsetzen? Jede Primzahl $p \neq 2$ ist ein Teiler von $(2^m)^{p-1} - 1$ für $m = 1, 2, 3, \dots$, weil $p \neq 2$ kein Teiler von 2^m ist. Insbesondere gilt daher: $p|(2^p)^{p-1} - 1$, sodass die oben begonnene Aussagenkette über jede beliebig gewählte Primzahl p hinaus fortgesetzt werden kann.
- d) Für jede Primzahl $p > 2009$ ist $2009^{p-1} - 1$ stets durch p teilbar. Warum ist das so?

Die besondere Aufgabe

Ziffernumstellung

von Hartwig Fuchs

Es sei a eine natürliche Zahl, $a = z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0$ in Ziffernschreibweise mit $z_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Wenn man in a die Ziffer z_n rechts neben die Ziffer z_0 verschiebt, dann ist die neue Zahl $a' = z_{n-1} \dots z_1 z_0 z_n$. Wie heißt die kleinste Zahl a , für die gilt: Die aus a entstandene Zahl a' ist drei Mal so groß wie a ?

Lösung:

Mit $a = z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0$ und $a' = z_{n-1} \dots z_1 z_0 z_n$ und $a' = 3a$ gilt:

$$\begin{aligned} 3a &= 3 \cdot z_n \cdot 10^n + 3 \cdot z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + 3 \cdot z_1 \cdot 10 + 3 \cdot z_0; \\ a' &= z_{n-1} \cdot 10^n + z_{n-2} \cdot 10^{n-1} + \dots + z_0 \cdot 10 + z_n \text{ und daher} \\ a' - 3a &= z_{n-1} \cdot (10^n - 3 \cdot 10^{n-1}) + \dots + z_0(10 - 3) + z_n - 3z_n \cdot 10^n = 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$(1) \quad z_{n-1} \cdot 10^{n-1}(10-3) + z_{n-2} \cdot 10^{n-2}(10-3) \dots + z_0(10-3) = z_n(3 \cdot 10^n - 1).$$

Da die linke Seite von (1) durch 7 teilbar ist, muss auch die rechte Seite von (1) durch 7 teilbar sein. Also ist entweder $z_n = 7$ oder $3 \cdot 10^n - 1$ ist ein Vielfaches von 7. Nun ist aber $z_n = 7$ nicht möglich, weil sonst wegen (1) $z_n \cdot 10^{n-1} + z_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + z_0 = 3 \cdot 10^n - 1$ wäre – ein Widerspruch. Daher muss (falls es überhaupt eine Lösung gibt) $3 \cdot 10^n - 1$ ein Vielfaches von 7 sein. Behauptung: Dies ist genau dann der Fall, wenn $n = 6m + 5$ für $m \in \mathbb{N}$ ist.

Dies zeigen wir durch eine einfache Kongruenzrechnung modulo* 7:

Alle natürlichen Zahlen n lassen sich in der Form $n = 6m + r$ mit $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$ darstellen (Division durch 6 mit Rest). Wegen

* Siehe hierzu auch den Artikel „Hättest du es gewußt? Was ist der kleine Satz von Fermat?“.

$10 \equiv 3 \pmod{7}$ ** folgt nun: $3 \cdot 10^n - 1 = 3 \cdot 10^{6m+r} - 1 \equiv 3 \cdot 3^{2 \cdot 3m+r} - 1 \pmod{7}$.
Wegen $3^3 \equiv 27 \equiv -1 \pmod{7}$ und $(-1)^{2m} = 1$ ergibt sich: $3^{6m} \equiv 1 \pmod{7}$
und somit $3 \cdot 10^n - 1 \equiv 3^{r+1} - 1 \pmod{7}$.

Ist $r \equiv$	0	1	2	3	4	5,
so ist $3^{r+1} - 1 \equiv$	2	1	5	3	4	0 (mod 7).

Hieraus ist ersichtlich, dass nur für $r = 5$ die Zahl $3 \cdot 10^n - 1 = 3 \cdot 10^{6m+r} - 1$ ein Vielfaches von 7 ist – und das für jede Zahl $m \in \mathbb{N}_0$.

Für $n = 5$ folgt aus (1), dass wegen $3 \cdot 10^5 - 1 = 42857 \cdot 7$ gilt:

$$(2) \quad z_4 \cdot 10^4 + z_3 \cdot 10^3 + \dots + z_0 = z_5 \cdot 42857$$

Nach (2) ist $z_5 \cdot 42857$ höchstens 5-ziffrig, so dass $z_5 = 1$ oder $z_5 = 2$ sein muss; $z_5 \cdot 42857$ ist dann entweder 42857 oder 85714. Aus der linken Seite von (2) folgt daher, dass entweder $a = 142857$ für $z_5 = 1$ oder $a = 285714$ für $z_5 = 2$ ist. Die kleinste Lösung ist somit $a = 142857$.

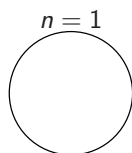
Mathis machen mathematische Entdeckungen Kreise in der Ebene

Es sollen n Kreise, $n \geq 1$, so in die Ebene gezeichnet werden, dass sich je zwei Kreise schneiden und keine drei Kreise durch einen Punkt gehen.

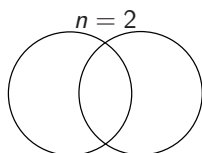
Es sei nun $A(n)$ die größtmögliche Anzahl von Gebieten, in die die Ebene durch die n Kreise zerlegt wird.

Anmerkung: Der Teil der Ebene, der außerhalb aller n Kreise liegt, gilt auch als Gebiet.

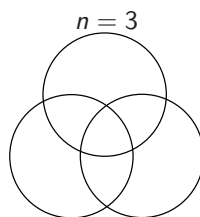
Beispiel:



$$A(1) = 2$$



$$A(2) = 4$$



$$A(3) = 8$$

Bestimme $A(n)$ für mehrere n , $4 \leq n \leq 10$.

(H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15.11.2009 an die **MONOID**-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils zwei Hefte später veröffentlicht.

** Die Schreibweise $a \equiv b \pmod{m}$ bedeutet, dass m ein Teiler von $a - b$ ist beziehungsweise, dass $a = b + t \cdot m$ mit ganzzahligem t geschrieben werden kann. Ist auch $c \equiv d \pmod{m}$, also $c = d + t' \cdot m$ mit $t' \in \mathbb{Z}$, so gilt $a \cdot c = b \cdot d + (bt' + dt + tt'm)m$, also $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$. Hieraus folgen die benutzten Potenzregeln.

Die Ecke für den Computer-Fan

Die Gaukler-Folge

Für eine reelle Zahl r bezeichne $\lfloor r \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq r$. Dann sei für jede natürliche Zahl n der Operator G so definiert:

$$G : n \xrightarrow{G} \begin{cases} \lfloor \sqrt{n} \rfloor & , \text{ falls } n \text{ gerade,} \\ \lfloor \sqrt{n^3} \rfloor & , \text{ falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Eine Folge $n_0, n_1, n_2, \dots$ heißt *Gaukler-Folge* (nach ihrem englischen Namen „juggler's sequence“), wenn sie durch Iteration des Operators G entsteht, wenn also: $n_0 \xrightarrow{G} n_1 \xrightarrow{G} n_2 \xrightarrow{G} \dots$ gilt.

Beispiel: $3 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 11 \xrightarrow{G} 36 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 1$, kurz: $3 \xrightarrow{G^6} 1$.

Wegen $1 \xrightarrow{G^m} 1$ für $m = 1, 2, 3, \dots$, heißt 1 ein *Attraktor* der Gaukler-Folge mit Startzahl 3.

Bestimme die Attraktoren der Gaukler-Folgen, deren Startzahlen $n_0 = 1, 2, 3, 4, \dots, 50$ sind, sowie die Anzahl der Iterationen, bis der Attraktor erstmalig erreicht wird.

- Zu welcher Vermutung gelangst du?
- Wie verändern sich die Verhältnisse, wenn in der Definition von G die Rollen von „gerade“ und „ungerade“ vertauscht werden, wenn wir also den Operator H mit

$$H : n \xrightarrow{H} \begin{cases} \lfloor \sqrt{n^3} \rfloor & , \text{ falls } n \text{ gerade,} \\ \lfloor \sqrt{n} \rfloor & , \text{ falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und seine iterative Wirkung auf die Startzahlen $n_0 = 1, 2, 3, 4, \dots, 50$ betrachten? (H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2009 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de).

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Eine Formel zur Erzeugung von Primzahlzwillingen?

Ein Primzahlzwillingspaar ist ein Paar (p, q) von Primzahlen p und q im Abstand 2 wie $(3, 5)$, $(5, 7)$ oder $(11, 13)$. Die Frage, ob es unendlich viele oder nur endlich viele Primzahlzwillingspaare gibt, ist bislang trotz intensiver Bemühungen der Mathematiker noch nicht entschieden. Wenn man eine Formel als Funktion einer natürlichen Zahl n finden könnte, die für alle n nur Primzahlzwillingspaare liefert oder doch mit wachsendem n garantiert immer wieder welche, wäre der Nachweis erbracht, dass es unendlich viele Primzahlzwillingspaare gibt; denn dies ist die allgemeine Vermutung.

Untersuche unter diesem Aspekt die Folge der Zahlenpaare $(p(n), q(n))$ mit $p(n) := 30 \cdot |(2n - 27) \cdot (n - 15)| - 1$ und $q(n) := 30 \cdot |(2n - 27) \cdot (n - 15)| + 1$ für möglichst viele natürliche Zahlen n . Was beobachtest Du? (nach H.F.)

Ergebnisse:

Mit dieser Aufgabe haben sich **Philipp Delhougne** (Otto-Hahn-Schule Hannau), **Florian Schweiger** (Gymnasium Marktoberdorf) und **Alexey Tyukin** (Gymnasium Mainz-Gonsenheim) beschäftigt. Sie haben schnell erkannt, dass die Formeln für $p(n)$ und $q(n)$ für alle $n \leq 20$ außer bei $n = 15$ Primzahlzwillingspaare liefern. Das Paar $p(15) = -1$, $q(15) = 1$ fällt schon wegen des negativen Wertes von $p(15)$ aus dem Rahmen. Ansonsten sind die Werte für $p(n)$ positiv, zunächst fallend bis $p(15)$, dann wachsend und lassen sich – wie Philipp Delhougne richtig bemerkt – in Form einer nach oben geöffneten Parabel anordnen. Wie an den Formeln leicht abzulesen ist, endet $p(n)$ immer auf der Ziffer 9 (außer bei $n = 15$) und folglich $q(n)$ auf 1.

