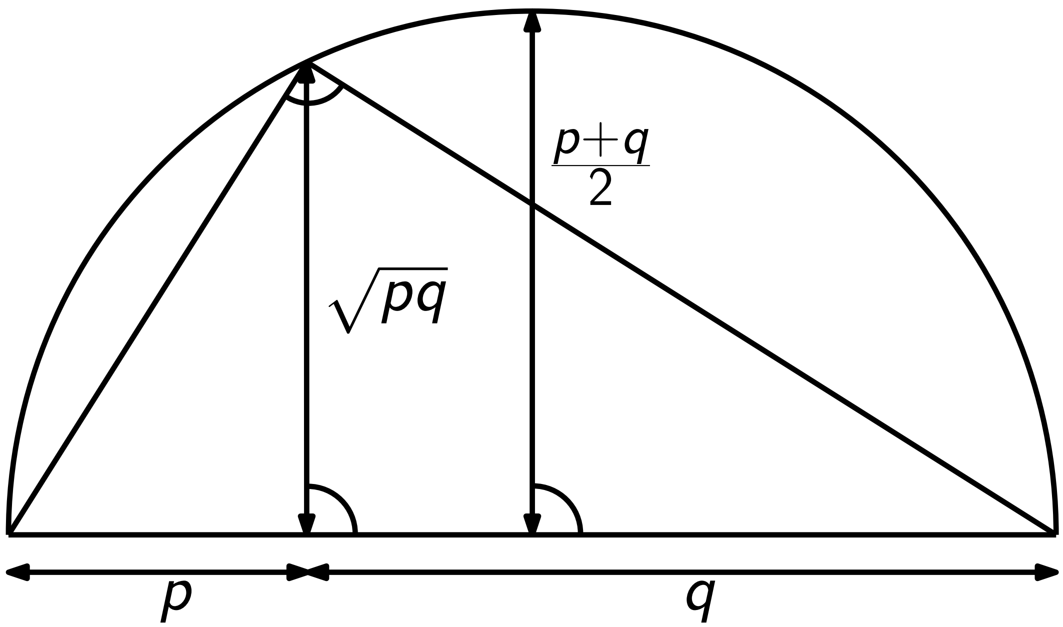
Jahrgang 31 Heft 105 März 2011

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.05.2011.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Herrn Kraft, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, an der **Alfred-Delp-Schule Hargesheim** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der „Rubrik der Löser“ und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Mainz – Stadt der Wissenschaft 2011

Diesen Titel verlieh der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft am 25. März 2010 in Berlin der Stadt Mainz. Er würdigte damit das besondere Engagement der Landeshauptstadt von Rheinland-Pfalz für die Förderung von Wissenschaft und deren Vernetzung mit Wirtschaft und Kultur. Ihre Bewerbung hatte die Stadt Mainz auf drei Säulen gestützt: Kommunale Bildungslandschaften, Arbeitswelten der Zukunft und Schauplätze des Wissens. Der Erfolg setzte voraus, dass bereits eine ausreichende Basis für dieses Säulenmodell vorhanden war. Diese besteht nicht nur in der Wissenschaftsallianz der Mainzer Hochschulen mit der Wirtschaft in Stadt und Region, sondern auch in vielen kulturellen Einrichtungen, insbesondere in den Mainzer Museen wie dem Gutenberg-Museum, dem Landesmuseum, dem Naturhistorischen Museum und dem weltweit anerkannten Römisch-Germanischen Zentralmuseum. Diese Institutionen bieten der Bevölkerung im Jahr 2011 ein reichhaltiges Programm; mehr darüber könnt Ihr unter der Internetadresse `www.emz2.de` erfahren.

Was bedeutet das Kürzel *emz*2, das von $E = MZ^2$ abgeleitet wurde? In einem Wettbewerb der Stadt haben fünf Studierende der Fachhochschule Mainz und der Johannes Gutenberg-Universität die bekannte Formel $E = mc^2$ des Physikers Albert Einstein für die Äquivalenz von Energie und Masse (c bedeutet darin die Lichtgeschwindigkeit) abgewandelt und mit Hilfe auskeimender Kressesamen dargestellt. Inzwischen hat die Stadt Mainz daraus ein Brezel-Motiv entwickelt, das ihren Wissenshunger symbolisiert (siehe Titelblatt).

Über 300 Projekte werden im Verlauf des Jahres 2011 angeboten; ihre Entwicklung wurde von sechs Arbeitskreisen koordiniert, unter anderem vom Arbeitskreis „Jugend und Schule in der Wissenschaftsstadt der Zukunft“. Der Name deutet schon an, dass über das Jahr 2011 hinaus gedacht wird. Tatsächlich ist zur Sicherung des Standortes Deutschland in kultureller und wirtschaftlicher Hinsicht ein frühes Heranführen der Jugend an Wissenschaft und Forschung unerlässlich. Entdeckendes und forschendes Lernen kann durch geeignete Angebote vorhandene Begabungen schon frühzeitig zur Entfaltung bringen. Monoid bietet Euch dazu mit seiner Sammlung an Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitgrades, der Seite für den Computer-Fan und den Rubriken „Mathis machen mathematische Entdeckungen“ sowie „Wer forscht mit?“ vielfältige Gelegenheit. Darum soll auch die diesjährige Monoid-Feier mit der Preisvergabe für das Schuljahr 2010/2011, die am 26. November passenderweise an der Universität Mainz stattfindet, mit einer besonderen Ausgestaltung dem Titel „Mainz – Stadt der Wissenschaft“ Rechnung tragen. (E.K.)

Sind Primzahlen dem Zufall unterworfen?

von Valentin Blomer

Ich erinnere mich, wie ich einmal in Toronto umgezogen bin und die zwei Möbelpacker mich intensiv nach meinem Beruf ausgefragt haben. Ich habe ihnen viel über Primzahlen erzählt, bestimmt eine halbe Stunde lang, und sie haben immer weiter gefragt. Am Ende haben wir uns freundlich voneinander verabschiedet, da dreht sich der eine nochmal um und sagt: „Nur um sicherzugehen: Primzahlen sind doch immer gerade Zahlen?“ ...?!?...

Ich bin sicher, dass jeder MONOID-Leser weiß, dass es zwar eine gerade Primzahl gibt, aber eben nur eine einzige. Allgemein heißt eine natürliche Zahl $p > 1$ Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Alternativ kann man auch sagen, dass jede Faktorisierung $p = rs$ einer Primzahl notwendig trivial sein muss, also entweder $r = 1$ oder $s = 1$. Primzahlen sind charakterisiert durch folgende Eigenschaft: Sobald sie ein Produkt ab teilen, teilen sie bereits mindestens einen der Faktoren, also a oder b.

Übung: Beweise, dass eine Zahl $n > 1$ mit dieser Eigenschaft tatsächlich eine Primzahl ist.*

Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Die ersten Primzahlen kennt jeder auswendig: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, aber es ist gar nicht so einfach festzustellen, ob zum Beispiel 611969 eine Primzahl ist. Warum interessieren wir uns für Primzahlen? Der entscheidende Satz ist der

> *Fundamentalsatz der Arithmetik:* Jede Zahl ist darstellbar als Produkt von Primzahlen, und diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Primzahlen sind also gewissermaßen die Atome der natürlichen Zahlen, die Grundbausteine, aus denen alles aufgebaut ist, und zwar auf eindeutige Art und Weise. Während die Periodentafel der Chemiker derzeit 118 Atome enthält, ist die Welt der Primzahlen viel reicher.

Der Fundamentalsatz der Arithmetik scheint intuitiv einzuleuchten. Trotzdem ist es ein Satz, den man eigentlich beweisen müsste. Und es ist vielleicht ganz interessant zu sehen, dass in gewissen Situationen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung durchaus verletzt sein kann. Dazu betrachten wir die Menge der geraden Zahlen $M = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, und bezeichnen eine gerade Zahl als M-Primzahl, falls sie nicht in kleinere gerade Zahlen zerlegt werden kann. ** Dann lässt 36 die zwei

* Eine Auflösung der Übungsaufgaben zu diesem Artikel findet ihr auf Seite 16.

** Zum Beispiel ist 6 eine M-Primzahl, da für $6 = 2 \cdot 3$ der Faktor 3 nicht zu M gehört und es daher keine Möglichkeit gibt, die Zahl 6 als Produkt nur mit geraden Zahlen, also Zahlen aus M, zu schreiben.

wesentlich verschiedenen Zerlegungen $6 \cdot 6$ und $2 \cdot 18$ in M-Primzahlen zu.
Ich möchte noch ein anderes Beispiel vorstellen, bei dem die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung verletzt ist. Es mutet vielleicht zunächst etwas künstlich an, ist aber von zentraler historischer Bedeutung und der Grundstein der algebraischen Zahlentheorie. Wir betrachten die Menge $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ aller Paare ganzer Zahlen und definieren auf M eine Addition und eine Multiplikation:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - 5bd, bc + ad).$$

Man kann jetzt wie gewohnt von Teilbarkeit reden. Zum Beispiel ist $(1, -1)$ ein Teiler von $(13, -1)$, denn

$$(1, -1) \cdot (3, 2) = (1 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) \cdot 2, -1 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = (13, -1).$$

Man rechnet nach, dass stets $(\pm a, \pm b) \cdot (\pm 1, 0) = (a, b)$ gilt. Also ist jedes Element aus M durch sich selbst und $(\pm 1, 0)$ teilbar. Ein Paar $(a, b) \notin \{(\pm 1, 0)\}$ heißt M-Primzahl, falls es *nur* diese triviale Zerlegung zulässt. Man kann mit wenigen Zeilen Rechnung zeigen, dass $(1, \pm 1)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ allesamt M-Primzahlen sind. Erstaunlicherweise ist die Primfaktorzerlegung in M nicht eindeutig. Zum Beispiel ist $(6, 0) = (2, 0) \cdot (3, 0) = (1, 1) \cdot (1, -1)$.

Übung: Zeige, dass $(1, 1)$ eine M-Primzahl ist.

Hinweis: Nimm an, es wäre $(1, 1) = (a, b) \cdot (c, d)$. Rechne nach, dass $(1, -1) = (a, -b) \cdot (c, -d)$ gilt und multipliziere dann die beiden Gleichungen zusammen.

Wie viele Primzahlen gibt es?

Nach diesem Exkurs über die Primfaktorzerlegung kommen wir wieder zurück zu den ganz normalen natürlichen Zahlen, bei denen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gewährleistet ist. Bevor wir mit unseren Überlegungen fortfahren, machen wir eine wichtige Beobachtung: Der Hauptsatz der Arithmetik sagt etwas über die Verteilung der Primzahlen aus:

- Es darf nicht zu wenige Primzahlen geben, sonst kann die *Existenz* der Primfaktorzerlegung nicht gewährleistet werden.
- Es darf nicht zu viele Primzahlen geben, sonst kann die *Eindeutigkeit* der Primfaktorzerlegung nicht gewährleistet werden.

Schon Euklid wusste, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, und sein Beweis ist so schön und elegant, dass ihn vermutlich jeder kennt.

Satz (Euklid): Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Dann ist $P := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ durch keine Primzahl teilbar, im Widerspruch zur Existenz der Primfaktorzerlegung.

Ein ganz anderer Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge stammt von Euler. Er ist viel komplizierter, gibt aber auch mehr Einsicht, denn er benutzt sowohl die

Existenz als auch die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Als kleine Vorbemerkung erinnern wir uns an die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \ldots = \tfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}, \quad |x| < 1.$$

Zum Beispiel ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Eulers Beweis. Wieder nehmen wir an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p_n$. Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die Funktion

$$Z(s) := \left(1 - \tfrac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \tfrac{1}{3^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{5^s}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(1 - \tfrac{1}{p_n^s}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Jeden Faktor können wir als geometrische Reihe schreiben und erhalten

$$Z(s) = \left(1 + \tfrac{1}{2^s} + \tfrac{1}{4^s} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3^s} + \tfrac{1}{9^s} + \ldots\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \tfrac{1}{p_n^s} + \tfrac{1}{p_n^{2s}} + \ldots\right).$$

Jetzt geschieht ein Wunder: Wenn wir alle Faktoren ausmultiplizieren, erhalten wir aufgrund der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

$$Z(s) = 1 + \tfrac{1}{2^s} + \tfrac{1}{3^s} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^s}. \tag{2}$$

In der Tat kann jeder Summand $\frac{1}{k^s}$ auf genau eine Weise durch Ausmultiplizieren der Klammern erreicht werden. Jetzt steht der Widerspruch da: In (1) können wir problemlos $s = 1$ setzen, in (2) erhalten wir die divergente harmonische Reihe!

Man kann sogar noch einen Schritt weitergehen und mit etwas zusätzlicher Rechnung (was wir hier nicht ausführen wollen) aus Eulers Beweis folgern: Ist $x \geq 10$ eine reelle Zahl, so gilt

$$\log\log x < \sum_{\text{Primzahlen } p \leq x} \tfrac{1}{p} < \log\log x + \tfrac{1}{2}.$$

Wir ziehen mehrere Schlussfolgerungen:

- Es gibt nicht nur unendlich viele Primzahlen, es gibt sogar so viele Primzahlen, dass die Reihe der reziproken Primzahlen divergiert, denn $\log\log x \to \infty$ für $x \to \infty$. Zum Beispiel gibt es auch unendlich viele Quadratzahlen, aber $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$ konvergiert.
- Die Reihe der reziproken Primzahlen ist zwar divergent, aber sie divergiert unglaublich langsam, viel langsamer etwa als die harmonische Reihe. Zum Beispiel sind

  $$\sum_{p \leq 100} \tfrac{1}{p} = 1{,}802\ldots, \quad \text{und} \quad \sum_{p \leq 1000000} \tfrac{1}{p} = 2{,}887\ldots$$

  Es gibt im Universum etwa 10^{80} Atome. Die Summe der ersten 10^{80} reziproken Primzahlen ist ungefähr 5,5. Unvorstellbar, wie viele Primzahlen benötigt würden, um über 10 zu kommen, und 10 ist wahrhaftig keine große Zahl. Von dem britischen Mathematiker Hardy stammt der Ausspruch „Die Unendlichkeit beginnt, wenn $\log\log x$ groß wird“.

- Eulers Beweis benutzt Analysis, um Aussagen über „diskrete“ Dinge wie Primzahlen zu machen. Es gibt also einen erstaunlichen Zusammenhang zwischen Arithmetik und Analysis.

Wir wollen nun etwas genauer zählen, wie viele Primzahlen es gibt. Dazu setzen wir $\pi(x) :=$ Anzahl der Primzahlen p mit der Eigenschaft $p \leq x$ und tabellieren einige Werte.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\pi(x)}$	Differenz
100	25	4	
1000	168	5,95...	1,95
10000	1229	8,13...	2,18
100000	9592	10,42...	2,29
1000000	78498	12,73...	2,31
10000000	664579	15,04...	2,31
100000000	5761455	17,35...	2,31
1000000000	50847534	19,66...	2,31

Was ist das Besondere an 2,31? Nun: $2{,}31 \approx \log 10$, und wir können vermuten, dass

$$\frac{10^n}{\pi(10^n)} \approx \underbrace{\log 10 + \ldots + \log 10}_{n-\text{mal}} = n \log 10 = \log 10^n$$

gelten könnte. In der Tat ist das der berühmte *Primzahlsatz* (Hadamard, de la Vallée Poussin, 1896):
Für große x gilt

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}.$$

Das können wir folgendermaßen interpretieren: Die „Wahrscheinlichkeit“, dass eine „zufällig“ gezogene Zahl n prim ist, ist ungefähr

$$\frac{1}{\log n} \approx \frac{1}{2{,}3 \cdot \text{Anzahl der Ziffern}}.$$

Mit anderen Worten: Unter 230 hundertstelligen Zahlen sollte sich in der Regel etwa eine Primzahl befinden. Eine etwas bessere Approximation ist

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\log t} =: \mathrm{Li}(x).$$

In der Niedersächischen Staats- und Universitätsbiblothek Göttingen findet man originale Handschriften von Gauß, der bereits als 15-jähriger den Primzahlsatz vermutet hat und im Laufe seines Lebens Primzahlen bis 3 Millionen abgezählt hat und mit der Approximation $\mathrm{Li}(x)$ verglichen hat. Am Weihnachtsabend 1849 schreibt er an seinen Freund Encke: „Ich habe (da ich zu einer anhaltenden Abzählung der Reihe nach keine Geduld hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt, um bald hie bald dort eine Chiliade*** abzuzählen.“.

*** Eine Chiliade ist ein Block von 1000 aufeinanderfolgenden Zahlen.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Wolfgang J. Bühler

Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht. 151 verblüffende Geschichten“

„Mein Buch will ein lebendiges Bild der Mathematik zeichnen [...] Selbst bei schwachem Fleiß und mittlerer Ausdauer ist es mit geringen mathematischen Kenntnissen und gesundem Menschenverstand zugänglich [...] Es bietet Mathematisches und Mathematik-Angehauchtes in vielen Spielarten aus vielen Gebieten. Durchaus gewollt ist es kunterbunter und munterer, als es Bücher des mathematischen Genres gemeinhin sind.“

Diese Zitate aus dem Vorwort geben Ziel und Ausrichtung des Buches zutreffend wieder. Viele der 151 Geschichten aus der Mathematik und der Mathematik-Geschichte sind selbst für den Berufs-Mathematiker verblüffend. Dabei sind sie so unterhaltsam dargestellt, dass einige beinahe ganz ohne mathematische Kenntnisse zugänglich sind, während bei einigen wenigen schwacher Fleiß und mittlere Ausdauer zwar ausreichen, um zu erfassen, worum es geht, aber die „Verstehbarkeit“ in Echtzeit doch nicht gegeben ist.

Fazit: Über die mathematischen Inhalte des Buches sage ich in dieser Besprechung bewusst nicht viel. Es enthält Beispiele aus vielen verschiedenen Teilbereichen der Mathematik, die spannend und unterhaltsam dargestellt sind. Was Christian Hesse zeigen will und tatsächlich zeigt, sagt er in einem weiteren Zitat aus dem Vorwort so: „Die Mathematik ist genauso verrückt, so witzig und aberwitzig wie das Leben.“ Nach der Lektüre diese Buches wird der Leser überzeugt sein, dass Mathematik glücklich machen kann – eine schlüssige Antwort auf das *„warum?“* habe ich allerdings nicht gefunden.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:

Hesse, Christian: Warum Mathematik glücklich macht. 151 verblüffende Geschichten.

C. H. Beck, München 2010. ISBN978 3 406 60608 3, gebunden, 345 Seiten, 14,95 €

Art des Buches:	mathematische Geschichtensammlung
Mathematisches Niveau:	meist leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Die Ecke für den Computer-Fan

Suche nach Primzahlen

Immer wieder taucht bei mathematischen Untersuchungen im Bereich der natürlichen Zahlen die Frage auf, ob es in bestimmten Serien von natürlichen Zahlen Primzahlen gibt. Hierzu zwei Beispiele:

a) Die bei Narren beliebte Zahl 11 ist eine Primzahl; dagegen sind 111, 1111, 11111, ... erst mal keine primzahlen. Gibt es außer 11 überhaupt Zahlen aus lauter Einsen, die Primzahlen sind?

b) Wie steht es mit der Häufigkeit von Primzahlen in der Serie $n^6 + 1091$, $0 \leq n \leq 10^4$?

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die Summe

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

wieder eine dritte Potenz ist. Untersuche etwa den Zahlenbereich von 1 bis 5000 beziehungsweise soweit es mit deinem Computer möglich ist! (E.K.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2011 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 103

Summe dritter Potenzen

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die Summe

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

wieder eine dritte Potenz ist. Untersuche etwa den Zahlenbereich von 1 bis 5000 beziehungsweise soweit es mit deinem Computer möglich ist! (E.K.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe beschäftigt haben sich Marcella Beck (Maria-von-Linden-Gymnasium in Calw-Stammheim, Klasse 10), Nicklas Bockius (Gymnasium Mainz-Gonsenheim, Klasse 11), Robin Fritsch (Gymnasium Lehrte, Klasse 10) und Christopher Patzanovsky (Johann-Michael-Fischer-Gymnasium in Burglengenfeld, Klasse 8).

Übereinstimmend fanden sie heraus, dass $n = 3$ die einzige Lösung ist:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Dabei wurden deutlich größere Bereiche untersucht als vorgeschlagen: Marcella überprüfte mit Excel 2007 den Zahlenbereich von $n = 1$ bis $n = 15\,000$ und Christopher mit CS den Bereich bis fast $50\,000$; Niklas untersuchte mit dem TI-Nspire CAS den Bereich von 1 bis 6 Millionen, Robin ging mit einem eigenen Programm, das er mit Blue-J erstellte, gar bis zu einer Milliarde.

Dabei muss beim Programmieren der Tatsache Rechnung getragen werden, dass die eingesetzten Programme die dritte Wurzel aus $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ mit einer bestimmten Anzahl von Nachkommastellen ausgeben, so dass noch eine Prüfung erforderlich ist, ob die dritte Potenz der durch Rundung daraus gewonnenen Zahl mit $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ übereinstimmt.

Anwendungen von Mittelungleichungen

von Wolfgang Moldenhauer

Das arithmetische Mittel (der Durchschnitt) begegnet uns zum Beispiel, wenn wir aus erhaltenen Einzelnoten die Durchschnittsnote berechnen. Es ist für zwei Zahlen a und b als $\frac{a+b}{2}$ definiert und entsprechend für n Zahlen a_1, a_2, ..., a_n als $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Das geometrische Mittel zweier Zahlen a und b lautet $\sqrt{a \cdot b}$ oder für die n Zahlen a_1, a_2, ..., a_n entsprechend $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$, wobei vorausgesetzt werden muss, dass die n Zahlen nicht negativ sind. Für diese beiden Mittel gilt die

Ungleichung vom arithmetischen-geometrischen Mittel (AM-GM)

(1) Für $a, b \geq 0$ gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ ist.

(2) Für a_1, a_2, ..., $a_n \geq 0$ gilt $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a_1 = a_2 = ... = a_n$ ist.

Die Ungleichung (1) erhält man aus (2) als Spezialfall für $n = 2$. Die Ungleichung (1) ist äquivalent zu $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, wie man durch Nachrechnen bestätigt. Und da Quadrate reeller Zahlen nicht negativ sind, ist (1) zugleich bewiesen.

Für die Ungleichung (2) wird hier auf einen Beweis verzichtet. Man findet einen der vielen Beweise unter:

`http://www.oemo.at/wiki/index.php/Arithmetisch-geometrische-Mittelungleichung`.

Die Ungleichung (1) hat eine nette geometrische Interpretation. Ein Rechteck mit den Seiten a und b hat den Umfang $2a + 2b$. Ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt hat den Umfang $4 \cdot \sqrt{a \cdot b}$. Für $n = 2$ besagt die Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ also, dass unter allen Rechtecken mit gleichem Inhalt $A = a \cdot b$ der Umfang $2a + 2b \geq 4 \cdot \sqrt{a \cdot b}$ beträgt, wobei das Quadrat diesen geringsten Umfang hat.
Zusatz: Wie lautet die entsprechende Interpretation im Falle $n = 3$?

Noch eine weitere (geometrische) Interpretation:
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten $p = a$ und $q = p$ ist nach dem Höhensatz $h_c = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{a \cdot b}$ und der Umkreisradius beträgt $\frac{a+b}{2}$. Die Ungleichung sagt aus, dass die Höhe h_c kleiner gleich dem Radius des Umkreises ist. *

Noch ein weiteres Mittel: Für zwei positive Zahlen a, b ist $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ das harmonische Mittel. Entsprechend definiert man das harmonische Mittel der positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$. Es gilt die

Ungleichung vom arithmetischen-harmonischen Mittel

(3) Für $a, b > 0$ gilt $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ ist.

(4) Für $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ gilt $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ist.

Und schließlich liegt das geometrische Mittel zwischen dem arithmetischen und harmonischen.
Versuche die Beweise selbst zu finden!

Anwendung 1

Man beweise, dass für $x > 0$ die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ gilt.
Beweis: Nachdem wir AM-GM auf $a = x$ und $b = \frac{1}{x}$ angewendet haben, gilt $\frac{1}{2} \cdot (x + \frac{1}{x}) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1$, womit die Behauptung nachgewiesen ist. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $x = \frac{1}{x}$ ist, also genau für $x = 1$.

Anwendung 2

Man beweise, dass für positive Zahlen a und b und für jede natürliche Zahl n die Ungleichung $(1 + \frac{a}{b})^n + (1 + \frac{b}{a})^n \geq 2^{n+1}$ gilt.

* Betrachtet hierzu auch unser Titelbild!

Beweis: Nach AM-GM ist $1+\frac{a}{b}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$ und $1+\frac{b}{a}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$ und damit

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{a}{b}\right)^n+\left(1+\tfrac{b}{a}\right)^n &\geq \left(2\cdot\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right)^n+\left(2\cdot\sqrt{\tfrac{b}{a}}\right)^n\\ &= 2^n\cdot\left(\left(\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right)^n+\left(\sqrt{\tfrac{b}{a}}\right)^n\right)\\ &\geq 2^n\cdot 2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right)^n\cdot\left(\sqrt{\tfrac{b}{a}}\right)^n}\\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Bei der zweiten Abschätzung ist erneut AM-GM angewendet worden. Das Gleichheitszeichen steht genau für $a=b$.
Nach diesen beiden direkten Anwendungen nun ein etwas anders geartetes Beispiel. Seit vielen Jahren benutze ich in der Förderung die folgende Aufgabe aus der 3. Olympiade Junger Mathematiker, 4. Stufe, Klasse 11/12, 1963/1964, Aufgabe 031241[**]:

Beispiel 1

Beweise, dass für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt[a+b]{a^b\cdot b^a}$$

ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?
Die Ungleichung ist ein schönes Beispiel für das Zwischenschalten eines geeigneten Terms, der dann die Rechnung mit den Wurzeltermen vereinfacht, beziehungsweise vermeidet. Man zeigt die Gültigkeit von

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\sqrt[a+b]{a^b\cdot b^a},$$

wobei links die Ungleichung vom AM-GM steht, die wir schon bewiesen haben. Die rechte Ungleichung ist nach Rechnung nacheinander äquivalent zu

$$(ab)^{a+b}\geq(a^b\cdot b^a)^2=a^{2b}\cdot b^{2a}$$

und damit auch zu

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geq 1.$$

Ist $a\geq b$, so ist die Basis ≥ 1 und der Exponent positiv. Ist dagegen $a<b$, so liegt die Basis im Intervall $(0,1)$ und der Exponent ist negativ. In beiden Fällen gilt also die Ungleichung. Man liest zudem unmittelbar ab, dass das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $a=b$ gilt.
Im LSGM[***]-Camp 2010 in Ilmenau bewies Jan Standke, Johannes-Kepler-

[**] Die Nummer 031241 bedeutet, dass die Aufgabe in der 3. Mathematik-Olympiade in Klasse 12 in der 4. Stufe als 1. Aufgabe gestellt wurde.
[***] Die LSGM ist die Leipziger Schülergesellschaft für Mathematik (siehe www.lsgm.de).

Gymnasium Chemnitz (Klasse 9) die Ungleichung wie folgt:
Jan bildete das arithmetische Mittel aus b Summanden a und a Summanden b und erhielt mit der Ungleichung vom AM-GM (er verwendete (2) für n = a+b)

$$\frac{(a+\cdots+a)+(b+\cdots+b)}{a+b} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}.$$

Nun ist

$$\frac{(a+\cdots+a)+(b+\cdots+b)}{a+b} = \frac{ba+ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

und nach der Ungleichung vom arithmetischen-harmonischen Mittel (Version (3))

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Das Gleichheitszeichen steht in den Mittelgleichungen genau dann, wenn $a = b$ ist.

Beweise die Ungleichung vom arithmetischen-harmonischen Mittel (Version(3)) selbstständig.

Die eben vorgestellte Lösung von Jan kann durch folgende lehrreiche Beispiele ergänzt werden:

Beispiel 2

Beweisen Sie, dass für alle nicht negativen Zahlen a, b und c die Ungleichung

$$a^2+b^2+c^2 \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$$

gilt.

Lösung: Es ist nach AM-GM (Version (2) für $n = 4$):

$$\frac{a^2+a^2+b^2+c^2}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 \cdot b^2 \cdot c^2} = a \cdot \sqrt{bc}.$$

Addiert man zu dieser Ungleichung die beiden zyklischen Vertauschungen, so erhält man die Behauptung. Eine andere Lösungsidee ist folgende:
Die drei Wurzeln sind problematisch, da ihre Beseitigung Quadrieren erfordert. Daher kann man versuchen, die Wurzeln zu ersetzen. Eine Möglichkeiten dafür liefert AM-GM. Vielleicht gelingt es uns, die Ungleichungskette

$$a^2+b^2+c^2 \geq a \cdot \frac{b+c}{2} + b \cdot \frac{a+c}{2} + c \cdot \frac{b+a}{2} \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$$

zu beweisen.
Die rechte Abschätzung gilt nach AM-GM. Es verbleibt der Nachweis der Gültigkeit der linken Ungleichung. Diese ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2} \cdot ((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \geq 0,$$

womit alles gezeigt ist.

Beispiel 3

Beweise, dass alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c, die Abschätzung

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$$

erfüllen! (071223)

Versuche zunächst selbst einen Beweis zu finden!

Eine Möglichkeit ist der Nachweis mittels AM-GM in der Version (2) für $n = 3$. Es ist

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + c^3 + c^3 + c^3}{6} \geq \sqrt[6]{a^3 b^3 c^{12}} = c^2\sqrt{ab}.$$

Addiert man zu dieser Ungleichung die beiden zyklischen Vertauschungen, so ergibt sich die Behauptung.

Noch eine Beweismöglichkeit: Auch in dieser Ungleichung kann man das arithmetische Mittel zwischenschalten. Es bleibt dann der Nachweis der Ungleichung

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 \cdot \frac{b+c}{2} + b^2 \cdot \frac{c+a}{2} + c^2 \cdot \frac{a+b}{2}$$

zu erbringen. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 \geq 0.$$

Dies erfordert natürlich gewisse Rechenfertigkeiten. Wir versuchen, die eben verwendeten Ideen anzuwenden auf

Beispiel 4

Es ist zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$a^4 - 4ab^3 + 3b^4 \geq 0$$

richtig ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen? (041224)

Unter Nutzung von AM-GM (Version (2) für $n = 4$), ist

$$\frac{a^4 + b^4 + b^4 + b^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 b^{12}} = ab^3$$

und damit ist die Ungleichung bewiesen. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ ist.

Die klassische Lösung ist durch

$$a^4 - 4ab^3 + 3b^4 = (a-b)^2((a+b)^2 + 2b^2) \geq 0$$

gegeben, wobei man die Faktorzerlegung finden muss. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, dass man erkennt, dass der Term für $a = b$ verschwindet und er damit durch $a - b$ teilbar sein muss.

Möglich ist auch (die Ungleichung gilt für $b = 0$, daher kann man $b \neq 0$ annehmen) eine Division durch b^4. Nach Einführung von $x = \frac{a}{b}$ lautet die zu beweisende Ungleichung $x^4 - 4x + 3 \geq 0$, die man durch Zerlegung in die Faktoren $(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$ oder durch Extremwertuntersuchung nachweisen kann.

Und hier ist noch eine Ungleichung zum Trainieren der eben vorgestellten Lösungsvarianten.

Beispiel 5

Man beweise für positive Zahlen a und b die Gültigkeit der Ungleichung

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

Lösungsskizzen: Nach AM-GM ist $\frac{a^3+b^3+b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3b^3} = ab^2$.
Es ist $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = (a-b)^2 \cdot (a+2b)$.
Für $b = 0$ gilt die Ungleichung. Für $b \neq 0$ ist mit $x = \frac{a}{b}$ die Ungleichung $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ nachzuweisen. Es ist $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2)$.
Und wie schreibe ich meine Lösung auf?****
Wir wissen, dass wir nicht von der Behauptung ausgehen dürfen, sondern wir müssen von einer wahren Voraussetzung auf die Behauptung schließen. Richtig wäre also zum Beispiel so: Es ist für $a, b > 0$ nacheinander

$$\begin{aligned}
& (a-b)^2 \geq 0 \\
\Longrightarrow \quad & a^2 + b^2 \geq 2ab \\
\Longrightarrow \quad & \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} \geq 2ab \\
\Longrightarrow \quad & \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab \\
\Longrightarrow \quad & \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \\
& \qquad = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung vom arithmetischen-harmonischen Mittel bewiesen. Allerdings ist uns der Nachweis von

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

in der Aufgabenstellung aufgetragen, d.h. wir müssen den Beweis genau in umgekehrter Richtung aufschreiben, in der wir ihn gefunden haben!
Ein Ausweg besteht darin, auf die Äquivalenz der Umformung zu verweisen. Aber Vorsicht(!), denn dies wird Zeile für Zeile bei einer Korrektur geprüft. Man kann das Problem wie folgt indirekt umgehen: Angenommen, es gibt Zahlen a, $b > 0$

**** Lese hierzu auch: Hättest du das gewusst? Wann arbeitet ein Mathematiker rückwärts?, Monoid, 30 (2010), Heft 103, S. 12-16 für die $\frac{a+b}{2} < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ gilt. (Man nimmt also das Gegenteil an!) Es folgt nacheinander

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} < \frac{2ab}{a+b} \\ \Longrightarrow\quad & \frac{(a+b)^2}{2} < 2ab \\ \Longrightarrow\quad & (a-b)^2 < 0. \end{aligned}$$

Ein Quadrat reeller Zahlen kann aber nicht negativ sein. Wir haben also einen Widerspruch zur Annahme erhalten, somit ist die Annahme ist falsch. Es gibt also keine solchen Zahlen und damit ist die Gültigkeit der Ungleichung vom arithmetischen-harmonischen Mittel bewiesen.

Lösung der Übungen von Seite 4 und Seite 5

Lösung der Übung auf Seite 4: Sei $p = rs$ eine Faktorisierung. Wir wollen zeigen, dass $r = 1$ oder $s = 1$ gilt. Aus $p = rs$ folgt insbesondere $p \mid rs$. Nach Voraussetzung teilt also p einen der beiden Faktoren, sagen wir $p \mid r$, also $pq = r$ für eine ganze Zahl q. Es folgt $p = rs = pqs$ und damit $1 = qs$. Das geht nur für $s = 1$.

Lösung der Übung auf Seite 5: Wir nehmen $(1, 1) = (a, b) \cdot (c, d)$ an und wollen zeigen, dass einer der beiden Faktoren $(\pm 1, 0)$ ist. Aus der Definition der Multiplikation folgt sofort $(1, -1) = (a, -b) \cdot (c, -d)$. Wir multiplizieren beide Gleichungen zusammen: $(1, 1) \cdot (1, -1) = (a, b) \cdot (a, -b) \cdot (c, d) \cdot (c, -d)$. (Die Kommutativität der Multiplikation ist leicht zu sehen.) Nur rechnet man nach, dass für beliebige x, y stets $(x, y) \cdot (x, -y) = x^2 + 5y^2$ gilt. Es folgt also $6 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$, und das ist in ganzen Zahlen nur so zu lösen, dass einer der beiden Faktoren 1 ist, also $(c, d) = (\pm 1, 0)$ oder $(a, b) = (\pm 1, 0)$.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 104

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Pias Äpfel

Pia kauft ein Kilo mittelgroße Äpfel und legt sie in eine Reihe. Zwei davon sind besonders rotbackig. Der eine ist der Sechste von links, der andere der Achte von rechts. Zwischen den beiden Äpfeln liegen drei weitere. Kannst du feststellen, wie viele Äpfel Pia hat? (WJB)

Lösung:
Wir bezeichnen die rotbackigen Äpfel mit X und die anderen mit 0. Damit ergeben sich zwei Möglichkeiten:

$00000X000X0000000$, also 17 Äpfel und

$0X000X000$, also 9 Äpfel.

17 mittelgroße Äpfel wiegen deutlich mehr als ein Kilo, also hat Pia neun Äpfel.

Loch im Kuchen

Frau Freundlich hat für ihre beiden Enkelkinder einen großen rechteckigen Blechkuchen gebacken und stellt ihn zum Abkühlen auf die Terrasse. Ein vorwitziges Nachbarskind sieht das und schneidet aus dem Kuchen ein rechteckiges Stück heraus - aber nicht genau aus der Mitte und die Seiten dieses Stückes sind nicht parallel zu den Seiten des Blechkuchens.

Kann Frau Freundlich den restlichen Blechkuchen in zwei genau gleich große Stücke für ihre Enkelkinder schneiden? (CE)

Lösung:
Jede Gerade durch den Diagonalenschnittpunkt halbiert ein Rechteck, die Schnittlinie durch die Diagonalenschnittpunkte beider Rechtecke halbiert daher den Kuchen und das „Loch“.

Ein besonderes Vielfaches

Bestimme ohne Taschenrechner und ohne Computer das kleinste Vielfache von 88, dessen Dezimaldarstellung nur aus den Ziffern 6 und 7 besteht – sofern es ein solches Vielfaches überhaupt gibt. (H.F.)

Lösung:
Das gesuchte Vielfache von 88 sei $z_n = \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ mit Ziffern $\alpha_i \in \{6, 7\}$.
Wegen $88 = 8 \cdot 11$ gilt: 8 und 11 sind Teiler von z_n.
Nach der Divisionsregel für 8 gilt: 8 ist Teiler von z_n, wenn 8 ein Teiler der Zahl $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ ist.
Nun ist nach Voraussetzung: $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 \in \{666, 667, 676, 766, 677, 767, 776, 777\}$.
Von diesen Zahlen ist 8 nur ein Teiler von 776, sodass $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 = 776$ ist.
Da nun 11 kein Teiler von 776 ist, muss die gesuchte Zahl z_n mindestens 4-ziffrig sein.
Für z_4 bestehen folgende Möglichkeiten: $z_4 = 6776$ oder $z_4 = 7776$.
Nun ist 11 ein Teiler von 6776, nicht aber von 7776.
Die gesuchte Zahl ist daher $z_4 = 6776$.

Winkel im Dreieck

Zeige: In einem Dreieck ist stets mindestens ein Innenwinkel $\geq 60°$. (H.F.)

Lösung:

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt $180°$. Nehmen wir nun an, dass alle drei Innenwinkel $< 60°$ wären, dann wäre ihre Summe $< 180°$ – ein Widerspruch.

Somit ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung.

Teilerfremde Zahlen

Finde mindestens ein Beispiel für vier Zahlen mit folgender Eigenschaft: Es gibt keine natürliche Zahl > 1, die alle vier Zahlen teilt; wählt man aber drei beliebige aus den vier Zahlen, so gibt es stets eine natürliche Zahl > 1, die diese drei Zahlen teilt. (Valentin Blomer)

Lösung:

Wir wählen vier ungleiche Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4 und konstruieren hieraus vier Zahlen $A_{2;3;4}$, $B_{1;3;4}$, $C_{1;2;4}$, $D_{1;2;3}$ indem wir $A_{2;3;4} = p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$ setzen (man vergleiche die Indizes, dann sollte klar sein, wie die anderen Zahlen gebaut sind). Kombiniert man zwei dieser Zahlen, so findet man immer zwei übereinstimmende Indizes, wie man der Tabelle entnehmen kann.

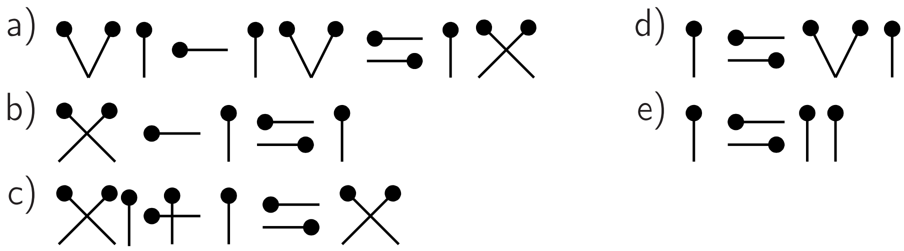
	$A_{2;3;4}$	$B_{1;3;4}$	$C_{1;2;4}$	$D_{1;2;3}$
$A_{2;3;4}$	–	3; 4	2; 4	2; 3
$B_{1;3;4}$	3; 4	–	1; 4	1; 3
$C_{1;2;4}$	2; 4	1; 4	–	1; 2
$D_{1;2;3}$	2; 3	1; 3	1; 2	–

Fügt man dieser Kombination eine dritte Zahl, ungleich der beiden anderen, hinzu, so sieht man durch einen Vergleich mit der entsprechenden Zeile (oder Spalte), dass immer einer der gelisteten Indizes mit einem der Indizes des gewählten Zahlenpaares übereinstimmt.

Beispiel: Man wählt die Zahlenkombination $A_{2;3;4}$, $B_{1;3;4}$ und $C_{1;2;4}$, dann stimmen alle drei Zahlen in der 4 überein. Damit ist der gemeinsame Teiler dieser drei Zahlen die Primzahl p_4. Da $D_{1;2;3}$ nicht von p_4 geteilt wird, ist die Bedingung erfüllt. Für die Primzahlen $p_1 = 13$, $p_2 = 17$, $p_3 = 23$, $p_4 = 29$ wären die gesuchten Zahlen somit $A_{2;3;4} = 11339$, $B_{1;3;4} = 8671$, $C_{1;2;4} = 6409$ und $D_{1;2;3} = 5083$. (B.B.)

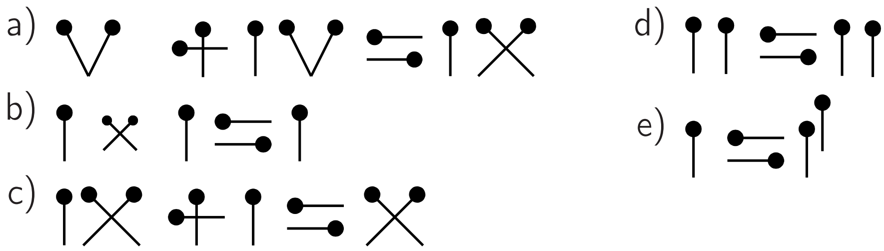
Streichholzgleichungen

Betrachte die Streichholzgleichungen als Darstellung einer Gleichung in römischen Ziffern. Versuche durch Verschieben von möglichst wenigen Streichhölzern die Ausdrücke zu korrigieren. Dabei dürfen moderne Rechenzeichen ($+$, $-$, $\times$ (für $\cdot$), / (für :)) benutzt werden.

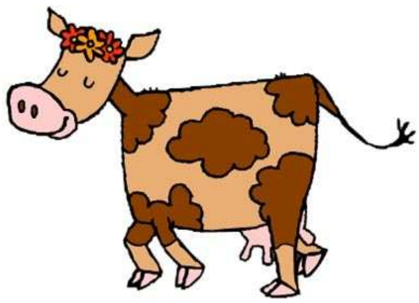


(CE)

Lösung:



Einhundert Kühe



Einhundert Kühe auf einer Weide, jede schwarz, weiß oder braun, fressen einhundert Ballen Heu. Jede schwarze Kuh frißt fünf, jede weiße drei, aber es braucht drei braune Kühe, um einen Ballen zu fressen.

Wieviele Kühe von jeder Farbe stehen auf der Weide, wenn man davon ausgeht, dass alle einhundert Ballen gefressen werden und jede Farbe von mindestens einer Kuh vertreten ist? (gefunden von CE)

Lösung:
Mit s bezeichne man die Anzahl der schwarzen, mit w die Anzahl der weißen und mit b die Anzahl der braunen Kühe, dann erhalten wir aus dem Aufgabentext:

$$100 = s + w + b \tag{1}$$

$$100 = 5 \cdot s + 3 \cdot w + \frac{1}{3} \cdot b \tag{2}$$

Zunächst eliminieren wir in (2) den Bruch, indem wir mit 3 multiplizieren um dann Gleichung (1) von (2) abzuziehen. Dies ergibt:

$$14s + 8w = 200$$

Somit erhalten wir für die Anzahl der schwarzen und weißen Kühe, dass

$$w = \frac{200 - 14s}{8} = 25 - \frac{7}{4}s$$

gelten muss. Da es keine gebrochenen oder negativen Kühe gibt, müssen wir an dieser Stelle fordern, dass s und w natürliche Zahlen sind. Somit muss $7s$ durch

4 teilbar, also s ein Vielfaches von 4, sein. Weiter ist zu berücksichtigen, dass $100 - 7s > 0$ gelten soll. Somit haben wir für s nur drei Wahlmöglichkeiten, nämlich $s \in \{4, 8, 12\}$. Ist nun $s = 4$, so folgt damit, dass $w = \frac{100-7\cdot 4}{4} = 18$ gilt. Dies in (2) eingesetzt liefert:

$$5 \cdot 4 + 3 \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot b = 74 + \frac{1}{3} \cdot b = 100.$$

Nach b freigestellt ergibt das $b = 26 \cdot 3 = 78$. Analog erhält man für $s = 8$, $w = 11$ und $b = 81$; beziehungsweise $s = 12$, $w = 4$ und $b = 84$ als mögliche Lösungen. Wie man sieht, ist die Aufgabe nicht eindeutig lösbar. (B.B.)

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Zahlenspielerei

a) Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die gleich dem Doppelten ihrer Quersumme ist?

b) Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die gleich dem Siebenfachen ihrer Quersumme ist?

Verteilung von Spielsteinen

Auf einem quadratischen 3×3 Spielfeld werden die Spielsteine nach folgender Regel verteilt:
Die Summe der Steine auf jeder Seite muss jeweils 15 ergeben, das Mittelfeld bleibt frei, die anderen Felder können belegt sein, müssen es aber nicht. Es können beispielsweise 40 Steine so verteilt werden, dass in jedem Randfeld 5 Spielsteine liegen.

5	5	5
5		5
5	5	5

Zeichne für die minimale und maximale Anzahl von Steinen, welche nach dieser Regel verteilt werden können, die Verteilung aufgeht. (CE)

Quadrat- und Kubikzahlen gesucht

Gibt es Primzahlen p, für welche $2p + 1$

a) eine Quadratzahl ist?

b) eine Kubikzahl ist? (H.F.)

Einerziffer gesucht

Wie heißt die Einerziffer von $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2010}$? (H.F.)

Konstruktion eines Punktes

Durch die in der Ebene beliebig gegebenen Punkte A und B ist eine Gerade $g(A, B)$ festgelegt. Wie kannst du *nur mit einem Zirkel* einen weiteren Punkt von $g(A, B)$ konstruieren? (H.F.)

Von Königen, Rittern und Äpfeln...

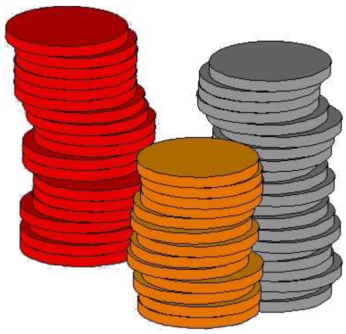
Vor langer Zeit, in einem fernen Königreich, umwarb einst ein edler Ritter die Hand der Königstochter. Daraufhin stellte ihm der König folgende Aufgabe, um seine Geisteskraft zu testen:

„Gehe hinaus zu meinem Obstgarten und fülle eine Sack mit Äpfeln. Auf dem Rückweg passierst du drei Tore, bei denen du jedem Torwärter genau die Hälfte der Äpfel aus deinem Sack, plus einen halben Apfel abgeben musst. Allerdings darfst du keinen der Äpfel zerschneiden, zerbeißen oder sonst wie zerteilen! Im Schloss darfst du nur noch einen Apfel haben, den du meiner Tochter überreichen sollst.“

a) Wie viele Äpfel muss der Ritter mindestens pflücken?

b) Könnte er auch, sollte der König dies verlangen, mit mehr als einem Apfel für die Königstochter zurückkehren? Berechne gegebenenfalls die Miniamalzahl von zu plückenden Äpfeln. (CE)

Falschgeld



Herr Sorgfältig stellt beim Sortieren seiner Münzen fest, dass von den 100 gleich aussehenden Münzen in seiner Kasse 10 gefälscht sind und sortiert diese auf einen Stapel. Die restlichen 90 Münzen sortiert er auf 9 Stapel mit je 10 Münzen. Dann wird er bei der Arbeit unterbrochen und verlässt den Raum für eine Kundenberatung. Er kommt erst nach längerer Zeit wieder zurück und kann sich nicht mehr erinnern, welcher Stapel die gefälschten Münzen enthielt, er weiß nur noch, dass alle gefälschten Münzen das gleiche Gewicht hatten mit jeweils genau 1 Gramm Differenz zum korrekten Gewicht von 10 Gramm. Kann man mit einer Wägung mit einer genauen Waage herausfinden, auf welchem Stapel die gefälschten Münzen liegen, wenn er nicht weiß, ob die gefälschten Münzen alle zu schwer oder alle zu leicht sind? (CE)

Neue Aufgaben

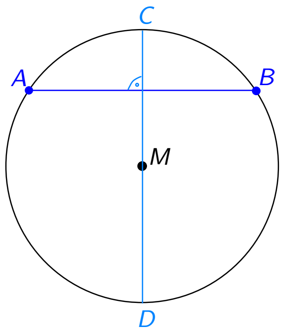
Klassen 8–13

Aufgabe 1015: Rationale Seitenlängen

In Aufgabe 927 (Monoid 92, Lösung in Monoid 93) wurde gezeigt, dass es keine gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke mit ausschließlich rationalen Seitenlängen gibt.

Gibt es überhaupt gleichschenklige, nicht gleichseitige Dreiecke, deren Seitenlängen alle rational sind? (WJB)

Aufgabe 1016: Sehnen im Kreis



In einem Kreis sei eine Sehne AB gezeichnet. Eine zweite Sehne CD, welche die Strecke AB halbiert und orthogonal zu ihr ist, verläuft dann immer durch den Mittelpunkt M des Kreises.

Du siehst es! Kannst Du es auch begründen?

(H.F.)

Aufgabe 1017: Quaderdiagonale

Zeige: Die Summe der Quadrate über den Diagonalen der sechs Seitenflächen eines Quaders ist das Vierfache des Quadrates einer räumlichen Diagonale. (WJB)

Aufgabe 1018: Wandersfrauen

Zwei Frauen starten zum Sonnenaufgang einen Spaziergang. Seltsamerweise gehen sie beide mit jeweils konstanter Geschwindigkeit und ohne Umwege. Frau Frühvogel geht von A nach B, Frau Spätschicht von B nach A. Am Mittag (12.00 Uhr) gehen sie aneinander vorbei. Frau Frühvogel erreicht B um 16.00 Uhr, Frau Spätschicht A um 21.00 Uhr.

Wann ging an diesem Tag die Sonne auf? (gefunden in Parabola)

Aufgabe 1019

Sei $x_k := 10^{-k}$, $y_k := \frac{1}{10^k-1}$, für $k = 1, 2, \dots,$ und u, v seien zwei natürliche Zahlen mit $u < v$, also $z = \frac{u}{v}$ eine rationale Zahl zwischen 0 und 1.

a) Zeige, dass sich z darstellen lässt als $z = (a + by_m)x_n$, wobei m, n natürliche Zahlen und a, b ganze Zahlen ≥ 0 sind.

b) Ist diese Darstellung eindeutig? (WJB)

Aufgabe 1020: Eine Erzeugungsregel für Primzahlen?

Sind p und p^2+2 Primzahlen, so sind auch p^3+2 und p^4+2 Primzahlen. Stimmt diese Regel? (H.F.)

Aufgabe 1021: Eine Löseraufgabe

Für welche natürliche Zahlen $a < 200$ ist $a^5 + 5$ durch 7 teilbar und $a + 2$ eine Primzahl? (Robin Fritsch, Lehrte)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 104

Klassen 8–13

Aufgabe 1008: Wahr oder falsch?

Es seien x, y, z und a beliebige reelle Zahlen. Aus $x + y + z = a$ folgt, dass $xy + yz + xz \leq \frac{1}{2}a^2$ ist. Trifft das zu? (H.F.)

Lösung:

Wenn man die Gleichung $x + y + z = a$ quadriert, erhält man:
$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) = a^2 \Longrightarrow xy+yz+xz = \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \leq \frac{1}{2}a^2$, weil $x^2 + y^2 + z^2$ nicht negativ ist. Damit triff die Aussage zu.

Aufgabe 1009: Folge der arithmetischen Mittel

Am Schluss der Aufgabe „Mittelwertfolgen“ der Mathespielereien aus Heft 96 wurde kurz die Folge der arithmetischen Mittel erwähnt. Diese soll nun näher behandelt werden. Sie ist rekursiv gegeben durch $a_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot (a_{n+1} + a_n)$ für $n \in$, wobei mit zwei Gliedern a_1 und a_2 begonnen wird, für die $0 < a_1 < a_2$ angenommen wird.

a) Zeige zunächst, dass $a_{n+2} - a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot (a_2 - a_1)$.

b) Folgere aus Teil a), dass $a_{n+2} - a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_2-a_1}{2^n}$ und begründe damit, dass die Teilfolge mit ungeraden Indizes streng monoton wächst und die Teilfolge mit geraden Indizes streng monoton fällt.

c) Leite aus Teil a) ferner die explizite Formel her:
$$a_n = a_2 - (a_2 - a_1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

d) Folgere aus Teil c), dass die Folge den Grenzwert $a = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$ besitzt und erläutere, warum man dieses Ergebnis aufgrund der rekursiven Konstruktion vermuten konnte.
Bemerkung: Für die im Heft 96 angegebenen Anfangsglieder $a_1 = 1$ und $a_2 = 5$ erhält man den Grenzwert $a = \frac{11}{3} = 3{,}\bar{6}$, der dort bereits erwähnt wurde.

(S.W.)

Lösung:

a) Sukzessive Anwendung der Rekursionsformel liefert:
$$a_{n+2}-a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(a_{n+1}-a_n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(a_n-a_{n-1}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot(a_2-a_1),$$

wobei diese Formel natürlich mit Induktion bewiesen werden kann.

b) Aus Teil a) erhält man:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} - a_n &= (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) \\
&= \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)(a_2 - a_1) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right)(a_2 - a_1) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}(a_2 - a_1).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt für ungerade Indizes $n = 2k-1$, dass $a_{2k+1} > a_{2k-1}$, und für gerade Indizes $n = 2k$, dass $a_{2k+2} < a_{2k}$. Damit sind die behaupteten Monotonieaussagen bewiesen.

c) Sukzessive Anwendung der Formel aus Teil a) liefert:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_2 - a_1) \\
&= a_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (a_2 - a_1) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot (a_2 - a_1) = ... \\
&= a_2 + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \cdot (a_2 - a_1).
\end{aligned}$$

d) Da $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, erhält man aus Teil c):

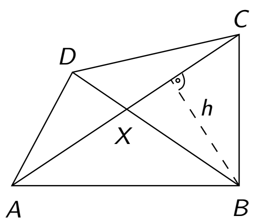
$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = a_2 - (a_2 - a_1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(2a_2 + a_1).$$

Man erhält also den Grenzwert a als (konvexe) Linearkombination der Anfangsglieder, wobei a_2 die doppelte Gewichtung gegenüber a_1 hat. Dies kann man sich so plausibel machen, dass bei der sukzessiven Intervallhalbierung zunächst a_3 als Mitte des Intervalls $]a_1, a_2[$ auftritt und alle weiteren a_n in der Hälfte $]a_3, a_2[$ liegen.

Aufgabe 1010: Halbierungen durch Diagonale

In einem Viereck $ABCD$ sei X der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Zeige: Wenn nun X die Diagonale $\overline{AC}$ halbiert, dann wird die Fläche des Vierecks $ABCD$ von $\overline{BD}$ ebenfalls halbiert. (H.F.)

Lösung:



Die Grundseiten $\overline{AX}$ und $\overline{CX}$ der Dreiecke $\triangle ABX$ und $\triangle BCX$ sind nach Voraussetzung gleich lang.
Da beide Dreiecke die gleiche Höhe h aus dem Punkt B haben, sind somit die Dreiecke $\triangle ABX$ und $\triangle BCX$ flächengleich.
Genau so zeigt man, dass die Dreiecke $\triangle AXD$ und $\triangle CDX$ flächengleich sind.

Also gilt: $|\triangle ABX| + |\triangle AXD| = |\triangle BCX| + |\triangle DXC|$. q.e.d.

Aufgabe 1011: Karlas Kartenspiel

Karla hat $n = 150$ Spielkarten mit weißen Rückseiten. Davon ist ein Bruchteil p einseitig rot gefärbt und die restlichen sind auf beiden Seiten weiß. Die Karten liegen nebeneinander auf dem Tisch. $N = 30$ sind auf ihrer Oberseite rot. Karla schließt daraus

a) p muss ungefähr $\frac{N}{n} = \frac{30}{150} = 0,2$ sein

b) Ungefähr np, also ungefähr $n \cdot (\frac{N}{n}) = N = 30$ Karten werden auf der Unterseite rot sein. Sind diese Schlüsse gerechtfertigt?

(WJB)

Lösung:

a) Nein, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Oberseite einer Karte rot ist, ist nicht p sondern $P(\text{Karte hat eine rote Seite } \textit{und} \text{ diese liegt oben}) = p \cdot \frac{1}{2}$. Der relative Anteil $\frac{N}{n}$ der sichtbaren roten Seiten ist somit eine gute Schätzung für $\frac{p}{2}$ und wir geben $\frac{2N}{n} = 0,4$ als Schätzwert für p.

b) Nein; wir wissen, dass die Unterseite der $N = 30$ oben roten Karten weiß sind. Für die verbleibenden $n - N = 120$ Karten gilt
$P(\text{Unterseite rot}|\text{Oberseite weiß}) = \frac{P(\text{eine Seite rot und diese liegt unten})}{P(\text{Oberseite weiß})} = \frac{p \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{p}{2}}$.
Wir erwarten demnach ungefähr $(n - N)\frac{\frac{p}{2}}{1 - \frac{p}{2}}$ rote Unterseiten. Ersetzen wir $\frac{p}{2}$ durch den Schätzwert $0,2$, so erhalten wir $120 \cdot \frac{0,2}{0,8} = 30$. Obwohl Karin falsch argumentiert hat, stimmt hier also das Ergebnis.

Bemerkung: Ist p groß, so haben wir bei der Schätzung von $\frac{p}{2}$ durch die relative Häufigkeit $\frac{N}{n}$ das Risiko, dass der Schätzwert für p größer als 1 wird. Wir sollten dann vielleicht nicht $\frac{p}{2}$ schätzen sondern $\frac{1-p}{2}$ (durch die relative Häufigkeit für „weiß“).

Aufgabe 1012: Rekonstruktion einer Division

```
   * * * * * * : * * * = * * * * , * * * *
 - * * *
 -------
       * * *
     - * * *
     -------
         * * *
       - * * *
       -------
           * * *
         - * * *
         -------
             * * * *
           - * * * *
           ---------
                   0
```

Ersetze die Symbole $\ast$ durch Ziffern, sodass eine korrekt ausgeführte Division entsteht. Der erste und der letzte Stern der 1. Zeile sind $\neq 0$. (H.F.)

Lösung:
Wir schreiben die Division teilweise mit Buchstaben an Stelle von Sternen.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & A & B & C & D & E & F & : & G & H & J & = & K & L & M & N & ,P & Q & R & S \\
- & a & b & c & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & d & D & E & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & - & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & \ast & \ast & F & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & - & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & e & f & g & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & - & h & i & k & & & & & & & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & l & m & n & p & & & & & & & & & \\
 & & & & & & - & l & m & n & p & & & & & & & & & \\
\cline{7-11}
 & & & & & & & & & & 0 & & & & & & & & &
\end{array}
$$

1. Zunächst sieht man: $L = 0$ (3. Zeile), $Q = R = 0$ (9. Zeile). Weiter ist $g = 0$ sowie $m = n = p = 0$.
2. $ef0 - hik = l \Longrightarrow k \neq 0$. $P \cdot GHJ = hik$ und $k \neq 0 \Longrightarrow P \neq 0,\ J \neq 0$.
3. $S \cdot GHJ = l000 \Longrightarrow J = 2$ oder $J = 5$. Weil aber $GH2$ kein $t-$faches von 1000 sein kann mit $t \leq 9$, muss $J = 5$ sein. Dann aber folgt $GHJ = 125$ oder $GHJ = 625$. Auf jeden Fall ist $HJ = 25$.
4. $P \cdot G25 = hik$, $k \neq 0 \Longrightarrow P$ ist ungerade $\Longrightarrow k = 5 \Longrightarrow l = 5$.
5. Aus $S \cdot G25 = 5000$ folgt $G25 = 625$ und $S = 8$.
6. Wegen $K \cdot 625 = abc < 1000$ folgt $K = 1$. Ganz analog folgt $M = 1$, $N = 1$, $P = 1$.

Damit lautet die Division: $631938 : 625 = 1011{,}1008$

Aufgabe 1013: Tripel von Primzahlen

Es seien p_1, p_2 und p_3 drei Primzahlen mit $p_1 < p_2 < p_3$, für die gelte

(1) $1 + p_1 \cdot p_2 = p_3$

(2) $p_2 \cdot p_3 < 255$

Finde alle Tripel (p_1, p_2, p_3) von Primzahlen, die diese Bedingungen erfüllen.

(Robin Fritsch, Lehrte)

Lösung:
Weil 2 die kleinste Primzahl ist und $p_1 < p_2 < p_3$ gilt, kann p_3 nicht 2 sein. Also ist p_3 ungerade. Wegen (1) ist dann auch $1 + p_1 \cdot p_2$ ungerade. Weil 1 ungerade ist, muss $p_1 \cdot p_2$ folglich gerade sein. Also muss entweder p_1 oder p_2 gerade sein. Da 2 die einzige gerade Primzahl ist und $p_1 < p_2$ gilt, folgt $p_1 = 2$. Dies setzen wir in (1) ein und erhalten $1 + 2 \cdot p_2 = p_3$. Dies wiederum setzen wir in (2) ein

und formen um:

$$
\begin{aligned}
p_2 \cdot (1 + 2p_2) &< 255 \\
2(p_2)^2 + p_2 &< 255 && \mid :2 \\
(p_2)^2 + \frac{1}{2}p_2 &< 127{,}5 && \mid + \frac{1}{16} \\
(p_2)^2 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{16} &< 127{,}5625 \\
\left(p_2 + \frac{1}{4}\right)^2 &< 127{,}5625 && \mid \sqrt{\ }, p_2 > 0 \\
p_2 + \frac{1}{4} &< 11{,}29\ldots && \mid - \frac{1}{4} \\
p_2 &< 11{,}04\ldots
\end{aligned}
$$

Da p_2 ganzzahlig ist, folgt $p_2 \leq 11$. Da $p_1 = 2$ und $p_1 < p_2$ ist, folgt $3 \leq p_2$. Also ist auch $3 \leq p_2 \leq 11$. Somit ergeben sich folgende Möglichkeiten:

p_2	$p_3 = 1 + 2p_2$	*Primzahl*?
3	7	Ja
5	11	Ja
7	15	Nein
11	23	Ja

Also erfüllen nur die Tripel $(2, 3, 7)$, $(2, 5, 11)$ und $(2, 11, 23)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 1014: Primzahlen als arithmetische Mittel

Im Mathematikunterricht sollte Kim (und ihre gesamte Klasse) folgende Aufgabe lösen:

> Gibt es zwei natürliche Zahlen mit dem arithmetischen Mittel 17, von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere?

Schnell kommt Kim zu dem Schluss, dass diese Frage zu verneinen ist.

a) Zeige, wie auch Kim es gemacht hat, dass es solche natürlichen Zahlen nicht gibt.

b) Kim möchte die Aussage aus der Aufgabe ändern, so dass sie lösbar ist. Also beginnt sie mit ihren Forschungen. Zunächst untersucht sie die Frage: „Gibt es zwei natürliche Zahlen mit dem arithmetischen Mittel 17, von denen die eine k-mal so groß ist wie die andere?“ Tatsächlich findet sie nach kurzer Zeit solche Zahlen. Bestimme auch Du alle solche Zahlen und bewerte Deine Ergebnisse.

c) Als nächstes verallgemeinert Kim die Aufgabe, indem sie als arithmetisches Mittel andere Zahlen als 17 zulässt. Sie entdeckt, dass es unter allen natürlichen Zahlen nur zwei gibt, deren arithmetisches Mittel eine Primzahl ist, und von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere. Welche Zahlen sind das?

d) Als krönenden Abschluss möchte Kim die Frage klären, für welche Werte es zwei natürliche Zahlen mit dem arithmetischen Mittel p gibt, von denen die eine k-mal so groß ist wie die andere. (MG)

Lösung:

a) Die Aufgabenstellung führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y &= 17 \\ y &= 2x. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation der ersten Gleichung mit 2 folgt mittels Einsetzen in die zweite Gleichung

$$34 = x + y = x + 2x = 3x.$$

Da 3 kein Teiler von 34 ist, kann es keine zwei natürlichen Zahlen mit den geforderten Eigenschaften geben.

b) Analog zu vorherigem Aufgabenteil ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y &= 17 \\ y &= kx. \end{aligned}$$

und somit

$$34 = x + y = x + kx = (k+1)x.$$

Da $x = \frac{34}{k+1}$ eine natürliche Zahl sein soll, muss $k+1$ ein Teiler von 34 sein, also $k+1 \in \{1, 2, 17, 34\}$ und somit $k \in \{0, 1, 16, 33\}$.
Da 0 keine natürliche Zahl ist und die Aufgabe mit $k = 1$ keinen Sinn hat, bleiben als sinnvolle Lösungen nur $k = 16$ und $k = 33$, was auf die Lösungstupel $(2, 32)$ und $(1, 33)$ führt.

c) Diesmal ist der Ansatz

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y &= p \\ y &= 2x. \end{aligned}$$

mit einer Primzahl p. Daraus folgt

$$2p = x + y = x + 2x = 3x, \text{ also } x = \frac{2}{3}p.$$

Damit x eine natürliche Zahl ist, muss $p = 3$ sein.
Dann sind $x = 2$ und $y = 4$ die gesuchten Zahlen.

d) Analog zu bisherigen Aufgabenteilen, insbesondere Teil b, ergibt sich $x = \frac{2p}{k+1}$ und damit $k \in \{0, 1, p-1, 2p-1\}$. Mit den Argumenten aus Teil b bleiben wieder $k = p-1$ und $k = 2p-1$ als einzig sinnvolle Werte für alle Primzahlen $p \geq 3$.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Ziffernspielereien

Wähle eine dreistellige Zahl, bei der nicht alle Ziffern gleich sind. Ordne die Ziffern Deiner Zahl einmal so an, dass die größtmögliche Zahl entsteht, und dann so (gegebenenfalls mit führenden Nullen), dass die kleinstmögliche Zahl entstehet. Dann bilde die Differenz und wende das Verfahren auf das Resultat erneut an.

a) Was fällt Dir bei der entstehenden Zahlenfolge auf?

b) Wie verhält es sich für zwei- beziehungsweise vierstellige Zahlen?

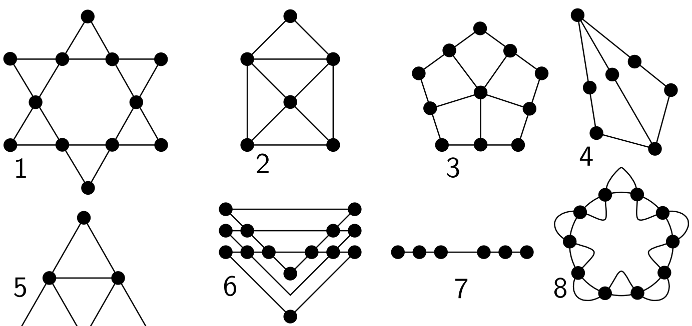
(nach H. Rössler)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2011 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 103

In Heft 103 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Das Haus des Nikolaus



Die Figuren, die du siehst, sind aus Punkten und Strecken oder gekrümmten Linien aufgebaut. Sie haben die Eigenschaft, dass man von jedem Punkt der Figur längs eines Weges, der aus Strecken/ Linien der Figur besteht, zu jedem anderen Punkt gelangen kann. Die Figur 2 heißt das Haus des Nikolaus.

a) Untersuche, welche der Figuren 1–8 so durchlaufen werden können, dass jede Strecke/Linie genau einmal benutzt wird und man wieder am Startpunkt endet.

b) Konstruiere nun weitere Figuren wie 1–8 und versuche an ihnen und den Figuren 1–8 zu klären, unter welchen Bedingungen man eine solche Figur „in einem Zug“ vollständig durchlaufen kann, ohne eine Strecke/Linie mehrfach zu benutzen, und der Startpunkt zugleich Endpunkt ist. (H.F)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Michael Delhougne (Otto-Hahn-Schule Hanau, Kl. 10), Robin Fritsch (Gymnasium Lehrte, Kl. 10), Cornelia Stuckert, Eva Springer, Hanna Krafftczyk, Sonja Steineck (Alfred-Delp-Schule Dieburg, Kl. 12), Leonie Rößler (Geschwister-Scholl-Schule Niddatal, Kl. 3), Markus Voelckel (Gymnasium Casimirianum Coburg, Kl. 10), Marcel Wittmann (Karolinengymnasium Frankenthal, Kl. 7).

Alle Löserinnen und Löser haben erkannt, dass die Figuren 1, 5, 6 und 8 in der geforderten Weise durchlaufen werden können, die Figuren 2, 3, 4 und 7 aber nicht. Einige haben darüber hinaus untersucht, welche der letzteren denn zumindest ein Durchlaufen zulassen, bei dem Start- und Endpunkt nicht zusammenfallen müssen; dies sind die Figuren 2, 4 und 7. Robin Fritsch, das Team von der Alfred-Delp-Schule, Leonie Rößler und Markus Voelckel nennen als Kriterium, dass eine Figur genau dann wie in der Aufgabenstellung gefordert durchlaufen werden kann, wenn von jedem Punkt eine gerade Anzahl von Strecken ausgeht. Hier der Beweis dieses Sachverhaltes von Robin Fritsch:

„Wenn man während eines Durchlaufs an einem Punkt vorbeikommt, benutzt man eine Strecke zum Punkt hin und eine davon weg. Bei einer Figur, die man wie beschrieben durchlaufen kann, gehen also von allen Punkten, die nicht Start- oder Endpunkte sind, eine gerade Anzahl von Strecken aus. Da aber Start- und Endpunkt zusammenfallen, geht auch von diesem Punkt eine gerade Anzahl von Strecken aus. Es geht also von jedem Punkt eine gerade Anzahl von Strecken aus.

Betrachten wir nun eine Figur, bei der von jedem Punkt eine gerade Anzahl von Strecken ausgeht, und nehmen an, dass wir von einem Anfangspunkt A gestartet sind und bei einem Endpunkt E angekommen sind. Dann heißt das aber, dass wir von den Strecken zu E erst eine ungerade Anzahl benutzt haben. Es gibt also mindestens noch eine unbenutzte Strecke, welche wir jetzt benutzen. Dadurch kommen wir zu einem neuen Endpunkt E'. Wenn wir nie zu A zurückkommen würden, hätte die Figur also unendlich viele Strecken. Widerspruch!

Wir können also stets einen Startpunkt aussuchen und nach einem Durchlauf zu ihm zurückkehren. Wenn es jetzt noch unbenutzte Strecken gibt, gibt es einen Punkt P, von dem benutzte und unbenutzte Strecken ausgehen (wäre dies nicht der Fall, hätten wir getrennte Figuren). Wie wir oben bewiesen haben, gibt es einen Durchlauf, der nur unbenutzte Strecken benutzt (da von allen Punkten nach dem ersten Durchlauf ja immer noch eine gerade Anzahl von unbenutzten Strecken ausgeht) und P als Start- und Endpunkt hat. So schaffen wir es also, alle Strecken genau einmal zu durchlaufen.

Man kann also jede Figur, bei der von jedem Punkt eine gerade Anzahl von Strecken ausgeht, wie in der Aufgabe beschrieben durchlaufen.

Damit haben wir unsere Aussage vom Anfang bewiesen.“ (von Robin Fritsch)

Das Gesetz der kleinen Zahlen

von Wolfgang J. Bühler

Addiert man unabhängige Zufallsvariable X_1, X_2, ..., X_n, von denen jede den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ annimmt, so hat die Summe $S_n = X_1+X_2+...+X_n$ die Binomialverteilung $B(p, n)$, das heißt $P(S_n = k) = b(p, n; k) = \binom{n}{k} p^k q^{(n-k)}$, für $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Für große Werte von n und k ist $b(p, n; k)$ nicht einfach zu berechnen.

Eine erste Hilfe bietet hier das Gesetz der großen Zahlen. Es besagt, dass $\frac{S_n}{n}$ gegen $E(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ konvergiert. Dies gibt einerseits eine Begründung dafür, dass wir $\frac{S_n}{n}$ als Schätzung für p verwenden und lässt uns andererseits vermuten, dass bei festem n und p die Wahrscheinlichkeiten für Werte von k in der Nähe von np am größten sind.

Zum Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten ist der Zentrale Grenzwertsatz nützlicher:

$$P\left(a < \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq b\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

Dabei ist $E(S_n) = np$ und $\mathrm{Var}(S_n) = npq$.

Wir sehen damit, dass, wenn n groß ist, $P(a\sqrt{npq} + np < S_n \leq b\sqrt{npq} + np)$ ungefähr gleich $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ sein sollte.

Was bedeutet hier „für große n“?

Wie immer, wenn man einen Konvergenzsatz für eine Approximation verwenden will, ist dies nicht einfach zu entscheiden.

Als Beispiel betrachten wir eine „große“ Kolonie von n Bakterien, die jeweils mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit p mutieren, also ihr Erbgut verändern. Die Anzahl S_n der mutierten Bakterien ist dann wieder $B(p, n)$-verteilt. Aber Beobachtungen dieser Anzahl liefern kleine Werte k, sodass die Approximation durch den Zentralen Grenzwertsatz nicht sinnvoll erscheint.

Die Beobachtung relativ kleiner Werte für k führt uns dazu, $E(S_n) = np$ nicht gegen unendlich gehen zu lassen, sondern festzuhalten.

Wir untersuchen deshalb $b(p, n; k)$ für $p = \frac{\lambda}{n}$, mit $\lambda > 0$, also:

$$\begin{aligned} b(p, n; k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda^k}{n^k}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \end{aligned}$$

Für festes k und $n \to \infty$ konvergieren die Faktoren der Form $\frac{n-i}{n}$ gegen 1 und $1 - \frac{\lambda}{n}$, also auch $(1 - \frac{\lambda}{n})^{-k}$ ebenfalls gegen 1. Wir müssen also nur noch den letzten Faktor untersuchen. Dazu logarithmieren wir und betrachten

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = n \cdot \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right).$$

Nun ist $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln(1 - \frac{\lambda}{n}) = \lim\limits_{x\to 0} \cdot \frac{1}{x} \ln(1 - \lambda x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) = \ln(1 - \lambda x)$ und $g(x) = x$. $f(x)$ und $g(x)$ konvergieren beide gegen Null. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Regel von l'Hospital($*$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\lambda}{1 - \lambda x} = -\lambda.$$

Wir machen nun das Logarithmieren rückgängig und kommen zu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\right)} = e^{-\lambda}$$

und damit insgesamt zu $\lim\limits_{n\to\infty} b(\frac{\lambda}{n}, n; k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =: p(\lambda, k)$, mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt *Poisson-Verteilung* $P(\lambda)$ und die Konvergenzaussage ist als Gesetz der kleinen Zahlen bekannt.

Bundeswettbewerb Mathematik 2011

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Zehn Schalen stehen im Kreis. Sie werden – irgendwo beginnend – im Uhrzeigersinn mit 1, 2, ..., 9 bzw. 10 Murmeln gefüllt. In einem Zug darf man zu zwei benachbarten Schalen je eine Murmel hinzufügen oder aus zwei benachbarten Schalen – wenn sie beide nicht leer sind – je eine Murmel entfernen. Kann man erreichen, dass nach endlich vielen Zügen in jeder Schale genau 2011 Murmeln liegen?

Lösung: Nein, das kann man nicht erreichen.

Beweis: Zu Beginn liegen insgesamt $1 + 2 + ... + 9 + 10 = 55$ Murmeln in den Schalen, also eine *ungerade* Anzahl. Mit jedem Zug werden zwei Murmeln hinzugefügt oder entfernt. Die gesamte Anzahl der Murmeln in den Schalen bleibt also nach jedem Zug ungerade. Daher kann in endlich vielen Zügen nicht erreicht werden, dass in jeder Schale genau 2011 Murmeln liegen, weil dies insgesamt $10 \cdot 2011 = 20110$ Murmeln, also eine *gerade* Anzahl wären. □

Aufgabe 2

An einem runden Tisch sitzen 16 Kinder. Nach der Pause setzen sie sich wieder an den Tisch. Dabei stellen sie fest: Jedes Kind sitzt entweder auf seinem ursprünglichen Platz oder auf einem der beiden benachbarten Plätze.
Wie viele Sitzordnungen sind auf diese Weise nach der Pause möglich?

Lösung: Es gibt 2209 solche Sitzordnungen.

Beweis: Wir zählen die Anzahl der möglichen Sitzordnungen nicht für nur 16 Kinder, sondern allgemein für n Kinder, $n \geq 1$, die an einem (ausreichend großen) runden Tisch sitzen. Wir bezeichnen mit S_n die Anzahl der Sitzordnungen gemäß Aufgabenstellung, in denen also jedes der n Kinder entweder auf seinem ursprünglichen Platz oder auf einem der beiden benachbarten Plätze sitzt. Die Folge $(S_n)_{n\geq 3}$ lässt sich, wie wir zeigen werden, mit Hilfe der Folge der *Fibonacci-Zahlen* $(F_n)_{n\geq 1}$ ausdrücken, die bekanntlich über $F_1 = F_2 = 1$ und, für alle $n \geq 3$, über $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ definiert ist. Genauer ist $S_1 = 1$ (denn ein Kind kann stets nur auf demselben Platz sitzen), $S_2 = 2$ (denn zwei Kinder sitzen nach der Pause entweder auf ihren ursprünglichen Plätzen oder sie haben die Plätze getauscht) und

$$S_n = F_n + 2 \cdot F_{n-1} + 2 = F_{n+1} + F_{n-1} + 2 \tag{2.1}$$

für alle $n \geq 3$. Hieraus ergibt sich

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
S_n	1	2	6	9	13	20	31	49	78	125	201	324	523	845	1366	2209

Wir beweisen (2.1) mit Hilfe dreier Beobachtungen: Es stellt sich heraus, dass es nur zwei verschiedene Typen von Sitzordnungen gibt, die wir in den Beobachtungen 1 und 2 charakterisieren und in Beobachtung 3 zählen. Dabei mögen im Folgenden n Kinder für beliebiges, aber fest gewähltes $n \geq 3$ am Tisch sitzen. Die Plätze seien dabei gegen den Uhrzeigersinn mit 1, 2, ... , n nummeriert, so dass Platz 1 der rechte Nachbar von Platz n ist.

Beobachtung 1: Sitzen *zwei* Kinder K_1 und K_2, die schon vor der Pause direkt nebeneinander saßen, nach der Pause jeweils auf dem Platz, der ihrem ursprünglichen Platz rechts benachbart ist, so müssen nach der Pause *alle* Kinder auf dem Platz sitzen, der ihrem ursprünglichen Platz rechts benachbart ist. Um dies einzusehen, mögen K_1 und K_2 vor der Pause auf den Plätzen 1 und 2 und nach der Pause auf den Plätzen 2 und 3 sitzen. Das Kind K_3, das vor der Pause auf Platz 3 saß, kann dann nach der Pause weder auf seinem ursprünglichen Platz 3, noch auf dem links benachbarten Platz 2 sitzen, denn diese beiden Plätze sind durch K_1 und K_2 besetzt. Das Kind K_3 muss also gemäß Aufgabenstellung nach der Pause auf Platz 4 (oder Platz 1, falls $n = 3$) sitzen, der seinem ursprünglichen Platz rechts benachbart ist. Ist n entsprechend groß, weisen wir auf diese Weise nacheinander auch für die Kinder, die ursprünglich auf den Plätzen 4, 5, ... , $n - 1$, n saßen, nach, dass sie nach der Pause auf den jeweils rechts benachbarten Plätzen 5, 6, ... , n, 1 sitzen müssen.
Entsprechend gilt: Sitzen *zwei* Kinder, die schon vor der Pause nebeneinander saßen, nach der Pause jeweils auf dem Platz, der ihrem ursprünglichen Platz links benachbart ist, so müssen nach der Pause *alle* Kinder auf dem Platz sitzen, der ihrem ursprünglichen Platz links benachbart ist.

Wir bezeichnen die Sitzordnungen, in denen die Kinder nach der Pause alle auf den ihren ursprünglichen Plätzen jeweils rechts benachbarten oder alle auf den jeweils links benachbarten Plätzen sitzen, als *zyklisch vertauschte Sitzordnungen.*

Beobachtung 2: Wir betrachten eine beliebige, aber fest gewählte Sitzordnung, die sich gemäß Aufgabenstellung ergeben kann, die jedoch nicht zyklisch vertauscht ist. Enthält sie ein Kind L, das nach der Pause nicht auf seinem ursprünglichen Platz sitzt, sondern auf Platz m, der seinem ursprünglichen Platz rechts (beziehungsweise links) benachbart ist, so kann das Kind M, welches vor der Pause auf Platz m saß, nach der Pause nicht mehr auf seinem ursprünglichen Platz sitzen, da er von L besetzt ist. M muss dann rechts oder links von seinem ursprünglichen Platz sitzen. Da die Sitzordnung nicht zyklisch vertauscht ist, kann M nach Beobachtung 1 dann nur auf dem Platz sitzen, der seinem ursprünglichen Platz links (beziehungsweise rechts) benachbart ist; das ist der ursprüngliche Platz von L. Die beiden Kinder L und M bilden damit in der Sitzordnung ein *Paar*, das seine ursprünglichen Plätze getauscht hat. Alle übrigen $n - 2$ Kinder haben in der Sitzordnung ihre Plätze ohne Beteiligung von L und M auf den übrigen Plätzen gemäß Aufgabenstellung gewählt, so dass auch für sie gilt: Entweder bilden sie mit genau einem direkt benachbarten Kind ein Paar oder sie sitzen nach der Pause auf ihrem ursprünglichen Platz. Solche Sitzordnungen bezeichnen wir im Folgenden als *gepaarte Sitzordnungen*. Alle Sitzordnungen, die sich gemäß Aufgabenstellung ergeben können und nicht zyklisch vertauscht sind, müssen also gepaarte Sitzordnungen sein.

Gepaarte Sitzordnungen entsprechen eineindeutig den *Matchings* der n Kinder, die am runden Tisch sitzen: Als *Matching* der Kinder bezeichnen wir eine Festlegung von Paaren direkt benachbarter Kinder, wobei jedes Kind höchstens einem Paar angehört (auch die Festlegung keines Paares ist also ein Matching). Matchings lassen sich auf folgende Weise in Sitzordnungen „übersetzen“ und umgekehrt: Die Kinder, die einem Paar des Matching angehören, tauschen nach der Pause innerhalb der jeweiligen Paare ihre ursprünglichen Plätze, und alle Kinder, die in dem Matching keinem Paar angehören, sitzen auch nach der Pause auf ihren ursprünglichen Plätzen. Es ist klar, dass unterschiedliche Matchings auf diese Weise in unterschiedliche gepaarte Sitzordnungen übersetzt werden und umgekehrt.

Beobachtung 3: Für alle n, mit $n \geq 3$, gibt es genau zwei zyklisch vertauschte Sitzordnungen. Um die Anzahl der gepaarten Sitzordnungen von n Kindern zu bestimmen, zählen wir nach Beobachtung 2 gleichbedeutend die Anzahl der Matchings von n Kindern, wobei auch die Kinder auf den Plätzen n und 1 ein Paar bilden können. Wir teilen das Zählen anhand einer Fallunterscheidung auf; damit sind alle Möglichkeiten erfasst und keine ist doppelt gezählt:

1. Das Kind auf Platz n ist in keinem Paar enthalten (sitzt also nach der Pause auf seinem ursprünglichen Platz). Die Matchings aller n Kinder in diesem Fall entsprechen genau den Matchings auf der Menge der Kinder, die ursprünglich auf den Plätzen $1, 2, \dots, n-1$ sitzen, wobei aber die Kinder auf den Plätzen $n-1$ und 1 *kein* Paar bilden können.
2. Die Kinder auf den Plätzen $n-1$ und n bilden ein Paar (haben also ihre Plätze getauscht). Die Matchings aller n Kinder in diesem Fall entsprechen genau den verschiedenen Matchings auf der Menge der Kinder, die ursprünglich auf den Plätzen $1, , 2, \dots n-2$ sitzen, wobei nun aber die Kinder auf den Plätzen $n-2$ und 1 *kein* Paar bilden können.
3. Die Kinder auf den Plätzen 1 und n bilden ein Paar (haben also ihre Plätze getauscht). Die Matchings aller n Kinder in diesem Fall entsprechen genau den verschiedenen Matchings auf der Menge der Kinder, die ursprünglich auf den Plätzen $2, \dots, n-2, n-1$ sitzen, wobei nun aber die Kinder auf den Plätzen $n-1$ und 2 kein Paar bilden können. Es ist klar, dass die Anzahl dieser Matchings der Anzahl der Matchings in Fall 2 entspricht.

Bezeichnen wir mit A_k für $k \geq 1$ die Anzahl verschiedener Matchings auf der Menge der Kinder, die ursprünglich auf den Plätzen $1, 2, \dots, k$ sitzen, wobei die Kinder auf den Plätzen k und 1 *kein* Paar bilden können, so besagt die obige Fallunterscheidung also, dass genau $A_{n-1} + 2 \cdot A_{n-2}$ gepaarte Sitzordnungen von n Kindern existieren. Wir zeigen nun, dass $A_k = F_{k+1}$ für alle $k \geq 1$ ist, wobei F_{k+1} die $(k+1)$-te Fibonacci-Zahl bezeichnet. Denn es sind $A_1 = 1$ (nur keine

Festlegung eines Paares möglich) und $A_2 = 2$ (keine Festlegung eines Paares sowie Paar $\{1, 2\}$). Für $k \geq 3$ lassen sich die A_k Matchings der k Kinder unterteilen in die A_{k-1} Matchings, bei denen das Kind auf Platz k nicht in einem Paar enthalten ist, sowie die A_{k-2} Matchings, bei denen die Kinder auf den Plätzen $k-1$ und k ein Paar bilden: $A_k = A_{k-1} + A_{k-2}$. Damit entsprechen Anfangsglieder und Rekursion der Folge $(A_k)_{k\geq 1}$ denen der Folge $(F_{k+1})_{k\geq 1}$, so dass beide Folgen gleich sein müssen.

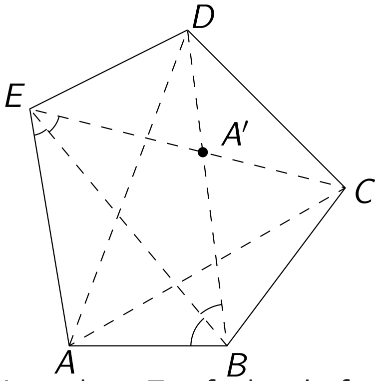
Der Ausdruck für S_n in (2.1) zählt gerade die $A_{n-1} + 2 \cdot A_{n-2} = F_n + 2 \cdot F_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1}$ gepaarten Sitzordnungen von n Kindern, wie wir sie in Beobachtung 3 hergeleitet haben, sowie die zwei zyklisch vertauschten Sitzordnungen. Nach Beobachtung 1 und 2 sind damit alle möglichen Sitzordnungen erfasst. $\square$

Aufgabe 3

Die Diagonalen eines konvexen Fünfecks teilen jeden seiner Innenwinkel in drei gleich große Teile. Folgt hieraus, dass das Fünfeck regelmäßig ist?

Lösung: Ja, das Fünfeck ist dann notwendig ein regelmäßiges Fünfeck.

Beweis: Mit A, B, C, D und E seien wie in der folgenden Skizze die Ecken des konvexen Fünfecks der Aufgabestellung bezeichnet.



Nach Voraussetzung ist

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE = \tfrac{1}{3}\sphericalangle BAE,$$

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle DBE = \sphericalangle EBA = \tfrac{1}{3}\sphericalangle CBA, \qquad (3.1)$$

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle ECA = \sphericalangle ACB = \tfrac{1}{3}\sphericalangle DCB, \qquad (3.2)$$

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \tfrac{1}{3}\sphericalangle EDC, \qquad (3.3)$$

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CED = \tfrac{1}{3}\sphericalangle AED. \qquad (3.4)$$

In jedem Fünfeck gilt für die Summe der Innenwinkel

$$3 \cdot 180^\circ = \sphericalangle BAE + \sphericalangle CBA + \sphericalangle DCB + \sphericalangle EDC + \sphericalangle AED,$$

also zusammen mit (3.1) bis (3.4)

$$180^\circ = \tfrac{1}{3}\sphericalangle BAE + \sphericalangle EBA + \sphericalangle DCE + \sphericalangle BDC + \sphericalangle AEB. \qquad (3.5)$$

Es sei A' der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$; er liegt im Inneren des Fünfecks, und die Punkte A' und A liegen in unterschiedlichen der von $\overline{BE}$ gebildeten Halbebenen. Es ist

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \sphericalangle AEB + \sphericalangle EBA + \sphericalangle BAE = \sphericalangle BEC + \sphericalangle DBE + \sphericalangle BAE \\ &= \sphericalangle BEA' + \sphericalangle A'BE + \sphericalangle BAE = \sphericalangle BEA' + \sphericalangle A'BE + \sphericalangle EA'B, \end{aligned} \qquad (3.6)$$

wobei die erste und letzte Gleichung aus der Summe der Innenwinkel in den Dreiecken $\triangle BEA$ und $\triangle EBA'$ folgen, die zweite Gleichung aus den Winkelbeziehungen in (3.4) und (3.1), sowie die dritte Gleichung aus $A' \in \overline{CE} \cap \overline{BD}$. Aus der letzten Gleichung in (3.6) folgt $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EA'B$; außerdem ist $\sphericalangle EA'B = \sphericalangle CA'D$

(Gegenwinkel). Damit folgt zusammen mit der Betrachtung der Summe der Innenwinkel in $\triangle CDA'$

$$180^\circ = \sphericalangle A'DC + \sphericalangle DCA' + \sphericalangle CA'D = \sphericalangle BDC + \sphericalangle DCE + \sphericalangle BAE. \qquad (3.7)$$

Aus der Addition in (3.7) mit der ersten Gleichung in (3.6) ergibt sich

$$360^\circ = 2 \cdot \sphericalangle BAE + \sphericalangle EBA + \sphericalangle DCE + \sphericalangle BDC + \sphericalangle AEB$$

und Subtraktion von (3.5) ergibt

$$180^\circ = \tfrac{5}{3} \sphericalangle BAE \iff \sphericalangle BAE = \tfrac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ.$$

Wir können analog zur Gleichungskette (3.6) für alle anderen Innenwinkel schließen, womit

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle CBA = \sphericalangle DCB = \sphericalangle EDC = \sphericalangle AED = \tfrac{3}{5} \cdot 180^\circ \qquad (3.8)$$

folgt. Damit ist nachgewiesen, dass alle Innenwinkel des Fünfecks identisch sind. (Dies reicht noch nicht für den Nachweis aus, dass das Fünfeck regelmäßig ist!)

Zusammen mit (3.1) und (3.4) schließen wir aus (3.8), dass im Dreieck $\triangle BEA$ die Winkel $\sphericalangle EBA = \frac{1}{3} \sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle AEB = \frac{1}{3} \sphericalangle AED$ gleich sind, also $\triangle BEA$ gleichschenklig mit $\overline{EA} = \overline{AB}$ ist. Analog schließen wir aus der Betrachtung der gleichschenkligen Dreiecke $\triangle ADE$, $\triangle ECD$, $\triangle DCB$ und $\triangle CAB$, dass alle Seiten des Fünfecks gleich sind.

Da alle Innenwinkel gleich und alle Seiten gleich lang sind, muss ein Fünfeck wie in der Aufgabenstellung notwendig ein regelmäßiges Fünfeck sein. □

Aufgabe 4

Es seien a und b positive ganze Zahlen. Bekanntlich liefert die Division mit Rest von $a \cdot b$ durch $a + b$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q und r mit $a \cdot b = q \cdot (a+b) + r$ und $0 \le r < a+b$. Bestimme alle Paare (a, b), für die $q^2 + r = 2011$ gilt.

Lösung: Genau die Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen in

$$P = \big\{ (a, b) \bigm| |a - b| = 2010 \text{ und } 2012 \le a + b \le 2100 \big\} \qquad (4.1)$$

erfüllen die in der Aufgabenstellung angegebene Gleichung.

Bemerkung: Die Ungleichung $2012 \le a + b$ muss eigentlich nicht separat gefordert werden; wir führen sie aus Darstellungsgründen mit. Sie folgt für $a, b \ge 1$ schon allein aus $|a - b| = 2010$ zusammen mit der Dreiecksungleichung

$$2010 = |a-b| = |(a-1)-(b-1)| \le |a-1|+|b-1| = a-1+b-1 = a+b-2$$

Beweis: Wir zeigen in einem *ersten Schritt*, dass alle Paare $(a, b) \in P$ die Gleichung $q^2 + r = 2011$ erfüllen. In einem *zweiten Schritt* beweisen wir umgekehrt, dass alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die diese Gleichung gilt, notwendig Elemente von P sind.

Erster Schritt: Da sowohl die Aufgabenstellung als auch die Definition von P symmetrisch in a und b sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass für ein beliebiges, im Folgenden jedoch fest gewähltes $(a, b) \in P$ zusätzlich $a \leq b$ ist. Wir zeigen, dass sich für ein solches $(a, b) \in P$ bei der Division von $a \cdot b$ durch $a + b$ der Quotient $q = a - 1$ und der Rest $r = 2011 - (a - 1)^2$ ergeben, womit also $q^2 + r = 2011$ gilt.
Die Bedingungen in (4.1) lesen sich mit der zusätzlichen Voraussetzung $a \leq b$ als

$$b = a + 2010 \tag{4.2}$$

und

$$2012 \leq a + b = 2a + 2010 \leq 2100, \text{ also } 1 \leq a \leq 45. \tag{4.3}$$

Aus der Ungleichungskette (4.3) folgt, dass $0 \leq a - 1 \leq 44$, also

$$(a - 1)^2 \leq 44^2 = 1936 < 2011.$$

Daraus folgen zusammen mit (4.2) die Ungleichungen

$$a^2 - 2a + 1 < 2011 = 1 + b - a \iff a^2 < a + b. \tag{4.4}$$

Bei der Division mit Rest von $a \cdot b$ durch $a + b$ ergibt sich ein Quotient $q = a - 1$ genau dann, wenn die beiden mittleren Ungleichungen in

$$a^2 - (a + b) + a \cdot b = (a - 1) \cdot (a + b) \leq a \cdot b < a \cdot (a + b) = a^2 + a \cdot b$$

erfüllt sind. Wegen $a \geq 1$ ist die rechte stets erfüllt; die linke ist genau dann erfüllt, wenn $a^2 - (a + b) \leq 0$, und das haben wir in (4.4) hergeleitet. Das beweist $q = a - 1$. Der Rest $r = a \cdot b - (a - 1) \cdot (a + b) = a + b - a^2$ erfüllt dann wegen (4.2) auch $r = 2a + 2010 - a^2 = 2011 - (a - 1)^2$.
Zweiter Schritt: Es sei nun (a, b) ein beliebiges, im Folgenden fest gewähltes Paar positiver ganzer Zahlen, für das die ganzen Zahlen Quotient q und Rest $r \geq 0$ der Division mit Rest von $a \cdot b$ durch $a + b$ die Gleichung $q^2 + r = 2011$ erfüllen. Weil auch $a \cdot b$ und $a + b$ positive ganze Zahlen sind, kann der Quotient q nicht negativ sein. Damit folgt aus $q^2 \leq q^2 + r = 2011$, dass $q \leq \sqrt{2011}$, das heißt, auf Grund der Ganzzahligkeit von q sowie $44^2 = 1936$ und $45^2 = 2025$, dass

$$0 \leq q \leq 44. \tag{4.5}$$

Es ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} & q \cdot (a + b) + r = q \cdot (a + b) + 2011 - q^2 = a \cdot b \\ \iff \quad & q^2 - (a + b) \cdot q = -a \cdot b + 2011, \end{aligned} \tag{4.6}$$

und die untere Gleichung in (4.6) ergänzen wir quadratisch zu

$$4 \cdot \left(q - \tfrac{a+b}{2}\right)^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot a \cdot b + 8044 = \underbrace{(a - b)^2 + 8044}_{=:D}. \tag{4.7}$$

Da ganzzahlige Lösungen q dieser quadratischen Gleichung existieren, muss notwendig auch der Ausdruck $D = (a - b)^2 + 8044 =: d^2 + 8044$ eine Quadratzahl

$(d+k)^2$ mit $k \geq 1$ sein. Wegen

$$8044 = (d+k)^2 - d^2 = 2dk + k^2 = (2d+k)k,$$

muss k ein Teiler von $8044 = 2^2 \cdot 2011$ mit Primzahl 2011 sein, also $k \in \{1, 2, 4, 2011, 4022, 8044\}$. Nur für $k = 2$ und $k = 4022$ ergeben sich überhaupt die notwendigen ganzzahligen Lösungen für $d = |a - b|$; in beiden Fällen sind $d + k = 2012$ und $d^2 = 2010^2$. Das heißt insbesondere, dass notwendig

$$d = |a - b| = 2010. \tag{4.8}$$

Wir zeigen nun, dass Lösungen q von (4.7) unter den Nebenbedingungen (4.5) nur existieren können, wenn für die positiven ganzen Zahlen a, b auch die Schranke $a + b \leq 2100$ erfüllt ist. Aus (4.7) folgt mit $D = (d+k)^2 = 2012^2$, dass nur

$$q_+ = \tfrac{a+b}{2} + 1006 \text{ und } q_- = \tfrac{a+b}{2} - 1006$$

Lösungen der quadratischen Gleichung (4.6) sein können. Es ist $q_+ \geq 1006 > 44$, also erfüllt q_+ die Nebenbedingungen (4.5) nie. Der Term q_- erfüllt die Nebenbedingungen in (4.5) genau dann, wenn

$$0 \leq q_- = \tfrac{1}{2}(a+b) - 1006 \leq 44 \iff 2012 \leq a + b \leq 2100. \tag{4.9}$$

Also kann (4.6) nur dann mit (4.5) erfüllt sein, wenn (4.9) und (4.8) gelten, das heißt, dass die im zweiten Schritt untersuchten Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen notwendig Elemente von P wie in (4.1) sein müssen. □

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 103

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrerinnen: Frau Frohs, Frau Farag)**:**
Kl. 7: Farah Ashraf 3, Iman Seif Al-Islam 3;
Kl. 8: Marianne Michel 9;
Kl. 9: Farieda Gaber 11;
Kl. 12: Nada Mohamed ElAttar 15.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kraft)**:**

Kl. 5: Fabian Küster 2, Florian Lehn 3, Marc Schäfer 4;
Kl. 6: Ariane Essig 4 ;
Kl. 7: Sandra Keil 5, Sara-Teresa Vesely 9, Niclas Mayer 11, Jann Ole Neitzel 11, Sebastian Maak 16, Katharina Rößler 16;
Kl. 9: Marc de Zoeten 5, Laura Tabea Galkowski 8, Alexander Rupertus 12, Sebastian Ludwig 20, Benedikt Maurer 20;

Kl. 10: Lara Bergjohann 2, Andreas Pitsch 4;

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum :
Kl. 6: Valentin Jacobsen 3 .

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 10: Frank Schindler 22.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 8: Christopher Patzanovsky 23;
Kl. 9: Cascaya Schade 22.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 5: Iolanthe Köcher 11.

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium:
Kl. 10: Marcella Beck 19.

Coburg, Gymnasium Casimirianum:
Kl. 10: Markus Voelckel 7.

Dieburg, Alfed-Delp-Schule:
Kl. 12: Cornelia, Eva, Hanna, Sonja Stuckert, Springer, Kraffcyk, Steineck 20.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betr. Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 6: Emmanuel Höfer 5 ; **Kl. 7:** Katharina Eibich 7, Annika Ellenberger 8, Verena Rübsam 11, Anne Vogel 12.

Erkner, Carl-Bechstein-Gymnasium:
Kl. 9: Wanda Witte 4.

Erlangen, Gymnasium Fridericianum:
Kl. 8: Nadja Motova 5.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Silke Schneider)**:**
Kl. 5: Jule Koob 6 ;
Kl. 6: Christoph Hemmer 6, Tillmann Ballweber 24 ;
Kl. 7: Jana Pacyna 5, Kevin Moun 10, Marcel Wittmann 29;
Kl. 8: Christian Effen 13, Gregor Hanisch 13 ;
Kl. 10: Henning Ballweber 22;

Grünheide, Gerhard-Hauptmann-Grundschule
Kl. 7: Sonja Witte 4.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin: Frau Niederle)**:**
Kl. 5: Max Schneider 6, Ken Biet 7, Nils Prepens 12, David Storzer 12, Matthias Hannappel 13;
Kl. 6: Sven Glombitza 2, Pauline von Ryssel 2, Lea Stiehl 11, Emily Zollmann 4, Steffi Langer 7, Justin Wunderlich 9;

Kl. 7: Moritz Schäfer 10;
Kl. 8: Lars Prepens 6.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:
Kl. 10: Michael Delhougne 3; **Kl. 12:** Philipp Delhougne 20.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 10: Shaima'a Ahmed Doma 12;

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Luca Langer 4, Tamara Bentz 7, Zora Rabeneck 9;
Kl. 7: Philipp Faber 7, Victor Brendel 7, Björn Stanischewski 17;
Kl. 8: Maike Stanischewski 10 .

Lehrte, Gymnasium Lehrte:
Kl. 10: Robin Fritsch 22.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim:
Kl. 11: Niklas Bockius 22.

Mannheim, Ludwig-Frank-Gymnasium: Kl. 10: Illja Fodorov 17.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Wittekindt)**:**
Kl. 7: Kim Klüber 3, Lena Bagnar 6, Noah Hayek 10, Hana Kadrija 3, Jasmin Lichtenberger 7, Leo Lutz 13, Julia Niederschmidt 5, Vithursan Thanabalasingam 2;
Kl. 11: Tim Lutz 11 .

Markt Indersdorf, Gymnasium:
Kl. 11: Katharina Münster 11.

München, Max-Planck-Gymnasium:
Kl. 6: Josef Sandor 2;
Kl. 8: Greta Sandor 6.

Niddatal-Assenheim, Geschwister-Scholl-Schule:
Kl. 3: Leonie Rößler 19.

Nieder-Olm, Gymnasium:
Kl. 12: Heike Katrin Herr 20 .

Oberursel, Gymnasium (betr. Lehrer: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Simon Petri 2, Adrian Fritsch 3, Mia-Marie Leun 5, Riccardo Brode 6, Jill Frey 6, Hannah Beckenbauer 7, Niklas Witt 8;
Kl. 6: Nicole Hardock 3, Jakob Schorr 3, Alisia Desor 5, Anna Ledro 6, Jonathan Drewes 10 ;
Kl. 7: Nina Friedrich 1, Katja Offen 4, Kendra Bender 5, Matthias Kerscher 5, Leon Marzeion 5, Tobias Bienert 7, Tim-Leon Weist-Ruff 7, Janna Vahlhaus 8, Svenja Thier 9, Lorena Bürke 10, Hannah Döll 10, Jonathan Gutsche 10, Yeong-

Chul Yun 14;

Kl. 8: Lutz Bischoff 9, Heiko Kötzsche 18.

Oppenheim, St. Katharinen-Gymnasium :
Kl. 5: Thomas Blankenburg 6;

Kl. 8: Daniel Blankenburg 14.

Östringen, Leibniz-Gymnasium
Kl. 6: Annika Hock 4, Patrick Günther 7;

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium:
Kl. 9: Luis Ressel 5.

Templin, Egelpfuhlschule:
Kl. 5: Ronja Gantzke 9.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kuntz)**:**
Kl. 5: Julian Asel 9, Luisa Bruch 6, Marcel Dick 4, Laura Dinges 6, Luisa Kirch 8, Jannik Kropf 5, Ignaz Kunz 4, Sabrina Liebetrau 12, Leonie Scharff 5, Michelle-Romy Scheuffele 5, Maximilian Schreiber 3, Johannes Vatter 7, Lena Zuspann 4;

Kl. 6: Pascal Grabowsky 12, Denise Lembrich 7;

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium
Kl. 6: Noah Schleidweiler 6, Lukas Schermann 9, Philipp Schmitz 14.

Mitteilungen

- Am 30. Januar hat eine Schülergruppe des Karolinen-Gymnasiums Frankenthal, einer unserer drei MONOID-Partnerschulen, am Wettkampf in der Fernsehserie „Tigerenten-Club“ teilgenommen. Die Mannschaft, die von unserem Redaktionsmitglied Silke Schneider betreut wurde, hat souverän gewonnen. Die Monoid-Redaktion gratuliert ganz herzlich – das habt Ihr super gemacht!
- Das Titelbild nimmt dieses mal Bezug auf den Artikel „Anwendungen von Mittelungleichungen“ auf Seite 10. Auf welche Weise möchten wir an dieser Stelle jedoch nicht verraten, da dies wohl nicht im Sinne des Artikels wäre.
- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Kalenderjahr 2011 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).

Mainzer Mathematik-Akademie
24. August – 28. August 2011

Das Institut für Mathematik der Universität Mainz veranstaltet vom 24. August bis zum 28. August 2011 die zweite Mainzer Mathe-Akademie für alle Mathematik-Fans der Jahrgangsstufen 10–13.

In Fachvorträgen, Gruppen- und Projektarbeit mit anschließender Präsentation werden Themen aus (wahlweise) drei Bereichen mit Professoren der Universität Mainz bearbeitet.

Der Workshop findet im Institut für Mathematik statt; wohnen werden wir im Haus Don Bosco, mittags essen wir in der Mensa. Für die Unterbringung (Übernachtung, Frühstück, Abendessen) wird eine Eigenleistung von 40 Euro erhoben, den Restbetrag trägt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz. Anreise ist am Mittwochabend, Abreise am Sonntagmittag.

Falls zur Beurlaubung vom Unterricht eine persönliche Einladung benötigt wird, können wir eine solche gerne zusenden. Für Informationen zur Mainzer Mathe-Akademie 2010 (zum Beispiel Kursthemen) siehe

`www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie`

Im nächsten Heft gibt es genauere Informationen zur zweiten *Mainzer Mathematik-Akademie* und den Link zum Anmeldeformular; Rückfragen unter:

`freunde@mathematik.uni-mainz.de`.

,

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf mit freundlicher Unterstützung von Marcel Gruner
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr
Versand: Katherine Pillau

Jahrgang 31 Heft 105 März 2011

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid