Jahrgang 29 Heft 100 Dezember 2009

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.
Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.02.2010.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Herrn Kraft, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, an der **Alfred-Delp-Schule Hargesheim** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Marienberg Neuss** bei Frau Langkamp, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Meixner.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

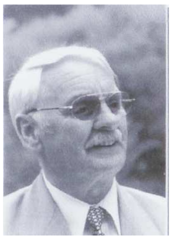
Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Monoid – In eigener Sache

von Ekkehard Kroll

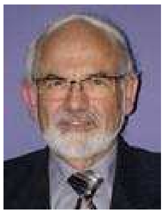
Vor Euch liegt das 100. Monoid-Heft, im nächsten Jahr erscheint der 30. Jahrgang – ein doppelter Grund zum Feiern, aber auch um einen Blick auf den Anfang und die Entwicklung dieser mathematischen Schülerzeitschrift zu werfen!



Monoid wurde 1980 am Karolinen-Gymnasium in Frankenthal von Martin Mettler als „Mathematikblatt für Mitdenker" im Anschluss an einen innerschulischen Mathematik-Wettbewerb gegründet, später auch am Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey fortgeführt und an beiden Gymnasien bis Ende des Jahres 2000 herausgegeben. Bis dahin waren 64 Hefte und etliche Sonderhefte erschienen.

Ab 2001 gab der damalige Fachbereich Mathematik und Informatik an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz Monoid heraus. Der Grund für die Übernahme der Herausgabe lag einerseits im Wunsch von Martin Mettler, für die Zeit nach seiner Pensionierung die Weiterführung von Monoid zu sichern, andererseits im Vorhaben des Fachbereichs, an der Schnittstelle Schule – Universität Monoid als Kommunikationsmedium einzusetzen. Inzwischen ist die Mathematik ein Institut im Fachbereich 08 „Physik, Mathematik und Informatik" und in den neun Jahren sind 36 Hefte und zwei Sonderhefte – eins 2005 zum 25-jährigen Jubiläum und eins 2008 zum Jahr der Mathematik – erschienen.

Im ersten Mainzer Jahr wurde die Monoid-Redaktion von Martin Mettler und mir gemeinsam geleitet, ab Heft 69 übernahm ich die Leitung allein, Martin Mettler begleitete die Redaktionsarbeit als Ehrenmitglied der Redaktion bis zu seinem krankheitsbedingten, leider zu frühen Tod am 11. September 2005. Ab Heft 99 ist Cynthia Hog-Angeloni, die bereits das Layout der Hefte 83 bis 88 gestaltet hat, mit in die Redaktionsleitung eingestiegen, die sie ab Heft 101 allein übernehmen wird.

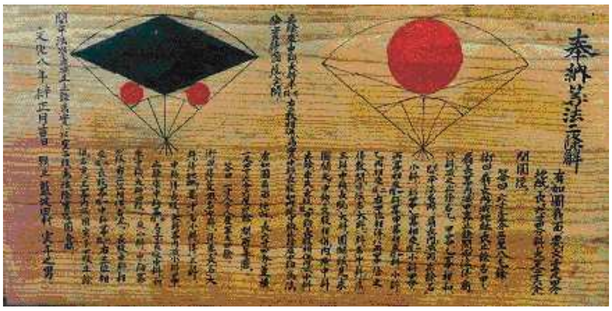


Frau Hog-Angeloni wechselte im März diesen Jahres von der Johann Wolfgang von Goethe-Universität Frankfurt a. M. zur Johannes Gutenberg-Universität nach Mainz. Neben Forschung und Lehre widmet sie sich seit dem eigenen Studium der frühzeitigen Förderung begabter und interessierter Schüler– nicht zuletzt der ihrer beiden Söhne (inzwischen Mittel- und Oberstufe) – durch Vorträge an Schulen und Schülerprogrammen der Universität, Mathematik-AGs, Mathematikkursen auf Schülerakademien und neuerdings nun der Redaktionsleitung von Monoid.

Sangaku-Probleme Teil 1
Aufgaben aus der japanischen Tempelgeometrie

von Ingmar Rubin

Während der Edo-Zeit (1603–1867), benannt nach der damaligen Hauptstadt, war Japan von den Einflüssen der westlichen Welt abgeschnitten. In dieser Zeit der selbst auferlegten Isolation schufen wissenschaftlich denkende Menschen aller Klassen – vom Landwirt bis zum Samurai – zahlreiche Theoreme in euklidischer Geometrie.



Diese Theoreme erschienen als wunderbar farbige Zeichnungen auf hölzernen Tafeln. Die Tafeln hingen unter den Dächern von Buddhisten, in Tempeln und Shinto-Schreinen. Viele von ihnen zeigen eine außergewöhnliche Schönheit und könnten für Kunst gehalten werden.

Die Tafel wurde ein Sangaku (gesprochen San-Gaku) genannt, was soviel wie Mathematiktafel auf japanisch bedeutet. Viele Geometer widmeten ein Sangaku ihrem Gott als Dank für die Entdeckung eines Theorems. Der Beweis des vorgeschlagenen Theorems wurde selten gegeben. Dies wurde als eine Herausforderung für andere Geometer interpretiert: „Seht her, ob ihr dies beweisen könnt.“

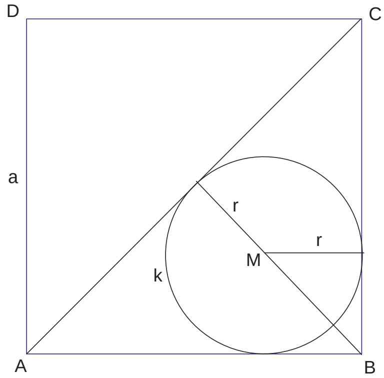
In zweihundert Jahren sind einige Schreine und Tempel verlassen oder zerstört worden, und damit auch die Sangaku-Tafeln. Heute existieren noch 820 Sangakus über Japan verteilt. Im Internet findet man unter *http://www.wasan.jp/english/* eine Landkarte mit japanischen Städten und den dort gefundenen Sangaku-Tafeln.