Erst wieder bei $n = 27$ und dann für $n = 33, 34, 35, 36, 38, 41, 50, 56, 57, 64, 66, 69, 75, 81, 85, 86, 90, 93, 98, 103, 106, 119, 121, 133, 136, 141, 143, 146, 150, 181, 182, 189, 195, 202, \dots$ treten in unregelmäßigen Abständen Primzahlzwillingspaare auf. Mit einem Computer-Algebra-System (wie Maple oder Derive) lässt sich das noch für sehr große n feststellen. Damit ist aber nicht klar, ob es für beliebig große n noch Primzahlzwillingspaare gibt, und somit ist das Problem weiterhin offen. Dass für unendlich viele bestimmte n die Primzahleigenschaft bei $p(n)$ bzw. $q(n)$ gar nicht vorhanden sein kann, hat Florian Schweiger durch Ausmultiplizieren der Formeln zu $p(n) = 60n^2 - 1710n + 12149$ und $q(n) = 60n^2 - 1710n + 12151$ erkannt; denn wenn n ein Vielfaches von 12149 bzw. 12151 ist, ist $p(n)$ bzw. $q(n)$ sicher keine Primzahl.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 98

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Dosenwerfen

Am Rudi-Winzig-Gymnasium findet ein Schulfest statt. Herr Stütze möchte mit seiner Klasse für die Besucher Dosenwerfen anbieten: „Die Dosen bauen wir zu einer Pyramide auf. Ganz oben steht eine Dose, in der Reihe darunter drei Dosen, dann fünf und so weiter... Wir haben genau 55 Dosen zur Verfügung, die wir alle verwenden werden.“ Herr Stütze beginnt mit dem Aufbau. Doch er hat noch nicht die ersten beiden Dosen aufgestellt, da wird er von Bettina, einer Schülerin der Klasse, unterbrochen:



„Aber das kann doch gar nicht klappen. Dann bleiben entweder Dosen übrig oder es fehlen welche“ – „Ach was, das passt schon, warte ab!“ – „Dann müssen Sie die Dosen aber anders aufbauen“, entgegnet Bettina ihm, „nämlich immer auf Lücke, also in die oberste Reihe eine Dose, in der Reihe darunter zwei Dosen, dann drei und so weiter...“ – „Du glaubst mir also immer noch nicht?“, fragt Herr Stütze ungläubig.

- Wer hat Recht? Auf welche Weise lassen sich die 55 Dosen zu einer Pyramide aufbauen: Nach der Idee von Herrn Stütze, der Idee von Bettina, nach beiden oder gar keiner?
- Gib jeweils eine allgemeine Formel an, mit welcher Herr Stütze und Bettina ausrechnen können, welche Anzahlen von Dosen sie (in n Reihen) aufbauen können.
- Es gibt Anzahlen, die sowohl Herr Stütze als auch Bettina aufbauen können. Gib (mindestens) eine solche Anzahl außer der trivialen Anzahl 1 an. (MG)

Lösung:

- Bettina hat Recht! Herr Stütze kann bei einer Reihe 1 Dose, bei zwei Reihen $1 + 3 = 4$ Dosen, $4 + 5 = 9$, und entsprechend weiter 16, 25, 36, 49, 64, ... Dosen aufbauen. 55 Dosen sind also nicht möglich (entweder baut er 49 Dosen auf und es bleiben 6 Dosen übrig oder er versucht acht Reihen aufzubauen, aber dann fehlen ihm 9 Dosen).
Hingegen kann Bettina $1, 1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6$, und entsprechend weiter 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 Dosen aufbauen. Mit ihrem Aufbau lässt sich also Herrn Stützes Wunsch, alle 55 Dosen zu verwenden, verwirklichen.

- b) Herr Stütze kann genau die Quadratzahlen aufbauen, also bei n Reihen n^2 Dosen aufbauen. Zum Beweis sieh Dir das Titelbild von MONOID 86 an oder lies den Artikel „Beweis ohne Worte“ von Hartwig Fuchs (Seite 28 im selben Heft).

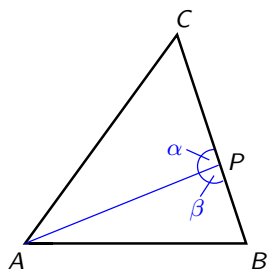
Bei Bettina sind es in n Reihen $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Dosen.

- c) Sowohl Herr Stütze als auch Bettina können eine Dosenpyramide mit 36 Dosen aufbauen. Bettina hat dann acht Reihen, Herr Stütze sechs. Die nächsten beiden Zahlen sind 1225 und 41616, aber wer hat so viele Dosen?

Eine unmögliche Dreieckszerlegung

Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn keiner seiner drei Innenwinkel $\geq 90^\circ$ ist. Man kann kein Dreieck in zwei Dreiecke zerlegen, die beide spitzwinklig sind. Du siehst es – kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Lösung:



Ein Dreieck $\triangle ABC$ kann nur durch eine Strecke in zwei Dreiecke zerlegt werden, welche einen Eckpunkt (zum Beispiel A) mit einem inneren Punkt P der dem Eckpunkt gegenüberliegenden Dreiecksseite verbindet. Sei nun $\triangle ABC$ so zerlegt wie in der Figur. Dann gilt für die Winkel α und β bei P : $\alpha + \beta = 180^\circ$

Dann aber können nicht α und β beide $< 90^\circ$ sein. Wenn aber einer der beiden Winkel $\geq 90^\circ$ ist, dann kann eines der beiden Zerlegungs-dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle APC$ nicht spitzwinklig sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

Von Kindern, Katzen und Beinen



In einem Bus sitzen sieben Kinder. Jedes Kind hat sieben Rucksäcke, in denen jeweils sieben Katzen sitzen. Jede Katze hat sieben Junge.

Wie viele Beine befinden sich im Bus?

(Kevin Schmitt, Klasse 9, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey)

Lösung:

In dem Bus befinden sich
bei 7 Kindern also deren 14 Beine;
pro Kind 7 Rucksäcke, also 49 Rucksäcke;
pro Rucksack 7 Katzen, also 343 Katzen mit 1372 Katzenbeinen.
343 Katzen haben 2401 Junge mit 9604 Beinen.

Dies ergibt zusammen 14 Kinderbeine + 1372 große Katzenbeine + 9604 kleine Katzenbeine = 10990 Beine.

Ein Heiratsproblem

In längst vergangenen Zeiten wollte ein Stammesherzog seine Töchter Adelheid (A) und Brunhilde (B) verheiraten. Chlodwig (C) sollte eines der beiden Mädchen zur Frau bekommen. Von jedem anderen Bewerber verlangte der Herzog, dass er für beide Frauen einen Brautpreis anbieten müsse – ganz gleich ob er nun Adelheid oder Brunhilde zur Frau haben wolle. Üblicher Weise wurden damals Brautpreise mit Pferden bezahlt.



Der ehrgeizige Dietrich (D), der 30 Pferde besaß, machte das beste Angebot: 26 Pferde für Adelheid – das hübschere der beiden Mädchen – und 20 Pferde für Brunhilde.

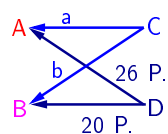
Weil nun sowohl Chlodwig als auch Dietrich Adelheid haben wollten, befahl der Herzog, dass auch Chlodwig ein Angebot für Adelheid abgeben müsse. Dann werde er seine Entscheidung so treffen, dass sie ihm die größt mögliche Anzahl von Pferden einbringen werde.

Chlodwig, der unsterblich in Adelheid verliebt war und deshalb nur sie zur Frau haben wollte, schien chancenlos gegenüber Dietrich zu sein, denn er besaß nicht einmal $\frac{1}{3}$ der Anzahl an Pferden von Dietrich.

Doch schließlich gab der Herzog Chlodwig seine Tochter Adelheid zur Frau.

Wieviele Pferde besaß Chlodwig und welches Angebot hatte er dem Herzog gemacht? (H.F.)

Lösung:



C besaß höchstens 9 Pferde, da deren Anzahl kleiner als $\frac{1}{3} \cdot 30$ sein sollte. Es seien a und b die Angebote, die er für A und B machte. Dann ist $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq b \leq 9$.

Wenn C und A heiraten, erhält der Herzog $20 + a$ Pferde;

wenn D und A heiraten, erhält der Herzog $26 + b$ Pferde.

Da C die Tochter A erhielt, muss gelten:

$$(*) \quad 20 + a > 26 + b \geq 27.$$

Daher ist $a > 7$, das heißt C besaß mindestens acht und höchstens neun Pferde.

Da C unbedingt A zur Frau bekommen wollte, hat er für B sicher nur ein Pferd ($b = 1$) geboten und für A seine gesamten acht oder neun Pferde ($a = 8$ oder $a = 9$). In der Tat ist $20 + 8 > 26 + 1$ und erst recht $20 + 9 > 26 + 1$.

Chlodwig hat also acht oder neun Pferde und davon sieben oder acht für Adelheid und eines für Brunhilde angeboten.

Urlaubspost



Die Sommerferien stehen vor der Tür. Da sie sich dann nicht sehen können, versprechen die drei Freundinnen Julia, Kerstin und Linda einander, dass jede den beiden anderen jeweils eine Postkarte aus dem Urlaub schreibt.

- a) Wieviele Postkarten werden geschrieben?
- b) Als Melanie von der Vereinbarung mitbekommt, möchte sie gerne mitmachen. Wie viele Postkarten sind es dann?
- c) Die vier Freundinnen überlegen sich, dass es auch schön wäre, wenn die ganze Klasse mitmachen würde. In der Klasse sind 28 Schüler. Wie viele Karten würden dann geschrieben?
- d) Wie viele wären es allgemein bei n beteiligten Personen?
- e) Unter den 28 Schülern der Klasse sind auch Bastian und Sebastian, die Zwillingbrüder sind. Die beiden bekommen jeweils eine eigene Karte von den Klassenkameraden, verschicken selbst aber jeweils nur eine gemeinsam.
- f) Die Klasse einigt sich darauf, dass auch die Lehrerin Frau Schwarz von jedem eine Karte bekommen soll. Wie viele Karten werden nun insgesamt geschrieben (ohne Berücksichtigung, dass zwei Schüler Zwillingbrüder sind)?
(MG)

Lösung:

- a) Jede der Freundinnen schreibt jeweils 2 Karten, insgesamt werden also $3 \cdot 2 = 6$ Karten geschrieben.
- b) Mit Melanie sind es $4 \cdot 3 = 12$ Karten...
- c) ... und in der ganzen Klasse $28 \cdot 27 = 756$.
- d) Jede der n Personen verschickt $n - 1$ Karten. Insgesamt sind es also $n \cdot (n - 1) = n^2 - n$ Karten.
- e) 26 der Schüler schreiben jeweils 27 Karten, zwei Schüler zusammen 26 Karten. Insgesamt sind es also $26 \cdot 27 + 26 = 728$ Karten.
- f) Die 28 Schüler schreiben untereinander $28 \cdot 27 = 756$ sowie insgesamt 28 an die Lehrerin. Zusammen sind dies 784 Karten.

Ziffernübereinstimmung

- a) Finde das kleinste Paar (n, m) mit $1 < n < m$ derart, dass die letzten beiden Ziffern von 2009^n und 2009^m übereinstimmen!

