Jahrgang 30 Heft 101 März 2010

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
seit 2001 herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.05.2010.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz

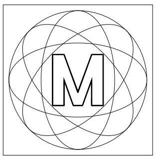
Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Herrn Kraft, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, an der **Alfred-Delp-Schule Hargesheim** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Marienberg Neuss** bei Frau Langkamp, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, zu *Entdeckungen*, *Wer forscht mit* und *Computerfan*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Die Morse-Thue-Folge

von Stephan Rosebrock

Wir möchten hier eine interessante Zahlenfolge betrachten, die 1906 von dem norwegischen Mathematiker Axel Thue zuerst beschrieben wurde. Die Folge wurde später oft wiederentdeckt. Bekannt wurde sie durch Morse, aber sogar der Schachspieler Euwe nutzte sie 1929 um zu zeigen, dass mehrfache Zugwiederholungen im Schachspiel vermieden werden können und unendlich lange Schachspiele möglich sind. Im Internet (`http://reglos.de/musinum/`) gibt es sogar ein Freeware-Programm, das diese Folge nutzt, um Musik zu erzeugen.

Die Zahlenfolge besteht nur aus Nullen und Einsen und wird folgendermaßen erzeugt: Wir beginnen mit einer 0: $T_0 = 0$. Dann ersetzen wir die 0, die dasteht, durch eine 1 und schreiben das Ergebnis dahinter: $T_1 = 0\,1$. Jetzt ersetze jede 0 durch eine 1 und jede 1 durch eine 0 und schreibe das Ergebnis dahinter: $T_2 = 01\,10$. Ersetze wieder jede 0 durch eine 1 und jede 1 durch eine 0 und schreibe das Ergebnis dahinter: $T_3 = 0110\,1001$, $T_4 = 01101001\,10010110$ und $T_5 = 0110100110010110\,1001011001101001$. Wir fügen also immer das Komplement $\overline{T_i}$ von T_i an T_i an, um T_{i+1} zu erhalten, das heißt $T_{i+1} = T_i\,\overline{T_i}$. Iteriert man noch einmal, so folgt zum Beispiel:

(1) $\quad T_{i+2} = T_i\,\overline{T_i}\,\overline{T_i}\,T_i.$

Bildet man $T_6, T_7, \dots$, erhält man eine Folge von unendlich vielen Nullen und Einsen, die Morse-Thue-Folge: 01101001100101101001011001101001 1001011001101001011010011001 0110 ...

Wir nennen sie T. Man sieht, dass T_2 und T_4 (allgemein T_{2n}) Palindrome sind, das heißt die Folge ist von vorne und von hinten gelesen dieselbe (wie bei dem Wort „Otto“).

Wir nennen die i-te Ziffer der Morse-Thue-Folge x_i, wobei wir mit der 0-ten Ziffer beginnen, also $T = x_0\,x_1\,x_2\,x_3 \dots$ und: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0, \dots$ Man kommt beispielsweise von T_3 zu T_4, indem man

(2) $\quad x_8 = 1 - x_0,\ x_9 = 1 - x_1, \dots, x_{15} = 1 - x_7$

rechnet.

Es gibt aber auch eine ganz andere Methode, T zu erzeugen: Starte mit einer 0. Jetzt ersetze jede 0, die dasteht, durch 01 (und jede 1 durch 10). Du erhältst dann 01. Wieder ersetze jede 0, die dasteht, durch 01 und jede 1 durch 10 und du erhältst 0110. Im nächsten Schritt erhalten wir 01 10 10 01. Machen wir das immer so weiter, so entsteht dieselbe Folge wie oben.

Weil wir diese Operation später noch brauchen, nennen wir sie S. S ersetzt in einer beliebigen Folge von Nullen und Einsen jede 1 durch 10 und jede 0 durch 01. Also etwa $S(0110) = 01\,10\,10\,01$ oder $S(1110) = 10\,10\,10\,01$. Wenden wir S auf die gesamte, unendlich lange, Morse-Thue Folge an, dann erhalten wir dieselbe Folge wieder, das heißt $S(T) = T$. Außerdem gilt $S(T_n) = T_{n+1}$.

Viel verblüffender ist aber, dass die Morse-Thue-Folge selbstähnlich ist, das heißt streichen wir jede zweite Ziffer, so erhalten wir dieselbe Folge:
$0\cancel{1}1\cancel{0}1\cancel{0}0\cancel{1}1\cancel{0}0\cancel{1}0\cancel{1}1\cancel{0}1\cancel{0}0\cancel{1}0\cancel{1}1\cancel{0}0\cancel{1}1\cancel{0}1\cancel{0}0\cancel{1} \ldots = 0110100110010110 \ldots$
Es ist nicht so schwer, zu verstehen, woran das liegt: Wir wissen, es gilt $S(T) = T$. Jetzt greifen wir einmal ein beliebiges Element heraus, zum Beispiel $x_7 = 1$. Wenn wir S auf die Morse-Thue-Folge anwenden, wird diese 1 durch 10 ersetzt und davor stehen dann 14 neue Ziffern $x_0, \ldots, x_{13}$. Also ist $x_7 = x_{14}$. Wir veranschaulichen das:

$$\begin{array}{lcl} T & = & 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ldots \\ S(T) & = & 0110100110010110\ldots \end{array}$$

Das letzte Element der oberen Zeile ist x_7, das vorletzte der unteren Zeile ist x_{14}. Das stimmt aber natürlich nicht nur für 7 und 14 sondern, wie wir sehen, ist die Ziffer in der oberen Reihe immer gleich der Ziffer, die darunter steht. Anders gesagt:

(3) $x_n = x_{2n}$

für jede Zahl $n \geq 0$. Die Ziffer an einer ungeraden Stelle der unteren Reihe ist immer gerade das Komplement der Ziffer davor, also

(4) $x_{2n+1} = 1 - x_{2n}$.

Aber $x_n = x_{2n}$ heißt gerade, dass, wenn wir jede zweite Ziffer streichen, dann die Folge wieder entsteht. Wir haben also die Selbstähnlichkeit von T gezeigt.

Eine Folge, bei der sich eine bestimmte Folge von Ziffern immer wiederholen, heißt periodisch. Zum Beispiel ist die Folge 001001001001001001001 ... periodisch mit Periodenlänge 3, weil 001 immer wieder vorkommt und 001 die Länge 3 hat. Die Folge T hat *keinerlei Periode*. Das sieht man so: Wenn eine Folge $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ periodisch ist mit Periodenlänge $n + 1$, dann muss $a_n = a_{2n+1}$ gelten. Wegen der Formeln (3) und (4) ist x_{2n+1} aber immer verschieden von x_n. Damit hat T für kein n die Periodenlänge $n + 1$, ist also nicht periodisch. Man kann sogar noch mehr beweisen: Nie kommt 000 oder 111 vor (das ist nicht schwer, versuche es). Aber auch keine andere Folge von Nullen und Einsen kommt drei Mal hintereinander vor, z.B. 001 001 001 kann nicht vorkommen.

Wenn Ihr die Darstellung von Zahlen im Binärsystem kennt, dann können wir noch eine dritte Methode betrachten, mit der wir die Morse-Thue-Folge bekommen können: Wir schreiben die natürlichen Zahlen aufsteigend im Binärsystem untereinander und immer wenn die Anzahl der Einsen, also die Quersumme, ungerade ist, schreiben wir eine 1 und eine 0 sonst:

Zahl dezimal	Zahl im Binärsystem	Anzahl Einsen gerade/ungerade
0	0	0
1	1	1
2	10	1
3	11	0
4	100	1
5	101	0
6	110	0
7	111	1
8	1000	1
9	1001	0
10	1010	0
...	...	...

Wir sehen, die dritte Spalte ergibt wieder die Folge T. Das liegt daran, dass wir alle Binärzahlen mit genau $n+1$ Ziffern aus allen Binärzahlen mit höchstens n Ziffern bekommen, indem wir eine 1 und möglicherweise ein paar Nullen davor schreiben. Wir betrachten das am Beispiel $n = 3$:

höchstens 3-stellige Zahl	alle 4-stelligen Zahlen
0	1000
1	1001
10	1010
11	1011
100	1100
101	1101
110	1110
111	1111

Die rechte Spalte hat immer eine 1 mehr als die zugehörige Zahl in der linken Spalte und hat also eine 1 (ungerade viele Einser) da, wo vorne eine 0 (gerade viele Einser) steht und umgekehrt. Deswegen gilt $x_8 = 1 - x_0$, $x_9 = 1 - x_1, \dots, x_{15} = 1 - x_7$. Das entspricht gerade den Gleichungen (2),also der ersten Methode zur Erzeugung von T.

Die Formeln (3) und (4) erlauben uns, in einem CAS* sehr einfach die Morse-Thue-Folge zu berechnen. Hier zum Beispiel in Mathematica:

* Computer Algebra System

```
x[0] := 0;
x[n_]:= x[n/2]      /; EvenQ[n];
x[n_]:= 1-x[(n-1)/2];
```

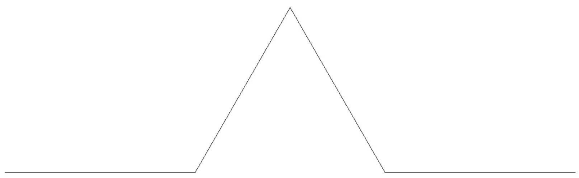
Die zweite Zeile besagt, dass man bei geradem n den Wert von x_n bekommt, indem man $x_{\frac{n}{2}}$ nimmt, und die dritte Zeile erhält man aus $x_{2n+1} = 1 - x_n$. Sie wird dann nur noch für ungerade n benutzt.

Eine letzte interessante Eigenschaft der Morse-Thue-Folge, die wir hier behandeln wollen, ist ihr Zusammenhang mit Fraktalen. Einen solchen Zusammenhang haben wir oben schon gesehen, die Morse-Thue-Folge ist ja selbstähnlich. Man weiß aber außerdem, dass die Morse-Thue-Folge, passend interpretiert, eine Näherung an die Kochkurve beschreibt (Informationen über die Kochkurve findest du im Internet). Ich möchte hier eine Methode beschreiben, die aus der Morse-Thue-Folge direkt die n-ten Näherungen an die Koch-Kurve gemäß geometrischer Konstruktion erzeugt (Hartmut Wolf, private Mitteilung).

Man zeichne nach folgender Vorschrift beginnend mit $i = 1$:

1. gehe einen Schritt nach vorne
2. a.) ist $x_i \neq x_{i-1}$ so drehe deine Richtung um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn
   b.) ist $x_i = x_{i-1}$ so drehe deine Richtung um $120°$ im Uhrzeigersinn
3. Beginne wieder mit Schritt 1

Wenn Du das für die ersten 4 Glieder der Morse-Thue-Folge machst, also für 0110, erhältst du die Abbildung.



Die bekannte erste Näherung an die Kochkurve.

Wenn man die Zeichenvorschrift für die ersten 4^k Glieder der Morse-Thue-Folge befolgt, dann erhält man den k-ten Iterationsschritt an die Kochkurve. Das liegt an der Gleichung (1), wie man sich mit etwas Arbeit überlegen kann. Da wir die Punkte bereits in Mathematica haben, lassen wir Mathematica auch gleich die Kurve zeichnen:

```
dMat = (1/2) * {{1, -Sqrt[3]}, {Sqrt[3], 1}};
drehelinks[l_] := dMat.l
```

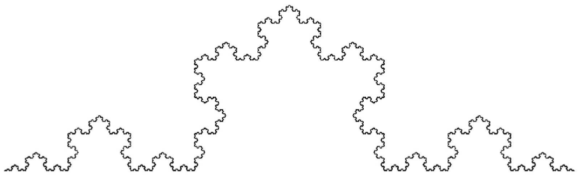
```
dMat2 = -dMat; dreherechts[l_] := dMat2.l

p={0.0,0.0}; v={1.0,0.0}; koch={p}; k=8;
For[i = 1, i <= 4^k, i++,
  koch={koch, p = p + v};
  If[x[i] == x[i - 1], v = dreherechts[v], v = drehelinks[v]]];
  koch = Partition[Flatten[koch], 2];
```

`drehelinks` dreht die Richtung des Vektors `v` um 60° gegen den Uhrzeigersinn. Hier braucht man ein bisschen lineare Algebra. Man wendet die Drehmatrix `dMat` als lineare Abbildung an und `dreherechts` um 120° im Uhrzeigersinn. Wir starten im Ursprung `p` in Richtung `v`. Das Programm wertet die ersten 4^8 Elemente der Morse-Thue-Folge aus. Der Befehl

```
Show[Graphics[Line[koch]], AspectRatio -> Automatic];
```

erzeugt dann die Abbildung.



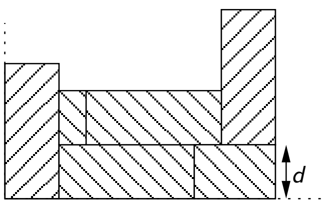
Man erhält die erste Abbildung mit dem selben Code, man muss nur `k=8;` durch `k=1;` ersetzen und für andere k-Werte erhält man alle anderen Stufen.

Die besondere Aufgabe

Der Bretterboden

von Wolfgang J. Bühler

Robert hat auf dem Dachboden ein Paket Bretter der Breite d gefunden und will damit den Boden eines rechteckigen Zimmers mit Seiten a und b belegen. Dabei sollen die Seiten jedes einzelnen Brettes parallel zu den Rechtecksseiten liegen. Die Bretter dürfen beliebig gekürzt werden, Längsschnitte sind nicht erlaubt. Ein möglicher Anfang wäre rechts abgebildet.