Übungsbeispiele

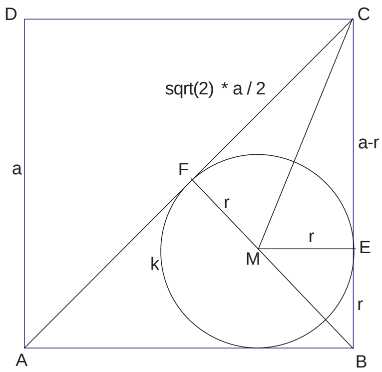
Anhand der folgenden Aufgaben wollen wir die grundlegenden Lösungstechniken von Sangaku-Problemen kennen lernen. Jeder Augabenstellung folgt deshalb ein ausführlicher Lösungsweg. Wer im Lösen geometrischer Probleme geübt ist, sollte die Aufgaben selbstständig lösen. Der anschließende Lösungsweg ist als Vorschlag zu betrachten. In der Regel existieren mehrere Lösungswege zu einer Aufgabe.

Übung 1 – Anwendung des Satzes vom gemeinsamen Tangentabschnitt

Wir beginnen unseren Exkurs in das Reich der Tempelgeometrie mit einem einfachen Problem. In einem Quadrat ist die Diagonale eingezeichnet sowie ein Kreis der zwei Seiten des Quadrates und die Diagonale in je einem Punkt berührt. Bestimme den Radius r vom Kreis, wenn die Seitenlänge des Quadrates a gegeben ist.



Lösungsvorschlag zu Übung 1



Die Länge der Diagonalen im Quadrat $ABCD$ beträgt:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Die Tangentenabschnitte $\overline{CE}$ und $\overline{CF}$ vom Punkt C an den Kreis k sind gleich lang (Satz vom gemeinsamen Tangentenabschnitt). Die Strecke $\overline{CF}$ entspricht der halben Diagonalen $\overline{AC}$. Die Länge von $\overline{CE}$ ergibt sich aus der Differenz $a - r$.

$$\overline{CE} = \overline{CF} \quad \Longrightarrow \quad a\,\frac{\sqrt{2}}{2} = a - r \quad \Longrightarrow \quad r = a\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

Natürlich hätte man diese Aufgabe auch so lösen können:

$$\overline{BM} + \overline{MF} = \overline{BF} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}\,r + r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

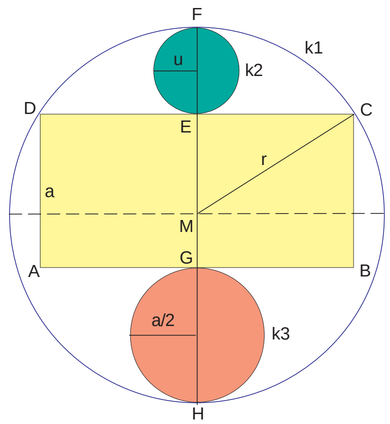
oder über die Formel vom Inkreisradius :

$$\Delta ACB = r \cdot s \quad \Longrightarrow \quad \frac{a^2}{2} = r \cdot \frac{a + a + \sqrt{2}\,a}{2}$$

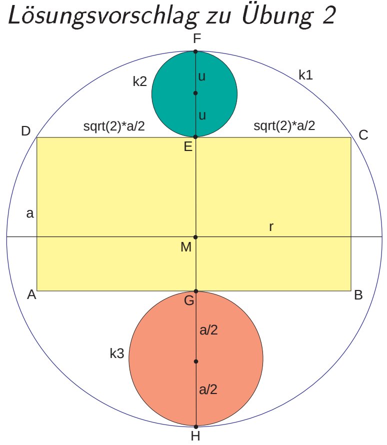
Übung 2 – Anwendung des Sehnensatzes

Einem Kreis $k_1(r)$ ist das Rechteck $ABCD$ so einbeschrieben, dass die Punkte C und D auf dem Kreis liegen (betrachte die nebenstehende Abbildung). Ein Kreis $k_2(u)$ berührt die Mitte der Strecke $\overline{CD}$ im Punkt E und den Kreis k_1 im Punkt F. Ein weiterer Kreis $k_3\left(\frac{a}{2}\right)$ berührt die Mitte der Seite $\overline{AB}$ im Punkt G und den Kreis k_1 im Punkt H. Bestimme den Radius u in Abhängigkeit von r wenn gilt:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2} \cdot a, \quad |\overline{AD}| = a$$



Lösungsvorschlag zu Übung 2



Für die sich kreuzenden Sehnen $\overline{CD}$ und $\overline{FH}$ gilt der Sehnensatz im Kreis k_1:

$$(u + u) \cdot (2\,r - 2\,u) = \frac{\sqrt{2}\,a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\,a}{2}$$

Der Durchmesser $\overline{FH}$ setzt sich aus folgenden Strecken zusammen:

$$\overline{FH} = 2\,r = 2\,u + 2\,a$$

Daraus erhalten wir:

$$r = \frac{9\,a}{8}, \quad u = \frac{a}{8} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{r}{9}$$