- b) Gibt es Paare (n, m) mit $1 < n < m$ so, dass die letzten 2009 Ziffern von 2009^n und 2009^m übereinstimmen? (WJB)

Lösung:

- a) Die letzten beiden Ziffern von 2009^k sind die letzten beiden Ziffern von 9^k und lassen sich leicht bestimmen: 09, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, 81, ...
 $(n, m) = (2, 12)$ ist also das gesuchte Paar.
- b) Für die letzten 2009 Ziffern gibt es 10^{2009} verschiedene Möglichkeiten. Unter mehr als 10^{2009} verschiedenen Zahlen der Form 2009^k muss es also mindestens zwei Zahlen 2009^n und 2009^m geben, deren letzte 2009 Ziffern übereinstimmen.

Englische Zahlenknobelei

			T	W	O
$+$	T	H	R	E	E
$+$	S	E	V	E	N
	T	W	E	L	V
				E	

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern und zwar so, dass verschiedenen Buchstaben auch verschiedene Ziffern entsprechen, wobei den ersten Buchstaben von links nicht die Ziffer 0 zugeordnet wird – so dass eine korrekte Addition entsteht.

(gefunden von H.F.)

Lösung:

Wir bezeichnen die Überträge, die bei der Addition von drei Zahlen < 10 beziehungsweise von zwei *verschiedenen* Zahlen < 10 entstehen, mit U beziehungsweise mit u .

Es gilt $U \leq 2$ und $u \leq 1$, weil die Summe dreier Zahlen < 10 höchstens 27 und die von zwei verschiedenen Zahlen < 10 höchstens 17 ist.

- Es ist $TW = T + S + u \leq 9 + 8 + 1$. Wegen $T \neq 0$ muss $T = 1$ sein.

$$\Rightarrow T = 1$$
Sei nun $u = 0$ (Annahme).
Dann ist $H + E + U = E$, so dass $H = 0$ ist. Wegen $1W = 10 + W = 1 + S + u = 1 + S \leq 10$ gilt aber auch $W = 0$: Widerspruch.
Also ist $u = 1$ und aus $T + S + u = 1 + S + 1 = 10 + W$ folgt $S = 8 + W \leq 9$.
Wegen $W \neq T = 1$ bleibt nur $W = 0$ und folglich $S = 8$.

$$\Rightarrow W = 0, S = 8$$
- Nach 1. findet von der 3. Spalte der Übertrag $u = 1$ in die zweite Spalte statt. Daher ist $H + E + U = 10 + E$, sodass $H + U = 10$ ist. Wegen $U \leq 2$ ist $H = 9$, denn $H = 8$ ist nicht möglich.

$$\Rightarrow H = 9$$
- In der letzten Spalte kann nicht $O + E + N = E$ gelten, weil $O + N \neq 0$ ist. Also gilt: $O + E + N = 10 + E$, so dass $O + N = 10$ mit $O \in \{3, 4, 6, 7\}$, denn für $O = 2$ ist $N = 8$: Widerspruch, für $O = 5$ ist $N = 5$: Widerspruch.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Eine See-Geschichte

Wenn man die Anzahl der Seeleute auf dem Schiff „Maru“ mit dessen (ganzzahliger) Länge und mit dem Alter des Kapitäns (in Jahren) multipliziert, dann erhält man 71 508.

Wie alt ist der Kapitän?

(H.F.)



Onkel Gerhards Geldkistchen



Gisela hat am 31. März Geburtstag. Als Geschenk macht ihr Onkel Gerhard folgendes Angebot:

„Wähle dir eine Zahl n und besuche mich im April an n Tagen. Ich stelle dann n Kistchen auf mit 10-Cent-Münzen. Beim ersten Besuch darfst du dir eine Münze aus einem der Kistchen nehmen, am zweiten Tag je eine Münze aus zwei verschiedenen Kistchen, am dritten je eine aus drei Kistchen und so weiter, beim letzten Besuch n Münzen aus n verschiedenen Kistchen. Wenn du nach dem letzten Besuch aus jedem Kistchen gleich viele Münzen entnommen hast, darfst du die Münzen behalten, sonst musst du sie zurückgeben.“

Es ist offensichtlich, dass Gisela bei Wahl von $n = 2$ die Münzen nicht wird behalten können, wohl aber bei $n = 3$.

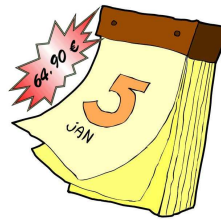
- a) Stelle fest, ob $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ oder $n = 7$ geeignete Wahlen sind.
- b) Kannst Du für jeden Wert von n angeben, ob Gisela das Ziel erreichen kann, die Münzen zu behalten? Wie muss sie gegebenenfalls vorgehen?
- c) Welchen Betrag kann Gisela höchstens erreichen?

(WJB)

Preiskampf

Kalenderverleger Julius Gregorius schimpft: „Unser Lieferant hat die Preise für die neuen Kalender 2011 um 10 % gegenüber dem Vorjahr erhöht, dabei verdienen wir an den Aufträgen, die wir haben, nur 10 %, der Rest sind ja schon die Einkaufspreise. Aufgrund des Preiskampfes auf dem Terminkalendermarkt können wir die Preise auch nicht anheben. Dann verdienen wir in Zukunft ja gar nichts mehr!“ – Stimmt das?

(MG)



Summenwachstum

Ulrike hat in einem mathematikhistorischen Buch die Anekdote von Carl-Friedrich Gauß* gelesen, wie er als Schüler sehr schnell alle Zahlen von 1 bis 100 addiert haben soll. Gauß nutzte die Formel $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} =: \Sigma_n$ **.

Als interessierte Mathematikerin berechnet Ulrike einige Summen, schreibt die Summen als Folge nacheinander auf und beginnt mit Untersuchungen:

- Welche Zahlen sind die ersten sechs dieser Folge? Welche Zahl steht an der zwölften Stelle?
- Kommt ihre Lieblingszahl 85 in der Folge aller Summen (Σ_n) vor? Und die Zahl 120?
- Wie viele Zahlen sind kleiner als 100?
- Und wie geht doch gleich der Beweis für die Formel $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$?
- Ulrike verrät die Formel auch ihrem Nachhilfeschüler. Leider merkt er sich die Gleichung nicht richtig, macht einen „Rechenzeichenfehler“ und berechnet irrtümlich $\frac{n(n-1)}{2}$. Wie ändert sich dadurch die Folge der Summen?

(MG)



* Johann Carl Friedrich Gauß, * 30.04.1777 in Braunschweig, † 23.02.1855 in Göttingen, Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Mehr über ihn erfahrt Ihr im Artikel von David E. Rowe: Bilder, die an C. F. Gauß erinnern; Monoid 81 (März 2005), ab Seite 30.

** Solltest Du die angedeutete Anekdote nicht kennen, dann informiere Dich in Büchern oder frage Deinen Mathematiklehrer!

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Ein Messproblem



Manfred hat die Aufgabe, seiner Mutter genau 4 l Wasser zu bringen. Er rennt in den Garten und findet drei Kanister, einen mit 8 l, einen mit 5 l und einen mit 3 l Fassungsvermögen. Der 8 l-Kanister ist voll. Alles, was er tun kann, ist Wasser umzuschütten.

Wie muss er vorgehen, um seiner Mutter später genau 4 l Wasser zu bringen? Da er weiß, dass seine Mutter sehr penibel ist, achtet er peinlich genau darauf, kein Wasser zu verschütten.

(Alexander Schneider, Klasse 8, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum, Bad Bergzabern)

Summe 2009

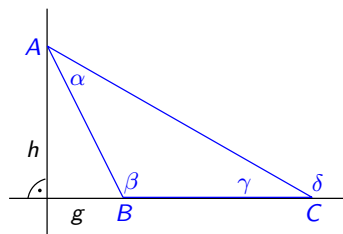
Die Summe von n aufeinander folgenden natürlichen Zahlen $n > 1$, sei 2009. Welche Zahlen n sind möglich? Wie heißt die jeweils kleinste der zu einem n gehörigen aufeinander folgenden Zahlen? (H.F.)

Winkel-Vergleich

Die Geraden g und h seien orthogonal zueinander. A sei ein Punkt auf h , der nicht auf g liegt. B und C seien Punkte auf g , die nicht in h enthalten sind und die beide auf der gleichen Seite von h liegen.

Wenn C weiter von h entfernt ist als B , dann gilt für die Winkel β und δ (vgl. Abbildung): $\beta < \delta$.

Du siehst es – kannst du es auch begründen?



(H.F.)

Bereits ab Seite 22 findet Ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 967: Lauter Quadratzahlen?

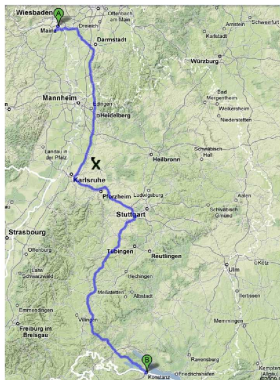
Die unendliche Zahlenfolge 2, 6, 12, 20, 30,... sei gebildet nach dem Muster

$$2 \xrightarrow{+4} 6 \xrightarrow{+6} 12 \xrightarrow{+8} 20 \xrightarrow{+10} 30 \xrightarrow{+12} \dots$$

Dann gilt für jede Zahl a der Zahlenfolge: $4a + 1$ ist eine Quadratzahl.

Stimmt das?

(H.F.)



Aufgabe 968: Ein Reiseproblem

Elf Mathematiker der Uni Konstanz und zwölf Mathematiker der Uni Mainz wollen sich zu einer Konferenz treffen. Wo sollen sie sich treffen, um den Reiseaufwand (sie fahren mit dem Auto) möglichst niedrig zu halten? In Mainz? In Konstanz? Oder an einem Ort X an der direkten Reisestrecke von Konstanz nach Mainz?

(H.F.)

Aufgabe 969: Halleyscher Komet

Immer wieder lösen Kometen bei Menschen eine große Faszination aus. Ein Komet, der alle 75 bis 77 Jahre von der Erde aus beobachtet werden kann, ist der Halleysche Komet. Edmond Halley* wies 1705 nach, dass der Komet von 1682 mit den Kometen aus den Jahren 1607 und 1531 identisch sein muss.

Die letzten drei Erscheinungen dieses nach ihm benannten Halleyschen Kometen (nebenstehend auf einer deutschen Briefmarke von 1986) fielen in die Jahre 1835, 1910 und 1986. Das nächste Mal wird er im Jahr 2061 von der Erde aus zu sehen sein.



Zeige, dass $1835^{1910} + 1986^{2061}$ durch 7 teilbar ist.

Hinweis: Versuche nicht die Zahlen 1835^{1910} und 1986^{2061} auszurechnen, da sie sehr groß werden. Stattdessen kann Dir der (kleine) Satz von Fermat helfen. (Siehe Seite 8) (gefunden und überarbeitet MG)

* Edmond Halley, * 29.10.1656 (nach dem damals in England noch gültigen julianischen Kalender, nach gregorianischem Kalender 08.11.1656) in Haggerston bei London, † 14.01.1741 (greg. 25.01.1742) in Greenwich; Astronom, Mathematiker, Kartograph, Geophysiker und Meteorologe.

Aufgabe 970: Berechnung eines Folgengliedes

Es seien $a_1 = 1$ und $a_2 = 2009$. Dann seien $a_3, a_4, a_5, \dots$ so definiert:

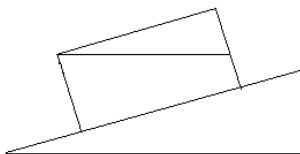
$$\begin{aligned}a_3 &= a_2 + a_1, a_4 = a_3 + a_2 \\a_5 &= a_4 - a_3 \\a_6 &= a_5 + a_4, a_7 = a_6 + a_5 \\a_8 &= a_7 - a_6 \\&\dots \text{ usw } \dots\end{aligned}$$

Wie groß ist a_{2009} ?

(H.F.)

Aufgabe 971: Ein Zylinder auf schiefer Ebene

Auf einer schiefen Ebene steht ein flacher, mit Wasser gefüllter Zylinder so, dass das Wasser den Rand an einer Seite berührt und an der genau gegenüber liegenden Seite im Querschnitt durch den Zylindermittelpunkt (siehe Abbildung) das Wasser 1,5 cm unter dem Rand liegt.



Wie hoch ist der Zylinder, wenn sein Volumen $V = 170\text{ml}$ und der Abstand der beiden erwähnten Berühr-(Schnitt-)punkte der Wasseroberfläche mit dem Zylinder 10 cm beträgt?

Wissensfrage ohne Beweis: Welche Form hat die Wasseroberfläche? (nach Alia'a Ahmed Doma, Klasse 11, Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo)

Aufgabe 972: Primzahl-Untersuchungen

- a) Zeige, dass $2^{2009} + 3$ und $3^{2009} + 2$ keine Primzahlen sind.
- b) Zeige, dass $2009^{2009} + 4$ keine Primzahl ist!
- c) Zeige, dass $2009^{2009} + 2008^{2008}$ keine Primzahl ist.
- d) Gibt es ein n , für das $(n+1)^{n+1} + n^n$ eine Primzahl ist? (WJB)

Aufgabe 973: Kettenbruch

Im Beispiel 3 des Artikels „Kettenbrüche“ ist die Kettenbruch-Entwicklung für $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ angegeben.

- a) Bestimme die Näherungswerte $z_0, z_1, \dots, z_5$
- b) Was fällt Dir dabei auf?
- c) Kannst Du die Vermutung aus b) auch beweisen? (WJB)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 98

Klassen 8–13

Aufgabe 967: Niemals eine Quadratzahl

Überlege, warum es keine natürliche Zahl n gibt, für die $n(n+2)$ eine Quadratzahl ist. (H.F.)

Lösung:

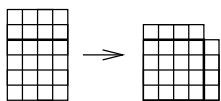
Es ist $n(n+2) = n^2 + 2n$. Daraus folgt die Ungleichung $n^2 < n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$.

Weil nun $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ ist, gilt: $n(n+2)$ liegt zwischen den unmittelbar aufeinander folgenden Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ und kann daher selbst keine Quadratzahl sein.

Lösungsvariante:

Ein Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+2$ sei in 1×1 -Quadrate eingeteilt. Dann gibt es $n(n+2)$ solcher Quadrate im Rechteck, aber nur n^2 solcher Quadrate im $n \times n$ -Quadrat. Daraus erkennt man $n^2 < n(n+2)$.

Wir denken uns nun das Rechteck verwandelt in das nebenstehende Sechseck. Man sieht: Das Sechseck enthält $n(n+2)$ der 1×1 -Quadrate und damit ein 1×1 -Quadrat weniger als das $(n+1) \times (n+1)$ -Quadrat, zu dem das Sechseck leicht ergänzt werden kann. Mithin ist $n(n+2) < (n+1)^2$.



Aus $n^2 < n(n+2) < (n+1)^2$ folgt dann die Behauptung.

Aufgabe 968: Der Teiler 2009

Es seien $a \geq 1$, $b \geq 1$ ganze Zahlen mit $a + b = 2009$.

Gibt es Zahlenpaare a, b , für die gilt: 2009 ist ein Teiler von $a \cdot b$?

Wenn ja: Welches sind die Paare?

(H.F.)

Lösung:

Es ist $b = 2009 - a$, so dass $ab = 2009a - a^2$.

Annahme: 2009 teilt ab , in Zeichen: $2009 \mid ab$.

Dann gilt $2009 \mid a^2$ wegen $a^2 = 2009a - ab$. Nun ist $2009 = 7^2 \cdot 41$. Aus $(7^2 \cdot 41) \mid a^2$ folgt $7 \mid a^2$ und $41 \mid a^2$, also auch $7 \mid a$ und $41 \mid a$; mithin gilt $(7 \cdot 41) \mid a$ oder $a = n \cdot 287$ mit $n = 1, 2, 3, \dots, 6$ wegen $a < 2009$.

Damit sind folgende Paare mögliche Lösungen *:

$(287, 1722), (574, 1435), (861, 1148)$. Weitere drei nicht wesentliche Lösungen erhält man durch Vertauschen von a und b . Die Probe zeigt, dass die berechneten Zahlenpaare tatsächlich Lösungen sind.

* $n = 7$ bewirkt $a = 2009 \implies b = 0$. Es ist aber $b \geq 1$ vorausgesetzt.

Aufgabe 969: Abschätzung einer Vierecksfläche

Im Viereck $ABCD$ seien in der üblichen Bezeichnung a, b, c, d die Längen der vier Seiten und F sei die Vierecksfläche.

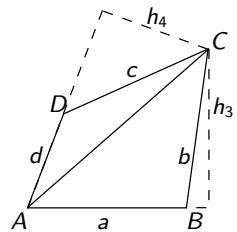
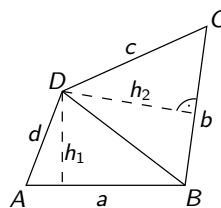
Zeige, dass dann gilt: $F \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$. (H.F.)

Lösung:

Zunächst ist $\frac{1}{4}(a+c)(b+d) = \frac{1}{4}(ad+bc) + \frac{1}{4}(ab+cd)$.

Abschätzung von $\frac{1}{4}(ad+bc)$: Wir zerlegen das Viereck durch die Strecke BD in zwei Dreiecke. Für diese gilt:

$|\triangle ABD| = \frac{1}{2}ah_1 \leq \frac{1}{2}ad$ und $|\triangle BCD| = \frac{1}{2}bh_2 \leq \frac{1}{2}bc$. Folglich ist $\frac{1}{4}ad + \frac{1}{4}bc = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc) \geq \frac{1}{2}(|\triangle ABD| + |\triangle BCD|) = \frac{1}{2}F$.



Abschätzung von $\frac{1}{4}(ab+cd)$: Die Diagonale AC zerlegt das Viereck in die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$, für die man wie oben zeigt:

$|\triangle ABC| \leq \frac{1}{2}ab$ und $|\triangle ACD| \leq \frac{1}{2}cd$. Folglich ist $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}cd \geq \frac{1}{2}(|\triangle ABC| + |\triangle ACD|) = \frac{1}{2}F$.

Aus den beiden Abschätzungen ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 970: Zwei Teilmengen einer Menge

Eine Menge $\mathbb{M}$ bestehe aus 15 verschiedenen natürlichen Zahlen ≤ 2009 .

Begründe: Aus $\mathbb{M}$ kann man stets zwei verschiedene Teilmengen so auswählen, dass für sie die Summen ihrer Elemente übereinstimmen.

Hinweise: Eine Menge aus n Elementen hat 2^n verschiedene Teilmengen, die leere Menge und die ganze Menge mitgezählt.

Die beiden ausgewählten Teilmengen können gemeinsame Elemente haben, der Schnitt muss also nicht leer sein. (H.F.)

Lösung:

Für die Summe S aller Elemente aus $\mathbb{M}$ gilt:

$$S \leq 2009 + 2008 + 2007 + \dots + 1995 = 30030.$$

Die Menge $\mathbb{M}$ hat 2^{15} Teilmengen.

Für jede beliebig gewählte Teilmenge gilt: Die Summe ihrer Elemente ist ≥ 0 und ≤ 30030 (die Summe der Elemente der leeren Menge ist 0).

Unter den $2^{15} = 32768$ Teilmengen gibt es daher höchstens 30031 Mengen mit verschiedenen Elementesummen.

Unter den übrigen 2737 Teilmengen von $\mathbb{M}$ kann man daher stets eine so auswählen, dass ihre Elementesumme mit der von einer der 30031 Mengen übereinstimmt.

Aufgabe 971: Familienstatistik

Nach einer Bekanntmachung des Statistischen Bundesamtes (Stand März 2004) leben von den Kindern unter 18 Jahren in Deutschland 25 % ohne Geschwister, 47 % mit einem Geschwisterkind, 19 % mit zwei Geschwistern und 9 % mit mindestens drei Geschwistern. Die in Apotheken erhältliche Zeitschrift *Baby und Familie* von Mai 2006 schließt daraus: „Paare, die sich für ein zweites oder drittes Kind entscheiden, sind eindeutig in der Überzahl.“

Bei der Lösung der folgenden Aufgabe machen wir keinen großen Fehler, wenn wir annehmen, dass die 9 % der Kinder mit mindestens drei Geschwistern genau drei Geschwister haben.

- Wie groß sind (unter allen Familien mit mindestens einem Kind) die Anteile der Familien mit 1, 2, 3 beziehungsweise 4 Kindern?
- Was hältst Du von der Schlussfolgerung aus *Baby und Familie*? (WJB)

Lösung:

- Gibt es insgesamt K Kinder, so stammen $0,25K$ davon aus (ebenso vielen) Einkindfamilien, $0,47K$ aus $\frac{0,47K}{2}$ Zweikindfamilien, $0,19K$ aus $\frac{0,19K}{3}$ Dreikindfamilien und $0,09K$ aus $\frac{0,09K}{4}$ Familien mit vier Kindern. Die Zahl der Familie mit mindestens einem Kind ist also $0,25K + \frac{0,47K}{2} + \frac{0,19K}{3} + \frac{0,09K}{4} = (0,25 + 0,235 + 0,06\bar{3} + 0,0225)K = 0,5708\bar{3}K$.

Dies ergibt die Anteile

$$a_1 = \frac{0,25K}{0,5708\bar{3}K} \approx 0,438 = 43,8 \%,$$

$$a_2 = \frac{0,235K}{0,5708\bar{3}K} \approx 0,412 = 41,2 \%,$$

$$a_3 = \frac{0,06\bar{3}K}{0,5708\bar{3}K} \approx 0,111 = 11,1 \%,$$

$$a_4 = \frac{0,0225K}{0,5708\bar{3}K} \approx 0,039 = 3,9 \, \%.$$

- Es gibt tatsächlich mehr Familien mit mehr als einem Kind als solche mit einem Einzelkind, allerdings sind diese nicht so eindeutig in der Überzahl wie *Baby und Familie* behauptet.

Außerdem ist eine genaue Aussage auch deshalb nicht möglich, da viele der berücksichtigten Familien und der noch Kinderlosen noch nicht vollständig sind, das heißt eventuell später noch (zusätzliche) Kinder haben werden.

Aufgabe 972: Variation über den Satz des Pythagoras

In einem Dreieck mit Winkel $\gamma = 90^\circ$ gilt $c^2 = a^2 + b^2$.

Gibt es einen Winkel Γ derart, dass im Dreieck mit $\gamma = \Gamma$ gilt $c^3 = a^3 + b^3$?
(WJB)

Lösung:

Wir nehmen an, es gäbe einen solchen Winkel. Dann könnten wir ihn bestimmen aus dem Dreieck $\triangle_1$ mit $a = 1$, $b = 1$ und $c = \sqrt[3]{2}$ sowie dem Dreieck $\triangle_2$ mit $a = 2$, $b = 1$ und $c = \sqrt[3]{9}$.

Der Cosinussatz liefert dann

$$\text{für } \triangle_1: \quad \cos \Gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2 - \sqrt[3]{2}^2}{2} \approx 0,2063,$$

$$\text{für } \triangle_2: \quad \cos \Gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5 - \sqrt[3]{9}^2}{4} \approx 0,1683.$$

Die beiden Werte sind aber verschieden, folglich kann es einen solchen Winkel nicht geben.

Aufgabe 973: Karl Krauses Kies

Karl Krause will seine Garagenzufahrt 15 cm hoch mit Kies belegen. Die Zufahrt ist 4 m breit und 14 m lang. Herr Krause muss den Kies nach Gewicht kaufen. Deshalb stellt er fest, wie schwer der Kies ist, indem er vier Kiesel auf die Waage legt. Diese wiegen 980 g. Danach füllt er einen Messbecher mit $\frac{1}{2}$ l Wasser und legt dann die Steine hinein. Damit steigt die Anzeige des Messbechers auf 940 ml. Er rechnet dann: $\frac{0,15 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 980}{940 - 500} = 18,7$ und bestellt 19 Tonnen Kies. Bei der Lieferung staunt er.

Hat Herr Krause viel zu viel oder viel zu wenig Kies bekommen und warum?
(WJB)

Lösung:

Er hat viel zu viel Kies bestellt und bekommen. Seine Rechnung ging aus von $0,15 \cdot 4 \cdot 14 = 8,4$ Kubikmeter Stein und hat nicht berücksichtigt, dass er 8,4 Kubikmeter Kies einschließlich der Zwischenräume zwischen den Steinen haben wollte.

Ein korrektes Vorgehen wäre zum Beispiel: Er füllt eine 80 g schwere Schachtel mit den Maßen $13,5 \cdot 13,5 \cdot 18$ (in cm) mit Kies und wiegt sie. Mit dem Gewicht von dann 4800 g rechnet er dann neu:

$$\frac{0,15 \cdot 4 \cdot 14 \cdot (4800 - 80)}{13,5 \cdot 13,5 \cdot 18} \approx 12,1, \text{ wobei } 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \text{ benutzt wird.}$$

12 Tonnen Kies hätten also gereicht.

Jahr der Astronomie

Teil I: Leben und Werk Keplers

von Marcel Gruner

Das vergangene Jahr 2008 wurde vom Bundesbildungsministerium zum *Jahr der Mathematik* ausgerufen. Doch mittlerweile schreiben wir 2009 und dieses zehnte Wissenschaftsjahr ist unter das Motto *Forschungsexpedition Deutschland* gestellt worden. Zugleich aber ist das Jahr 2009 von der Vollversammlung der Vereinten Nationen offiziell zum *Internationalen Astronomiejahr* erklärt worden. Auch in Deutschland gibt es deshalb zahlreiche Veranstaltungen. Dadurch soll den Menschen die Gelegenheit geben werden, einen tieferen Einblick in die Astronomie zu gewinnen und sich über die neuesten astronomischen Entdeckungen zu informieren. Das Jahr steht unter dem Motto: „Das Weltall: Du lebst darin – entdecke es!“



Aber warum wurde 2009 unter dieses astronomische Motto gestellt? Das hat zwei historische Gründe, die sich vor genau 400 Jahren, also im Jahr 1609, ereigneten.

Damals hatte nämlich Galileo Galilei¹ erstmals ein Teleskop für astronomische Beobachtungen gen Himmel gerichtet. Die Erfindung des Teleskops hatte Hans Lipperhey² im Oktober des Vorjahres erfolglos versucht, in Den Haag bei der holländischen Regierung zum Patent anzumelden. Galileo Galilei hörte davon und verwendete für seine Untersuchungen das „holländische Perspektivglas“. Mit großem Erfolg, denn er machte erstaunliche Entdeckungen: Er fand zahlreiche, für das bloße Auge unsichtbare, neue Sterne, konnte die Kraterstruktur des Mondes untersuchen und entdeckte vier Monde des Jupiters.

Obwohl diese Entdeckungen und das Leben des Galilei auch sehr interessant sind, wenden wir uns nun dem zweiten entscheidenden Ereignis des Jahres 1609 zu. Denn im selben Jahr veröffentlichte Johannes Kepler sein Werk *Astronomia Nova*, in dem er die grundlegenden Gesetze der Planetenbewegung aufstellte.

Zur Person Keplers

¹ Galileo Galilei, *15.02.1564 in Pisa, † 08.01.1642 in Arcetri bei Florenz; Mathematiker, Physiker und Astronom. Entdeckte die Sonnenflecken und vertrat das heliozentrische Weltbild. 1633 wurde er von der Inquisition der katholischen Kirche verurteilt, unter Hausarrest gestellt und erst 1992 formal rehabilitiert.

² Hans Lipperhey, oft finden sich auch die Schreibweisen Jan Lipperhey oder Hans Lippershey, * um 1570 in Wesel, † September 1619 in Middelburg; hauptberuflich Brillenmacher.

Friedrich Johannes Kepler (latinisiert: Ioannes Keplerus) wurde am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt (etwa 30 km westlich von Stuttgart) geboren.



Die protestantische Familie Kepler lebte in bescheidenen Verhältnissen. Der kleine Johannes war schwach und anfällig für Krankheiten. Mit vier Jahren erkrankte er an Pocken, die er zwar überlebte, aber als Folge blieb ein Augenschaden zurück, der sein Sehvermögen beeinträchtigte. So erschienen ihm helle Gegenstände mit mehreren Umrissen. Keplers mathematische Begabung wurde früh erkannt und seine Mutter weckte sein Interesse für Astronomie, etwa indem sie ihm den Kometen von 1577 und die Mondfinsternis von 1580 zeigte.

Ab 1589 studierte Kepler Theologie in Tübingen, nebenbei aber auch bei dem Mathematiker und Astronomen Michael Mästlin³, der ihn mit dem copernicanischen⁴ Weltbild, nach dem sich die Erde um die Sonne dreht, vertraut machte. Im Jahr 1594 wurde Kepler Lehrer für Mathematik an der Jesuitenschule in Graz. 1596 schrieb er sein *Mysterium Cosmographicum*, in dem er seine kosmologische Theorie vorstellte. Darin entwickelte er einen Bezug zwischen den Bahnen der damals bekannten fünf Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn und der Oberflächen der fünf platonischen Körper. In seinem Modell sind die Planetenbahnen Großkreise auf Kugeln, deren Radien dadurch bestimmt sind, dass ihnen platonische Körper umschrieben sind und diesen wiederum die Kugeln des jeweils nächsten Planeten.⁵ Mit der späteren Entdeckung seines ersten Gesetzes war dieses Modell Keplers überholt – und spätestens nach der Entdeckung entfernterer Planeten.

Da Kepler in Zeiten religiöser Auseinandersetzungen, etwa auch des Dreißigjährigen Krieges, lebte, musste er immer wieder umziehen. So verließ er nach nur sechs Jahren Graz wieder und ging nach Prag, wo er Assistent von Tycho Brahe⁶ wurde. Eine Zusammenarbeit, die nicht einfach war. Brahe war ein exzellenter Beobachter, während Kepler wegen seiner Fehlsichtigkeit selbst keine Beobachtungen durchführen konnte. Dafür war Kepler der bessere Mathematiker. Die Zusammenarbeit belastete auch, dass Brahe dem copernicanischen

³ Michael Mästlin, auch Möstlin, * 30.09.1550 in Göppingen, † 20.10.1631 in Tübingen; deutscher Mathematiker und Astronom.

⁴ Nicolaus Copernicus, im Deutschen seit dem späten 18. Jahrhundert oft Nikolaus Kopernikus geschrieben, * 19.02.1473 in Thorn, † 24.05.1543 in Frauenburg; Astronom, Jurist und Arzt. Formulierte das heliozentrische Weltbild, nach dem die Erde und die Planeten die Sonne umkreisen.

⁵ Eine graphische Anschauung dieses Modell könnt Ihr Euch auf dem Titelbild ansehen.

⁶ Tycho Brahe, * 14.12.1546 auf Schloss Knutstorp, Schonen, † 24.10.1601 in Prag; dänischer Astronom.

Weltbild, dem Kepler anhing, nur teilweise zustimmte. Nachdem Brahe 1601 starb, wurde Kepler dessen Nachfolger als Kaiserlicher Hofmathematiker. Nun konnte Kepler die umfangreichen Beobachtungsdaten Brahens nutzen, um seine eigenen Theorien zu verbessern. So entwickelte er das erste astronomische System, das keine Kreisbahnen benutzte. Stattdessen entdeckte er, dass sich die Planeten auf Ellipsenbahnen bewegen.



Seine Ergebnisse veröffentlichte Kepler 1609 im Buch *Astronomia nova de moribus stellae Martis*⁷, in welchem er auch die ersten beiden nach ihm benannten Gesetze vorstellte.

Bereits im Jahr 1604 beobachtete Kepler eine Supernova. Diese Beobachtung der Entstehung eines neuen Sterns widersprach der damaligen Meinung, das Fixsterngewölbe sei ewig unveränderlich.

Wegen der vermehrten religiösen Spannungen in Prag verließ Kepler 1612 nach dem Tod des Kaisers die Stadt und zog nach Linz. Dort arbeitete er an einem Bericht vom Geburtsjahr Christi, indem er den biblischen Stern von Bethlehem als Konjugation der Planeten Jupiter und Saturn identifizierte und auf einen früheren Zeitpunkt datierte. Doch auch die Zeit in Linz war nicht glücklich. Kepler erhielt sein Gehalt nur unzuverlässig und musste es mühevoll eintreiben. Außerdem wurden seine Bibliothek beschlagnahmt und die protestantischen Kinder zur Teilnahme an der katholischen Messe gezwungen. Dennoch blieb Kepler 14 Jahre, bis er nach Ulm floh. Dort fand er Wallenstein⁸ als neuen Förderer.

Für das Jahr 1631 berechnete Kepler erstmals in der Geschichte korrekt einen Venustransit durch die Sonnenscheibe voraus. Diesen konnte er aber selbst nicht mehr beobachten: Nachdem von Wallenstein seinen Posten als Generalissimus verlor und ihn nicht mehr bezahlen konnte, reiste Kepler über Leipzig und Nürnberg nach Regensburg. Nach nur kurzer Zeit starb er dort am 15. November 1630 mit 58 Jahren an Fieber und Feuerpusteln. Das Begräbnis fand vermutlich wie üblich drei Tage später statt, am Tag vor einer Mondfinsternis. Keplers Grab ging wegen der Wirren des Dreißigjährigen Kriegs unter, bekannt ist aber nach wie vor seine selbstverfasste Grabinschrift: „Mensus eram coelos, nunc terrae metior umbras. Mens coelestis erat, corporis umbra iacet.“⁹

⁷ lat. „Die neue Astronomie über die Bewegung des Sternes Mars“, kurz nur *Astronomia nova* genannt

⁸ Albrecht von Wallenstein, eigentlich Albrecht Wenzel Eusebius von Waldstein, * 24.09.1583 in Hermanitz an der Elbe, Böhmen, † 25.02.1634 in Eger; Oberbefehlshaber der kaiserlichen Streitkräfte im Dreißigjährigen Krieg, kämpfte gegen die protestantischen Mächte Deutschlands sowie gegen Dänemark und Schweden, fiel später in Ungnade und wurde ermordet.

⁹ Die Himmel hab ich gemessen, jetzt mess ich die Schatten der Erde. Himmelwärts strebte der Geist, des Körpers Schatten ruht hier.

Kepler war Naturphilosoph, evangelischer Theologe, Mathematiker, Astrologe, Optiker, Astronom und natürlich Mathematiker.

1611 veröffentlichte Kepler einen Aufsatz zur Symmetrie von Schneeflocken, das erste bekannte Werk zu diesem Thema. Er bemerkte, dass Schneeflocken symmetrisch unter einer Drehung um jeweils 60° sind (sechszählige Symmetrie), zugleich aber auch jeweils ein einzigartiges Aussehen haben. Weiter vermutete er richtig, dass ihre hexagonale Gestalt von der Kälte verursacht wird. Diese Arbeit führte Kepler weiter zur Frage nach der maximalen Dichte von Kreisarrangierungen und Kugelpackungen. Er vermutete, dass die dichteste Art Kugeln zu stapeln sei, diese zu einer Pyramide zu stapeln und „auf Lücke“ zu legen. Diese Vermutung war über Jahrhunderte ein offenes Problem, und der 1998 von Thomas Hales¹⁰ vorgelegte Beweis ist noch nicht endgültig überprüft. Außerdem legte Kepler mit seiner Fassregel zur Volumenberechnung die Grundlagen für die Arbeiten von Bonaventura Cavalieri¹¹ und Evangelista Torricelli¹², welche wiederum grundlegend für die moderne Analysis sind.

Er entwickelte die Optik als Wissenschaft weiter, indem er sich mit Lichtbrechung beschäftigte, die Wirkung der Brillengläser erklärte und die Grundlagen der modernen Optik legte, als deren Vater er oft bezeichnet wird. Das Teleskop entwickelte er weiter, sodass er die gemachten Entdeckungen seines Zeitgenossen Galileo Galilei beweisen konnte.

Zu Ehren Johannes Keplers sind ein Mondkrater und der Asteroid 1134 benannt worden; Paul Hindemith¹³ komponierte 1957 die Oper *Die Harmonie der Welt*, eine Hommage an Kepler, deren Titel bereits eine Anspielung auf die *Harmonices Mundi* ist.

Was es mit den Keplerschen Gesetzen auf sich hat und was sie aussagen, das erfahrt Ihr im nächsten MONOID-Heft 100.

¹⁰ Thomas Callister Hales, * 04.06.1958 in San Antonio, USA; Mathematiker, besonders in den Gebieten Algebra und Geometrie. Professor an der Universität Pittsburgh.

¹¹ Bonaventura Francesco Cavalieri, * 1598 wahrscheinlich in Mailand, † 03.12. oder 30.11.1647 in Bologna; Mathematiker und Astronom. Das Cavalierische Prinzip besagt, dass zwei Körper bei denen alle ebenen Schnitte, die parallel zur Grundebene und in gleichen Abständen ausgeführt werden, gleich sind, das gleiche Volumen haben.

¹² Evangelista Torricelli, * 15.10.1608 in Faenza, † 25.10.1647 in Florenz; Physiker und Mathematiker.

¹³ Paul Hindemith, * 16.11.1895 in Hanau, † 28.12.1963 in Frankfurt am Main; Bratschist und Komponist der Moderne (Neue Musik).

Kettenbrüche

von Wolfgang J. Bühler

Euklids Algorithmus:

In Euklids siebtem Buch wird folgende Methode beschrieben, den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier natürlicher Zahlen m und n zu finden:

Setze $m_0 = m$, $n_0 = n$ und teile mit Rest, das heißt $\frac{m_0}{n_0} = a_0 + \frac{r_0}{n_0}$, $a_0 \geq 0$, $0 \leq r_0 < n_0$, a_0, r_0 ganze Zahlen.

Ist $r_0 = 0$, so sind wir fertig. Sonst ist $\frac{m_0}{n_0} = a_0 + \frac{1}{\frac{n_0}{r_0}}$ und wir wiederholen das

Verfahren mit $m_1 = n_0$, $n_1 = r_0$, also $\frac{n_0}{r_0} = \frac{m_1}{n_1} = a_1 + \frac{r_1}{n_1}$. Ist $r_1 = 0$, so sind $n_0 = m_1 = n_1 a_1$ und $m_0 = a_0 n_0 + r_0 = a_0 n_1 a_1 + n_1$ beide teilbar durch n_1 .

Ist $r_1 > 0$, so ist $\frac{m_0}{n_0} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{n_1}{r_1}}}$ und wir wiederholen das Verfahren mit

$m_2 = n_1$ und $n_2 = r_1$. So machen wir weiter bis zu einem r_k mit $r_k = 0$. In diesem Fall ist n_k der gesuchte ggT und $x = \frac{m_0}{n_0}$ lässt sich darstellen als

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_k}}}$$

Einen solchen Ausdruck nennt man *Kettenbruch* und schreibt dafür auch einfacher $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$. Jede rationale Zahl lässt sich als Kettenbruch darstellen und umgekehrt stellt jeder solche Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ eine rationale Zahl dar.

Nicht rationale Zahlen:

Für irrationales $x > 0$ imitieren wir das obige Verfahren. Wir schreiben $x = x_0 = a_0 + y_0$ mit ganzzahligem a_0 und $0 \leq y_0 < 1$ und schreiben dafür $x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}$

mit $x_1 = \frac{1}{y_0}$. $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, das heißt $x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}$ und so weiter

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_k + \frac{1}{x_{k+1}}}}}$$

Dieser Kettenbruch kann nicht abbrechen, da sonst x rational wäre. Wir haben somit für jedes k einen rationalen Näherungswert

$$z_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}$$

Der Beweis dafür, dass z_k eine gute Annäherung bildet, das heißt $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = x$ ist, führt über den Rahmen dieses Aufsatzes hinaus. Die Tatsache erlaubt uns

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

zu schreiben und dies die Kettenbruchdarstellung von x zu nennen.

Periodische Kettenbrüche:

Wir beschränken uns (zunächst) auf $0 < x < 1$, das heißt $a_0 = 0$ und $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_m, a_1, a_2, \dots] = [0; a_1, a_2, \dots, a_m, (x)]$ beziehungsweise

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_m + x}}}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite lässt sich umformen zu $\frac{Ax + B}{Cx + D}$ mit ganzzahligen A, B, C, D . Multiplizieren wir die Gleichung $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ mit $Cx + D$, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für x . Diese besitzt (wir beweisen das nicht) eine positive Lösung.

Beispiel 1:

$$x = [0; 1, 2, (x)] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + x}} = \frac{2 + x}{3 + x} \text{ ergibt } x(3 + x) - (2 + x) = 0, \text{ das heißt}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \text{ und somit } x = -1 + \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} - 1.$$

Beispiel 2:

$$\text{Wegen } \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = 2 + (\sqrt{2}-1) \text{ sehen wir, dass } \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 =$$

$$1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}} = \dots = [1; 2, 2, \dots].$$

Beispiel 3:

$$x - 1 = \frac{1}{x} \text{ ergibt } x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \dots = [1; 1, 1, \dots].$$

Dies ist also die Kettenbruchdarstellung für die positive Lösung von $x - 1 = \frac{1}{x}$, also von $x^2 - x - 1 = 0$, dass heißt $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Diese Zahl tritt als Verhältnis beim Goldenen Schnitt und der Fibonacci-Folge auf.

Ist ein Kettenbruch nun schließlich periodisch, dass heißt $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_j, (y)]$, wobei y periodisch ist, so ist x eine gebrochene lineare Funktion von y .

$$x = \frac{Ay + B}{Cy + D} \text{ und } y \text{ wieder Lösung einer quadratischen Gleichung.}$$

Auch hier können wir also x aus seiner Kettenbruchdarstellung explizit bestimmen.

Transzendente Zahlen:

Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die einer Gleichung der Form $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$ genügen, heißen *algebraische* Zahlen. Hierzu gehören insbesondere die im vorigen Abschnitt behandelten Zahlen mit periodischen Kettenbrüchen. Erstaunlicherweise ist für keine andere algebraische Zahl eine Kettenbruchdarstellung explizit bekannt.

Nicht-algebraische Zahlen heißen *transzendent*. Für einige dieser Zahlen ist eine Kettenbruch-Entwicklung explizit möglich. So ist

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots, 1, 2n, 1, 1, \dots]$$

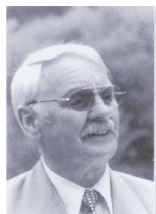
$$\sqrt{e} = [1; 1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, 1, \dots].$$

Andererseits lässt sich aus einem Anfangsstück der Darstellung von π kein Bildungsprinzip erkennen.

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots]$$

Dies ist das Titelbild der Broschüre, die Martin Mettler noch vor seinem Tode im September 2005 anlässlich des 25-jährigen Jubiläums der von ihm begründeten Zeitschrift MONOID zusammengestellt hat.

Die Broschüre enthält eine Fülle von Aufgaben und Beiträgen aus den ersten Jahren dieses „Mathematikblattes für Mitdenker“ und ist daher hervorragend geeignet, das Problemlösen zu üben – sei es begleitend zum Mathematikunterricht, sei es zur Vorbereitung und als Training für mathematische Wettbewerbe.



Martin Mettler schrieb im Juni 2004 in der Einleitung: „Das Buch richtet sich an alle Mathe-Liebhaber, insbesondere an Begabte, an Teilnehmer an Wettbewerben; selbstverständlich auch an Mathe-Lehrer, besonders an jene, die eine Mathe-AG gründen wollen oder bereits leiten, an Lehramtsstudenten, aber auch an andere, die sich mit dem Gedanken tragen, ihr logisches Denken zu trainieren. Zur unterhaltsamen Einführung bringe ich am Anfang einige Beiträge aus dem MONOID-Sonderheft 1986, welches die Überschrift „Spiel und Spaß mit und ohne Mathe“ trug.

Selbstverständlich konnte ich nicht das ganze Buch mit Spielereien füllen. Allmählich dringen wir immer tiefer in die geheimnisvolle Welt der Mathematik ein. So folgen die überarbeiteten Artikel und Aufgaben der ersten 16 MONOID-Hefte. Nur ein Teil des bereits 1995 in der Broschüre „Kollektaneen“ erschienenen Materials wurde weggelassen. Die „Neuen Aufgaben“ erscheinen hier mit den Nummern, mit denen sie damals in der Zeitschrift erschienen sind. Ihre Lösungen erscheinen unter „Gelöste Aufgaben“.

Es besteht kein Zweifel, dass der Mathematik die Ehre gebührt, im besonderen Blickfeld der Öffentlichkeit zu stehen. Gilt sie doch als eine der unverzichtbaren Wissenschaften für die hoch technisierte Welt des globalen Wettbewerbs. Das vorliegende Buch soll mein bescheidener Beitrag zur Werbung für die Mathematik sein.“

Es sind nur noch wenige Exemplare vorhanden. „Spiel und Spaß mit Mathe“ von Martin Mettler kann bezogen werden zum Unkostenbeitrag von 6€ + gegebenenfalls 2€ Versandkostenpauschale von der MONOID-Redaktion durch Bestellung über Internet

www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

oder Sie schicken eine E-Mail an die Redaktion:

monoid@mathematik.uni-mainz.de.

Mathematische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

Glaeser, Georg/Polthier, Konrad: „Bilder der Mathematik“.

Wer bei Mathematik nur an trockene Formeln scheinbar unverständlicher Buchstabenfolgen denkt, der wird sich wundern: Den beiden Mathematikprofessoren Georg Glaeser und Konrad Polthier ist mit „Bilder der Mathematik“ ein anspruchsvolles und anschauliches, aber nichtsdestotrotz spannendes und auch schönes „Bilderbuch“ gelungen. Inhaltlich umfasst das Werk die verschiedensten Themenbereiche: ebene, räumliche und höherdimensionale Geometrie, Abbildungen, Minimalflächen und Parkettierungen, aber auch zahlentheoretische Grundüberlegungen. „Bilder der Mathematik“ ist kein Buch, das man von vorne bis hinten an einem Stück durchliest. Entweder sucht man zu einem mathematischen, abstrakten Sachverhalt die passende Visualisierung oder man möchte sich inspirieren lassen, mit welchem mathematischen Problem man sich befassen will. Da die darin behandelten Inhalte zwar grundlegend, aber nicht zu einfach sind, richtet sich das Buch an mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler der Oberstufe, Studierende und Lehrkräfte der Mathematik. Zu den insgesamt 1000 farbigen Abbildungen gibt es jeweils eine knappe Einführung in die beschriebene Problematik, die in den meisten Fällen neugierig auf mehr macht. Dazu dienen dann die direkt zu den einzelnen Themen in einer Fußzeile vorgestellten Literaturangaben zum Weiterlesen und entsprechende Internetverweise in Hülle und Fülle.

Fazit:

Georg Glaeser und Konrad Polthier ist mit „Bilder der Mathematik“ ein mathematisches „Bilderbuch“ im besten Sinne – sei es zum Nachschlagen oder auch zum Anregen lassen – gelungen. Der einzige Wermutstropfen ist der durch die große Menge der durchgängig farbigen Abbildungen erklärbare Preis von 34,95 €, der jedoch von richtig Mathematikbegeisterten abgemildert werden kann, indem man sich das Buch zu Weihnachten wünscht, oder dafür sorgt, dass es für die Schulbibliothek angeschafft wird.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:

Glaeser, Georg/Polthier, Konrad: Bilder der Mathematik ;
Spektrum 2009, ISBN 978-3-8274-2017-6, geb. 323 Seiten, 34,95€

Art des Buches: „Bilderbuch“ mit Visualisierungen
mathematischer Inhalte

Mathematisches Niveau: von leicht bis schwer verständlich
Altersempfehlung: ab 16 Jahren



Mathe ist überall

von Carina Lang

In der Schule sind viele Fächer Pflicht,
von denen Schüler denken: „die braucht man nicht!“

Mathe ist eines, da stöhnen sie laut,
weil man da schon mal eine Arbeit verhaut.

Auch in der Oberstufe wird man sie nicht los.

Der Unmut darüber ist bei vielen sehr groß.
Doch warum, Mitschüler, sie uns daran ewig binden,
ist einfach, denn Mathe ist überall zu finden.

Ist in der Oberstufe Biologie dein Ziel,
musst fleißig du rechnen und zwar viel.

Auch in Chemie und Physik ist es wichtig,
du kannst Gleichungen lösen und berechnest sie richtig.

Selbst in Musik musst Intervalle du zählen.

In Sozi wird man dich mit Diagrammen oft quälen.

Ja, in jedem Fach ist Mathe nicht einerlei,
doch auch außerhalb der Schule ist es mit Mathe nicht vorbei.

Wie muss man beim Handy nur sehr wenig zahlen,
wie vergibt man seine Stimmen richtig bei Wahlen,
ja sogar wie kommt mein Fußballverein durch Punkte ans Ziel,
überall ist Mathematik im Spiel.

Von Steuererklärungen bis zum Erbrechen,
möchte ich jetzt hier lieber nicht sprechen.

Manches ist leicht, manches schwierig, klar,
doch Mathe ist wichtig, das ist wirklich wahr.

Und seid ihr in Mathe auch nicht immer so gut,
gebt niemals auf und habt nur Mut.

Seid von Mathe nicht erschreckt.

Selbst Lehrer rechnen nicht perfekt!

Produktpyramiden

von Dietmar Viertel

Eine interessante Fragestellung sind immer wieder die Pyramiden aus Zahlen, die nach regelmäßigen Mustern gebildet werden, deren Produkte wieder solche Zahlen ergeben sollen (so die Behauptung). In MONOID-Heft 90 hat Hartwig Fuchs eine solche Pyramide angegeben und auch gleich gezeigt, dass sich das Muster der Produkte tatsächlich fortsetzt:

$$\begin{aligned} 91 \cdot 1221 &= 11111 \\ 9091 \cdot 12221 &= 11111111 \\ 909091 \cdot 122221 &= 111111111111 \end{aligned}$$

Sein Weg ging über die Einführung von Abkürzungen für diese Zahlen und deren Manipulation. Ich bin solche Probleme bisher immer anders angegangen.

Wenn man es schafft, solche Zahlenmuster in einen geschlossenen Ausdruck zu packen, dann kann man es direkt durchrechnen. Wie kommt man zu einer solchen Darstellung?

Die Idee, um solche Zahlenmuster zu erzeugen, ist immer wieder die gleiche: eine Zahl, die aus n 9er besteht (wobei $n \in \mathbb{N}$), erhält man mit

$$10^n - 1 = \underbrace{999 \dots 999}_{n \text{ mal Ziffer 9}} \quad (1)$$

Darauf aufbauend bekommt man eine Zahl, die nur aus 1en besteht, indem man (1) durch 9 dividiert. Multipliziert man anschließend noch mit einer Zahl $1 \leq z \leq 9$, so kann man schon mal jede Zahl darstellen, die nur aus gleichen Ziffern z besteht:

$$\frac{10^n - 1}{9} \cdot z = zzz \dots zzz \quad (2)$$

Und eine Zahl wie 121212 oder 123123123 mit n Wiederholungen der Ziffernfolge 12 bzw. 123? Mit ein wenig Experimentieren kommt man auf diese Zusammenhänge, in denen die Ziffer 1 jeweils n -mal vorkommt:

$$\frac{10^{2n} - 1}{99} = 10101 \dots 10101 \quad (3a)$$

$$\frac{10^{3n} - 1}{999} = 1001001 \dots 1001001 \quad (3b)$$

Damit kann man alle Zahlen mit regelmäßigen Mustern erstellen, indem man mit der entsprechenden 2- bzw. 3-stelligen Zahl multipliziert.

Man könnte (3a) und (3b) auch über geometrische Summen herleiten ($\sum_{i=0}^{n-1} 10^{k \cdot i}$, dabei ist k der Abstand der 1en), aber ich denke, sie sind auch so einsichtig; vor

alles, wenn einem nichts anderes übrig bleibt, weil man diese Summen noch gar nicht kennt.

Und bei Abweichungen vom regelmäßigen Muster, wie etwa der 1 in der Einerstelle bei den Zahlen auf der linken Seite des Produkts oder der 1 vorne *und* hinten beim rechten Faktor? Nun, da benutzt man einfach Summanden, die diese Abweichungen erzeugen. Beim linken Faktor muss man nur eine 1 addieren:

$$\frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 90 + 1 \quad (4)$$

Der rechte Faktor ist etwas kniffliger. Da gibt es mehrere Möglichkeiten, die natürlich nach entsprechenden Umformungen alle auf den gleichen Term hinauslaufen. Die n Gruppen von 22 sind klar. Sie stehen aber nicht ganz rechts, sondern enden bei der Zehnerstelle der Zahl. Eine Multiplikation mit 10 hilft da, den ganzen 2er Block eine Stelle nach links zu verschieben. Jetzt noch eine 1 addieren und die Zahl stimmt fast. Die vordere 1 bekommt man durch Addition einer passenden 10er-Potenz. Zusammengefasst ergibt das:

$$10^{2n+1} + \frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 22 \cdot 10 + 1 \quad (5)$$

Jetzt ist es nur noch eine Fleißarbeit, (4) und (5) miteinander zu multiplizieren und zu vereinfachen (eine schöne Übung für Potenzgesetze):

$$\left(\frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 90 + 1 \right) \left(10^{2n+1} + \frac{10^{2n} - 1}{99} \cdot 22 \cdot 10 + 1 \right) = \frac{10^{4n+2} - 1}{9} \quad (6)$$

Und das ist doch genau der Ausdruck, um die 1en der rechten Seite zu erzeugen (vergleiche (2)).

Wer sich jetzt selbst daran versuchen will, bitteschön:

$$\begin{aligned} 49 &= 7^2 \\ 4489 &= 67^2 \\ 444889 &= 667^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Dazu noch ein Tip: es kann schwierig sein, durchgängig von der linken bis zur rechten Seite umzuformen. Dann arbeitet man sich von beiden Seiten bis zur Mitte vor. Bei (6) ergab es sich einfach durch Ausmultiplizieren der Klammern und Vereinfachen. Bei (7) ist es nicht ganz so einfach, auf die Form der rechten Seite zu kommen. Dann formt man eben beide Seiten getrennt um, bis die entstehenden Ausdrücke gleich sind. Und schreibt es anschließend in eine einzige Gleichungskette.

Ein weiteres schönes Beispiel ist (Vorsicht!):

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 11^2 &= 121 \\ 111^2 &= 12321 \\ 1111^2 &= 1234321 \end{aligned} \tag{8}$$

Schreibe erst mal die 12. Zeile auf, wie sie Deiner Meinung nach aussehen müßte. Dann rechne und vergleiche. Auch hier wieder ein Tipp (wer sich den Spaß selbst gönnen will, die Ausdrücke für 1234 und 4321 selbst herzuleiten, der sollte jetzt den Rest verdecken). Es ist

$$4321 = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = \sum_{i=1}^4 i \cdot 10^{i-1}$$

und allgemein:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot 10^{i-1} = \frac{10^n(9n-1)+1}{81}$$

$$1234 = \sum_{i=1}^4 (6-i) \cdot 10^{i-1} \sum_{i=1}^n (n+1-i) \cdot 10^{i-1} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 97

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:

Kl. 5: Anja Förster 12, Julian Langen 32, Johan Pitzer 5, Sara-Teresa Vezely 12;

Kl. 6: Arne Broszukat 57, Sophie Gatzemeier 4, Juliane Schäfer 4;

Kl. 7: Matthias Blitzer 15, Marc de Zoeten 22, Lena Ehrenhard-Dickeschied, 11, Mareike Förster 18, Laura Tabea Galkowski 45, Paul Gantner 9, Melanie Loos 24, Sebastian Ludwig 65, Benedikt Maurer 34, Raja Haider Mehmood 10, Alexander Rupertus 33, Julia Scherner 40, Elena-Laureen Schuster 14.

Kl. 8: Lara Bergjohann 4, Eike Broszukat 44, Lea Clemens 15, Jochen Dahlem 27, Chantal Graversen 24, Dominic Maier 46, Andreas Pitsch 65, Sören Rathgeber 8, Freya Roth 16, Philipp Scherrer 47;

Kl. 9: Kevin Schmitt 49;

Kl. 10: Philipp Mayer 22.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:

Kl. 6: Luisa Kirsch 22, Stefanie Schmid 17, Louisa Süß 1, Anna-Lena Woodbwy 9;

Kl. 7: Jana Ballweber 26;

Kl. 8: Henning Ballweber 44;

Kl. 12: Felix Liebrich 47, Martin Reinhardt 25.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen: (betreuende Lehrerinnen: Ute Frohs, Marie Claire Farag)

Kl. 6: Mariam Ahmed 15, Rehab Amr 16, Yara Ayman 11, Mona Sophie El Segini 15, Mira Hamed 2, Hoda Hazem 5, Malak Khaled 9, Marianne Michel 33, Maram Mohamed 9, Jessica Nabil 4, Chantal Ragy 14;

Kl. 7: Sansra Asziz 5, Farida Gaber 34, Sarah Mohamed 3;

Kl. 10: Nada Mohamed ElAttar 34.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:

Anna Katharina Lange 29; **Kl. 12:** Lennart Adam 63;

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber):

Kl. 6: Nadja Cuntz 18, Jeremy Ducoin 18, Friederike Kienle 6;

Kl. 9: Max Broda 12, Roberto Rossi 13; Alexander Schneider 7; David Wander 20.

Kl. 11: Rüdiger Bährle 6; Jonathan Bohlen 22.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 8: Frank Schindler 81.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):

Kl. 7: Katharina Bröhm 10, Julia Hahn 5, Lukas Vogel 19.

Erlangen, Freie Walldorfschule: **Kl. 11:** Malte Meyn 45.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik:

Kl. 7: Daniel Wilde 52,

Kl. 8: Janina Müller 23.

Grunheide, Gerhard-Hauptmann-Grundschule

Kl. 5: Sonja Witte 35.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):

Kl. 5: Jamal Ageli 20, Sean Brauwers 11, Benedikt Hortkötter 16, Njomza Krasniqi 8, Nico Oschatz 8, Matthias Trinz 4.

Kl. 6: Philipp Arndt 13, Mara Koch 36, Lars Prepens 60, Joachim Roth 8;

Kl. 7: Rajeththanan Balachandran 10, Thorsten Roth 19.

Hamburg, Gymnasium Hochrad: **Kl. 10:** Connor Röhrich 38.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:

Kl. 8: Michael Delhougne 20, **Kl. 10:** Philipp Delhougne 36.

Herzogenaurach, Gymnasium Herzogenaurach: Kl. 13: Lisa Janker 49.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrer: Christoph Straub):

Kl. 8: Shaima'a Ahmed Doma 44, Nada Zaghoul 25;

Kl. 11: Alia'a Ahmed Doma 64.

Kelkheim, Eichendorffschule: Kl. 6: Thomas Rothenbacher 34, Maike Stanischewski 53.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 8: Robin Fritsch 71.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis):

Kl. 5: Lea Marie Kiekenbeck 14;

Kl. 6: Fabian Bommer 12, Leonhard Conrath 48, Victor Jans 32, Matthias Niemann 25, Valentina Preuhs 9.

Kl. 7: Niklas Braun 61, Julia Braunschädel 7, Carolin Dürr 21, Lucas Feringa 8; Jana Veit 28.

Kl. 8: Laura Kleber 4, Eva Mülbüsch 6, Niklas Schliesmeier 26.

Kl. 9: Kira Bittner 13, Felix Braun 10, Hoang Giang Phi 19, Marco Rudolf 3.

Mainz, Gutenberg-Gymnasium: Kl. 9: Alexandra Hofmann 2.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 13: Alexey Tyukin 67.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 6: Magdalena Winkelvoß 51.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Wittekindt):

Kl. 5: Leo Lutz 51; **Kl. 6:** Leonhard Wagner 45;

Kl. 9: Steffen Hettler 1, Tim Lutz 36, Tobias Soldan 1.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 11: Florian Schweiger 74.

München, Max-Planck-Gymnasium: Kl. 6: Greta Sandor 20.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betr. Lehrerin Frau Cordula Langkamp):

Kl. 6: Annika Schmitz 11, Friederike Tiedtke 8;

Kl. 10: Vivien Kohlhaas 30. **Kl. 11:** Madeline Kohlhaas 31.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:

Kl. 5: Kristina Thomsen 5;

Kl. 6: Daniel Linn 8; Nathalie Linn 8; Sarah Linn 8; Paul Nehrig 1.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich und Frau Elze):

Kl. 5: Simon Elborg 5, Jakob Kuhn 51, Sarah Vogel 16, Leon Wietschorke 10, Julian Zimmer 14;

Kl. 6: Michael Arasim 12, Julius Asal 28, Andrea Behrent 46, Lutz Bischoff 44, Annika Brinkmann 21, Christina Diel 14, Yannic Döring 36, Marcus Dörner 15, Yasmina Gab 4, Michael Grunwald 32, Anna-Lena Hock 39, Tim Hoh 10,

Anna-Maria Klaas 33, Kathi Klauda 43, Heiko Kötzsche 63, Lea Leopold 23, Nataly Lipp 25, Babette Marschner 29, Martin Müller 38, Thi Thao Nguyen 12, Mariam Rahi 16, Aurén Schmitt 1, Jonas Schramm 15, Felix Sobotta 33, Nils Thomas 21, Julian Tjardes 38, Thi Thao Truong Nguye 5, Eva-Marie Wagner 31, Leonie Wietfeld 12;

Kl. 7: Tobias Braun 11, Isabel Winter 15;

Kl. 8: Valentin Kuhn 56; Yun Yeong-Chul 35;

Kl. 11: Bianca Bellchambers 24; Vita Bellchambers 24;

Kl. 12: Valentin Walther 66;

Kl. 13: Stefan Albert 60.

Oerlinghausen, Niklas-Luhmann-Gymnasium:

Kl. 9: Natalie Laumann 7.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner):

Kl. 8: David Feiler 40.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 7: Luis Ressel 54.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 10: Alexander Rettkowski 22.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 8: Dorothea Winkelvoß 30.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Kuntz):

Kl. 6: Sarah Grabelmann 9, Anna Lena Meier 27, Lena Mohr 9;

Kl. 7: Lorena Ritzmann 30.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (betr. Lehrerin Frau Elisabeth Maringer):

Kl. 9: Anna Arendt 27.

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2009

mit der Preisvergabe

an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2008/2009

am Samstag, dem 28. November 2009, Beginn 10 Uhr,

im Karolinen-Gymnasium Frankenthal,

Röntgenplatz 5, 67227 Frankenthal.

Den Festvortrag wird Herr Akad. Oberrat Dr. Stephan Rosebrock aus Karlsruhe halten; sein Thema:

„Linienland, Flächenland und Hyperraum“

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.

Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite

www.mathematik.uni-mainz.de/monoid.

Mitteilungen

- **Herausgeber und Redaktion begrüßen herzlich alle neuen Leserinnen und Leser**, die zu Beginn des Schuljahres 2009/10 ein MONOID-Abonnement bestellt haben. Wir bitten Euch daran zu denken, den Abo-Beitrag (falls noch nicht geschehen) rechtzeitig auf das MONOID-Konto mit der Kontonummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen!
- Zum **Internationalen Jahr der Astronomie 2009** hat **Marcel Gruner**, der bereits als Student zu früheren Heften Inhalte beigetragen hat, in diesem Heft einen Artikel über das Leben und Werk Johannes Keplers geschrieben. Im Dezemberheft wird es einen zweiten Teil dazu geben. Inzwischen ist Herr Gruner Studienreferendar in Bad Kreuznach und unterrichtet an der Alfred-Delp-Schule in Hargesheim Mathematik und Physik.
- Die **Stiftung Nordlicht** der Kieler Austauschorganisation KulturLife vergibt für 2010 Stipendien für einen Work and Travel-Aufenthalt, Auslandspraktika und Schüleraustauschprogramme im Wert von über 10 000 €. Alle Jugendlichen, Schulklassen und junge Erwachsene, die gerne ein Auslandsprogramm absolvieren möchten, damit verbundene Kosten aber nicht aus eigener Kraft aufbringen können, haben noch bis zum 31.11.09 die Möglichkeit, sich für das Nordlicht-Stipendium zu bewerben. Entscheidend für die Vergabe eines Stipendienplatzes ist vor allem das soziale Engagement der jungen Menschen. Alle weiteren Informationen finden sich im Internet unter www.nordlicht-stipendium.de.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Dr. Ekkehard Kroll

Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber, Dr. Susanne Weißmann.

Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf

Internet: Juliane Gutjahr

Betreuung der Abonnements: Katherine Pillau

Inhalt

Hartwig Fuchs: Euklid und die pythagoreischen Dreiecke	3
Hartwig Fuchs: Pythagoras und einige seiner Verwandten	4
Hartwig Fuchs: Hättest Du es gewusst? – Was ist der kleine Satz von Fermat?	8
Hartwig Fuchs: Die besondere Aufgabe – Ziffernumstellung	12
Mathis machen mathematische Entdeckungen	13
Die Ecke für den Computer-Fan	14
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 98	16
Neue Mathespielereien	22
Neue Aufgaben	25
Gelöste Aufgaben aus MONOID 98	27
Marcel Gruner: Jahr der Astronomie – Leben und Werk Keplers	31
Wolfgang J. Bühler: Kettenbrüche	35
Spiel und Spaß mit Mathe	38
Martin Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	39
Carina Lang: Gedicht: Mathe ist überall	40
Dietmar Viertel: Produktpyramiden	41
Rubrik der Löser und Löserinnen	43
Einladung zur MONOID-Feier 2009	46
Mitteilungen	47
Impressum	47

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>