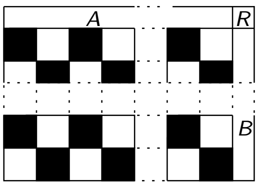


Lässt sich das immer so machen, dass das Zimmer ohne Rest bedeckt wird?

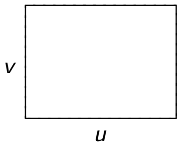
Lösung:

Dies ist nur dann möglich, wenn a oder b ein ganzzahliges Vielfaches von d ist.

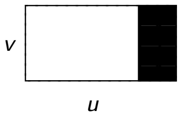
Um dies zu begründen, wollen wir zunächst die Lösung eines anderen Problems beschreiben, welches sicher viele von Euch kennen. Von einem Schachbrett seien zwei diagonal gegenüberliegende Felder entfernt. Lässt sich der Rest dann mit 31 Dominosteinen (der Größe von jeweils zwei Feldern) restlos überdecken? Dies ist deshalb nicht möglich, weil jeder Dominostein zwei Felder verschiedener Farbe hat, die entfernten Felder aber gleichfarbig sind. Wir müssten also 30 weiße und 32 schwarze oder 32 weiße und 30 schwarze Felder überdecken.
Die Erinnerung hieran brachte den Autor auf folgende Lösung des Bretterboden-Problems: Ist a oder b ein ganzzahliges Vielfaches von d, so ist die Belegung einfach möglich. Wenn nicht, so denken wir uns den Boden zunächst schachbrettartig gemustert, mit Feldern der Seitenlänge $\frac{d}{2}$ beginnend in der linken unteren Ecke mit einem weißen Feld. Am rechten und am oberen Rand gibt es dann im Allgemeinen keine vollständigen Quadrate. Wir gehen nur bis zum letzten vollständigen schwarzen Feld nach rechts und weißen Feld nach oben und sehen, dass das innere Rechteck und die Randstreifen A und B ohne das Rechteck R gleich viel weiß wie schwarz haben.



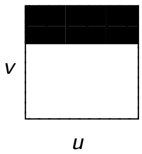
Für R gibt es folgende Möglichkeiten:

a) 

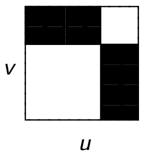
$u < \frac{d}{2}$, $v < \frac{d}{2}$ R ganz weiß

b) 

$\frac{d}{2} \leq u < d$, $v \leq \frac{d}{2}$ R mehr weiß als schwarz

c) 

$u \leq \frac{d}{2}$, $\frac{d}{2} \leq v < d$ R mehr weiß als schwarz

d) 

$\frac{d}{2} \leq u$, $v < d$ R ebenfalls mehr weiß

Legen wir aber ein Brett der Breite d auf das Schachbrettmuster, so überdeckt es immer gleich viel schwarze wie weiße Flächen. Wir können also das Rechteck so nicht überdecken.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Vogt, Ulrich: Zahlen, bitte! – Ein mathematisches Bilderbuch
Das mathematische Bilderbuch „Zahlen, bitte!“ ist in Zusammenarbeit mit dem Heinz Nixdorf Museums Forum Paderborn, dem größten Computermuseum der Welt, entstanden und fungierte als Begleitbuch für die im Jahr der Mathematik dort präsentierte Sonderausstellung mit dem Titel „Zahlen, bitte! Die wunderbare Welt von null bis unendlich“.
Das vorliegende Buch ist in seiner Aufmachung etwas völlig Ungewohntes und besticht auf seinen 256 Seiten vor allem durch die mehr als 1000 Fotos mit Zahlen in allen Lebenslagen. So findet man nicht nur Bilder zu Zahlen und dem Rechnen an sich, sondern auch Zahlentiere, Zahlen auf Hausnummern, im Sport, in der Mode, in der Kunst, und, und, und.
Dabei beschränkt sich der Fotograf und langjährige Mathematik- und Kunstlehrer Ulrich Vogt nicht nur darauf, Bilder abzudrucken, sondern ergänzt die Fotos durch spannende Hintergrundtexte, bei denen man auch als erfahrener Mathematiker immer wieder Neues entdeckt.
Außer den oben genannten Abbildungen von Zahlen geht es dabei auch um die klassischen Themen wie Primzahlen, Pi, den Goldenen Schnitt, Fibonacci und Pentagramme, aber auch um verschiedene Würfel und mathematische Zaubereien, die durch die vielen Fotos plastisch und anschaulich werden. Einen besonderen Höhepunkt findet man mit dem Kapitel „Zahlen mit Geschichte(n)“ am Ende des Buches. Dort werden Fotos der Erbauungsdaten von Häusern aus den Jahren von 1492 bis 2005 mit entsprechenden (mathematik-)historischen Begebenheiten verknüpft.
Fazit:
Ein wirklich schönes Text- und Bilderbuch, das man immer wieder gerne zur Hand nehmen und in dem man immer wieder gerne blättern wird!
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Vogt, Ulrich: Zahlen, bitte! - Ein mathematisches Bilderbuch. UVO Verlag 2009, ISBN 978-3-00-027080-2, gebunden 256 Seiten, 27,50 €

Art des Buches:	Sach- und Bilderbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 11 Jahren

Die Ecke für den Computer-Fan

Eine Folge mit ganzzahligen Gliedern?

Die Zahlenfolge n_0, n_1, n_2, ... sei folgendermaßen definiert:

$$n_0 = 1,\ n_1 = \frac{1+n_0^2}{1},\ n_2 = \frac{1+n_0^2+n_1^2}{2}$$

und für $i \geq 3$:

$$n_i = \frac{1+n_0^2+n_1^2+\ldots+n_{i-1}^2}{i}.$$

Formal handelt es sich um Bruchzahlen; beim Ausrechnen der ersten zehn (und mehr) Glieder zeigt sich jedoch, dass diese ganzzahlig sind. Untersuche, ob es in der Folge wirklich nur ganze Zahlen gibt. (nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2010 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 99

Die Gaukler-Folge

Für eine reelle Zahl r bezeichne $\lfloor r \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq r$. Dann sei für jede natürliche Zahl n der Operator G so definiert:

$$G: \quad n \xrightarrow{G} \begin{cases} \lfloor \sqrt{n} \rfloor & \text{, falls } n \text{ gerade,} \\ \lfloor \sqrt{n^3} \rfloor & \text{, falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Eine Folge n_0, n_1, n_2, ... heißt *Gaukler-Folge* (nach ihrem englischen Namen „juggler's sequence"), wenn sie durch Iteration des Operators G entsteht, wenn also: $n_0 \xrightarrow{G} n_1 \xrightarrow{G} n_2 \xrightarrow{G} \ldots$ gilt.

Beispiel: $3 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 11 \xrightarrow{G} 36 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 1$, kurz: $3 \xrightarrow{G^6} 1$.

Wegen $1 \xrightarrow{G^m} 1$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$, heißt 1 ein *Attraktor* der Gaukler-Folge mit Startzahl 3.

Bestimme die Attraktoren der Gaukler-Folgen, deren Startzahlen $n_0 = 1, 2, 3, 4, \ldots, 50$ sind, sowie die Anzahl der Iterationen, bis der Attraktor erstmalig erreicht wird.

a) Zu welcher Vermutung gelangst du?

b) Wie verändern sich die Verhältnisse, wenn in der Definition von G die Rollen von „gerade" und „ungerade" vertauscht werden, wenn wir also den Operator H mit

$$H: \quad n \xrightarrow{H} \begin{cases} \lfloor\sqrt{n^3}\rfloor & \text{, falls } n \text{ gerade,} \\ \lfloor\sqrt{n}\rfloor & \text{, falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und seine iterative Wirkung auf die Startzahlen $n_0 = 1, 2, 3, 4, \ldots, 50$ betrachten? (H.F.)

Ergebnisse:

Mit dieser Aufgabe befasst haben sich Louis Ressel (Friedrich-List-Gymnasium, Reutlingen) und Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf). Dieser schrieb: „Ich habe die Gaukler-Folge mit einem Visual Basic-Programm untersucht. Der einzige Fixpunkt ist offenbar 1. Bei Startwerten bis 200 ist 1 auch stets der Attraktor, oder es kam zu einem Speicherüberlauf, weil eine Zahl > 2 Milliarden vorkam. Die Anzahl der Iterationen, bis es zum Attraktor kam, war immer weniger als 30.

Ähnliches gilt auch für die variierte Gauklerfolge [Teil b)], nur dass es hier zwei Fixpunkte, 1 und 2, gibt und beide auch als Attraktoren vorkommen.

Ein schönes Beispiel für eine Iteration mit der ursprünglichen Definition ist:

$175 \to 2315 \to 111384 \to 333 \to 6076 \to 77 \to 675 \to 17537 \to 2322378 \to 1523 \to 59436 \to 243 \to 3787 \to 233046 \to 482 \to 21 \to 96 \to 9 \to 27 \to 140 \to 11 \to 36 \to 6 \to 2 \to 1$ mit 24 Schritten.

Vermutlich sind die jeweiligen Fixpunkte auch immer die einzigen Attraktoren, es gibt wohl keine zyklischen Attraktoren.“

Auch Louis Ressel hat mit seinem Programm in $C\#$ für alle Startzahlen von 1 bis 50 den Attraktor 1 für die eigentliche Gaukler-Folge ausgemacht, wobei die Zahl der Iterationen 14 nicht überschreitet.

Anmerkung: Unter den Zahlen unterhalb 200 benötigt der Gaukler-Operator bei 193 die höchste Zahl an Iterationen bis zum Attraktor 1, nämlich 73.

Was wir über den zehndimensionalen Raum wissen

von Valentin Blomer

Wie viel oder wenig man mit Mathematik am Hut haben mag, fast jedermann kennt den Satz von Pythagoras oder hat zumindest schon mal von ihm gehört. Er klingt ja auch so schön griffig: $a^2 + b^2 = c^2$, wobei man dabei auch sagen sollte, was a, b und c sind: die Längen der beiden Katheten und der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck. Zum Beispiel sehen wir damit, dass die Länge der Strecke zwischen zwei gegebenen Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ in der x, y-Ebene gerade $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ beträgt.

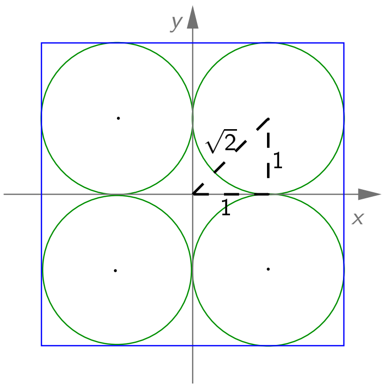
Was ist der Abstand zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ im dreidimensionalen Raum? Dazu betrachten wir den Hilfspunkt $Q = (x_2, y_2, z_1)$. In der Ebene $z = z_1$ sehen wir, dass der Abstand von P_1 und Q gerade $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ beträgt. Der Abstand von Q zu P_2 ist aber offensichtlich $|z_2 - z_1|$. Nun wenden wir den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck P_1QP_2 an. Der Abstand von P_1 zu P_2 ist dem zur Folge $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Es ist nun klar, wie man fortfährt. Sind im n-dimensionalen Raum zwei Punkte $P_1 = (v_1, \dots, v_n)$ und $P_2 = (w_1, \dots, w_n)$ gegeben, so folgt durch sukzessive Anwendung des Satzes von Pythagoras

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + \dots + (w_n - v_n)^2}.$$

Natürlich tun wir uns für $n > 3$ mit der Anschauung hier ein bisschen schwer, und wie schwer wir uns tun, zeigt das folgende Beispiel.

Im n-dimensionalen Raum betrachten wir einen Hyperwürfel der Kantenlänge 4, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Der Hyperwürfel hat also die 2^n Eckpunkte $(\pm 2, \pm 2, \dots, \pm 2) \in \mathbb{R}^n$ und ist zum Beispiel für $n = 2$ einfach ein Quadrat. In jede der 2^n Ecken des Hyperwürfels passt eine Hyperkugel vom Radius 1; deren Mittelpunkte sind die 2^n Punkte $(\pm 1, \dots, \pm 1)$.



Diese Hyperkugeln berühren sich gerade, und sie berühren die Außen(hyper)-flächen des Hyperwürfels. Aus obiger Gleichung folgt, dass der Abstand des Mittelpunkts einer solchen Hyperkugel zum Koordinatenursprung $\sqrt{1 + 1 + \dots + 1} = \sqrt{n}$ beträgt.

Nun legen wir in die Mitte dieser Figur eine weitere Hyperkugel. Der Mittelpunkt ist der Koordinatenursprung und der Radius ist $\sqrt{n} - 1$. Auf diese Weise berührt die innere Hyperkugel gerade alle 2^n äußeren Hyperkugeln. Aber jetzt passiert etwas Merkwürdiges: Was ist der Abstand vom Koordinatenursprung zum Rand des Hyperwürfels? Da die Kantenlänge des Hyperwürfels 4 ist, hat dieser Abstand die Länge 2. Ist $n \geq 10$, so ist dieser Abstand kürzer als der Radius $\sqrt{n} - 1$ der inneren Hyperkugel. Mit anderen Worten, die innere Hyperkugel durchdringt den Rand des Hyperwürfels. Kaum vorstellbar, aber wahr. Was man alles machen könnte, wenn man 10 Dimensionen zur Verfügung hätte...

Hättest Du es gewusst?
Goodstein-Folgen sind Nullfolgen – wirklich?
von Hartwig Fuchs

Ein notwendiger Vorbericht

Seit den Zeiten der alten Griechen sind die Mathematiker damit beschäftigt, vom mathematisch Bekannten mit Hilfe der Logik immer wieder ins Unbekannte, Unerforschte vorzudringen. Sie waren dabei unglaublich erfolgreich. Und jede neue Erkenntnis diente ihnen als Bestätigung dafür, dass sie auf dem richtigen Wege waren; niemand stellte den mathematischen Fortschritt in Frage – bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts.
Damals begannen sich Zweifel zu regen, wohl auch deshalb, weil Bertrand Russel[1] in dem von Gottlob Frege[2] 1879 veröffentlichten wichtigen Buch „Begriffsschrift", welches die von ihm entwickelte und heute verbindliche Logik enthält, einen Widerspruch entdeckte – eine Katastrophe auch für die Mathematik.
Als daher die Mathematiker ihren Blick zurück auf die Grundlagen ihrer Wissenschaft richteten, begannen sie sich zu fragen:
Ist das Fundament, auf dem das gewaltige Gebäude der Mathematik ruht, tatsächlich so sicher, wie sie bisher stillschweigend angenommen hatten?
Zwei Fakten beunruhigten sie: Von den ersten Grundannahmen („Axiomen"), von denen aus jede mathematische Theorie ihren Ausgang nimmt, war weder gesichert, dass sie keine Widersprüche produzieren, das heißt: Dass man mit ihnen nicht eine Aussage und zugleich deren Negation ableiten kann („Widerspruchsfreiheit") – noch war bekannt, ob mit ihnen jede wahre Aussage der betrachteten Theorie beweisbar ist („Vollständigkeit").
Damit wurde die Forderung laut, es müsse die Mathematik insgesamt auf einer unbezweifelbaren Basis neu aufgebaut werden.

Den folgenreichsten Vorschlag, der eine Erfüllung dieser Forderungen versprach, machte David Hilbert[3] mit seiner „Beweistheorie", die jedes mathematische Gebiet einer zweifachen Prozedur unterwerfen sollte: Formalisierung und Axiomatisierung. Damit ist gemeint:

> Jede Theorie müsse gänzlich in einer Formelsprache formuliert sein, damit so die Unklarheiten, Mehrdeutigkeiten und Ähnliches vermieden werden, die sich beim Gebrauch der Umgangssprache unbemerkt einschleichen konnten; sodann sollte sie allein aus einem vorgegebenen Bestand von allgemein unbestrittenen Axiomen mit finiten logischen Schlussregeln entwickelt werden.

---

1 Bertrand Russel, 1872-1970: Englischer Philosoph, Logiker und Mathematiker
2 Gottlob Frege, 1848-1925: Bedeutender Logiker der modernen Zeit
3 David Hilbert: 1862-1943 – einer der universellsten Mathematiker seiner Zeit

Hilbert hoffte, auf diese Weise Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit letztendlich der gesamten Mathematik begünden zu können.

Die treibende Kraft bei der Verwirklichung seines Programms war Hilbert selbst. Aber es gelang ihm auch, einige der besten Mathematiker und Logiker seiner Zeit für eine Mitabeit zu gewinnen – darunter den extrem begabten jungen Österreicher Kurt Gödel[4].

Ein Satz von Gödel

Einen ersten vielversprechenden Beitrag zu Hilberts Programm leistete Gödel mit seiner Dissertation (1930), in der er die Vollständigkeit eines wichtigen Teils der Logik bewies. Aber bereits im nächsten Jahr machte er mit einer weiteren Arbeit jede Hoffnung zunichte, dass das Ziel der Beweistheorie erreichbar sei. Denn er zeigte mit seinem „Ersten Unvollständigkeitsatz“:

> Aus einem widerspruchsfreien Axiomensystem der Arithmetik[5] sind niemals alle im Bereich der natürlichen Zahlen wahren Aussagen beweisbar.

Mit seinem Unvollständigkeitssatz konnte er für eine solche Arithmetik sogar herleiten, dass ihre Widerspruchsfreiheit zu den in ihr nicht beweisbaren Aussagen zählt („zweiter Unvollständigkeitssatz“).

Die Goodstein-Folgen

Man wird sich fragen, wie denn wohl eine „wahre aber unbeweisbare“ arithmetische Aussage aussieht, deren Existenz durch Gödels Satz gesichert ist. Gödel selbst konstruierte eine solche Aussage – aber dafür benutzte er eine komplexe, sogar manchen Profi abschreckende mathematische Hochtechnologie. Auch Beispiele, die von anderen angegeben wurden, sind spitzfindig und nicht immer einfach nachvollziehbar.
Wir wollen deshalb nun eine elementare arithmetische Aussage beschreiben, die die Gödel-Eigenschaft „wahr aber nicht beweisbar“ besitzt.

Vorweg: Jede natürliche Zahl $m \geq 0$ hat in der Basis 10 eine Darstellung der Form $m = a_1 10^{b_1} + a_2 10^{b_2} + \ldots + a_r 10^{b_r}$, wobei $0 \leq a_i < 10$ und $b_1 > b_2 > \ldots > b_r$, $r \geq 1$ gilt. Wenn wir hier nun jeden Exponenten b_i durch seine Normalform zur Basis 10 ersetzen und in all' diesen Normalformen erneut jeden Exponenten in der Basis 10 schreiben ... und so weiter, dann werden wir in einer endlichen Anzahl Wiederholungen dieser Prozedur einen Ausdruck für von m erhalten (die

---

[4] Kurt Gödel: 1906-1978 – bedeutender Logiker des 20. Jahrhunderts

[5] Die am häufigsten benutzte Axiomatisierung der Arithmetik stammt von Giuseppe Peano (1858-1939):

$n \in \mathbb{N}$ bedeutet: n ist eine natürliche Zahl; n^+ sei der Nachfolger von n.

(1) $0 \in \mathbb{N}$

(2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$

(3) $n, m \in \mathbb{N}$ und $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$

(4) Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^+ = 0$

(5) Es gilt das Induktionsprinzip

Mit Hilfe von (5) werden die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen definiert vollständige Normalform zur Basis 10 genannt), in dem keine Zahl > 10 mehr vorkommt. So etwa hat $m = 12 \cdot 10^{508} + 5 \cdot 18^2$ die vollständige Normalform zur Basis 10: $m = 10^{5\cdot 10^2+9} + 2 \cdot 10^{5\cdot 10^2+8} + 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$.

Ganz entsprechend wird die Normalform einer Zahl m zur Basis n, $n \geq 2$, erklärt. Danach hat $m = 1219$ die Normalform $1219 = 3^{2\cdot 3} + 2 \cdot 3^{3+2} + 3 + 1$ zur Basis 3, weil $1219 = 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 3 + 1$ ist.

Damit lassen sich nun die von Goodstein[6] entdeckten Folgen[7] definieren:

Definition der Goodstein-Folgen

$g_1(m) = m$ und $g_{n+1}(m) = 0$, falls $g_n(m) = 0$ ist.Im Falle $g_n(m) \neq 0$ erhält man $g_{n+1}(m)$ so: Schreibe $g_n(m)$ in die Normalform zur Basis $n+1$; ersetze dann jedes Vorkommen von $n+1$ durch $n+2$ und subtrahiere zuletzt 1.

Beispiele:

G_3 :

$$\begin{aligned}
g_1(3) &= 3 && = 2+1 \\
g_2(3) &= 3+1-1 && = 3 \\
g_3(3) &= 4-1 && = 3 \\
g_4(3) &= 3-1 && = 2 \\
g_5(3) &= 2-1 && = 1 \\
g_6(3) &= 1-1 && = 0 \\
g_7(3) &= 0 && \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bereits für $m = 4$ bekommen wir es wegen $g_1(4) = 2^2$ und $g_2(4) = 3^3 - 1$ und so weiter, mit „Türmen“ der Form $(n+1)^{e_1^{e_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ zu tun, die für $g_N(m) = 0$ sukzessive abgebaut werden müssen. Wer dies ein mal konkret durchrechnet, stellt fest, dass der Abbau des ersten der drei Türme $3^2 + 3^2 + 3^2 (= g_2(4) + 1)$ von g_3 bis g_{24-2} dauert der des zweiten dann bis $g_{24\cdot 2^{24}-2}$ und schließlich der des dritten Turmes bis g_N, wobei $N = 24 \cdot 2^{24} \cdot 2^{24\cdot 2^{24}} - 2 \approx 6,\ 9 \cdot 10^{121210694}$; also eine 121210695-stellige Zahl! (Man berechne den 10er Logarithmus von $N+2$)

Für $m = 20$ entstehen Türme noch größerer Höhe:

---

[6] Reuben Louis Goodstein: 1912-1985 – englischer Logiker

[7] On the restricted ordinal theorem; J. Symb. Logic 9, p. 33-47 (1944)

G_{20} :

$$
\begin{aligned}
g_1(20) &= 2^{2^2} + 2^2 && = 20 \\
g_2(20) &= 3^{3^3} + 3^3 - 1 && \approx 8 \cdot 10^{12} \\
g_3(20) &= 4^{4^4} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2 - 1 && \approx 10^{154} \\
g_4(20) &= 5^{5^5} + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 - 1 && \approx 10^{2184} \\
g_5(20) &= 6^{6^6} + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 - 1 && \approx 10^{36305} \\
g_6(20) &= 7^{7^7} + 2 \cdot 7^2 + 7 + 5 - 1 && \approx 10^{695974} \\
g_7(20) &= 8^{8^8} + 2 \cdot 8^2 + 8 + 4 - 1 && \approx 10^{15151336} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ergänzt man die obige Auflistung von Gliedern der Folge bis hin zu $g_{22}(20)$, so findet man: $g_{21}(20) = 22^{22^{22}} + 2 \cdot 22^2$ und in $g_{21}(20)$ kommt kein linearer Term mehr vor.
Weiter ist $g_{22}(20) = 23^{23^{23}} + 2 \cdot 23^2 - 1 = ... + 23^2 + (23^2 - 1) = ... + 23^2 + 22 \cdot 23 + 22$. Es gibt dann ein Folgeglied $g_{k-1}(20) = k^{k^k} + k^2$ ohne linearen Term. Dann aber enthält $g_k(20) = ... + (k+1)^2 - 1 = ... + k(k+1) + k$ keinen quadratischen Term $(k+1)^2$ mehr,dafür nun lineare. Und so wird das „Anknabbern“ eines nächsthöheren Turmes jeweils neue Türme erzeugen, die sich durch die Rechenoperationen zu „Burgen aus Türmen“ gruppieren, und man die Übersicht verliert, obwohl sich für moderate Zahlen mit viel Fleiß jeweils ein N mit $g_N(m) = 0$ findet. Ob dies aber immer so ist?
Genau das hat Goodstein beantwortet:

Satz von Goodstein (1944)

In jeder Goodstein-Folge G_m gibt es ein Glied $g_N(m)$ mit $g_N(m) = 0$, so dass auch $g_{N+i}(m) = 0$ ist, für jedes $i \geq 1$.

Der Satz von Goodstein macht die Folgen G_m zu ganz bemerkenswerten arithmetischen Objekten.

- Da ist einmal der in jedem Glied $g_n(m)$, $n \geq 2$, einer jeden Folge G_m vorkommende, völlig harmlos, ja unbedeutend erscheinende Term -1, der eine selbst dem erfahrensten Zahlenjongleur unvorstellbar gewaltige Macht ausübt, denn er vermag letztendlich jede noch so hohe Potenz „auszulöschen“.
- Ein zweiter Aspekt, der die Folge G_m noch viel interessanter macht, ergibt sich aus dem Folgenden:

Goodstein konnte seinen Satz nur dadurch beweisen, dass er – das Gebiet der Arithmetik verlassend – ein mächtigeres Werkzeug – die Ordinalzahlen – verwendete.

Spätere Versuche, den Satz mit rein arithmetischen Mitteln herzuleiten, scheiterten stets. Den Grund dafür fanden Laurie Kirby und Jeff Paris. Sie zeigten 1982: Goodsteins Satz kann nicht in der allgemein üblichen axiomatischen Peano-Arithmetik (vergleiche Fußnote 5) bewiesen werden. Nun ist aber der Satz von Goodstein sicher eine Aussage aus den Peano-Axiomen – zudem ist sie wahr, aber nicht beweisbar innerhalb der Peano-Axiome.
Die Goodstein-Folgen G_m bilden somit die Basis für die Konstruktion einer Gödelaussage mit der Eigenschaft „wahr aber unbeweisbar", von denen im „Ersten Unvollständigkeitssatz" von Gödel[8] die Rede ist!

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 100

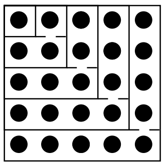
Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Beweis ohne Worte

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1^2 \\ 1+2+1 & = & 2^2 \\ 1+2+3+2+1 & = & 3^2 \\ 1+2+3+4+3+2+1 & = & 4^2 \\ & \vdots & \end{array}$$

Die neben angedeuteten unendlich vielen Gleichungen sind sämtlich richtig. Zeige dies mit Hilfe der untenstehenden Figur.

(H.F.)



Lösung:
Beweis ohne Worte für die Gleichung $1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 5^2$.

Bruchstriche

Füge zwischen den folgenden sechs Zeilen jeweils einen Bruchstrich (erster, zweiter, dritter, ... Ordnung) so hinzu, dass der entstandene Bruch $\frac{1}{3}$ ergibt.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 5\cdot 7 \\ 7^2 \\ 3\cdot 7 \\ 5 \\ 7 \end{array}$$

Was geschieht, wenn man in jeder Zeile die Zahl 7 durch eine Variable $a \neq 0$ ersetzt?

(Shaima'a Doma, Kairo)

[8] Accessible independena results in Peano Artithmetic, Bull. London Math. Soc. 14, p. 285-293 (1982)

Lösung:

$$\frac{\dfrac{7}{\left(\dfrac{35}{49}\right)}}{\dfrac{21}{\left(\dfrac{5}{7}\right)}} = \frac{1}{3} = \frac{\dfrac{a}{\left(\dfrac{5a}{a^2}\right)}}{\dfrac{3a}{\left(\dfrac{5}{a}\right)}} \text{ für } a \neq 0.$$

Ein Ziffernproblem

Welches ist die Einer-Ziffer der Zahl $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 2009^2$? (H.F.)

Lösung:

Mit $[n]$ bezeichnen wir die Einerziffer der natürlichen Zahl n. Damit ist

$$\begin{aligned}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2] &= [11^2 + 12^2 + 13^2 + \ldots + 20^2] = \ldots \\ &= [1991^2 + 1992^2 + 1993^2 + \ldots + 2000^2] \\ &= [2001^2 + 2002^2 + \ldots + 2009^2] \\ &= 5\end{aligned}$$

und somit ist

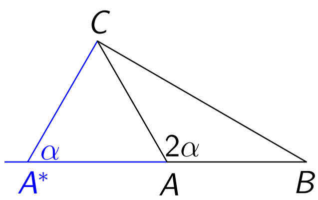
$$[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 2009^2] = [201 \cdot 5] = 5.$$

Alternativ ergibt sich mit der Formel $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für $n = 2009$:

$$\begin{aligned}\left[2001^2 + 2002^2 + \ldots + 2009^2\right] &= \left[\frac{1}{6} \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot 4019\right] \\ &= [2009 \cdot 335 \cdot 4019] \\ &= 5.\end{aligned}$$

Im Übrigen ist $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 2009^2 = 2\,704\,847\,285$.

Winkel, Strecken, Punkte



Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $|AB| = |AC|$ und dem Innenwinkel 2α bei A. Auf der Verlängerung von AB sei der Punkt A^* so festgelegt, dass $|\sphericalangle AA^*C| = \alpha$ ist. Zeige:

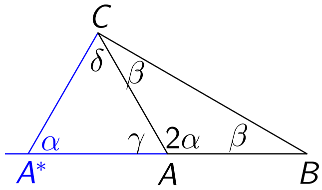
a) Der Winkel $\sphericalangle A^*CB$ ist $90°$ groß.

b) Die Strecken AB und AA^* sind gleich lang.

c) Der Punkt A ist Mittelpunkt des Umkreises vom Dreieck $\triangle A^*BC$.

(H.F.)

Lösung:



a) Im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ sind die Innenwinkel bei B und C gleich groß – sie seien β. Also ist

(1) $2\alpha + 2\beta = 180°$ oder $\alpha + \beta = 90°$.

Im Dreieck $\triangle A^*AC$ gilt für den Winkel γ bei A: $2\alpha + \gamma = 180°$, sodass

(2) $\gamma = 2\beta$ wegen (1) ist.

Ferner ist, wenn δ der Innenwinkel des Dreiecks $\triangle A^*AC$ bei C ist, $\alpha + \delta + \gamma = (\alpha + \delta) + 2\beta = 180°$. Mit (1) folgt dann, dass $\alpha + \delta = 2\alpha$ ist, also dass

(3) $\delta = \alpha$ gilt.

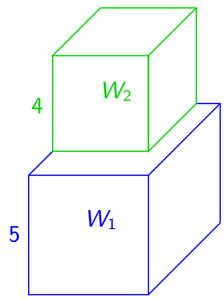
Für den Winkel $\delta + \beta$ bei C gilt daher mit (3) und mit (1): $\delta + \beta = \alpha + \beta = 90°$

b) Aus (3) folgt, dass das Dreieck $\triangle A^*AC$ gleichschenklig mit $|A^*A| = |AC|$ ist; wegen $|AC| = |AB|$ ist also $|A^*A| = |AB|$.

c) Aus b) folgt, dass die Punkte A^*, B und C gleich weit vom Punkt A entfernt sind. Damit ist A der Mittelpunkt des Umkreises vom Dreieck $\triangle A^*BC$.

Würfelverdopplung?

Von den beiden Würfeln W_1 und W_2 hat der größere W_1 die Kantenlänge 5 und der kleinere W_2 die Kantenlänge 4 – vergleiche die Figur, welche die Größenverhältnisse von W_1 und W_2 verkleinert zeigt.
Ist das Volumen des Würfels W_1 ungefähr 1,3- oder 1,6- oder 2-mal so groß wie das Volumen des Würfels W_2? (H.F.)



Lösung:
Das Volumen V_1 von W_1 ist $5^3 = 125$; das Volumen V_2 von W_2 ist $4^3 = 64$. Daher gilt: $V_1 = 1{,}953125\ldots \cdot V_2$. Also ist $V_1 \approx 2 \cdot V_2$.

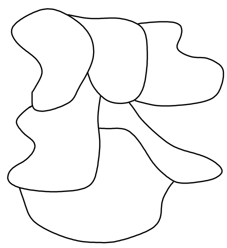
Vielfache von 17

Es seien m und n ganze Zahlen und $2m+3n$ sei ein Vielfaches von 17. Zum Beispiel für $m=20$ und $n=-2$ ist $2\cdot 20+3\cdot(-2)=2\cdot 17$.
Behauptung: Unter den genannten Voraussetzungen ist auch $9m+5n$ ein Vielfaches von 17. – Stimmt das? (H.F.)

Lösung:
Es gilt $9m+5n=17m-8m+17n-12n=17(m+n)-4\cdot(2m+3n)$.
Nach Voraussetzung ist $2m+3n$ ein Vielfaches von 17, also auch die Differenz auf der rechten Seite und somit auch $9m+5n$.

Ethnographisches Rätsel

In einer abgelegenen Urwaldregion leben die Stämme der At, der Bo, der Cmer, der Dio, der Ela und der Fu in jeweils einem Gebiet, dessen Grenzverlauf die nebenstehende Landkarte wiedergibt.
Ein in der Gegend forschender Ethnograph (Völkerkundler) fragt seinen einheimischen Begleiter, welcher Stamm in welchem Gebiet lebt. Dieser – ein Geheimniskrämer – informiert ihn so:

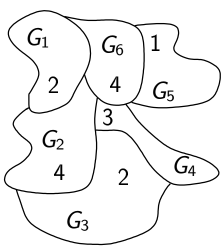


a) Die At und die Bo sind keine Nachbarn.
b) Die Cmer haben weniger Nachbarn als die Bo.
c) Die benachbarten Dio und At haben gleich viele Nachbarn.
d) Die Fu haben mehr Nachbarn als die Ela.

Zwei Stämme heißen benachbart, wenn ihre Stammesgebiet eine gemeinsame Grenze besitzen.

In welchen Gebieten leben also die At, Bo, Cmer, Dio, Ela und Fu? (H.F.)

Lösung:



Der Ethnograph bezeichnet zunächst die Gebiete mit $G_1, G_2, \dots, G_6$. Da in b) bis d) die Anzahl von Nachbarn eine Rolle spielt, trägt er in jedes Gebiet die Anzahl seiner angrenzenden Nachbargebiete ein (Nachbarschaftszahlen) und bezeichnet mit [At] die Anzahl der Nachbarn der At und so weiter.

Nun überlegt er so:
Da G_2 und G_6 die einzigen benachbarten Gebiete mit der gleichen Nachbarschaftszahl sind (G_1 und G_3 sind nicht benachbart), gilt wegen c):

$$\text{At}\in G_2, \text{Dio}\in G_6 \text{ oder } \text{At}\in G_6, \text{Dio}\in G_2.$$

Falls At$\in G_2$, dann wäre Bo$\in G_5$ wegen a). Folglich wäre [Bo] $=1$ im Widerspruch zu b). Also ist At$\notin G_2$.

Sei also jetzt At$\in G_6$ und damit Dio$\in G_2$. Aus a) ergibt sich: Bo$\in G_3$. Dann aber ist Cmer$\in G_5$ wegen b). Aus [Fu] $>$ [Ela] wegen d) folgt daher Fu$\in G_4$ und Ela$\in G_1$ und damit ist das ethnographische Problem gelöst.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Jede Aufgabe, die ich löste, wurde zu einer Regel, die später zur Lösung anderer Aufgaben diente.“

René Descartes*

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Neue Mathespielereien

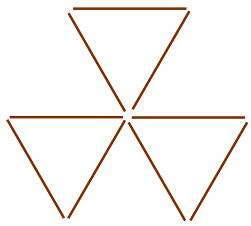
Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Wahr oder falsch?

Es sei Z das Produkt der ersten fünf Primzahlen. Dann ist $\frac{1}{5}Z$ die Anzahl der natürlichen Zahlen, die ≤ 2010 sind und die mindestens eine Ziffer 0 in ihrer Dezimaldarstellung haben. Trifft das zu? (H.F.)

Ein Streichholz-Problem

Kannst Du die neun Streichhölzer der Figur so anordnen, dass Du drei Vierecke erhältst? (gefunden H.F.)



Eine vollbefriedigende Erklärung?

Erich Bischoff, der Erforscher der Kabbalah*, hat im Vorwort seines Buches *Mystik und Magie der Zahlen* geschrieben: „Ich wenigstens kenne keine vollbefriedigende Erklärung dafür, warum jede ungerade Zahl (von 3 ab), mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest ergibt.“

Stimmt dieser Sachverhalt überhaupt? Dann liefere bitte eine „vollbefriedigende Erklärung“ in Form eines Beweises dafür, sonst gib ein Gegenbeispiel an. (MG)

* René Descartes: 1596-1650 – französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler.

* Die Kabbalah (auch Kabbala) ist die mystische Tradition des Judentums, begründet ca. 1.Jahrhundert n. Chr.

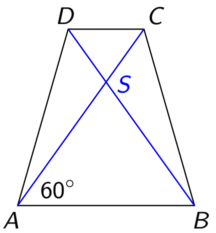
Dieters Digitaluhr

Dieters Uhr hat eine Digitalanzeige (24 Stunden). Sie geht $2\frac{1}{2}$-mal so schnell wie sie sollte. Wann zeigt sie zum ersten Mal wieder die korrekte Uhrzeit, wenn sie jetzt um 0.00 Uhr exakt gestellt wird? (WJB)

Bennies Bücher

Bennie steht vor dem Schaufenster einer Buchhandlung. Er überlegt: „Wenn ich dieses Buch zweimal kaufe, brauche ich genau so viele Euro dafür wie Cent für ein Buch und doppelt so viele Cent wie Euro für ein Buch.“
Wieviel kostet das Buch? (WJB)

Gleichseitige Dreiecke im Trapez



Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ sei S der Diagonalenschnittpunkt; ferner sei $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Dann sind die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ beide gleichseitig. Du siehst es – kannst Du es auch begründen? (H.F.)

Hinweis: $|\sphericalangle BAC|$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$.

Wiederherstellung einer Division

Rekonstruiere die Division, indem Du in der Figur jeden Stern $*$ durch eine Ziffer so ersetzt, dass eine richtige Division entsteht, bei der keine führende Ziffer eine Null ist. (H.F.)

$$\begin{array}{rcccccl}
 & * & * & * & * & : * \; * & = * \; * \\
- & & * & * & & & \\
\hline
 & & & 2 & * & & \\
 & & - & * & * & & \\
\hline
 & & & & 2 & &
\end{array}$$

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 987

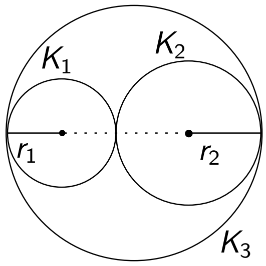
Löse die Gleichung

$$\sqrt{(x+2009)+(x-2009)+x\cdot 2009+x:2009}=2010$$

(H.F.)

Aufgabe 988: Umfänge

Ein Kreis K_1 mit dem Radius r_1 berührt einen zweiten Kreis K_2 mit dem Radius r_2 von außen. Die Vereinigungsfigur $K_1 \cup K_2$ berühre den Kreis K_3 von innen. Es hat den Anschein, als sei der Umfang der Figur $K_1 \cup K_2$ kleiner als der Umfang des Kreises K_3.
Stimmt das? (H.F.)



Aufgabe 989: Fundsache

Folgender Dialog stammt aus einem Internetchat:*

> (15:12:00) Flo: „Auf einer Wanderkarte im Maßstab 1:25000 haben zwei benachbarte 20-m-Höhenlinien einen Abstand von 6 mm.“ Wenn ich ein rechtwinkliges Dreieck zeichne, um den Anstiegswinkel zu berechnen, welche Seite ist dann die mit den 6 mm Abstand?
> (15:12:16) Frankie: ?
> (15:12:57) Flo: War heute in Mathematik zur Diskussion und unser Lehrer wusste es nicht, also dachte ich, du wüsstest es vielleicht.
> (15:13:16) Frankie: Der Mathematiklehrer wusste es nicht?! OMG!
> (15:14:45) Frankie: Wie kann man so was nicht wissen? Als Mathematiklehrer?
> (15:15:20) Flo: Der weiß auch die Formel für das Volumen einer Pyramide nicht aus dem Kopf, sondern guckt ins Tafelwerk.
> (15:15:41) Frankie: OMG!

Traurige Zustände – aber für Monoid-Löser sicher kein Problem. Deshalb die folgenden Aufgaben, um Flo und seinem Lehrer zu helfen:

a) Berechne den Steigungswinkel sowie die Steigung in Prozent.

b) Welche Strecke legt ein Wanderer auf dem Weg tatsächlich zurück?(MG)

* Es ist traurig aber wahr! Solche Mathematiklehrer sind allerdings sicher die Ausnahme.

Aufgabe 990: Wahr oder falsch?

Drei 1-€-Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Wurf drei gleiche Bilder – also dreimal „Adler" oder dreimal „Zahl" oben liegen?

Da nach dem Wurf stets zwei oder drei Münzen das gleiche Bild zeigen, entscheidet die dritte Münze, ob drei gleiche Bilder zu sehen sind oder nicht. Da es für das oben liegende Bild der dritten Münze nur zwei Möglichkeiten gibt, ist also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dafür, dass bei der dritten Münze das gleiche Bild oben liegt wie bei den beiden anderen. Also: Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zeigen alle drei Münzen das gleiche Bild.

Stimmt das? (H.F.)

Aufgabe 991: Ein symmetrisches Gleichungssystem

Bestimme alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems:

$$x + y + \frac{1}{z} = 3$$
$$y + z + \frac{1}{x} = 3$$
$$z + x + \frac{1}{y} = 3$$

(M. Mettler)

Aufgabe 992: Schranken für Zahlenfolge

Es sei (S_n) eine Folge, mit $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1}$, $n = 1, 2, 3, ...$

Zeige, dass (S_n) eine monoton steigende Zahlenfolge ist (das heißt, es gilt $S_n > S_{n-1}$ für alle n), für die $1 < S_n < 2$, mit $n = 1, 2, 3, ...$ gilt. (H.F.)

Aufgabe 993: Tagungslogo

Im März 2010 findet in München die gemeinsame Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik statt. Das Logo dieser Tagung kannst Du auf dem Bild sehen. In diesem Logo kannst Du eine Gerade und eine Parabel erkennen, deren Symmetrieachse in guter Näherung senkrecht steht.

a) Stelle die Funktionsgleichungen $f(x)$ der Parabel und $g(x)$ der Geraden auf und bestimme daraus den Schnittpunkt beider Graphen. Wähle hierzu auf den Achsen den Maßstab 1 LE = 1 cm.

b) Bei dem Gebäude, welches im Logo angedeutet ist, beträgt der Höhenunterschied zwischen Dach und Turmspitze etwa 41 m. Die Türme sind jeweils etwa 98,5 m hoch. Wie hoch wäre die Parabel, wenn sie wirklich so über das Gebäude gebaut würde?

c) *Zusatzfrage:* Kennst Du auch das Gebäude, welches im Logo angedeutet ist?

Mainzer Mathematik-Akademie
26. August – 29. August 2010

Das Institut für Mathematik der Universität Mainz veranstaltet vom 26. August bis zum 29. August 2010 einen Workshop der besonderen Art für alle Mathematik-Fans der Jahrgangsstufen 10–13.

In Fachvorträgen, Gruppen- und Projektarbeit mit anschließender Präsentation sollen Themen aus den Bereichen (wahlweise)

- Theorie der Knoten
- Platonische Körper in höheren Dimensionen
- (Thema wird noch bekannt gegeben)

mit Professoren der Universität Mainz bearbeitet werden.

Der Workshop findet im Institut für Mathematik statt; wohnen werden wir im Don Bosco Haus, mittags essen wir in der Mensa. Für die Unterbringung (Übernachtung, Frühstück, Abendessen) wird eine Eigenleistung von 40 Euro erhoben, den Restbetrag trägt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz. Anreise ist am Donnerstagabend, Abreise am Sonntagmittag.

Falls zur Beurlaubung vom Unterricht eine persönliche Einladung benötigt wird, können wir eine solche gerne zusenden.
Im nächsten Heft gibt es genauere Informationen zur *Mainzer Mathematik-Akademie* und den Link zum Anmeldeformular; Rückfragen unter:
`freunde@mathematik.uni-mainz.de`.

Gelöste Aufgaben aus Monoid 100
Klassen 8–13

Aufgabe 981: Wahr oder falsch?
Überprüfe, ob für jede positive Zahl n die Gleichungen

(1) $(8n+1)^2-(8n+2)^2-(8n+3)^2+(8n+4)^2=4$

(2) $(8n+1)^2-(8n+2)^2-(8n+3)^2+(8n+4)^2-(8n+5)^2+(8n+6)^2+(8n+7)^2-(8n+8)^2=0$

gelten oder nicht.

Lösung:
Ausmultiplizieren der Klammern ergibt:

(1) $(8n+1)^2-(8n+2)^2-(8n+3)^2+(8n+4)^2 = 64n^2+16n+1-64n^2-32n-4-64n^2-48n-9+64n^2+64n+16 = 4$

(2) $(8n+1)^2-(8n+2)^2-(8n+3)^2+(8n+4)^2-(8n+5)^2+(8n+6)^2+(8n+7)^2-(8n+8)^2 = 4-64n^2-80n-25+64n^2+96n+36+64n^2+112n+49-64n^2-128n-64 = 0$

Also treffen die Gleichungen für jede ganze Zahl n zu.

Aufgabe 982: Falsche Freunde (wie sicher ist die PIN?)
Fred, Harald und Julian haben ihrer Freundin Lydia die EC-Karte gestohlen und wollen damit an einem Bankautomaten Geld abheben. Die Karte ist mit einer vierstelligen „personal identification number" (PIN) gesichert. Nach drei Versuchen mit einer falschen PIN wird die Karte entzogen. Die drei wählen unabhängig voneinander je eine Kombination aus vier Ziffern, mit der sie es versuchen wollen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit P kommen sie an Geld?

Wie groß wird ihre Erfolgswahrscheinlichkeit, wenn sie folgende Information über Lydias PIN haben und berücksichtigen, nämlich die Kenntnis,

b) dass die PIN nur drei verschiedene Ziffern enthält?

c) dass je zwei Ziffern doppelt vorkommen?

d) dass eine Ziffer dreimal und eine Ziffer einmal vorkommt?

e) dass alle vier Ziffern gleich sind?

Wir nehmen dabei an, dass alle Ziffern „gleichberechtigt" sind (auch die 0). (WJB)

Lösung:
Die Karte wird eingezogen, wenn alle drei gewählten Zifferkombinationen falsch sind. Ist q die Wahrscheinlichkeit, die PIN nicht richtig zu raten, so ist also die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg gleich $P = 1-q^3$.

a) Es gibt 10^4 mögliche PINs, also ist $q = \frac{10^4-1}{10^4} = 1-10^{-4}$ und somit $P = 1-(1-10^{-4})^3 = 3\cdot10^{-4}-3\cdot(10^{-8})+10^{-12}$, also etwa $3\cdot10^{-4} = 0{,}0003$.

b) Für die doppelt vorkommende Ziffer haben wir 10 Möglichkeiten, danach für das weitere Paar $9\cdot\frac{8}{2}$ Möglichkeiten und $4\cdot3$ Möglichkeiten, dann die Ziffern anzuordnen, um eine PIN zu erzeugen. Also gilt jetzt $q = 1-\frac{1}{10\cdot9\cdot8\cdot4\cdot3} = 1-\frac{1}{8640}$ und $P = 1-(1-\frac{1}{8640})^3$ ist ungefähr $\frac{3}{8640} \approx 0{,}00035$.

c) Entsprechend haben wir hier $10\cdot9\cdot6 = 540$ Möglichkeiten und somit $q = 1-\frac{1}{540}$ und näherungsweise $P \approx \frac{3}{540} = \frac{1}{180} = 0{,}0556$.

d) Hier gibt es $10\cdot9\cdot4$ Möglichkeiten, also P ungefähr $\frac{3}{270} \approx 0{,}0111$

e) Mit nur 10 möglichen PIN haben wir $P = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$. Außer bei sehr großer Vorkenntnis über die PIN ist sie also ziemlich sicher.

Aufgabe 983: Vielfache von 3?

Es sei p eine beliebige Primzahl > 3. Mathis behauptet: Die Zahl $p^2 + 2009$ ist stets ein Vielfaches von 3. (nach H.F.)

Lösung:

$p^2 + 2009 = p^2 - 1 + 2010 = p^2 - 1 + 3 \cdot 670$. Nun ist $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ ein Vielfaches von 3, weil stets eine der drei Zahlen $p-1$, p, $p+1$ ein Vielfaches von 3 ist; aber wegen $p > 3$ ist es nicht p sondern entweder $p-1$ oder $p+1$. Insgesamt ist auch $p^2 - 1 + 2010$ ein Vielfaches von 3, die Aussage also wahr.

Aufgabe 984: Spareinlage

Wir nehmen an, Gaius Iulius Caesar* hätte am 1. Januar 81 v. Chr., also nach seiner Volljährigkeit, einen Betrag von 1 Cent angelegt. Für Langzeitanlagen gewährt die Banca di Roma einen Zinssatz von 3 %. Caesar zahlt später nichts mehr ein.

a) Auf welchen Betrag wäre das Kapital bis heute (nach der Verzinsung für 2009) theoretisch angewachsen? Wie heißt das Zahlwort?

b) In welchem Jahr wäre der Inhaber des Sparbuches Millionär geworden?

c) Warum hätte er tatsächlich immer noch nur 1 Cent auf dem Sparbuch?(MG)

Lösung:

a) Nach der Verzinsung für 2009 beträgt das Guthaben

$$0{,}01\,€ \cdot 1{,}03^{2009+81} = 0{,}01\,€ \cdot 1{,}03^{2090} \approx 6{,}758 \cdot 10^{24}\,€.$$

Das sind fast 6,8 Quadrillion Euro (oder 6,8 Yotta-Euro).

b) Zum Zeitpunkt, da Caesar Millionär wird, gilt $0{,}01\,€ \cdot 1{,}03^{n+81} = 10^6\,€$, resp. $10^8 = \frac{10^6\,€}{0{,}01\,€} = 1{,}03^{n+81}$.

Nach dem Übergang zum Logarithmus folgt $\lg\left(10^8\right) = \lg\left(1{,}03^{n+81}\right) = (n+81) \cdot \lg(1{,}03)$.

Damit ist $n = \frac{\lg\left(10^8\right)}{\lg(1{,}03)} - 81 \approx 623{,}2 - 81 = 542{,}2$ und nach der Verzinsung am 31. Dezember 543 wäre Caesar Millionär.

c) Abgesehen von Währungsreformen, Inflation und der Tatsache, dass es zu Caesars Zeit noch nicht den Euro gab: Die Zinsgutschriften werden von den Banken gerundet, das heißt nach der ersten Verzinsung ergäbe sich zwar theoretisch ein Kapital von $0{,}01\,€ \cdot 1{,}03 = 0{,}0103\,€$, aber wegen der Rundung würde es bei $0{,}01\,€$ bleiben – und das setzt sich ewig so fort. (MG)

* deutsch: Julius Cäsar, * 13.07.100 v. Chr. in Rom, † 15.03.44 v. Chr. in Rom; römischer Staatsmann, Feldherr und Autor.

Aufgabe 985: Ein teures Vergnügen

Ein leichtsinniger Mann besuchte eine Bar. Bereits nach 15 Minuten hatte er $\frac{3}{4}$ seines Geldes ausgegeben, so dass er dann nur noch halb so viele Euro wie vorher Cent und so viele Cent wie vorher Euro besaß. Welchen Geldbetrag hatte er ausgegeben?

Übrigens: Seine ursprünglich vorhandenen Cent waren weniger als 1 € wert. Die nach 15 Minuten noch vorhandenen Cent können jedoch mehr als 1€ wert sein.

(H.F.)

Lösung:

Wenn der Mann mit x Euro und y Cent (x und y positive ganze Zahlen, $y < 100$), also mit $x + \frac{y}{100}$ Euro, die Bar betrat, besaß er nach 15 Minuten nur noch $\frac{1}{4}$ seines Geldes. Das heißt, dass er nach 15 Minuten noch $\frac{x}{4} + \frac{y}{400}$ Euro hatte, was $\frac{y}{2}$ Euro + x Cent = $\frac{y}{2} + \frac{x}{100}$ Euro entsprach.

Somit gilt: $\frac{x}{4} + \frac{y}{400} = \frac{y}{2} + \frac{x}{100}$. Dies formt man um zu $100x + y = 200y + 4x$ und weiter zu $96x = 199y$.

Aus der letzten Gleichung folgt: Die Primzahl 199 ist ein Teiler von x. Deshalb gilt: $x = n \cdot 199$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Für $n \geq 2$ erhält man somit: $96 \cdot n \cdot 199 = 199 \cdot y$, woraus sich $y = n \cdot 96$ ergibt. Das aber würde bedeuten, dass $y > 100$, was der Voraussetzung $y < 100$ widerspricht. Somit ist $n = 1$, $x = 199$ und $y = 96$.

Der Mann besaß demnach ursprünglich 199,96 €, wovon er in 15 Minuten $\frac{3}{4} \cdot 199{,}96\,€ = 149{,}97\,€$ ausgegeben hat; ein recht teures und kurzes Vergnügen!

Aufgabe 986: Wanderer

Ein Radfahrer überholt einen Fußgänger im Punkt A. Nach einiger Zeit findet er bei B eine Bank und ruht sich dort aus. Nach zehn Minuten kommt der Fußgänger vorbei. Nach weiteren zehn Minuten fährt der Radfahrer weiter und überholt den Fußgänger im Punkt C wieder. Nimm an, dass sich der Fußgänger mit gleichbleibender Geschwindigkeit v bewegt und der Radfahrer mit konstanter Geschwindigkeit $V = a \cdot v$.

a) Welche der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ ist länger, oder sind beide gleichlang?

b) Gib die Länge der Strecke $\overline{AC}$ und die Zeit zwischen den beiden Überholvorgängen an.

(WJB nach Werner Bühler, Wittlich)

Lösung:

a) 

D ist der Punkt, an dem sich der Fußgänger befindet, als der Radfahrer die Bank erreicht, E der Punkt, an dem sich der Fußgänger befindet, als der Radfahrer wieder weiterfährt. $\overline{AD}$ ist also die Strecke, die der Fußgänger zurücklegt, während der Radfahrer $\overline{AB}$ zurücklegt und $\overline{EC}$ ist die Strecke, die der Fußgänger zurücklegt,

während der Radfahrer $\overline{BC}$ schafft. Da die Geschwindigkeiten (und deshalb die Differenz) gleich bleiben, sind diese Strecken gleich lang.
Für die Strecken $\overline{DB}$ und $\overline{BE}$ braucht der Fußgänger jeweils 10 Minuten, sie sind also gleich lang.
Die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ müssen also gleich lang sein, da sie aus dem (jeweils gleich langen) Weg des Fußgängers in 10 Minuten und der (jeweils gleich langen) „Aufholstrecke“ des Radfahrers bestehen .

(Kim Vetter, Kl. 10, Alfred-Delp-Schule, Hargesheim)

b) Für die Gesamtstrecke $s = \overline{AC}$ benötigt der Fußgänger die Zeit $t = \frac{s}{v}$, der Radfahrer ohne Ruhepause $T = \frac{s}{V} = \frac{s}{a \cot v}$, mit Berücksichtigung der Ruhepause $R = 20\,\text{Min.}$, also $t = T + R$. Es ist also $\frac{s}{v} = \frac{s}{V} + R$ und somit $s = \frac{Rva}{a-1}$ für die Gesamtstrecke und $t = \frac{s}{v} = \frac{Ra}{a-1}$ für die benötigte Zeit.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Produkt aus den Teilern natürlicher Zahlen

Für jede natürliche Zahl n, $n > 1$, sei $P(n)$ das Produkt aller ihrer verschiedenen echten Teiler t, also $t \mid n$ und $t < n$. Zwei Beispiele:

$$P(25) = 1 \cdot 5 = 5; \quad P(30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 = 27000.$$

Finde heraus, ob es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, mit:

a) $P(n) = 1$.

b) $P(n) = n$.

c) $P(n) = n^2$, $P(n) = n^3$, $P(n) = n^4$ und so weiter. (nach H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15.05.2010 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 99

In Heft 99 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Kreise in der Ebene

Es sollen n Kreise, $n \geq 1$, so in die Ebene gezeichnet werden, dass sich je zwei Kreise schneiden und keine drei Kreise durch einen Punkt gehen.
Es sei nun $A(n)$ die größtmögliche Anzahl von Gebieten, in die die Ebene durch die n Kreise zerlegt wird.

Anmerkung: Der Teil der Ebene, der außerhalb aller n Kreise liegt, gilt auch als Gebiet.

Beispiel:

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$A(1) = 2$	$A(2) = 4$	$A(3) = 8$

Bestimme $A(n)$ für mehrere n, $4 \leq n \leq 10$. (H.F.)

Ergebnisse

Nur zwei unserer Leserinnen und Leser haben uns ihre Entdeckungen zugeschickt, nämlich Shaima'a Ahmed Doma (Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo) und Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf).
Schaima'a Ahmed Doma hat die sieben Fälle für $4 \leq n \leq 10$ aufgezeichnet und die entstandenen Gebiete abgezählt, sich aber hin und wieder verzählt – nicht verwunderlich bei der zunehmenden Größe von $A(n)$.
Florian Schweiger hat Kreise um die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks gelegt, die den Mittelpunkt des $n-Ecks$ gerade noch einschließen und so die Anzahlformel

$$A(n) = 2 + n \cdot (n-1)$$

entdeckt. Damit lässt sich natürlich jedes $A(n)$ ausrechnen; insbesondere gilt:

$A(4) = 14,\ A(5) = 22,\ A(6) = 32,\ A(7) = 44,\ A(8) = 58,\ A(9) = 74,$
$A(10) = 92.$

Sangaku-Probleme Teil 2
Aufgaben aus der japanischen Tempelgeometrie
von Ingmar Rubin

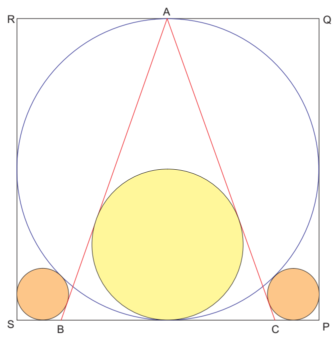
Teil 1 erschien bereits in Monoid 100

Aufgabenteil

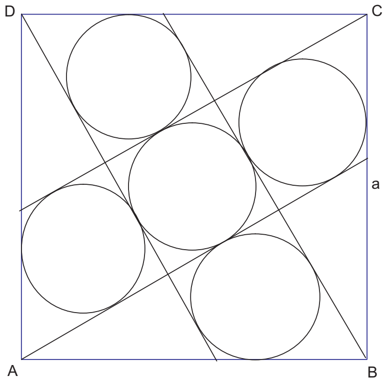
Aufgabe 4*

Hiroshi Okumura, Hirayama and Matsuoka 1966

In einem Quadrat $PQRS$ berühren zwei kleine Kreise die Seite $\overline{SP}$, den Inkreis vom Quadrat sowie je einer die Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$. Sei A der Punkt auf der Tangente $\overline{QR}$ an den Inkreis vom Quadrat. Die Strecken AB und AC sind Tangenten an die beiden kleinen Kreise, wie in der Abbildung. Gegeben sei der Inkreisradius vom Quadrat $PQRS$, bestimme den Inkreisradius vom Dreieck $\triangle ABC$.



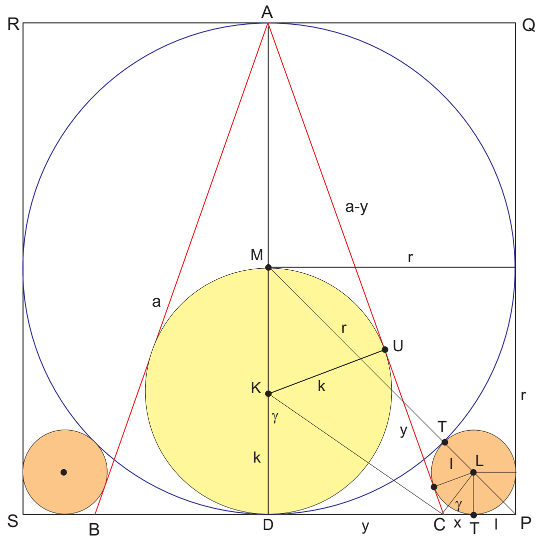
Aufgabe 5 – Fünf Kreise im Quadrat



Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. In dem Quadrat werden fünf gleichgroße Kreise so angeordnet, dass sich je zwei benachbarte Kreise in einem Punkt berühren. Weiterhin haben je drei Kreise zwei gemeinsame, parallele Tangenten, die je in einem Eckpunkt des Quadrates beginnen (siehe Abbildung). Gesucht ist der Radius r der fünf Kreise in Abhängigkeit von a.

Lösungsvorschläge

zu Aufgabe 4



Der Radius l der beiden kleinen Kreise folgt aus der Diagonalen $\overline{MP}$:

$$r\sqrt{2} = r + l + \sqrt{2}\,l \quad \Longrightarrow \quad l = r\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Im Dreieck $\triangle ADC$ gilt der Satz des Pythagoras:

$$a^2 = 4\,r^2 + y^2$$

ebenso im Dreieck $\triangle AKU$:

$(a-y)^2 + k^2 = (2\,r-k)^2.$

Die Strecke $\overline{DP}$ setzt sich wie folgt zusammen:

$r = y + x + l.$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle KDC$ und $\triangle CLT$ folgt:

$\tan\gamma = \frac{l}{x} = \frac{y}{k}.$

Nach Auflösung aller Gleichungen mit einem CAS erhält man als Lösungsmenge:

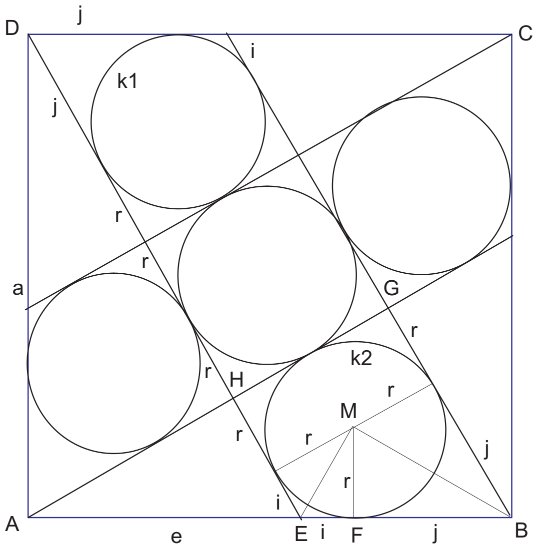
$$k_1 = \frac{r}{2}, \quad a_1 = \frac{3r}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{1}{2}\left(-4r + 3\sqrt{2}r\right), \quad y_1 = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$k_2 = -\frac{7\left(2r+\sqrt{2}r\right)}{2\left(2+3\sqrt{2}\right)}, \quad a_2 = \frac{-3r-8\sqrt{2}r}{2+3\sqrt{2}},$$

$$x_2 = \frac{r-2\sqrt{2}r}{2+3\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{7r}{2+3\sqrt{2}}$$

Im Sinne der Aufgabenstellung ist das erste Lösungsquartett gültig, da alle Strecken und Radien größer Null sein müssen.

zu Aufgabe 5



Wir betrachten den Punkt B und den Kreis k_2. Die gemeinsamen Tangentenabschnitte sind die Strecken j. Gleiches gilt für den Punkt E und die eingezeichneten Abschnitte i an k_2 (siehe Abbildung). Die Seite $\overline{AB}$ setzt sich aus drei Abschnitten zusammen:

$a = e + i + j.$

Vom Punkt D an den Kreis k_1 erhalten wir die Tangentenabschnitte j. Für die Transversale $\overline{DE}$ gilt:

$$|\overline{DE}| = j + i + 4\,r.$$

Das Dreieck $\triangle EAD$ ist rechtwinklig und es gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$a^2 + e^2 = (j + i + 4\,r)^2.$$

Die Dreiecke $\triangle AEH$ und $\triangle ABG$ sind einander ähnlich und es gilt die Verhältnisgleichung:

$$\tfrac{e}{r+i} = \tfrac{a}{r+j}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle EMB$ gilt der Höhensatz:

$$i \cdot j = r^2.$$

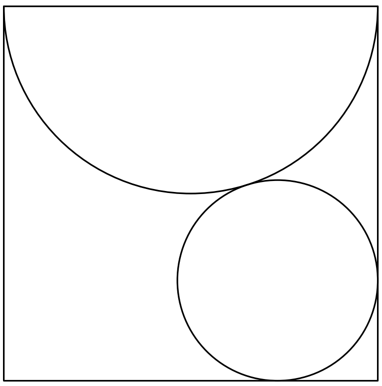
Die Gleichungen werden mit einem Computeralgebrasystem nach den Größen e, i, j, r aufgelöst.

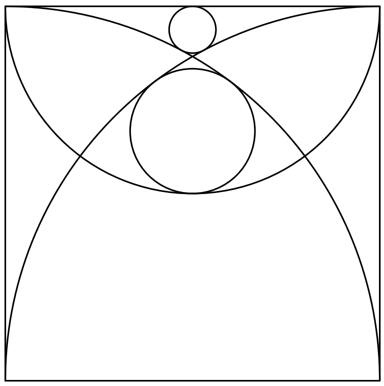
$$e = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad i = \frac{a}{12}\left(3 - \sqrt{3}\right), \quad j = \frac{a}{4}\left(3 - \sqrt{3}\right), \quad r = \frac{a}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

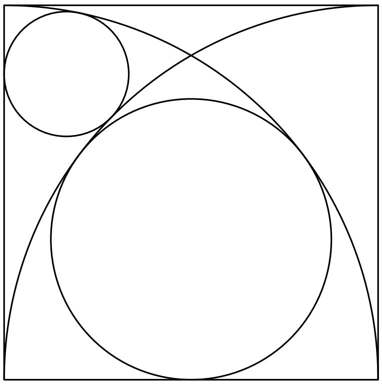
Alle Strecken lassen sich mit Quadratwurzeln darstellen. Das gestellte Sangakuproblem kann damit als eine Zirkel- und Lineal-Konstruktion ausgeführt werden.

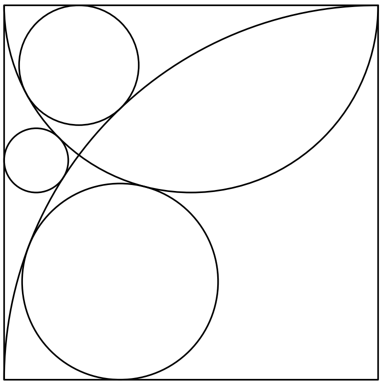
Vier Probleme mit Kreisen im Quadrat

In den folgenden Skizzen ist jeweils ein Quadrat mit bekannter Seitenlänge a vorgegeben. Dem Quadrat sind Kreise und Kreisbögen einbeschrieben. Es ist von allen Kreisen und Kreisbögen der Radius in Abhängigkeit von a zu bestimmen.









Bundeswettbewerb Mathematik 2010

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Gibt es eine positive ganze Zahl n, für die die Zahl $\underbrace{11\dots11}_{n \text{ Einsen}}2\underbrace{11\dots11}_{n \text{ Einsen}}$ eine Primzahl ist?

Lösung: Es gibt keine solche positive ganze Zahl.

Beweis: Denn für jede positive ganze Zahl n beweist die Umfomung
$\underbrace{11\dots11}_{n \text{ Einsen}}2\underbrace{11\dots11}_{n \text{ Einsen}} = \underbrace{11\dots11}_{n \text{ Einsen}}1\underbrace{00\dots00}_{n \text{ Nullen}}+1\underbrace{11\dots11}_{n \text{ Einsen}} = \underbrace{11\dots111}_{n+1 \text{ Einsen}}\cdot(1\underbrace{00\dots00}_{n \text{ Nullen}}+1)$,
dass die Zahl der Aufgabenstellung Produkt zweier ganzer Zahlen ungleich 1 und damit keine Primzahl ist. □

Aufgabe 2

Gegeben sind 9999 Stäbchen mit den Längen $1, 2, \dots, 9998, 9999$. Die Spieler Anja und Bernd entfernen abwechselnd je einen der Stäbe, wobei Anja beginnt. Das Spiel endet, wenn nur noch drei Stäbe übrig bleiben. Lässt sich aus diesen ein nicht entartetes Dreieck bilden, so hat Anja gewonnen, andernfalls Bernd. Wer kann den Gewinn erzwingen?

Lösung: Bernd kann den Gewinn erzwingen.

Beweis: Am Ende des Spiels seien die drei Stäbe mit den Längen l, m, n übrig, wobei $l < m < n$ gelten möge (alle Stäbe sind ja unterschiedlich lang). Aus ihnen lässt sich genau dann ein nicht entartetes Dreieck bilden, wenn die Dreiecksungleichungen echt erfüllt sind, das heißt, insbesondere muss

$$n < l + m \tag{2.1}$$

erfüllt sein. Um am Ende des Spiels (2.1) zu erreichen, wird Anja also versuchen, flapsig gesprochen, dass der längste der übrig gebliebenen drei Stäbe (Länge n) nicht besonders lang und die beiden kürzeren (Länge l, m) nicht besonders kurz sind. Und Bernd versucht, dies zu konterkarieren; dies bestimmt die Strategie, die er verfolgt, um den Gewinn zu erzwingen:

Die 9999 Stäbe unterteilt Bernd in zwei überschneidungsfreie Mengen, nämlich die 5000 „kurzen Stäbe“ mit den Längen $1, 2, \dots, 4999, 5000$, und die 4999 „langen Stäbe“ mit den Längen $5001, 5002, \dots, 9998, 9999$. Bernd reagiert wie folgt auf die Spielzüge von Anja:

- Entfernt Anja einen kurzen Stab, so entfernt Bernd unter den langen Stäben, die noch nicht entfernt wurden, denjenigen mit der kleinsten Länge.
- Entfernt Anja einen langen Stab, so entfernt Bernd unter den kurzen Stäben, die noch nicht entfernt wurden, denjenigen mit der größten Länge.

Beispiel für die ersten Züge eines Spiels, in dem Bernd seine Strategie verfolgt:

Anja (A) entfernt den Stab mit der Länge 1, Bernd (B) entfernt den Stab mit der Länge 5001, A: 4999, B: 5002, A: 7382, B: 5000, A: 5003, B: 4998, ...

Insbesondere gilt stets, dass mit zwei aufeinanderfolgenden Spielzügen von erst Anja und dann Bernd insgesamt ein kurzer und ein langer Stab aus dem Spiel entfernt werden. Bis zum Spielende gibt es $\frac{9999-3}{2} = 4998$ solche aufeinanderfolgenden Spielzüge. Damit sind bei Spielende stets noch $5000 - 4998 = 2$ kurze Stäbe mit Länge $l < m$ und $4999 - 4998 = 1$ langer Stab der Länge n übrig.

Für einen beliebigen, im folgenden festen Spielverlauf, in dem Bernd seine Strategie verfolgt hat, sei mit k die Anzahl der kurzen Stäbe bezeichnet, die Bernd im Verlauf des Spieles entfernt hat; es gilt $0 \leq k \leq 4998$. Da es unter den kurzen Stäben diejenigen mit der größten Länge waren, muss

$$m \leq 5000 - k$$

gelten. Da $l < m$ auf Grund der ganzzahligen Stablänge $l \leq m - 1$ bedeutet, folgt hieraus

$$l + m \leq 2m - 1 \leq 9999 - 2k. \tag{2.2}$$

Umgekehrt hat Bernd im Verlauf des Spiels $4998 - k$ lange Stäbe entfernt und zwar diejenigen mit der kleinsten Länge; es muss also

$$n \geq 5001 + 4998 - k = 9999 - k \tag{2.3}$$

gelten. Aus (2.2) und (2.3) ergibt sich wegen $k \geq 0$, dass am Spielende

$$l + m \leq 9999 - 2k \leq 9999 - k \leq n$$

gilt, die (echte) Dreiecksungleichung (2.1) also nicht erfüllt ist: Bernd hat gewonnen. □

Aufgabe 4

Bestimme alle Zahlen, die sich auf genau 2010 Arten als Summe von Zweierpotenzen mit nicht negativen Zahlen als Exponenten darstellen lassen, wobei in jeder Summe jede Zweierpotenz höchstens dreimal als Summand auftreten darf. Dabei sind zwei Darstellungen als gleich anzusehen, wenn sie sich nur in der Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden. Eine Summe kann hier auch aus nur einem Summanden bestehen.

Lösung: Genau die Zahlen 4018 und 4019 lassen sich auf genau 2010 Arten wie in der Aufgabenstellung darstellen.

Beweis: Es lassen sich die positiven ganzen Zahlen auf mindestens eine Art als Summe von Zweierpotenzen 2^k mit nicht negativem Exponenten $k \geq 0$ schreiben (Binärdarstellung). Da alle Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, \ldots$ selbst positive ganze Zahlen sind, können auch bei mehrfach auftretenden Summanden keine anderen als positive ganze Zahlen dargestellt werden. Für eine positive ganze Zahl n bezeichnen wir mit $A(n)$ die Anzahl der Darstellungen gemäß Aufgabenstellung, das heißt, die Darstellung von n als Summe von Zweierpotenzen, wobei in jeder Summe jede Zweierpotenz höchstens dreimal als Summe auftritt. Wir wollen diese Darstellungen im Folgenden als *zulässige Summendarstellungen* abkürzen. Durch Ausprobieren stellen wir fest:

n					$A(n)$
1	$= 1$				1
2	$= 2$	$= 1 + 1$			2
3	$= 2 + 1$	$= 1 + 1 + 1$			2
4	$= 4$	$= 2 + 2$	$= 2 + 1 + 1$		3
5	$= 4 + 1$	$= 2 + 2 + 1$	$= 2 + 1 + 1 + 1$		3
6	$= 4 + 2$	$= 2 + 2 + 2$	$= 4 + 1 + 1$	$= 2 + 2 + 1 + 1$	4
7	$= 4 + 2 + 1$	$= 2 + 2 + 2 + 1$	$= 4 + 1 + 1 + 1$	$= 2 + 2 + 1 + 1 + 1$	4
8	$= 8$	$= 4 + 4$	$= 4 + 2 + 2$	$= 4 + 2 + 1 + 1$	
				$= 2 + 2 + 2 + 1 + 1$	5

Die Tabelle legt die Behauptung nahe, dass

$$A(n) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor, \tag{4.1}$$

wobei wir wie üblich für eine reelle Zahl x mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl bezeichnen, die nicht größer als x ist. Wir beweisen (4.1) mittels vollständiger Induktion:

Da für $n = 1$ und $n = 2$ bestimmt keine anderen Darstellungen als die in der Tabelle existieren, ist $A(1) = 1 = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor$ und $A(2) = 2 = \lfloor \frac{4}{2} \rfloor$ (Induktionsanfang). Die Gleichung (4.1) sei also für alle $m \leq n$ bewiesen (Induktionsvoraussetzung). Wir zeigen nun (Induktionsschluss), dass sie dann auch für $n + 1$ gilt. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

1.Fall: n gerade: Wir zeigen zunächst, dass $A(n + 1) = A(n)$. Denn da $2^0 = 1$ die einzige ungerade Zweierpotenz ist, kann jede zulässige Summendarstellung der geraden Zahl n höchstens zweimal den Summanden 1 enthalten. Durch Addition eines weiteren Summanden 1 erhalten wir also aus paarweise ungleichen zulässigen Summendarstellungen von n paarweise ungleiche zulässige Summendarstellungen von $n + 1$, das heißt $A(n + 1) \geq A(n)$. Umgekehrt muss jede zulässige Summendarstellung von $n+1$ mindestens einmal den ungeraden Summanden 1 enthalten. Lässt man diesen Summanden weg, so erhalten wir aus paarweise ungleichen zulässigen Summendarstellungen von $n + 1$ paarweise ungleiche zulässige Summendarstellungen von n, das heißt $A(n + 1) \leq A(n)$. Es ist daher in diesem Fall auf Grund der Induktionsvoraussetzung

$$A(n + 1) = A(n) = \left\lfloor \tfrac{n+2}{n} \right\rfloor = \tfrac{n+2}{2} = \left\lfloor \tfrac{n+2}{2} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \tfrac{(n+1)+2}{2} \right\rfloor . \qquad (4.2)$$

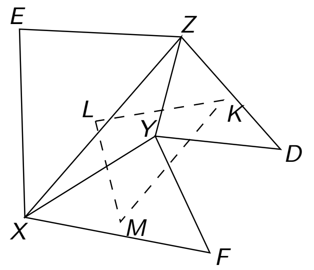
2.Fall: n ungerade, das heißt $n = 2m-1$ mit $m \geq 1$: Die zulässigen Summendarstellungen der geraden Zahl $n + 1 = 2m$ enthalten den ungeraden Summanden 1 entweder keinmal oder genau zweimal.
Ist der Summand 1 nicht enthalten, so erhalten wir durch Halbierung aller Summanden aus paarweise ungleichen zulässigen Summendarstellungen von $n + 1 = 2m$ paarweise ungleiche zulässige Summendarstellungen von $\frac{2m}{2} = m$; umgekehrt erhalten wir durch Verdoppelung aller Summanden aus paarweise ungleichen zulässigen Summendarstellungen von m paarweise ungleiche zulässige Summendarstellungen von $2m = n+1$. Daher gibt es $A(m)$ zulässigen Summendarstellungen von $n + 1 = 2m$, die den Summanden 1 nicht enthalten. Ist der Summand 1 genau zweimal enthalten, so erhalten wir durch Weglassen dieser beiden Summanden und anschließender Halbierung aller Summanden aus paarweise ungleichen zulässigen Summendarstellungen von $n + 1 = 2m$ paarweise ungleiche zulässige Summendarstellungen von $\frac{n+1-2}{2} = \frac{2m-2}{2} = m - 1$; umgekehrt erhalten wir durch Verdoppelung aller Summanden und anschließende Addition zweier Summanden 1 aus paarweise ungleichen zulässigen Summendarstellungen von $m - 1$ paarweise ungleiche zulässige Summendarstellungen von $2(m-1)+2 = 2m = n+1$. Daher gibt es $A(m-1)$ zulässige Summendarstellungen von $n + 1 = 2m$, die den Summanden 1 genau zweimal enthalten. Aus diesen Überlegungen ergibt sich in diesem Fall:

$$\begin{aligned} A(n + 1) &= A(2m) = A(m) + A(m - 1) = \left\lfloor \tfrac{m+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{m+1}{2} \right\rfloor \\ &= \tfrac{m+2}{2} + \tfrac{m+1}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{2m+2}{2} = \left\lfloor \tfrac{(n+1)+2}{2} \right\rfloor ; \end{aligned} \qquad (4.3)$$

hierbei folgen die Gleichungen am begin der zweiten Zeile aus der Induktionsvoraussetzung und aus der Tatsache, dass von den beiden ganzen Zahlen $m+1$ und $m+2$ eine gerade und eine ungerade ist, also für genau eine (die ungerade) von ihnen $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \frac{x-1}{2}$ gilt. Mit (4.2) und (4.3) ist der Induktionsschluss bewiesen. Die Aufgabenstellung erfordert, dass wir alle diejenigen Zahlen bestimmen, für die $A(n) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor = 2010$ gilt. Dies ist äquivalent zu $n+2 \in \{4020, 4021\}$, also zu $n \in \{4018, 4019\}$. □

Aufgabe 3

Über den Seiten eines Dreiecks $\triangle XYZ$ werden nach außen hin zueinander ähnliche Dreiecke $\triangle YDZ$, $\triangle EXZ$ und $\triangle YXF$ aufgesetzt; ihre Umkreismittelpunkte seien K, L beziehungsweise M. Dabei sind $\sphericalangle ZDY = \sphericalangle ZXE = \sphericalangle FXY$ und $\sphericalangle YZD = \sphericalangle EZX = \sphericalangle YFX$.

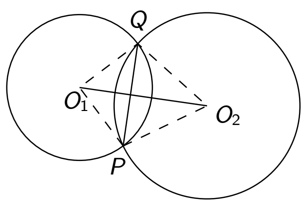


Skizze 3.1

Man zeige, dass das Dreieck $\triangle KLM$ zu den aufgesetzten Dreiecken ähnlich ist.

Vorbemerkung: Wir führen auf Basis der Voraussetzungen in der Aufgabenstellung die folgenden Abkürzungen ein:
$\varphi_D := \sphericalangle ZDY = \sphericalangle ZXE = \sphericalangle FXY$ und $\varphi_F := \sphericalangle YZD = \sphericalangle EZX = \sphericalangle YFX$. Die Voraussetzungen besagen natürlich auch, dass

$$\varphi_E := \sphericalangle DYZ = \sphericalangle XEZ = \sphericalangle XYF. \tag{3.1}$$



Skizze 3.2

Wir erinnern zudem an den *Hilfssatz*, der besagt: Schneiden sich zwei Kreise mit den Mittelpunkten O_1, O_2 in den Punkten P, Q, so ist (O_1O_2) Mittelsenkrechte der gemeinsamen Kreissehne PQ; vergleiche Skizze 3.2. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von PQ und (O_1O_2) mit S. Der Hilfssatz folgt aus der Beobachtung, dass die Dreiecke $\triangle O_1O_2Q$ und $\triangle O_2O_1P$ nach dem Kongruenzsatz *SSS* kongruent sind; insbesondere ist $\sphericalangle SO_1Q = \sphericalangle PO_1S$. Die Gerade (O_1S) ist also Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck $\triangle PQO_1$ und damit bekanntermaßen auch Mittelsenkrechte der Seite PQ. Wir erwähnen noch eine *Folgerung* aus dieser Überlegung: Die Gerade (O_1O_2) verläuft genau dann durch einen der beiden Punkte P, Q, wenn diese zusammenfallen; sich die beiden Kreise also in einem Punkt berühren.

Beweis: Wir führen den Nachweis, dass

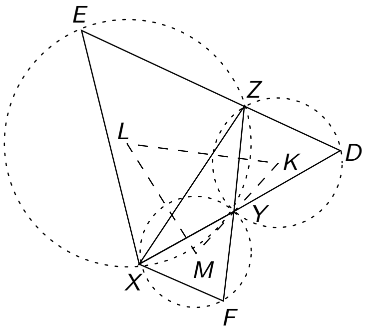
$$\sphericalangle LKM = \varphi_D, \ \sphericalangle MKL = \varphi_E, \ \sphericalangle KML = \varphi_F, \tag{3.2}$$

dass also das Dreieck $\triangle KLM$ stets zu den aufgesetzten Dreiecken ähnlich ist. Keiner der Eckpunkte D, E, F der aufgesetzten Dreiecke kann mit einem Eckpunkt X, Y, Z des ursprünglichen Dreiecks zusammenfallen, denn zum Beispiel liegen D und X in den beiden unterschiedlichen Halbebenen, die durch (YZ) gebildet werden. Damit sind die drei Geraden (XD), (YE), (ZF) stets definiert.

Wir betrachten zunächst den *(Spezial-) Fall*, dass Y auf (XD) liegt. In diesem Fall gilt, wobei wir (3.1) verwenden,

$$\sphericalangle ZYX + \sphericalangle DYZ = \sphericalangle ZYX + \sphericalangle XYF = \sphericalangle ZYX + \varphi_E = 180^\circ, \tag{3.3}$$

das heißt zum einen, dass in diesem Fall Y auch auf (ZF) liegt, sich die beiden Geraden also in Y schneiden. Zum anderen ins (3.3) äquivalent zur Aussage, dass $\square EXYZ$ ein Sehnenviereck ist, Y also auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle EXZ$ liegt. Wir wenden nun den obigen Hilfssatz 1 zusammen mit dem Satz vom Umkreis- und Mittelpunktswinkel an; vergleiche Skizze 3.3.



Skizze 3.3

(KL) ist Mittelsenkrechte von ZY, also

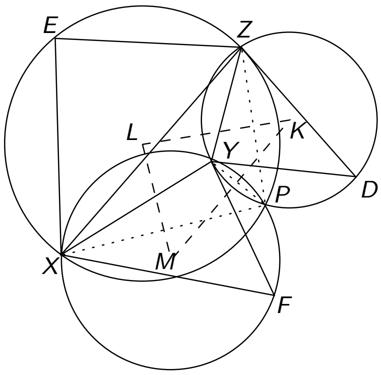
$$\sphericalangle LKY = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle ZKY = \sphericalangle ZDY = \varphi_D \text{ sowie } \sphericalangle KYZ = 90^\circ - \varphi_D \tag{3.4}$$

und analog

$$\sphericalangle YML = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle YMX = \sphericalangle YFX = \varphi_F \text{ sowie } \sphericalangle XYM = 90^\circ - \varphi_F \tag{3.5}$$

Aus diesen Winkelbeziehungen folgt auch mit (3.3) und wegen $\varphi_D + \varphi_E + \varphi_F = 180^\circ$, dass $\sphericalangle KYM = \sphericalangle KYZ + \sphericalangle ZYX + \sphericalangle XYM = 180^\circ - \varphi_D - \varphi_F + \sphericalangle ZYX = \varphi_E + \sphericalangle ZYX = 180^\circ$; der Punkte Y liegt also auf der Dreiecksseite KM.

Die Winkelbeziehungen (3.4) beziehungsweise (3.5) besagen also nichts anderes als $\sphericalangle LKM = \varphi_D$ beziehungsweise $\sphericalangle KML = \varphi_F$ und somit auch $\sphericalangle MKL = \varphi_E$, womit die Ähnlichkeit des Dreiecks $\triangle KLM$ zu den aufgesetzten Dreiecken in diesem Fall bewiesen ist. Alle Spezialfälle, in denen sich zwei der drei Umkreise in einem Punkt berühren, lassen sich ganz analog beweisen.



Skizze 3.4

Im *allgemeinen Fall* können wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass sich die Umkreise der aufgesetzten Dreiecke paarweise in zwei Punkten schneiden; vergleiche Skizze 3.4.

Es existiert also ein zweiter Schnittpunkt P der Umkreise der Dreiecke $\triangle YXF$ und $\triangle YDZ$. Wir zeigen, dass dann P auch auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle EXZ$ liegt. Der Satz vom Umkreis- und Mittelpunktswinkel besagt, sofern P bezüglich der Sehnen YZ beziehungsweise XY in den Umkreisen auf demselben Halbkreisbogen wie D beziehungsweise F liegt, dass $\sphericalangle ZPY = \sphericalangle ZDY = \varphi_D$ und $\sphericalangle YPX = \sphericalangle YFX = \varphi_F$. Daher $\sphericalangle ZPX = \sphericalangle ZPY + \sphericalangle YPX = \varphi_D + \varphi_F = 180° - \varphi_E = 180° - \sphericalangle XEZ$, woraus folgt, dass $\square PZEX$ ein Sehnenviereck ist. Liegt P auf den gegenüberliegenden Halbkreisbögen, so ist $\sphericalangle ZPY = 180° - \varphi_D$ und $\sphericalangle YPX = 180° - \varphi_F$, also $\sphericalangle ZPX = 360° - \sphericalangle ZPY - \sphericalangle YPX = 180° - \varphi_E$. Der Punkt P liegt also tatsächlich auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle EXZ$. Aus dem Hilfssatz folgt, dass $PX \perp LM$, $PY \perp KM$ und $PZ \perp KL$. Durch Betrachtung von Gegenwinkeln in rechtwinkligen Dreiecken oder durch die Winkelsumme im Viereck kann damit nachgewiesen werden, dass (hier bei Lagebeziehungen wie in Skizze 3.4) $\sphericalangle LKM = \sphericalangle ZPY = \varphi_D$, $\sphericalangle MLK = 180° - \sphericalangle ZPX = \varphi_E$, $\sphericalangle KML = \sphericalangle YPX = \varphi_F$, das beweist (3.2). $\square$

Bemerkung: Die Aufgabenstellung verallgemeinert den sogenannten *Satz von Napoleon,* der bei einer Konstruktion wie in der Aufgabenstellung die aufgesetzten Dreiecke als gleichseitig voraussetzt. Dann ist auch das Dreieck $\triangle KLM$ gleichseitig.

Wir danken Herrn Prof. Quaisser für hilfreiche Anmerkungen zur Darstellung.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 99

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen
(betr. Lehrerinnen: Frau Frohs, Frau Farag)**:**
Kl. 7: Mariam Ahmed 3, Marianne Michel 6, Chantal Ragy 10;
Kl. 8: Farieda Gaber 5,
Kl. 11: Nada Mohamed ElAttar 17.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kraft)**:**
Kl. : Anna Katharina Lange 5;
Kl. 6: Katja Goldschmidt 6, Amany Ramadan 6, Laura Christin Schmidt 6;
Kl. 7: Arne Broszukat 12,
Kl. 8: Marc de Zoeten 10, Lena Ehrenhard-Dickeschied, 9, Laura Tabea Galkowski 12, Lara Geldsetzer 8, Sebastian Ludwig 21, Alexander Rupertus 17, Julia Scherner 20;
Kl. 9: Andreas Pitsch 23;
Kl. 10: Kevin Schmitt 14.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 5.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 9: Frank Schindler 29.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betr. Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 8: Lukas Vogel 8.

Erkner, Carl-Bechstein-Gymnasium:
Kl. 8: Wanda Witte 9.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 8: Jana Ballweber 7;
Kl. 9: Henning Ballweber 28.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik (betr. Lehrer: Herr Nüchter)**:**
Kl. 6: Sabrina Hucke 9;
Kl. 7: Sophie Eckerscham 6, Magdalena Kött 4.

Grünheide, Gerhard-Hauptmann-Grundschule
Kl. 6: Sonja Witte 11.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule
(betr. Lehrerin: Frau Niederle)**:**
Kl. 5: Emily Zollmann 2;
Kl. 7: Mara Koch 11, Lars Prepens 19.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:
Kl. 11: Philipp Delhougne 10.

Hargesheim, Alfred-Delp-Schule (betr. Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 10: Kim Vetter 9.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrer: Herr Straub)**:**
Kl. 6: Mariam Baher 4, Mariam El-Shiaty 7, Jennifer Radi 4;
Kl. 9: Shaima'a Ahmed Doma 11;
Kl. 12: Alia'a Ahmed Doma 22.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Leonard Röhl 2;
Kl. 6: Nathalie Neubert 14; Björn Stanischewski 20;
Kl. 7: Maike Stanischewski 16.

Lehrte, Gymnasium Lehrte:
Kl. 9: Robin Fritsch 14.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Annika Kunz 2, Celine Raddatz 2;
Kl. 7: Victor Jans 11;
Kl. 8: Niklas Braun 8;
Kl. 9: Niklas Schliesmeier 3;

Kl. 10: Marco Rudolf 4, Malik Wagner 2.

Mainz, Theresianum:
Kl. 7: Inga Valentiner-Branth 11.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Wittekindt)**:**
Kl. 5: Leo Lutz 17;
Kl. 7: Benedikt Przybilla 11, Leonhard Wagner 11;
Kl. 10: Tim Lutz 9.

München, Max-Planck-Gymnasium:
Kl. 7: Greta Sandor 5.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betr. Lehrerin: Frau Langkamp)**:**
Kl. 7: Ira Löffler 7, Olivia Malik 2;
Kl. 11: Vivien Kohlhaas 13.

Oberursel, Gymnasium (betr. Lehrer: Frau Beitlich und Frau Elze)**:**
Kl. 7: Andrea Behrent 12, Lutz Bischoff 20, Heiko Kötzsche 21;
Kl. 9: Yun Yeong-Chul 8.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium:
Kl. 8: Luis Ressel 10.

Speyer, Speyer-Kolleg:
Kl. 12: Christoph Stiefel 3.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 11: Alexander Rettkowski 9.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kuntz)**:**
Kl. 5: Denise Lembrich 9, Pascal Grabowsky 6, Lena Broichhausen 5.

Mitteilungen

- Auf dem Titelblatt seht Ihr einen der beiden Gewinnerbeiträge unseres Mal- und Kreativwettbewerbs „Mathematik ist...“, welchen wir zum Jahr der Mathematik ausgerufen hatten. Jana Veit besucht derzeit die 8. Klasse des Frauenlob-Gymnasiums in Mainz. Sie hat eine Geschichte „Die Geschichte der negativen Zahlen“ geschrieben und diese sehr liebevoll in eine Landschaft umgesetzt, welche auf dem Titel abgebildet ist. Die ebenfalls dazugehörige Geschichte ist leider zu lang für unser Heft. Ihr könnt sie aber auf unserer Internetseite `www.mathematik.uni-mainz.de/monoid` lesen.
- Auf dem Titelblatt des letzten Heftes hatten wir ein Bild von Andreas Mans abgedruckt. In diesem Bild ist ein Term versteckt, nämlich $\sqrt{9} = 3$. Habt Ihr diesen entdeckt?

- Die Mitmach-Ausstellung „Mathematik be-greifen“ ist noch bis zum 30. Juni 2010 im Rheinland-Pfälzischen Storchenzentrum in Bornheim bei Landau zu sehen. Schaut dort mal vorbei, experimentiert und entdeckt an den Exponaten Mathematik. Neben der Ausstellung gibt es auch wieder ein abwechslungsreiches Begleitprogramm. Nähere Informationen findet Ihr im Internet unter `www.mathematik-begreifen.de`.
- In Monoid 88 hat Prof. Dr. Elmar Schömer unter dem Titel „Das Problem des kleinsten einschließenden Kreises“ einen kleinen Einblick in die Forschung seiner Arbeitsgruppe gegeben. Diese hat einen Algorithmus entwickelt, der unterschiedlich große Scheiben derart in einem Kreis anordnet, dass sie von einem möglichst kleinen Kreis umschlossen werden können. Diesen Algorithmus erklärte das Time Magazine (USA) als eine der 50 wichtigsten Erfindungen des Jahres 2009. Die Monoid-Redaktion gratuliert dazu.
- Beim Aufräumen am Karolinen-Gymnasium Frankenthal sind viele (ganz) alte Hefte aufgetaucht, sogar noch Hefte von 1989! Diese möchten wir Euch natürlich nicht vorenthalten. Daher könnt Ihr sie zum Preis von 1 € für je zwei Hefte (inklusive Porto und Verpackung) über unsere Internetseite `www.mathematik.uni-mainz.de/monoid` bestellen.
- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Kalenderjahr 2010 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber.
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf mit freundlicher Unterstützung von Marcel Gruner
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr
Betreuung der Abonnements: Katherine Pillau

Jahrgang 30 | Heft 101 | März 2010

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), welche im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen sind; Bitte die Adresse nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid