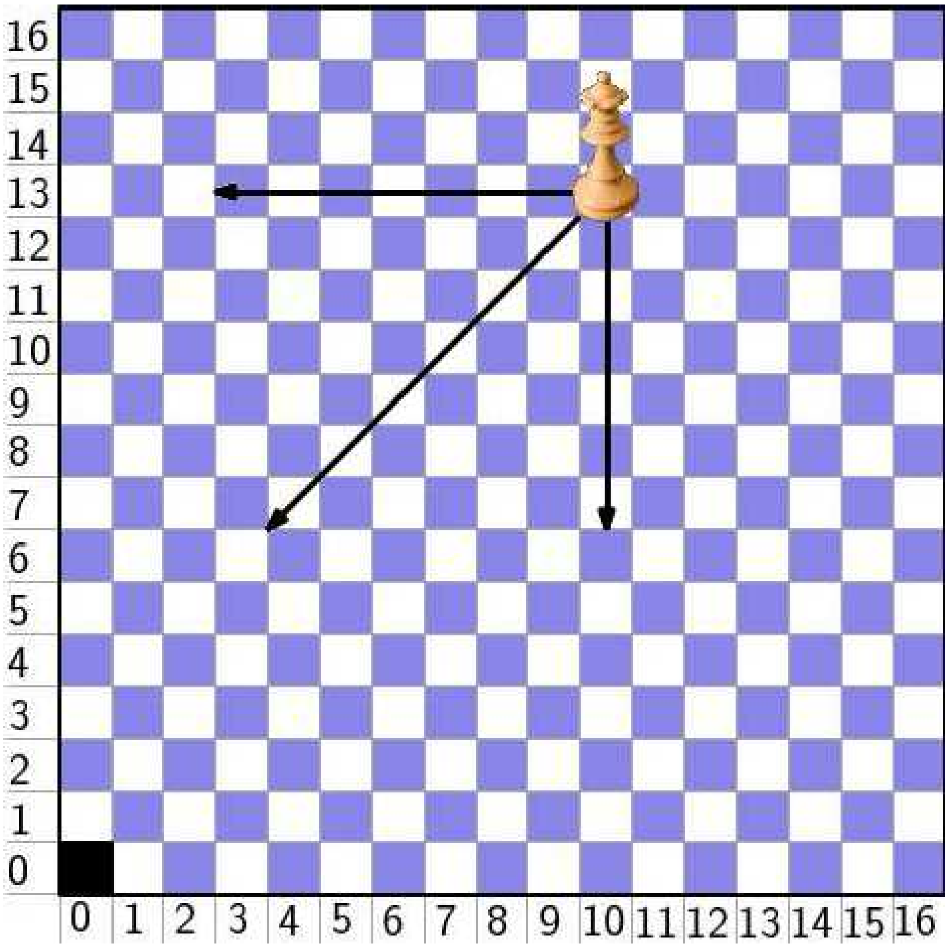
Jahrgang 31 Heft 106 Juni 2011

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

JG|U JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **31.08.2011.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail:
monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Kunz, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, an der **Alfred-Delp-Schule Hargesheim** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der „Rubrik der Löser“ und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Mainzer Mathe-Akademie
24. August – 28. August 2011

Das Institut für Mathematik der Universität Mainz veranstaltet vom 24. August bis zum 28. August 2011 die zweite Mainzer Mathe-Akademie für alle Mathematik-begeisterten Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren.

In Fachvorträgen, Gruppen- und Projektarbeit mit anschließender Präsentation werden in Kleingruppen Themen aus (wahlweise) drei Bereichen mit Professoren der Universität Mainz bearbeitet.

Der Workshop findet im Institut für Mathematik statt; wohnen werden wir im Haus Don Bosco, mittags essen wir in der Mensa. Für die Unterbringung (Übernachtung, Frühstück, Abendessen) wird eine Eigenleistung von 40 Euro erhoben, den Restbetrag trägt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz. Anreise ist am Mittwochabend, Abreise am Sonntagmittag.

Falls zur Beurlaubung vom Unterricht eine persönliche Einladung benötigt wird, können wir eine solche gerne zusenden. Für Informationen zur vergangenen Mainzer Mathe-Akademie 2010 (zum Beispiel Kursthemen) siehe

`www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie`

Hier findet Ihr auch in Kürze detailliertere Informationen zum Ablauf und den Kursthemen. Für Rückfragen und den Link zum Anmeldeformular, schreibt einfach eine Email an:

`freunde@mathematik.uni-mainz.de`,

Eine Vermessung der Zahlenwelt $\mathbb{R}$

von Hartwig Fuchs

Vorweg

Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Für beliebige Zahlen x und y aus $\mathbb{R}$ mit $x < y$ heißt $(x; y]$ ein Intervall, bestehend aus allen Zahlen $z \in \mathbb{R}$, für die gilt: $x < z \leq y$.

Eine Zahl $z \in (x, y]$ bildet die Mitte des Intervalls, wenn $z = \frac{1}{2}(x + y)$ ist; dann nennen wir das Intervall eine Umgebung U_z von z mit dem Durchmesser $d_z = y - x$.

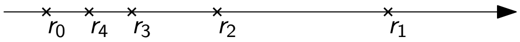
Diese Dinge veranschaulichen wir mit der so genannten Zahlengeraden, die man so definiert: Auf einer Gerade werden zunächst zwei Punkte P_0 und P_1 festgelegt;

P_0 wird als Nullpunkt und die Strecke $\overline{P_0P_1}$ als Einheitsstrecke erklärt. Danach wird jeder Zahl $z \in \mathbb{R}$ umkehrbar eindeutig ein Punkt P_z der Geraden zugeordnet – und zwar derjenige Punkt, dessen Entfernung von P_0 genau z beträgt.

Eine Vermutung über $(0; 1]$

Die rationalen Zahlen (Bruchzahlen) r liegen in $(0; 1]$ ganz „dicht" beieinander, wie die folgende Überlegung zeigt:

Zwischen zwei rationalen Zahlen r_0 und r_1 aus $(0; 1]$ liegt die rationale Zahl $r_2 = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$; zwischen r_0 und r_2 liegt $r_3 = \frac{1}{2}(r_0 + r_2)$ und so weiter ohne Ende.



Es sei nun jeder rationalen Zahl $r \in (0; 1]$ eine Umgebung U_r mit dem Durchmesser $d_r > 0$ so zugeordnet, dass U_r alle Zahlen $z \in (0; 1]$ mit $r - \frac{1}{2}d_r < z \leq r + \frac{1}{2}d_r$ enthält. Man denke sich alle Zahlen in U_r rot angemalt – wir nennen dann U_r eine rote Umgebung von r. Da die Mitten r der U_r in $(0; 1]$ „dicht" gepackt sind, ist $(0; 1]$ anscheinend vollständig von roten Umgebungen überdeckt. Das führt uns zu der Vermutung:

(1) Jede nicht-rationale Zahl (= Irrationalzahl) z aus $(0; 1]$ liegt in mindestens einer roten Umgebung U_r, wie auch immer deren Durchmesser d_r gewählt ist.

Vorbereitung der geplanten Vermessung

Die Vermutung (1) beschreibt das, was wir sehen, wenn wir uns die roten Umgebungen U_r auf der Zahlengeraden vorstellen – das Intervall $(0; 1]$ erscheint uns als eine rote Strecke. Aber dieser Anschein kann trügen. Bei bestimmten Umgebungssystemen hat die rote Strecke Lücken, in denen Irrationalzahlen liegen – die Vermutung (1) trifft dann also nicht zu! Und das wollen wir für die irrationale Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nachweisen.

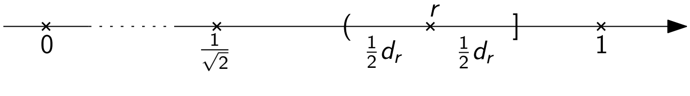
Widerlegung von (1)

Es sei $r = \frac{s}{t}$ eine beliebige rationale Zahl aus $(0; 1]$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen $s \geq 1$ und $t \geq 2$ falls $r \neq 1$ sowie $s = t = 1$ falls $r = 1$ ist. Jedem r ordnen wir eine Umgebung U_r mit dem Durchmesser $d_r = \frac{1}{4t^3}$ zu. Diese U_r nennen wir wieder rote Umgebungen.

Dies führt zu einer Fallunterscheidung hinsichtlich $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

1. Fall: Es sei $\frac{1}{\sqrt{2}} < r \leq 1$. Dann gilt für jedes dieser r:

(2) $r - \frac{1}{2}d_r > \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Den Nachweis von (2) führen wir mit den Ungleichungen

(3) $2s^2 - t^2 \geq 1$.

(4) $\frac{s}{t} + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$.

(5) $4t^2 < 8t^3$.

Aus $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{s}{t}$ folgt $\frac{1}{2} < \frac{s^2}{t^2}$ und daher $1 < \frac{2s^2}{t^2}$. Wäre $2s^2 = t^2$, so wäre $\sqrt{2} = \frac{t}{s}$ eine rationale Zahl – ein Widerspruch! Also ist $2s^2 > t^2$ und für natürliche Zahlen s und t folgt daraus $2s^2 - t^2 \geq 1$, so dass (3) zutrifft.
(4) folgt aus $\frac{s}{t} \leq 1$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{s}{t}$; (5) ergibt sich aus der Voraussetzung $t \geq 1$.

Aus (3), (4) und (5) erhält man (2) so:

$$r - \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{r + \frac{1}{\sqrt{2}}}{r + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{r^2 - \frac{1}{2}}{r + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2r^2 - 1}{2\left(r + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{s}{t}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{s}{t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \overset{(4)}{>} \frac{2s^2 - t^2}{2 \cdot 2t^2} \overset{(3)}{\geq} \frac{1}{4t^2} \overset{(5)}{>} \frac{1}{8t^3}.$$

Und daher ist $r - \frac{1}{8t^3} > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Weil nun $d_r = \frac{1}{4t^3}$ vorausgesetzt ist, folgt (2) aus der letzten Ungleichung.

Aus (2) erhält man unmittelbar – vergleiche mit der Figur oben –

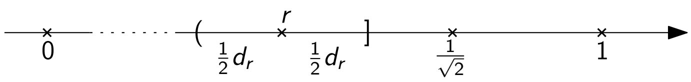
(6) Für alle rationalen Zahlen $r = \frac{s}{t}$ mit $\frac{1}{\sqrt{2}} < r \leq 1$ gilt:

Die irrationale Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt in keiner der roten Umgebungen U_r mit $d_r = \frac{1}{4t^3}$.

2. Fall: Da mit (6) nicht ausgeschlossen ist, dass $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in der roten Umgebung U_r einer positiven rationalen Zahl $r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ vorkommt, wollen wir zeigen, dass auch gilt:

(6') Für alle rationalen Zahlen $r = \frac{s}{t}$ mit $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt:

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt in keiner der zu den Zahlen r gehörigen roten Umgebungen U_r. mit $d_r = \frac{1}{4t^3}$



Zum Nachweis von (6') wird man wie oben bei (6) vorgehen. Zunächst leitet man her:

Es sei $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann gilt für jedes dieser r:

(2') $r + \frac{1}{2}d_r < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zur Begründung von (2') verwenden wir die Ungleichungen

(3') $t^2 - 2s^2 \geq 1$,

sowie wieder (4) und (5) und errechen wie oben, dass gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} - r > \frac{1}{8t^3}$, woraus dann mit $d_r = \frac{1}{4t^3}$ die Behauptung (2') folgt und aus dieser sich dann (6') ergibt.

Aus (6) und (6') erhält man die für die Anschauung paradoxe Aussage:
Die Irrationalzahl $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist in keiner der roten Umgebungen U_r enthalten und das gilt für jedes rationale r des Intervalls $(0; 1]$.
Folgerung:
Die Vermutung (1) trifft für $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nicht zu, wenn die roten Umgebungen U_r die Durchmesser $d_r = \frac{1}{4t^3}$ besitzen.

Eine Vermessung des Intervalls (0; 1]

Nach (6) und (6') gibt es im Intervall $(0; 1]$ eine Stelle – sie ist von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ besetzt – die nicht von roten Umgebungen U_r überdeckt ist – und sie ist nicht die einzige! Mit der gleichen Argumentation wie oben lässt sich für weitere Irrationalzahlen, wie etwa $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$ und so weiter, zeigen, dass sie in keiner roten Umgebung U_r enthalten sind. Es scheinen also viele umgebungsfreie Stellen in $(0; 1]$ zu existieren. Wenn man nun mehr über diese Stellen in $(0; 1]$ erfahren möchte, dann muss man anders als oben vorgehen.

Eine Möglichkeit besteht darin, die Gesamtlänge L der Durchmesser $d_r = \frac{1}{4t^3}$ aller roten Umgebungen U_r der rationalen Zahlen $r = \frac{s}{t}$ aus $(0; 1]$ zu berechnen – denn dann hätte man mit $1 - L$ ein Maß für den Anteil der umgebungsfreien Stellen an der Länge des Intervalls $(0; 1]$.
Versuchen wir es.
Zunächst ordnen wir die rationalen Zahlen $r \in (0; 1]$ samt ihrer Durchmessern d_r in einer Folge an:

r	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$	...
d_r	$\frac{1}{4 \cdot 1^3}$	$\frac{1}{4 \cdot 2^3}$	$\frac{1}{4 \cdot 3^3}$	$\frac{1}{4 \cdot 4^3}$	$\frac{1}{4 \cdot 5^3}$	...

Bemerkung:
In dieser Liste kommen neben $r = \frac{s}{t}$ mit teilerfremden s und t auch die ungekürzten Bruchzahlen $r = \frac{2s}{2t} = \frac{3s}{3t} = \frac{4s}{4t} = ...$ vor, denen wir den Durchmesser $d_r = \frac{1}{4t^3}$ zugeordnet haben. Deswegen führt auch die nachfolgende Rechnung nur zu einer oberen Schranke für den gesuchten Wert von L.

$$
\begin{aligned}
L &< \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} + \frac{2}{4 \cdot 3^3} + \frac{3}{4 \cdot 4^3} + \frac{4}{4 \cdot 5^3} + ... \\
&< \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \frac{2}{4 \cdot 2^3} + \frac{3}{4 \cdot 3^3} + \frac{4}{4 \cdot 4^3} + \frac{5}{4 \cdot 5^3} + ... \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 0,411.
\end{aligned}
$$

Leonhard Euler* hat die Konvergenz der obigen Reihe bewiesen, was das erste Gleichheitszeichen rechtfertigt und zugleich hat er den Wert der eingeklammerten Reihe mit $\frac{\pi^2}{6}$ bestimmt.
Wegen $L < 0,411$ ist also deutlich weniger als die Hälfte von $(0;1]$ durch rote Umgebungen U_r überdeckt, während der größere Rest von $(0;1]$ umgebungsfrei bleibt – ein für die Anschauung sicher völlig unerwarteter Sachverhalt.

Da wir L als Maß für die Überdeckung von $(0;1]$ durch die roten Umgebungen U_r betrachten, ist $1-L$ ein nahe liegendes Maß für die Lücken in dieser Überdeckung. Den Quotienten $L:(1-L)$ nennen wir dann das Überdeckungsverhältnis von $(0;1]$. Damit gilt für das Überdeckungsverhältnis unseres Intervalls $(0;1]$:

(7) $L:(1-L) < 0{,}411 : 0{,}589 \approx 4:6$.

Eine Vermessung von $\mathbb{R}$

Das Messergebnis (7), das wir für das Intervall $(0;1]$ gefunden haben, lässt sich unmittelbar auf jedes beliebige Intervall $(g;g+1]$, g eine natürliche Zahl, übertragen. Das leuchtet am Zahlenstrahl sofort ein, wenn man dort das Intervall $(0;1]$ samt seinem System von roten Umgebungen U_r in das Intervall $(g;g+1]$ verschiebt.

Es sei nun $(g;g+n]$ ein Intervall aus $\mathbb{R}$ der Länge n, wobei g und n ganze Zahlen und $n \geq 1$ seien.
Dann ist $(g;g+n] = (g;g+1] \cup (g+1;g+2] \cup ... \cup (g+n-1;g+n]$.
Aus der Tatsache, dass jedes Teilintervall $(i;i+1]$ von $(g;g+n]$ das gleiche Überdeckungsverhältnis $L:(1-L)$ besitzt, leiten wir her:

Für jede ganze Zahl g und für $n = 1, 2, 3, ...$ haben die Intervalle $(g;g+n]$ sämtlich das gleiche Überdeckungsverhältnis $L:(1-L)$ wegen $nL:(n-nL) = L:(1-L)$.

Weil nun in der letzten Aussage sogar $g = 0$ und n beliebig groß gewählt werden können, ist die Festlegung gerechtfertigt:

(8) Die Zahlenwelt $\mathbb{R}$ hat bei Überdeckung durch $U_r = \left(r - \frac{1}{2}d_r; r + \frac{1}{2}d_r\right]$, den roten Umgebungen, mit $d_r = \frac{1}{4t^3}$ für jedes $r = \frac{s}{t} \in \mathbb{R}$, wobei s und t teilerfremd oder $s = r$ und $t = 1$, das Überdeckungsverhältnis $L:(1-L)$ mit $L:(1-L) < 4:6$.

Ausblick

Die Frage, welches der genaue Wert des Überdeckungsmaßes L von $(0;1]$ ist, kann bei dem heutigen Wissensstand noch nicht beantwortet werden. Denn dazu muss man L als die Summe aller Durchmesser $d_r = \frac{1}{4t^3}$ der roten Umgebungen U_r für

* Leonhard Euler, 1707 – 1783; einer der bedeutendsten Mathematiker der Geschichte

jedes $r = \frac{s}{t} \in (0; 1]$, s und t teilerfremd oder $s = t = 1$, also den Wert der Reihe $L = \frac{1}{4}\left(1 \cdot \frac{1}{1^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} + 2 \cdot \frac{1}{3^3} + 2 \cdot \frac{1}{4^3} + 4 \cdot \frac{1}{5^3} + 2 \cdot \frac{1}{6^3} + 6 \cdot \frac{1}{7^3} + \ldots\right)$ bestimmen.
Aber man kennt bis heute noch nicht einmal den Wert der in dieser Reihe enthaltenen so genannten Zetareihe $\zeta(3)$ mit

$$\zeta(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \ldots$$

Die andere Frage, was mit der oberen Schranke $\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ für L passiert, wenn man $d_r = \frac{1}{nt^3}$ mit einem $n > 4$ als Durchmesser der Umgebungen U_r wählt, ist leicht zu beantworten – es ist $L < \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}$.
Wenn man hier n gegen ∞ laufen lässt, dann geht, weil $\frac{1}{n \cdot t^3}$ gegen 0 tendiert, auch L gegen 0. Das bedeutet dann anschaulich: Praktisch das ganze Intervall $(0; 1]$ ist umgebungsfrei. Danach gibt es „weitaus mehr" irrationale als rationale Zahlen in $(0; 1]$ – also auch in ganz $\mathbb{R}$.
Und um dieses „weitaus mehr" in mathematischen Begriffen und Theoremen fassbar zu machen, hat Georg Cantor (1845 – 1918) gegen Ende des 19. Jahrhunderts die Mengenlehre entwickelt – eine Theorie, die für alle Teilgebiete der Mathematik grundlegend ist.

Die besondere Aufgabe
Rätselhafter Gewichtsverlust
von Hartwig Fuchs

In einem Pilze verarbeitenden Betrieb wurden 1600 kg frische Pfifferlinge angeliefert. Ein Test ergab, dass ihr Wassergehalt bei 98 % lag.
Nach drei Tagen bestimmte man erneut den Wassergehalt – er betrug jetzt 96 %. Als dann aber die Pilze gewogen wurden, erhielt man ein fast unglaubliches Ergebnis: Ihr Gewicht betrug nur noch 800 kg. Für den Betriebsleiter war es nicht vorstellbar, dass die Absenkung des Wassergehalts der Pilze um 2 % einen Gewichtsverlust von 800 kg bewirken sollte – hier mussten Diebe am Werk gewesen sein! Hat er Recht?

Lösung

Eine einfache Prozentrechnung gibtdie vermutlich allgemein so nicht erwartete Antwort.
Bei einem 98 %-igen Wassergehalt bestehen 1600 kg Pilze aus 1568 kg Wasser und 32 kg sogenannter Trockenmasse. Nach drei Tagen stellen 32 kg Trockenmasse 4 % des dann noch vorhandenen Gewichts der Pilze dar.
Dann entsprechen $24 \cdot 4\ \% = 96\ \%$ Wassergehalt ein Gewicht von $24 \cdot 32$ kg $=$ 768 kg Wasser.

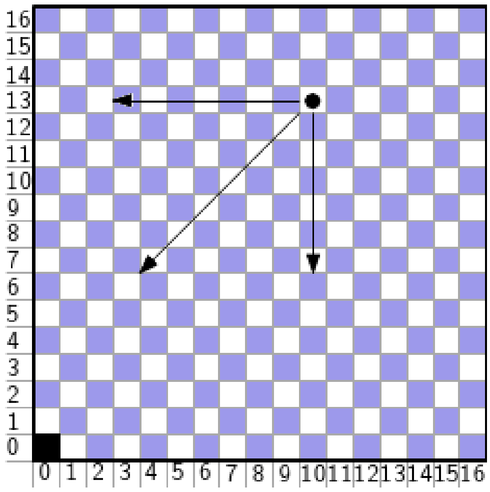
Nach drei Tagen wogen die Pilze also tatsächlich nur noch 32 kg + 768 kg = 800 kg – was die Hälfte des ursprünglichen Gewichts ist.
Es ging also beim Gewichtsverlust der Pilze alles mit rechten Dingen zu – auch wenn das mit unseren Erfahrungen mit Zahlenverhältnissen kaum vereinbar ist.

Daraus lernen wir:
Auch in ganz strukturierten numerischen Situationen können und dürfen wir uns nicht allein auf unser „Zahlengefühl" verlassen – es könnte einem einen bösen Streich spielen.

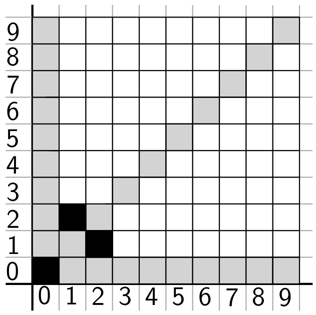
Hier steigt die Trockenmasse von 2 auf 4 % und damit sinkt das Gesamtgewicht auf die Hälfte.

Corner the Lady
– jagt sie in die Ecke!
von Roland Schröder

Unter diesem Namen hat Willem Abraham Wythoff ein Spiel erfunden, dessen Gewinnstrategie eine überraschende Anwendung des Goldenen Schnittes beinhaltet. Zwei Spieler bewegen abwechselnd eine Dame auf einem nach Westen und Süden begrenzten Schachbrett, das nach Norden und Osten nicht unbedingt begrenzt sein muss. Ziel des Spieles ist es, die südwestlichste Ecke (Koordinaten $(0, 0)$) des Brettes zu besetzen. Die Züge der Dame sind die im Schachspiel üblichen mit der Einschränkung, dass nur nach Westen, Süden oder Südwesten gezogen werden darf. Wer dabei auf die Position $(0, 0)$ zieht, hat gewonnen.



Das Spiel hat keine besondere Verbreitung erlangt, was daran liegen könnte, dass der Sieger von vornherein feststeht, wenn er die sogenannten sicheren Positionen (*sP*) kennt. Eine dieser *sP* heißt $(0, 0)$ und die übrigen *sP* sind solche, von denen aus man nicht mit einem Zug auf eine *sP* ziehen kann. Ein erfahrener Spieler wird, wenn er an der Reihe ist, auf eine mit seinem Zug erreichbare *sP* ziehen und hat damit – fehlerfreies Spiel vorausgesetzt – bereits gewonnen. Eine *sP* ist von jedem Feld der Spielbrettes mit einem der erlaubten Züge (siehe oben) erreichbar, außer eben von einer *sP* aus. Der Gegner wird mit seinem Zug die *sP* verlassen müssen und die Dame in einer Position abstellen, die wir unsichere Position (*uP*) nennen wollen. Das Spielbrett besteht vollständig aus *sP* und *uP*. Eine unentscheidbare Position kann es nicht geben, denn für jede Position ist entscheidbar, ob man von dort aus eine *sP* mit einem Zuge erreichen kann (dann ist es eine *uP*) oder nicht (dann ist es eine *sP*).

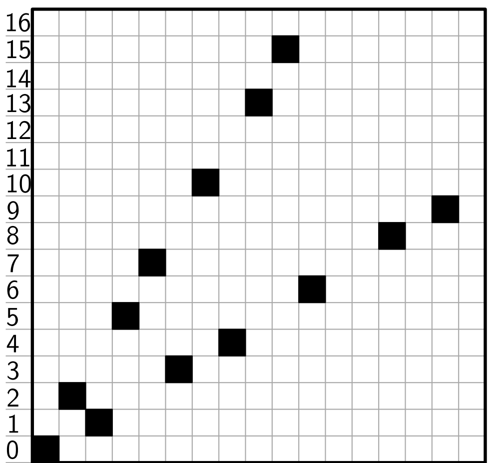


In jeder Zugrichtung der Dame (Westen, Süden oder Südwesten) kann höchstens eine *sP* liegen; von zweien wäre eine von einer *sP* aus in einem Zug erreichbar, was der Definition der *sP* widerspricht. Zu jeder *sP* (p, q) gibt es eine *sP* (q, p), also darf jede natürliche Koordinate einer *sP* höchstens einmal in der Menge aller Koordinaten der *sP* vorkommen. Die in südwestlicher Bewegungsrichtung paarweise mit einer Ecke aneinandergrenzenden Positionen (p, q) haben die gleiche Differenz $q - p$ für $q > p$, also darf jede natürliche Differenz von Koordinaten der *sP* höchstens einmal in der Menge aller Koordinaten der *sP* vorkommen. Nachdem $(0, 0)$ als *sP* definiert wurde, kann weder $(0, q)$ noch $(p, 0)$ eine *sP* bezeichnen. Und auch die Differenz $q - p = 0$ kann jetzt zu keiner anderen *sP* gehören. Daraus folgt, dass $(1, 2)$ und $(2, 1)$ die nächstgelegenen *sP* sein könnten. Dann sind aber auch alle Positionen $(1, q)$, $(p, 2)$, $(p, p + 1)$ und $(q + 1, q)$ potentielle *sP*. Da aber beispielsweise die Position $(1, 2)$ von allen Positionen $(1, q)$ mit $q > 1$ in einem Zuge erreichbar ist, kann unter allen Positionen $(1, q)$ nur die Position $(1, 2)$ eine *sP* sein. Entsprechendes lässt sich auch für die Positionen $(p, 2)$, $(p, p + 1)$ und $(q + 1, q)$ sagen.

Eine entsprechende Argumentation lässt sich wiederholen, wenn das nächste Wertepaar gefunden wurde. Damit sind die Voraussetzungen für die sukzessive Konstruktion einer Tabelle geschaffen:

$p - q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17
q	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28

Dabei wurden p und q so gewählt, dass immer $p < q$ gilt.



Die Anlage dieser Tabelle ergibt sich zwingend aus den Spielregeln des Spiels „Corner the Lady“. Dies sollte aus den vorangestellten Bemerkungen deutlich geworden sein. Für die Zuordnungsvorschrift der Wertepaare in Zeile 2 und 3 zu den natürlichen Zahlen n der ersten Zeile zog Wythoff – nach seinen eigenen Worten – folgende Formalisierung „out of a hat“: Wenn $n = 1, 2, 3, \ldots, \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ und $[x]$ die Bezeichnung für die nächstkleinere natürliche Zahl unter x ist, dann gilt: $n \to ([n \cdot \Phi], [n \cdot \Phi^2])$. Wythoff beweist seine Vermutung nicht. Der Beweis gelingt Coxeter: „(Der Beweis stützt sich

auf den) folgenden Satz von Beatty: Es gelte $x^{-1} + y^{-1} = 1$ mit positiven, irrationalen Zahlen x und y, dann enthalten die beiden Folgen $[x], [2x], [3x], \ldots$ und $[y], [2x], [3y], \ldots$ zusammengenommen jede natürliche Zahl genau einmal.
(Dabei bezeichnet $[x]$ die nächstkleinere natürliche Zahl unter x.)
Der Beweis des Satzes von Beatty wurde gemeinsam von J. Hyslop in Glasgow und A. Ostrowski in Göttingen erbracht:
Wähle $N \in \mathbb{N}$. Wir werden zeigen, dass es genau ein Folgenglied zwischen N und $N+1$ in der Vereinigungsmenge der beiden Folgen $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(ny)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt. Da $N \cdot x$ irrational ist, gibt es $\left[\frac{N}{x}\right]$ Vielfache von x unterhalb N und analog $\left[\frac{N}{y}\right]$ Vielfache von y unterhalb N. Folglich liegen in beiden Folgen genau $\left[\frac{N}{x}\right] + \left[\frac{N}{y}\right]$ Folgenglieder unterhalb von N. Es gilt:

$$\begin{aligned} N - 2 = N \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - 2 &= \left(\frac{N}{x} - 1\right) + \left(\frac{N}{y} - 1\right) \\ &< \left[\frac{N}{x}\right] + \left[\frac{N}{y}\right] < \frac{N}{x} + \frac{N}{y} = N \end{aligned}$$

Also ist insbesondere $N-2 < \left[\frac{N}{x}\right] + \left[\frac{N}{y}\right] < N$. In anderen Worten: Es gibt genau $\left[\frac{N}{x}\right] + \left[\frac{N}{y}\right] = N - 1$ Folgenglieder unterhalb von N. Der gleiche Gedankengang mit $N+1$ statt N ergibt, dass genau N Folgenglieder unter $N+1$ liegen. Deshalb kann es in den beiden Folgen $(nx)_{n\in N}$ und $(ny)_{n\in\mathbb{N}}$ – wie wir zeigen wollten – nur ein Folgenglied zwischen N und $N+1$ geben.

Deshalb ist $(*)$ $x^{-1} + y^{-1} = 1$ eine der beiden Bedingungen an Komponenten sicherer Kombinationen aus dem Wythoff-Spiel. Die andere Bedingung, nämlich dass die Komponentendifferenzen jede natürliche Zahl genau einmal darstellen, ist durch die Forderung $(**)$ $y = x + 1$ sichergestellt.
Das Einsetzen von $(**)$ in $(*)$ ergibt $x^2 - x - 1 = 0$.
Wenn $x = r$ die positive Lösung dieser Gleichung ist, gilt $y = r^2$ und die n-te sichere Kombination heißt $([nr], [nr^2])$.“

In der heutigen Terminologie ist $r = \Phi$. Die Anwendungen des Goldenen Schnittes begegnen uns in faszinierend vielfältiger Form. Und fast immer ist es so, dass der Goldene Schnitt geradezu ein Wesensmerkmal seiner Anwendung ist. Hier scheinen die Dinge anders zu liegen. Um diese Auffassung zu begründen, wird das Spiel „Corner the Lady“ geringfügig modifiziert durch die Einschränkung: Es dürfen nur schwarze Felder des Schachbrettes betreten werden ($(0,0)$ ist ein schwarzes Feld). Dann erfährt der gesamte oben genannte Gedankengang nur eine Änderung: Es müssen alle geraden Komponentendifferenzen genau einmal vorkommen (schwarze Felder haben gerade Komponentendifferenzen). Diese einzige veränderte Bedingung wird durch die Forderung $(***)$ $y = x + 2$ sichergestellt.

Das Einsetzen von $(***)$ in $(*)$ ergibt als positive Lösung $x^2 = 2$ und die n-te sichere Position heißt $([n\cdot\sqrt{2}], [n\cdot(\sqrt{2}+2)])$. Die Lösungen für die *sP* des Spieles „Corner the Lady" ergeben sich also aus der positiven Lösung einer quadratischen Gleichung. Dass diese Lösung im ursprünglichen Spiel von Wythoff gerade dem Goldenen Schnitt entspricht erscheint in der zweiten Spielvariante wie ein Zufall.

Die Ecke für den Computer-Fan

Immer lauter gleiche Ziffern?

Eine beliebige natürliche Zahl $A > 10$, die kein Vielfaches von 10 sein soll, wird mit einer n-ziffrigen Zahl B aus lauter gleichen Ziffern multipliziert, $n \geq 2$. Das Produkt AB sei eine $(k+n)$-ziffrige Zahl, wobei $k \geq 1$ ist. Es sei nun

$$AB = x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_n, \text{ mit Ziffern } x_i \text{ und } y_j,$$

die Dezimaldarstellung von AB.
In vielen Beispielen findet man die folgende Aussage bestätigt:

(1) Die Summe der Zahlen $x_1 x_2 \dots x_k$ und $y_1 y_2 \dots y_n$ ist stets eine Zahl aus lauter gleichen Ziffern.

Beispiele:

Für $576 \cdot 77777 = 44799552$ ist $447 + 99552 = 99999$;
für $2479 \cdot 444444 = 1101776676$ ist $1101 + 776676 = 777777$.

Kannst Du die Aussage (1) beweisen oder gibt es vielleicht doch Gegenbeispiele, die die Aussage (1) widerlegen? (H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2011 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.
Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 104

Wie oft Quadratzahl?

Ist n eine natürliche Zahl, so ist n^2+1 niemals eine Quadratzahl (den Beweis kannst Du selbst leicht durch Widerspruch führen). Anders ist es, wenn wir natürliche Zahlen a als Faktoren zulassen und $a\cdot n^2+1$ betrachten, wobei a keine Quadratzahl sein soll.

Untersuche für den Bereich $1 \leq n \leq 10\,000$ wie oft die Zahl $a \cdot n^2 + 1$ in Abhängigkeit von $a = 1, 2, 3, \dots, 20$ eine Quadratzahl ist. (E.K.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Henning Ballweber (Karolinen-Gymnasium Frankenthal, Klasse 10) und Niklas Bockius (Gymnasium Mainz-Gonsenheim, Klasse 11), jeweils unter Verwendung des Programms Python, Christopher Patzanovsky (Johann-Michael-Fischer-Gymnasium Burglengenfeld, Klasse 8) mit dem Programm CS und Tarvo Reim (Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, MSS 12) mit Java.

Hier die Ergebnistabelle von Niklas Bockius; sie gibt für die in Betracht kommenden Faktoren a diejenigen $n \leq 10.000$ an, für die $a \cdot n^2 + 1$ ein Quadrat ist:

a	mögliche n	a	mögliche n
2	2, 12, 70, 408, 2378	12	2, 28, 390, 5432
3	1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911	13	180
5	4, 72, 1292	14	4, 120, 3596
6	2, 20, 198, 1960	15	1, 8, 63, 496, 3905
7	3, 48, 765	17	8, 528
8	1, 6, 35, 204, 1189, 6930	18	4, 136, 4620
10	6, 228, 8658	19	39
11	3, 60, 1197	20	2, 36, 646

Ergänzung zu „Das Gesetz der kleinen Zahlen“ aus MONOID 105

von Hans-Jürgen Schuh

Der französische Mathematiker (und theoretische Physiker) *Siméon-Denis Poisson** hat 1837 in seinem Werk „Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile“ die nach ihm benannte Verteilung $P(\lambda)$ als Limes von Binomialverteilungen mit konstant gehaltenem Erwartungswert $\lambda > 0$ hergeleitet. Die Poisson-Verteilung wird deshalb als Näherung für die Binomialverteilung $B\left(\frac{\lambda}{n}, n\right)$ für großes n bei konstantem λ verwendet. Deswegen muss die *Trefferwahrscheinlichkeit* $p = \frac{\lambda}{n}$ klein sein. Man spricht deswegen oft auch vom *Gesetz der seltenen Ereignisse*.

Die Bezeichnung *Gesetz der kleinen Zahlen* geht auf den polnischen (mathematischen) Statistiker *Ladislaus von Bortkiewicz*** zurück. In seiner Arbeit, welche ebenfalls den Namen „Das Gesetz der kleinen Zahlen“ trägt (1898), hat er die

* Siméon-Denis Poisson, 1781 – 1840; französischer Physiker und Mathematiker

** ∗ 7. August 1868 in Sankt Petersburg, † 15. Juli 1931 in Berlin; ein in Deutschland lehrender russischer Ökonom und Statistiker polnischer Abstammung

Poisson-Verteilung nicht nur vor dem Vergessen bewahrt, sondern auch als erster ihre Bedeutung erkannt. Unter anderem hat er nachgewiesen, dass Anzahlen von Soldaten im preußischen Heer, die durch den Hufschlag eines Pferdes getötet wurden („seltene Ereignisse"), überzeugend durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden kann.

Beispiel 1:

a) In einen Teig werden 250 Rosinen geknetet und dann daraus 200 Hörnchen gebacken. Wir wählen ein Hörnchen beliebig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält es genau zwei Rosinen?

b) Löse a) für 25 Rosinen und 20 Hörnchen!

Beispiel 2: An einem Grenzübergang mit sehr geringem Verkehrsaufkommen überqueren im Mittel täglich drei Autos die Grenze. Man bestimme die *Wahrscheinlichkeit dafür*, dass *morgen kein Auto kommt, falls die Autos völlig unregelmäßig* aber *im Ganzen gleichmäßig* den Grenzübergang erreichen.

Eine Lösung der Beispielaufgaben findet ihr auf Seite 38
Bemerkung: Die historischen Angaben sowie Beispiel 1a) und 2) sind dem Buch *„Stochastik"*, Leistungskurs (1983) von F. Barth und R. Haller, Ehrenwirth-Verlag, ISBN 3-431-02511-0, entnommen.

Der Satz von Fermat für n gleich 4

von Hans-Jürgen Schuh

Betrachte ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c. Der Satz des Pythagoras besagt, dass stets gilt

(1) $a^2 + b^2 = c^2$

Für (1) gibt es Lösungen in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, beispielsweise $3^2+4^2 = 5^2$. Angenommen a, b und c besitzen einen gemeinsamen Teiler $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, das heißt $a = k \cdot a_0$, $b = k \cdot b_0$ und $c = k \cdot c_0$. Dann gilt auch $a_0^2 + b_0^2 = c_0^2$.
Wir können deshalb annehmen, dass a, b, und c paarweise teilerfremd sind. (a, b, c) ist dann ein *normiertes pythagoreisches Tripel*.
Für ein normiertes Tripel können a und b nicht gleichzeitig ungerade sein, da sonst c gerade wäre und deshalb c^2 durch 4 teilbar wäre, während $a^2 + b^2$ bei der Division durch 4 den Rest 2 hätte.
Wir gehen davon aus, dass a und c ungerade und b gerade sind. Es ist wohl bekannt, dass sich dann das normierte Tripel (a, b, c) als

(2) $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$

darstellen lässt, wobei u und v teilerfremde natürliche Zahlen mit $u > v$ und $(u - v)$ ungerade sind. Weiter erzeugt jede solche Wahl von u und v ein normiertes Tripel gemäß (2), und diese Darstellung ist eindeutig.
Der französische Jurist und Mathematiker *Pierre de Fermat* hat im Jahr 1637 die zu (1) analoge Gleichung

(3) $a^n + b^n = c^n$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

betrachtet und vermutet, dass die Gleichung (3) in den natürlichen Zahlen nicht lösbar ist. Er behauptet zwar, einen „wahrhaft wunderbaren Beweis“ gefunden zu haben, aber außer für den einfachsten Fall $n = 4$ (in anderem Zusammenhang) ist von ihm kein Beweis überliefert.
Die Unmöglichkeit (3) in $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ zu lösen ist der „große Satz von Fermat“.
Seither haben sich viele namhafte Mathematiker mit der Lösung dieses Problems beschäftigt und Teillösungen für spezielle n gefunden. Ein allgemeiner Beweis gelang erst 1993 dem englischen Mathematiker Andrew Wiles, der hierzu tiefliegende neuere mathematische Kenntnisse heranziehen musste, die Fermat sicher nicht zur Verfügung standen.
Der Beweis des einfachsten Falls $n = 4$ beruht darauf, dass man aus der Annahme der Existenz eines normierten Tripels (a, b, c) mit (3) ein weiteres Tripel (a_1, b_1, c_1) mit $c_1 < c$ konstruiert. Dies führt dazu, dass Tripel (a_i, b_i, c_i) mit (3) existieren, so dass $c > c_1 > c_2 > c_3 > ...$ (unendlicher Abstieg), was für natürliche Zahlen c_i unmöglich ist.
Die großen Mathematiker Leonhard Euler und Carl Friedrich Gauß haben die Technik des unendlichen Abstiegs erfolgreich auf den Fall $n = 3$ angewendet, mussten hierzu aber die komplexen Zahlen zu Hilfe nehmen. Für $n \geq 5$ lässt sich der große Satz von Fermat nicht mehr mit dieser Technik beweisen.

Nun zum Fall $n = 4$:

Satz:

(4) $a^4 + b^4 = c^4$ ist in den natürlichen Zahlen nicht lösbar.

Wir zeigen allgemein:

(5) $a^4 + b^4 = d^2$ ist in den natürlichen Zahlen nicht lösbar.

(4) folgt dann mit $d = c^2$.

Beweis:

Nehmen wir an, dass es mindestens ein Tripel natürlicher Zahlen (a, b, d) gibt, das (5) erfüllt. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass a, b und d paarweise teilerfremd sind. Außerdem sei (a, b, d) so gewählt, dass unter all solchen Tripeln

(6) d minimal ist.

(a^2, b^2, d) ist dann ein normiertes pythagoreisches Tripel. Wegen (2) gibt es teilerfremde natürliche Zahlen $u > v$ mit $(u - v)$ ungerade und

$$a^2 = u^2 - v^2,\ b^2 = 2uv,\ d = u^2 + v^2.$$

(a, v, u) ist also dann ein weiteres normiertes pythagoreisches Tripel. Mit (2) gibt es wiederum teilerfremde natürliche Zahlen h und k, $h > k$ und $(h - k)$ ungerade mit

$$a = h^2 - k^2,\ v = 2hk,\ u = h^2 + k^2.$$

Nun folgt

(7) $b^2 = 2uv = 4hk(h^2 + k^2)$, wobei 4, h, k, $(h^2 + k^2)$ paarweise teilerfremd sind.

Daraus ergibt sich, dass es paarweise teilerfremde natürliche Zahlen r, s, t gibt mit $h = r^2$, $k = s^2$ und $(h^2 + k^2) = t^2 (= u)$.
Damit ist

(8) $r^4 + s^4 = t^2$ mit $t^2 = u < u^2 + v^2 = d$,

also

(9) $t < d$.

(r, s, t) ist also ein weiteres Tripel, das (5) erfüllt, was wegen (9) der Minimalität in (6) widerspricht. Q.e.d.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 105

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Quadrat- und Kubikzahlen gesucht

Gibt es Primzahlen p, für welche $2p + 1$

a) eine Quadratzahl ist?

b) eine Kubikzahl ist? (H.F.)

Lösung:

a) Es sei $2p + 1 = x^2$. Da x^2 stets ungerade ist, muss auch x ungerade sein, das heißt wir dürfen $x = 2n + 1$ setzen.
Dann ist $2p+1 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$, also $p = 2n^2+2n = 2(n^2+n) > 2$ – ein Widerspruch, da es keine gerade Primzahl > 2 gibt.
Es gibt somit keine Primzahl p, so dass $2p + 1$ eine Quadratzahl ist.

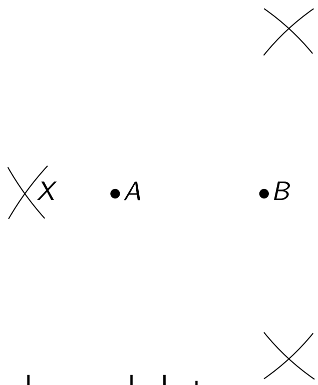
b) Sei nun $2p+1 = x^3$, also $x = 2n+1$. Dann ist $2p+1 = (2n+1)^3 = (2n)^3 + 3(2n)^2 + 3(2n) + 1$, also $p = 4n^3 + 6n^2 + 3n$ und daher $p = n(4n^2 + 6n + 3)$.

Da p eine Primzahl ist, muss $n = 1$ und damit $p = 13$ sein.

Konstruktion eines Punktes

Durch die in der Ebene beliebig gegebenen Punkte A und B ist eine Gerade $g(A, B)$ festgelegt. Wie kannst du *nur mit einem Zirkel* einen weiteren Punkt von $g(A, B)$ konstruieren? (H.F.)

Lösung:



Zeichne um A einen Kreis mit einem beliebigen Radius r, jedoch $r > \frac{1}{2}|AB|$ sowie einen Kreis um B mit dem gleichen Radius r.

Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten S und T, welche das Mittellot (=Symmetrieachse) $m(A, B)$ der Strecke AB festlegen.

Als eine Eigenschaft des Mittellots $m(A, B)$ halten wir fest:

Für jeden Punkt P auf $m(A, B)$ ist $|PA| = |PB|$ und umgekehrt.

Nun konstruiert man ebenso wie oben einen Punkt des Mittellots $m(S, T)$ der Strecke ST. X sei dieser Punkt.

Behauptung: $X \in g(A, B)$.

Nach Konstruktion ist $|AS| = |AT| = r$, so dass $A \in m(S, T)$, wegen obiger Eigenschaft; ferner ist $|BS| = |BT| = r$, so dass auch $B \in m(S, T)$ gilt. Daraus folgt: $m(S, T) = g(A, B)$. Wegen $X \in m(S, T)$ ist daher auch $X \in g(A, B)$.

Verteilung von Spielsteinen

Auf einem quadratischen 3×3-Spielfeld werden die Spielsteine nach folgender Regel verteilt: Die Summe der Steine auf jeder Seite muss jeweils 15 ergeben, das Mittelfeld bleibt frei, die anderen Felder können belegt sein, müssen es aber nicht. Es können beispielsweise 40 Steine so verteilt werden, dass in jedem Randfeld fünf Spielsteine liegen.

5	5	5
5		5
5	5	5

Zeichne für die minimale und maximale Anzahl von Steinen, welche nach dieser Regel verteilt werden können, die Verteilung. (CE)

Lösung:

Es können minimal 30 und maximal 60 Steine nach dieser Regel verteilt werden.

15	0	0
0		0
0	0	15

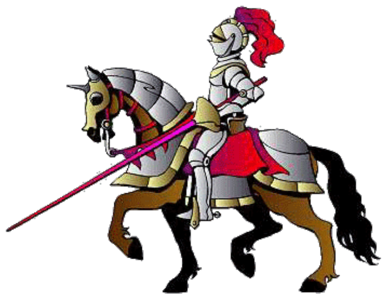
0	15	0
15		15
0	15	0

Zur Verteilung der 60 Steine gibt es noch weitere Lösungsvarianten.

Von Königen, Rittern und Äpfeln...

Vor langer Zeit, in einem fernen Königreich, warb einst ein edler Ritter um die Königstochter. Daraufhin stellte ihm der König folgende Aufgabe, um seine Geisteskraft zu testen:

„Gehe hinaus zu meinem Obstgarten und fülle einen Sack mit Äpfeln. Auf dem Rückweg passierst du drei Tore, bei denen du jedem Torwärter genau die Hälfte der Äpfel aus deinem Sack plus einen halben Apfel abgeben musst. Allerdings darfst du keinen der Äpfel zerschneiden, zerbeißen oder sonst wie zerteilen! Im Schloss darfst du nur noch einen Apfel haben, den du meiner Tochter überreichen sollst.“



a) Wie viele Äpfel muss der Ritter mindestens pflücken?

b) Könnte er auch, sollte der König dies verlangen, mit mehr als einem Apfel für die Königstochter zurückkehren? Berechne gegebenenfalls die Minimalzahl von zu pflückenden Äpfeln. (CE)

Lösung:

a) Wir berechnen die Minimalzahl rückwärts: 1 Apfel am Schloss, $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ hat er am letzten Tor abgegeben. Er kam dort also mit 3 Äpfeln an. Dann musste er $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$ am mittleren Tor abgeben; er kam dort also mit 7 Äpfeln an. Am äußeren Tor hat er $\frac{15}{2} + \frac{1}{2}$ abgegeben, daher musste er mit 15 Äpfeln in seinem Sack beginnen.

b) Er beginnt mit a_0 Äpfeln in seinem Sack. Am ersten Tor gibt er $\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}$ ab und behält $a_1 = a_0 - (\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(a_0 - 1)$. Am zweiten Tor gibt er erneut $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}$ ab und behält $a_2 = a_1 - (\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(a_1 - 1) = \frac{1}{4}(a_0 - 3)$. Am letzten Tor gibt er $\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}$ ab und behält $a_3 = a_2 - (\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(a_2 - 1)$. Somit ist $a_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}(a_0 - 3) - 1) = \frac{1}{8}(a_0 - 7)$ und der Ritter muss mit 7 plus einem a_3-Fachen von 8 beginnen, wenn er a_3 Äpfel mitbringen soll. Denn dann sind auch a_1 und a_2 natürliche Zahlen, wie es ja für die Restzahlen von Äpfeln sein muss. Die Minimalzahl von zu pflückenden Äpfeln ist 23, denn dann bleiben 2 Äpfel übrig.

Zahlenspielerei

a) Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die gleich dem Doppelten ihrer Quersumme ist?

b) Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die gleich dem Siebenfachen ihrer Quersumme ist? (C.E.)

Lösung:

a) Wir stellen eine natürliche Zahl m in ihrer 10er-Potenzentwicklung dar:

$$m = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + ... + a_n \cdot 10^n.$$

Dann ist die Quersumme $Q(m) = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Wegen der Bedingung, dass m gleich dem Doppelten der Quersumme sein soll, machen wir den Ansatz:

$$m = 2 \cdot Q(m) = 2 \cdot (a_0 + a_1 + ... + a_n)$$
$$m = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + ... + a_n \cdot 10^n.$$

Da m minimal sein soll, beschränken wir nun schrittweise die Stellen von m, bis wir ein m finden, welches die Bedingungen erfüllt. Sei m einstellig, dann gilt:

$$m = 2 \cdot a_0$$
$$m = a_0$$

Dies führt offensichtlich zu einem Widerspruch ($a_0 = 2a_0$ und $a_0 \neq 0$). Sei also m nun zweistellig:

$$m = 2a_0 + 2a_1$$
$$m = a_0 + 10a_1$$

Dadurch erhalten wir $2a_0 + 2a_1 = a_0 + 10a_1$, was umgeformt $a_0 = 8a_1$ ergibt. Wir müssen nun a_1 so wählen, dass diese Gleichung für zwei einstellige Zahlen a_0, $a_1 \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Dies ist nur für $a_1 = 1$ der Fall und wir erhalten $a_0 = 8$. Damit ist $m = a_0 + 10a_1 = 8 + 10 \cdot 1 = 18$ die kleinste natürliche Zahl, welche die Bedingung erfüllt.

b) Wir gehen ähnlich wie in a) vor (nur mit 7 anstelle von 2) und bekommen:

$$m = 7a_0 + 7a_1$$
$$m = a_0 + 10a_1$$

Dies ergibt ähnlich wie in a) $6a_0 = 3a_1$ beziehungsweise $2a_0 = a_1$. Wählen wir $a_1 = 1$ so muss $a_0 = \frac{1}{2}$ sein und ist somit keine ganze Zahl. Deshalb wählen wir $a_1 = 2$ und wir erhalten $2a_0 = 2$, weshalb $a_0 = 1$ sein muss. Die Zahl lautet demnach 21.

Einerziffer gesucht

Wie heißt die Einerziffer von $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2010}$? (H.F.)

Lösung:

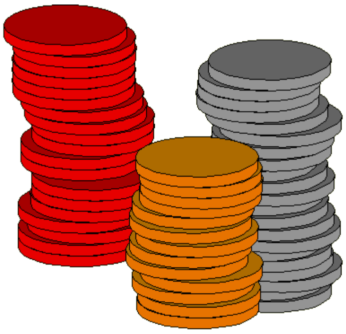
Wir bezeichnen die Einerziffer von m mit $E(m)$.

Dann gilt $E(2^1) = 2, E(2^2) = 4, E(2^3) = 8, E(2^4) = 6$. Danach wiederholen sich die Einerziffern der Potenzen $2^5, 2^6, 2^7, ...$ zyklisch mit der Periode 4, das heißt, es gilt für $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...$:

$$E(2^{4n+1}) = 2,\ E(2^{4n+2}) = 4,\ E(2^{4n+3}) = 8,\ E(2^{4n+4}) = 6.$$

Deshalb folgt aus $E(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = E(2 + 4 + 8 + 6) = 0$, dass $E(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + E(2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + ... + E(2^{2005} + 2^{2006} + 2^{2007} + 2^{2008}) = 0$ und wegen $E(2^{2009}) = E(2^1) = 2$ und $E(2^{2010}) = E(2^2) = 4$ folgt daraus $E(2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2010}) = 6$.

Falschgeld



Herr Sorgfältig stellt beim Sortieren seiner Münzen fest, dass von den 100 gleich aussehenden Münzen in seiner Kasse zehn gefälscht sind und sortiert diese auf einen Stapel. Die restlichen 90 Münzen sortiert er auf neun Stapel mit je zehn Münzen. Dann wird er bei der Arbeit unterbrochen und verlässt den Raum für eine Kundenberatung. Er kommt erst nach längerer Zeit wieder zurück und kann sich nicht mehr erinnern, welcher Stapel die gefälschten Münzen enthielt, er weiß nur noch, dass alle gefälschten Münzen das gleiche Gewicht hatten mit jeweils genau 1 Gramm Differenz zum korrekten Gewicht von zehn Gramm. Kann man mit einer Wägung mit einer genauen Waage herausfinden, auf welchem Stapel die gefälschten Münzen liegen, wenn er nicht weiß, ob die gefälschten Münzen alle zu schwer oder alle zu leicht sind? (CE)

Lösung:

Ja: Er nimmt vom ersten Stapel eine Münze, vom zweiten Stapel zwei und so weiter, bis zum zehnten Stapel, von dem er alle zehn Münzen nimmt. Dies sind also $1 + 2 + ... + 10 = 55$ Münzen mit einem Sollgewicht von insgesamt $55 \cdot 10 = 550$ Gramm. Die Abweichung vom Sollgewicht ist dann die Nummer des Stapels mit den gefälschten Münzen.

Neue Mathespielereien

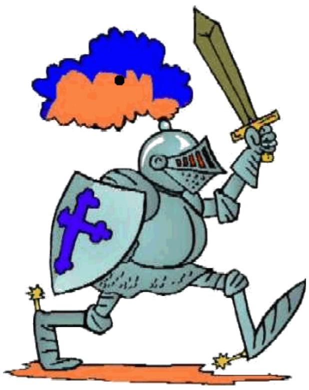
Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Der hungrige Wanderer

Ein hungriger Wanderer trifft zwei Männer, die gerade ihre Vorräte auspacken und bittet um etwas zu essen. Der erste Mann hat noch drei Brote übrig, der andere fünf und sie beschließen, alles zu teilen. Sie essen gemeinsam und jeder bekommt genau gleich viel. Am Ende bedankt sich der Wanderer, gibt dem ersten Mann drei Kreuzer und dem anderen fünf und macht sich wieder auf den Weg.

Der erste Mann überlegt nun, ob die Aufteilung der Münzen fair war - was denkst du? (CE)

Erbe



Ein Ritter wird bei einem Duell schwer verwundet und gibt seiner schwangeren Frau für den Fall seines Todes letzte Anweisungen, wie sein Vermögen von 420 Golddukaten verteilt werden soll:

„Wenn das Kind ein Junge wird, dann bekommst du $\frac{1}{3}$ und unser Sohn $\frac{2}{3}$ des Vermögens. Wenn es ein Mädchen wird, dann bekommst du $\frac{2}{3}$ und unsere Tochter $\frac{1}{3}$ des Vermögens."

Wie wird das Vermögen nach diesen Wünschen verteilt, wenn der Ritter stirbt und seine Frau Zwillinge bekommt, ein Mädchen und einen Jungen? (CE)

Zahlen-Algorithmus

Anne hat sich einen Algorithmus ausgedacht: Sie beginnt mit einer beliebigen (rationalen) Zahl z, wobei $z \neq 0$ und $z \neq 1$ ist. Dann führt sie zwei Rechenvorschriften mit dieser Zahl durch: Die Kehrwertbildung $z \xrightarrow{R} \frac{1}{z}$, die sie mit R für Reziprok bezeichnet, und die Subtraktion $z \xrightarrow{D} 1 - z$, die sie mit D für Differenz bezeichnet. Es ergeben sich (meistens) zwei neue Zahlen. Auf diese beiden Zahlen wendet Anne erneut die beiden Rechenvorschriften an. Dies wiederholt sie nun immer wieder, bis sie schließlich feststellt, dass sich irgendwann die erhaltenen Zahlen wiederholen. "Dann können ja jetzt keine neuen Zahlen mehr kommen", denkt sich Anne und hört mit den Berechnungen auf.

a) Beginne mit $z = 5$ und berechne, wie Anne, alle Zahlen, die sich mit diesem Verfahren ergeben.

b) Gib alle Zahlen an, die sich ergeben, wenn Anne mit der allgemeinen Zahl z beginnt. (MG nach H.F.)

Die Länge von Zahlwörtern

Wenn man eine natürliche Zahl z als Zahlwort schreibt, dann benötigt man dazu eine bestimmte Anzahl von Buchstaben. Wie heißt die kleinste natürliche Zahl, für die man 100 Buchstaben braucht? (H.F.)

Hinweis: Wir schreiben einhundert, eintausend, ... und nicht hundert, tausend, ...

Fußballturnier

Bei der Fußballweltmeisterschaft besteht jede Vorrundengruppe aus vier Teams, und es spielt jeder gegen jeden. Ein Sieg bringt drei Punkte, ein Unentschieden einen Punkt und ein Verlust keinen Punkt. Die beiden Teams mit der höchsten Punktzahl kommen weiter ins Achtelfinale. Bei Gleichheit entscheidet die Tordifferenz.

a) Mit welchen Punktzahlen kommt ein Team sicher ins Achtelfinale?

b) Mit welchen Punktzahlen kommt ein Team sicher nicht ins Achtelfinale?

(Valentin Blomer)

Gemeinsame Teiler benachbarter Zahlen

Zwei benachbarte, natürliche Zahlen n und $n+1$ haben keinen gemeinsamen Teiler $\neq 1$. Du weißt es – kannst Du es auch begründen? (H.F.)

Anikas Spiel

Anika hat ein neues Spiel erfunden und möchte es ihrem Bruder Moritz zeigen. Sie legt einen runden Damestein irgendwo auf ein rundes Spielfeld, dann ist Moritz an der Reihe und legt ebenfalls einen runden Damestein irgendwo auf das Spielfeld. Dies wird so lange wiederholt, bis der nächste Stein nicht mehr vollständig in das Spielfeld passt und der Spieler, der seinen letzten Stein nicht mehr ablegen kann, hat verloren.

Gibt es eine sichere Strategie, mit der man dieses Spiel gewinnen kann? (WJB)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Alles
sollte so einfach wie möglich
gemacht werden, aber nicht einfacher.

Albert Einstein*

* Albert Einstein: 1879-1955 – deutscher theoretischer Physiker

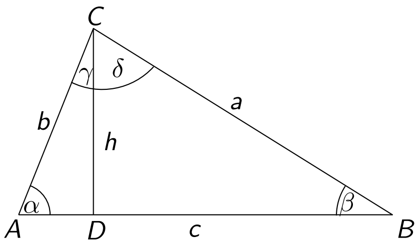
Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 1022: Ein Abstandsproblem

Im Dreieck $\triangle ABC$ mit $|\overline{CA}| = b$ und $|\overline{CB}| = a$ sei D der Fußpunkt der Höhe h aus dem Punkt C.

Wenn nun $b < a$ gilt, dann liegt D näher bei A als bei B.



Du siehst es – kannst Du es auch begründen? (H.F.)

Aufgabe 1023: Teilbarkeit

Überprüfe die Behauptungen:

a) Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + 1$ und $3^n + 1$ beide den Teiler 5 haben.

b) Es gibt keine natürliche Zahl n, sodass $2^n + 1$ und $3^n + 2$ zugleich den Teiler 5 besitzen. (H.F.)

Aufgabe 1024: Quadrat im Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck seien a und c die Längen der Katheten.

Wie lang ist dann die Seite des größten, vollständig im Dreieck liegenden Quadrats, dessen eine Ecke im rechten Winkel des Dreiecks liegt? (H.F.)

Aufgabe 1025: Teiler-Problem

Es seien $a \geq 1$ und $b \geq 1$ ganze Zahlen mit $a + b = 210$.

Kann dann 210 ein Teiler von $a \cdot b$ sein? (H.F.)

Aufgabe 1026: Was ist wahr?

Von einem beliebigen Punkt P im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$ seien die Lote mit den Längen x, y und z auf die Dreieckseiten konstruiert.

Wenn nun h die Höhe im Dreieck $\triangle ABC$ ist, gilt dann $x + y + z < h$ oder $x + y + z = h$ oder $x + y + z > h$? (H.F.)

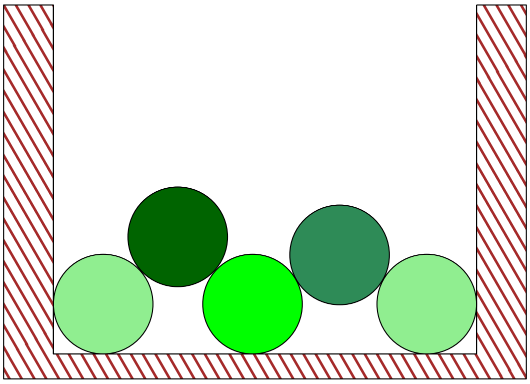
Aufgabe 1027: Eine Abschätzung

Für a, b, $c > 0$ und $a + b + c = 1$ beweise man

$$\frac{a+b}{c+ab} + \frac{b+c}{a+bc} + \frac{c+a}{b+ca} \geq \frac{9}{2}.$$

(Robin Fritsch)

Aufgabe 1028: Alkoholische Probleme



13 Flaschen Wein gleicher Sorte sollen in eine Kiste verpackt werden. Auf den Boden passen drei Flaschen nebeneinander, darauf schichten wir zwei, die im Allgemeinen nicht horizontal zu liegen kommen (siehe Skizze).

Legt man nun aber wieder drei Flaschen, dann zwei und schließlich die letzten drei, so liegen die letzten drei auf jeden Fall wieder horizontal, so dass der Deckel wunderbar passt. Warum? (gefunden Manfred Lehn)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 105

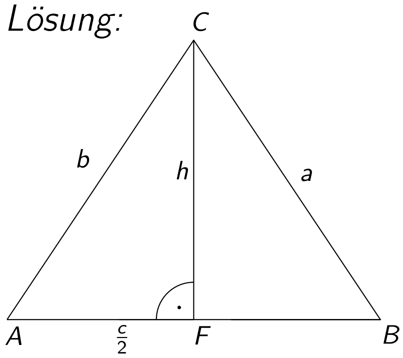
Klassen 8–13

Aufgabe 1015: Rationale Seitenlängen

In Aufgabe 927 (Monoid 92, Lösung in Monoid 93) wurde gezeigt, dass es keine gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke mit ausschließlich rationalen Seitenlängen gibt.

Gibt es überhaupt gleichschenklige, nicht gleichseitige Dreiecke, deren Seitenlängen alle rational sind? (WJB)

Lösung:

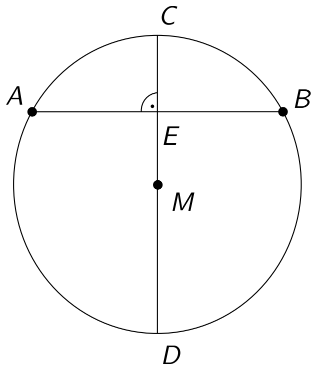


Ist das Dreieck $\triangle AFC$ pythagoreisch, zum Beispiel mit $\frac{c}{2} = 3\,\text{cm}$, $h = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, so hat $\triangle ABC$ sogar ganzzahlige Seitenlängen, im Beispiel $a = b = 5\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$.

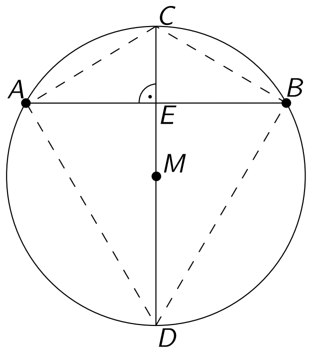
Aufgabe 1016: Sehnen im Kreis

In einem Kreis sei eine Sehne AB gezeichnet. Eine zweite Sehne CD, welche die Strecke AB halbiert und orthogonal zu ihr ist, verläuft dann immer durch den Mittelpunkt M des Kreises.

Du siehst es! Kannst Du es auch begründen? (H.F.)



Lösung:



Nach Voraussetzung gilt: $|AE| = |BE|$ und $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle CEB|$. Daher stimmen in den Dreiecken $\triangle AEC$ und $\triangle CEB$ die Längen zweier Seiten und die Größe des von ihnen eingeschlossenen Winkels überein – somit sind $\triangle AEC$ und $\triangle CEB$ deckungsgleich. Also sind auch die Dreieckseiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$, die zugleich Kreissehnen sind, gleich lang. Dann aber haben die Kreisbögen $\widehat{CA}$ und $\widehat{CB}$ ebenfalls gleiche Länge.

Ganz entsprechend zeigt man : Die Kreisbögen $\widehat{DA}$ und $\widehat{DB}$ sind gleich lang.

Daraus folgt nun: $|\widehat{CA}|+|\widehat{AD}| = |\widehat{CB}|+|\widehat{BD}|$ und dies heißt, dass beide Kreisbögen $\widehat{CAD}$ und $\widehat{CBD}$ Halbkreise sind. Mithin ist $\overline{CD}$ ein Durchmesser, der natürlich durch den Mittelpunkt M des Kreises verläuft.

Aufgabe 1017: Quaderdiagonale

Zeige: Die Summe der Quadrate über den Diagonalen der sechs Seitenflächen eines Quaders ist das Vierfache des Quadrates einer räumlichen Diagonale. (WJB)

Lösung:

Seien a, b und c die Seitenlängen des Quaders.

Je zwei der Quadrate der Diagonalen der Seitenflächen sind $d_1^2 = a^2 + b^2$, $d_2^2 = b^2 + c^2$ und $d_3^2 = c^2 + a^2$. Für die räumliche Diagonale r gilt $r^2 = d_1^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und daher $2d_1^2 + 2d_2^2 + 2d_3^2 = 2(a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2) = 4r^2$.

Aufgabe 1018: Wandersfrauen

Zwei Frauen starten zum Sonnenaufgang einen Spaziergang. Seltsamerweise gehen sie beide mit jeweils konstanter Geschwindigkeit und ohne Umwege. Frau Frühvogel geht von A nach B, Frau Spätschicht von B nach A. Am Mittag (12.00 Uhr) gehen sie aneinander vorbei. Frau Frühvogel erreicht B um 16.00 Uhr, Frau Spätschicht A um 21.00 Uhr.

Wann ging an diesem Tag die Sonne auf? (CE)

Lösung:

Zunächst ein paar Begriffe und Annahmen: v_F sei die Geschwindigkeit von Frau Frühvogel, v_S die von Frau Spätschicht, die Strecke habe die Länge $a + b$, wobei a die Distanz von Frau Frühvogel zum Treffpunkt am Mittag und b die von Frau Spätschicht bezeichne. Darüber hinaus seien den gesamten Tag über die Geschwindigkeit beider Frauen konstant (aber nicht notwendiger Weise gleich!).

Geht nun die Sonne zum Zeitpunkt t auf, dann gilt für die Strecken a und b:

$$a = v_F \cdot (12 - t) = v_S \cdot 9$$
$$b = v_S \cdot (12 - t) = v_F \cdot 4$$

Division von a durch b ergibt, nach Beseitigung der Nenner:

$$(12 - t)^2 = 4 \cdot 9,$$

also erhalten wir durch Wurzelziehen

$$12 - t = 6$$

und die Sonne ging somit um $t = 6$ Uhr auf.

Aufgabe 1019

Sei $x_k := 10^{-k}$, $y_k := \frac{1}{10^k - 1}$, für $k = 1, 2, \ldots,$ und u, v seien zwei natürliche Zahlen mit $u < v$, also $z = \frac{u}{v}$ eine rationale Zahl zwischen 0 und 1.

a) Zeige, dass sich z darstellen lässt als $z = (a + by_m)x_n$, wobei m, n natürliche Zahlen und a, b ganze Zahlen ≥ 0 sind.

b) Ist diese Darstellung eindeutig? (WJB)

Lösung:

a) Die übliche Methode der Division von u durch v liefert eine n-stellige „Vorperiode" $a_1 a_2 \ldots a_n$ und eine m-stellige Periode $b_1 b_2 \ldots b_m$ (in beiden Fällen möglicherweise mit führenden Nullen). Nach Multiplikation mit 10^n wird der periodische Teil mit $b = b_1 b_2 \ldots b_m$ und $a = a_1 a_2 \ldots a_n$ zu

$$10^n \cdot z - a = b10^{-m} + b10^{-2m} + \ldots = b \sum_{j=1}^{\infty} (10^{-m})^j = b \frac{10^{-m}}{1 - 10^{-m}} = by_m$$

b) Nein, es gilt zum Beispiel $0,75\overline{83} = \left(75 + \frac{83}{99}\right) \cdot 10^{-2} = \left(758 + \frac{38}{99}\right) \cdot 10^{-3} = \left(75 + \frac{8383}{9999}\right) \cdot 10^{-2} = \ldots$, denn $0{,}75\overline{83} = 0{,}7583\overline{83} = 0{,}75\overline{8383} = \ldots$.

Aufgabe 1020: Eine Erzeugungsregel für Primzahlen?

Sind p und $p^2 + 2$ Primzahlen, so sind auch $p^3 + 2$ und $p^4 + 2$ Primzahlen. Stimmt diese Regel? (H.F.)

Lösung:

Für $p = 2$ ist $p^2 + 2 = 6$ nicht prim.
Für $p = 3$ ist $p^2 + 2 = 11$ prim.
Tatsächlich sind dann auch $p^3 + 2 = 29$ und $p^4 + 2 = 83$ prim.
Sei nun $p \geq 5$. Jede Primzahl $p \geq 5$ ist von der Form $6n + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, oder von der Form $6n + 5$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (denn keine der Zahlen $6n$, $6n + 2$, $6n + 3$, $6n + 4$ ist prim).
Damit ist $p^2 + 2 = 36n^2 + 12n + 1 + 2$ oder $p^2 + 2 = 36n^2 + 60n + 25 + 2$, sodass $p^2 + 2$ durch 3 teilbar und mithin nicht prim ist.

Tatsächlich erzeugt die Regel nur Primzahlen – allerdings sind es deren zwei, nämlich 29 und 83.

Aufgabe 1021: Eine Löseraufgabe

Für welche natürliche Zahlen $a < 200$ ist $a^5 + 5$ durch 7 teilbar und $a + 2$ eine Primzahl? (Robin Fritsch, Lehrte)

Lösung:

Weil $a^5 + 5$ durch 7 teilbar sein soll, folgt

$$\begin{aligned} a^5 + 5 &\equiv 0 \mod 7 \mid +2 \\ a^5 + 7 &\equiv 2 \mod 7 \\ a^5 &\equiv 2 \mod 7. \end{aligned}$$

Es gibt folgende Fälle:

$$\begin{array}{llllll} \text{Fall 1:} & a \equiv 0 \mod 7 \Longrightarrow & a^5 \equiv 0^5 \equiv & 0 \equiv 0 & \mod 7 \\ \text{Fall 2:} & a \equiv 1 \mod 7 \Longrightarrow & a^5 \equiv 1^5 \equiv & 1 \equiv 1 & \mod 7 \\ \text{Fall 3:} & a \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow & a^5 \equiv 2^5 \equiv & 32 \equiv 4 & \mod 7 \\ \text{Fall 4:} & a \equiv 3 \mod 7 \Longrightarrow & a^5 \equiv 3^5 \equiv & 243 \equiv 5 & \mod 7 \\ \text{Fall 5:} & a \equiv 4 \mod 7 \Longrightarrow & a^5 \equiv 4^5 \equiv & 1024 \equiv 2 & \mod 7 \\ \text{Fall 6:} & a \equiv 5 \mod 7 \Longrightarrow & a^5 \equiv 5^5 \equiv & 3125 \equiv 3 & \mod 7 \\ \text{Fall 7:} & a \equiv 6 \mod 7 \Longrightarrow & a^5 \equiv 6^5 \equiv & 7776 \equiv 6 & \mod 7 \end{array}$$

Da nur im Fall 5 wie gefordert $a^5 \equiv 2 \mod 7$ gilt, muss $a \equiv 4 \mod 7$ also $a = 7m + 4$ mit ganzer Zahl $m \geq 0$ gelten, also $a + 2 \geq 6$. Da alle Primzahlen ≥ 2 ungerade sind, ist $a + 2$ und folglich auch a ungerade. Da $a = 7m + 4$ gilt und 4 gerade ist, muss $7m$ ungerade sein. Also muss auch m ungerade sein und es gilt $m = 2k + 1$ mit k als ganzer Zahl. Also folgt:

$$a = 7m + 4 = 7(2k + 1) + 4 = 14k + 11$$

Wegen $0 < a < 200$ ist auch

$$\begin{aligned} 0 < 14k + 11 &< 200 \quad \mid -11 \\ -11 < 14k &< 189 \quad \mid : 14 \\ -\frac{11}{14} < k &< \frac{27}{2} \end{aligned}$$

und, weil k ganzzahlig ist, gilt $0 \leq k \leq 13$.

Nun setzen wir für k nacheinander alle erlaubten Zahlen ein und testen, ob $a+2$ eine Primzahl ist:

k	$a = 14k + 11$	$a+2$	*Primzahl*?
0	11	13	Ja
1	25	27	Nein
2	39	41	Ja
3	53	55	Nein
4	67	69	Nein
5	81	83	Ja
6	95	97	Ja
7	109	111	Nein
8	123	125	Nein
9	137	139	Ja
10	151	153	Nein
11	165	167	Ja
12	179	181	Ja
13	193	195	Nein

Also erfüllen die Zahlen $a \in \{11, 39, 81, 95, 137, 165, 179\}$ die Bedingungen der Aufgabe.

Sind Primzahlen dem Zufall unterworfen?

Fortsetzung aus MONOID 105

von Valentin Blomer

Die Riemannsche Vermutung

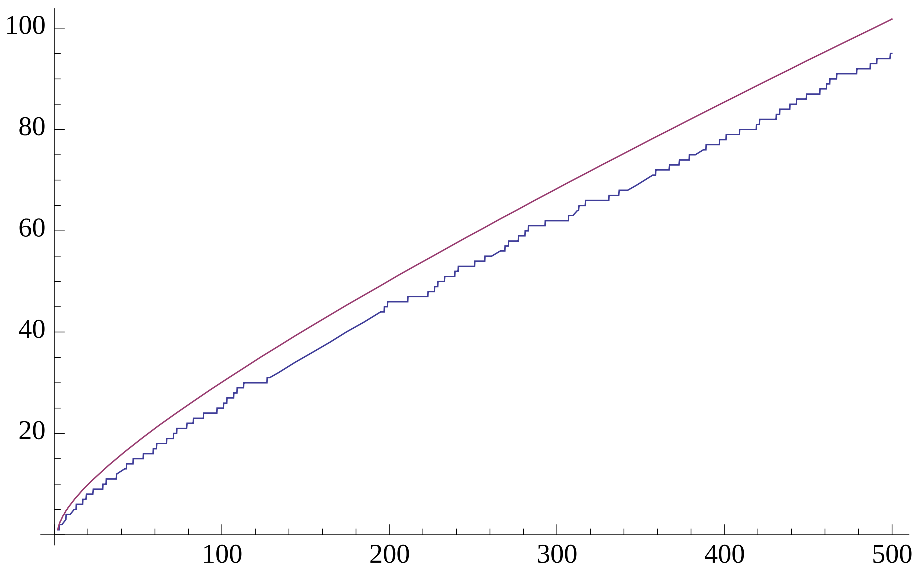
Wir haben im ersten Teil gesehen, dass die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $p \leq x$ sich gut durch die Funktion $\mathrm{Li}(x) = \int\limits_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \approx \frac{x}{\log x}$ approximieren lässt. Wie bei jeder Approximation ist es natürlich entscheidend, wie gut sie ist. Die folgende Tabelle vergleicht die Anzahl der Primzahlen mit dem Integrallogarithmus $\mathrm{Li}(x)$:

x	$\pi(x)$	$\mathrm{Li}(x)$	$\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$
1000	168	177,6...	-9,6...
10000	1229	1246,1...	-17,1...
100000	9592	9629,8...	-37,8...
1000000	78498	78627,5...	-129,5...
10000000	664579	664918,4...	-339,4...
100000000	5761455	5762209,3...	-754,3...
1000000000	50847534	50849234,9...	-1700,9...
10000000000	455052511	455055614,5...	-3103,5...

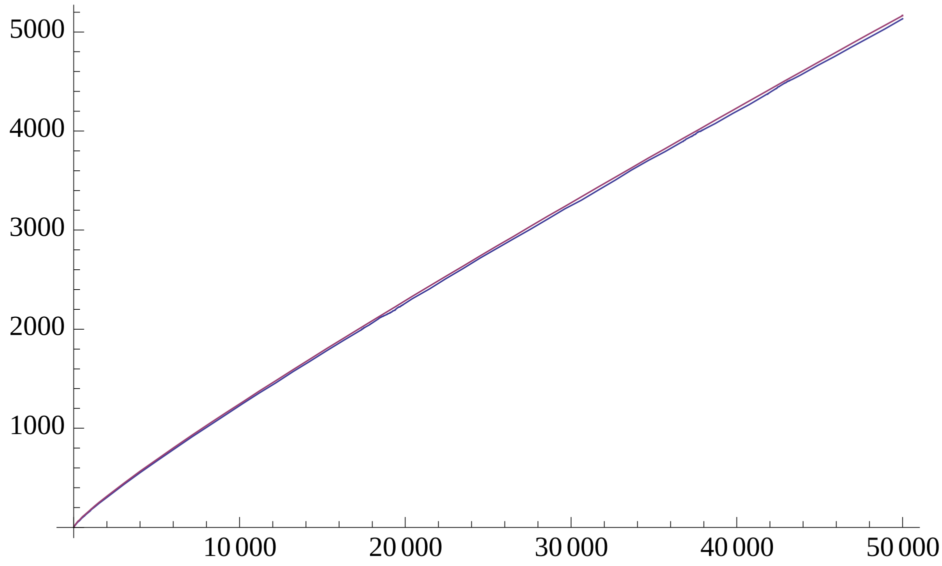
Was fällt auf? Zum Einen scheint $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ negativ zu sein, zum Anderen sehr klein im Vergleich zu x. Die erste Vermutung, so offenbar sie zu sein scheint, ist falsch. Man kann zeigen, dass $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt. Man muss allerdings weit draußen suchen, bis die Differenz das erste Mal positiv wird. Man weiß nicht genau, wo es stattfindet, aber sicher jenseits von 10^{80}, der Anzahl der Atome im Weltall. Die zweite Vermutung ist die berühmte

> *Riemannsche Vermutung:* Der „Fehler" $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ sollte nur etwa halb so viele Dezimalstellen benötigen wie $\pi(x)$, also etwa von der Größenordnung $x^{\frac{1}{2}}$ sein.

Die Riemannsche Vermutung ist übrigens eines der Seven Clay Mathematics Institute Millennium Problems* und ihre Lösung wird mit 1 000 000 Dollar belohnt. Ich glaube allerdings, dass jeder Mathematiker bereit wäre, eine Million Dollar zu *zahlen*, wenn er dafür die Riemannsche Vermutung lösen könnte. Die beiden folgenden Graphiken zeigen den „gezackten" Graphen $\pi(x)$ und den „glatten" Graphen von $\mathrm{Li}(x)$:



* Als Millennium-Probleme bezeichnet man eine im Jahr 2000 vom Clay Mathematics Institute (CMI) in Cambridge (Massachusetts) festgesetzte Liste bedeutender ungelöster Probleme der Mathematik.



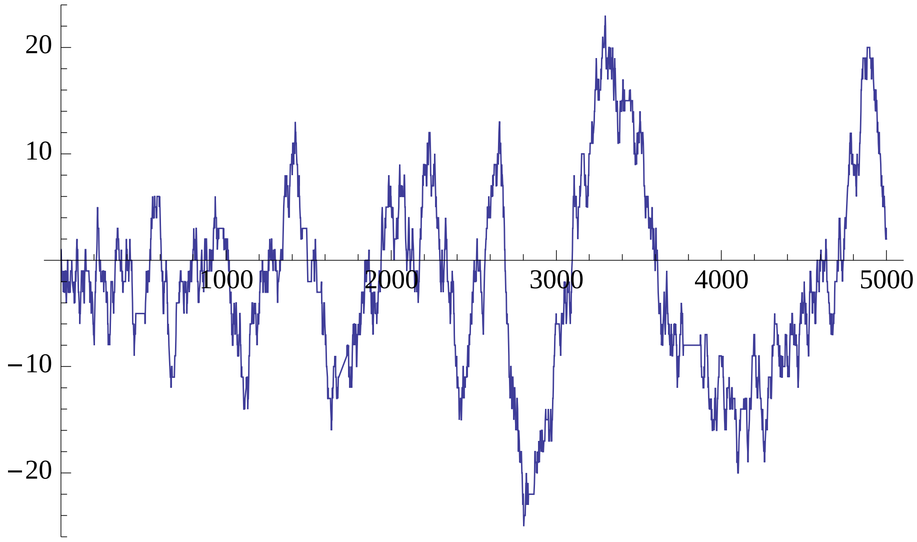
Es gibt viele äquivalente Formulierungen für die Riemannsche Vermutung. Ich will nur noch eine weitere zeigen: Für $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ definiere die Möbius-Funktion $\mu(n)$ folgendermaßen:

$$\mu(n) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } e_j \geq 2 \text{ für ein } 1 \leq j \leq k, \\ (-1)^k, & \text{wenn alle } e_j = 1. \end{cases}$$

Die Riemann-Vermutung ist äquivalent zu der Aussage, dass

$$f(N) := \mu(1) + \mu(2) + \ldots + \mu(N)$$

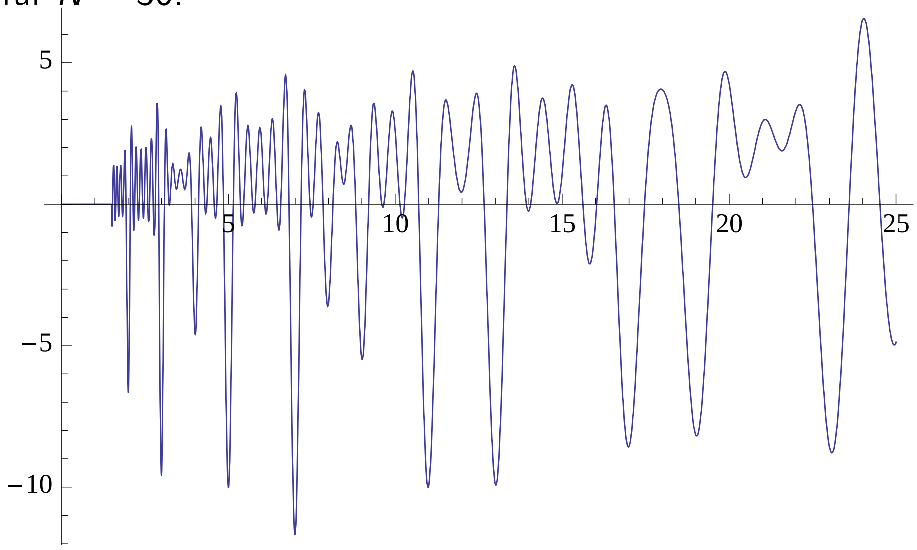
höchstens etwa so groß werden kann wie $N^{\frac{1}{2}}$. Die folgende Graphik zeigt $f(N)$. Die Kurve sieht sehr zufällig aus, und genau das ist es, was man von der Möbius-Funktion erwartet: Die Parität der Primteiler einer Zahl sollte zufällig gerade oder ungerade sein, die Möbius-Funktion sollte also „zufällig" die Werte -1, 0, $+1$ annehmen, so dass die Kurve, die entsteht, wie der Gang eines Betrunkenen aussieht, der zufällig nach rechts geht, nach links geht oder stehenbleibt.



Ich möchte noch eine Kuriosität der Primzahlen vorstellen, die eng verknüpft ist mit der Zetafunktion $Z(s)$, die wir im ersten Teil in (2) definiert haben, doch ist der Zusammenhang zu tief, als dass ich ihn hier erklären könnte. Wir betrachten die Zahlenfolge**

$$\begin{array}{llll} \gamma_1 = 14,1347\ldots & \gamma_2 = 21,0220\ldots & \gamma_3 = 25,0109\ldots & \gamma_4 = 30,4249\ldots \\ \gamma_5 = 32,9351\ldots & \gamma_6 = 37,5862\ldots & \gamma_7 = 40,9187\ldots & \gamma_8 = 43,3271\ldots \\ \gamma_9 = 48,0052\ldots & \gamma_{10} = 49,7738\ldots & \gamma_{11} = 52,9703\ldots & \ldots \end{array}$$

Jede von diesen Zahlen speisen wir in eine logarithmisch verzerrte Kosinusschwingung ein und betrachten $f_j(x) := \cos(\gamma_j \log x)$. Diese Schwingungen können wir überlagern und betrachten $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_N(x)$. Die folgende Graphik zeigt die Kurve für $N = 30$.



Was stellen wir fest: Wie durch ein Wunder hat die Kurve große Ausschläge nach unten bei den Primzahlen und kleine bei den Primzahlpotenzen wie 8, 9, 16, 25 etc. Mit anderen Worten: Die merkwürdige Zahlenfolge γ_j „kennt“ gewissermaßen die Primzahlen.

Arithmetische Struktur der Primzahlen

Zum Abschluss wollen wir uns noch ein bisschen mit der feineren Struktur der Primzahlen beschäftigen. Wie viele Primzahlen tauchen in der arithmetischen Progression $12n + 3$ auf? Richtig, genau eine, nämlich die 3, denn diese Zahlen sind alle durch 3 teilbar. Genauso uninteressant sind die Progressionen $12n + a$ mit $a \in \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, und es bleiben nur die Werte $a \in \{1, 5, 7, 11\}$ übrig. Allgemein untersuchen wir Progressionen $qn + a$ mit $\text{ggT}(q, a) = 1$. Mit $\varphi(q)$ bezeichnen wir die Anzahl der $1 \leq a \leq q$ mit $\text{ggT}(a, q) = 1$. (Also $\varphi(12) = 4$.) Ein berühmter Satz von Dirichlet sagt, dass sich die Primzahlen *gleichmäßig* auf alle in Frage kommenden $\varphi(q)$ Progressionen verteilen, etwas genauer:

** Diese Zahlen sind die Imaginärteile der ersten 11 komplexen Nullstellen der Zetafunktion

Satz (Dirichlet): Sei $\mathrm{ggT}(a,q) = 1$. Dann ist die Anzahl der Primzahlen $1 \leq p \leq x$, die bei Division durch q Rest a lassen, etwa $\dfrac{1}{\varphi(q)}\dfrac{x}{\log x}$.

Es gibt also etwa „gleich viele" Primzahlen, die bei Division durch 4 den Rest 1 lassen, wie Primzahlen, die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen. Man könnte sich jetzt fragen, ob es Progressionen $qn+a$ gibt, die nur aus Primzahlen bestehen. Das ist aber nicht der Fall.

Übung: Beweise das!***

Statt dessen könnte man nach möglichst langen Teilstücken von Progressionen suchen, die prim sind. Zum Beispiel ist 7, 37, 67, 97, 127, 157 eine arithmetische Sequenz aus Primzahlen. Es ist eine Progression bekannt, die 23 aufeinanderfolgende prime Glieder enthält, deren erstes etwa die Größe $\approx 5.6 \cdot 10^{13}$ hat. Man sieht: Computersuchen haben hier wenig Sinn, wenn man zum Beispiel prime arithmetische Progressionen der Länge 100 oder 1000 sucht. Ein großer Durchbruch gelang zwei Mathematikern 2004, für den es (unter anderem) eine Fields-Medaille**** gab:

Satz (Green-Tao 2004): Es gibt *beliebig lange* arithmetische Progressionen aus Primzahlen.

Als nächstes kann man sich fragen, ob der Abstand zwischen zwei Primzahlen beliebig groß werden kann. Darauf kann man auf zwei ganz verschiedene Arten mit Ja antworten. Man kann große Lücken zwischen Primzahlen explizit konstruieren: die Zahlen $n!+2$, $n!+3$, ..., $n!+n$ sind sicher zusammengesetzt. Man kann aber auch indirekt argumentieren. Der Primzahlsatz sagt, dass der *durchschnittliche* Abstand zwischen der n-ten und der $(n+1)$-ten Primzahl etwa wie $\log n$ wächst, und $\log n$ ist unbeschränkt. Insbesondere muss der *maximale* Abstand beliebig großwerden. Dieses Argument kann leicht formalisiert werden. Und wie sieht es mit kleinen Abständen aus? Gibt es zum Beispiel unendlich viele Primzahlzwillinge? Das ist bis heute ungelöst, aber man vermutet, dass es der Fall ist. Man könnte zum Beispiel so argumentieren (das ist aber kein Beweis): Die Wahrscheinlichkeit, dass n prim ist, ist $\frac{1}{\log n}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass $n+2$ prim ist, ist $\frac{1}{\log(n+2)} \approx \frac{1}{\log n}$. Die Ereignisse „$n$ ist prim" und „$n+2$ ist prim" sollten unabhängig sein, zumindest annähernd.***** Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass n zu einem Primzahlzwilling gehört, etwa $\frac{1}{(\log n)^2}$, und es sollte gelten

$$|\{\text{Primzahlzwillinge } \leq x\}| \approx \frac{x}{(\log x)^2}.$$

*** Die Auflösung findet ihr auf Seite 39.

**** Dies ist eine der höchsten Auszeichnungen die ein Mathematiker erhalten kann; etwa mit dem Nobelpreis vergleichbar, den es für die Mathematik ja nicht gibt.

***** Ist n prim, so ist n ungerade, mithin auch $n+2$, was es für n etwas wahrscheinlicher macht, prim zu sein. Diese Effekte sind aber nicht sehr stark.

Genauer wird vermutet:

$$|\{\text{Primzahlzwillinge } \leq x\}| \sim 1.3203 \ldots \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Beweisen kann man folgendes:

$$|\{\text{Primzahlzwillinge } \leq x\}| \leq 4.513 \frac{x}{(\log x)^2}.$$

und

$$|\{p \leq x : p+2 \text{ hat höchstens zwei Primfaktoren}\}| \geq c_0 \frac{x}{(\log x)^2}$$

für eine Konstante $c_0 > 0$. Zum Beweis der beiden letzten Aussagen benutzt man *Siebe*, die ganz ausgetüftelte Verallgemeinerungen des klassischen Siebes des Eratosthenes sind.

Zurück zur Ausgangsfrage: *Sind Primzahlen dem Zufall unterworfen?* Wir haben oft mit Wahrscheinlichkeiten argumentiert, und in der Tat verhalten sich Primzahlen in vieler Hinsicht wie Zufallsvariable. Ihr globales Verhalten ist sehr regelmäßig, ihr lokales Verhalten allerdings scheinbar unvorhersehbar und strukturlos. Das ist vielleicht ein bisschen vergleichbar mit Gasen in der Physik. Die Bewegung eines einzelnen Moleküls ist unvorhersehbar und chaotisch, als Ganzes gehorchen Gase aber verhältnismäßig einfachen Gesetzen.

Eine *Aufgabe* zum Schluss: Sei $\omega(n)$ die Anzahl der Primteiler von n, also

$$\omega(5) = 1, \quad \omega(12) = 2, \quad \omega(3102) = \omega(2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 47) = 4$$

Wie groß ist $\omega(n)$ im Mittel, was ist also

$$\frac{1}{N}\left(\omega(2) + \omega(3) + \omega(4) + \ldots + \omega(N)\right)$$

für sehr große N?

(Tipp: Schau Dir nochmal an, was wir im ersten Teil gemacht haben.)

Wer forscht mit?

Eine sich selbst reproduzierende Zahlenfolge

Im Jahre 1965 gab der Mathematiker W. Kolakoski eine einfache und durchsichtige Definition einer Folge $F : q_1, q_2, q_3, \ldots$ von natürlichen Zahlen, die dennoch bis heute im Wesentlichen nicht explizit angegeben werden kann.

Die Folge F ist so festgelegt:

(1) Die beiden ersten Elemente der Folge sind $q_1 = 1, q_2 = 2$.

(2) In F stehen niemals drei gleiche Zahlen nebeneinander.

(3) Ersetzt man jedes Paar benachbarter gleicher Zahlen in F durch die Zahl 2 und alle übrigen Zahlen aus F durch 1, so erhält man wieder die Folge F.

Die Auflösung findet ihr auf Seite **??**.

Die Kolakoski-Folge wirft einige Fragen auf, die noch nicht beantwortet sind – siehe weiter unten: b) und c).

Zunächst aber soll F ein wenig über die Anfangswerte 1 und 2 hinaus verlängert werden, um zu sehen, wie die Folgenkonstruktion mittels (1) bis (3) überhaupt funktioniert und ob die in (3) erhobene Forderung, dass die aus F erzeugte Folge wieder F sein soll, tatsächlich erfüllbar ist.

Wie oben seien g_n, $n \geq 1$, die Elemente von F. Die gemäß (3) entstehende Folge sei mit H und ihre Elemente mit h_m, $m \geq 1$, bezeichnet.

Die Konstruktion eines Anfangsstückes von F:

1. Gemäß (3) ist $h_1 = g_1$ und $h_2 = g_2$; also ist $h_1 = 1$, $h_2 = 2$. Daraus folgt mit (3), dass $g_3 = 2$ und dass dann wegen (2) $g_4 = 1$ ist – vergleiche mit der Tabelle;
2. Gemäß (3) ist $h_3 = g_3$ und $h_4 = g_4$. Also ist $h_3 = 2$ und $h_4 = 1$. Aus $h_3 = 2$ folgt wegen $g_4 = 1$, dass auch $g_5 = 1$ ist; aus $h_4 = 1$ und aus (2) ergibt sich $g_6 = 2$
   und so weiter.

Tabellarisch sieht das bis g_{12} und h_8 so aus:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
$F:$	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2
$H:$	1	2		2		1	1	2		1	2	
	h_1	h_2		h_3		h_4	h_5	h_6		h_7	h_8	

Man sieht leicht: Die Konstruktion ist unbeschränkt so fortsetzbar, dass die Forderung aus (3) gültig ist.

Nun versuche man es selbst:

a) Wie heißen die F-Elemente g_{13}, ..., g_{21}?

b) Untersuche (eventuell mit dem Computer), ob in F Zykeln (das heißt Ketten gleicher Längen bestehend aus den gleichen Zahlen) auftreten.

c) Man suche eine Formel, die für eine gegebene Nummer n das Folgeelement g_n zu berechnen erlaubt.

(H. Fuchs)

Hinweis: Eure Forschungsergebnisse könnt Ihr bis zum 31. August 2011 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils zwei Hefte später veröffentlicht.

In Heft 104 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Obstgarten

Ein bekanntes Kinderspiel heißt „Obstgarten“. Auf den sechs Seiten eines Würfels sind vier verschiedene Obstsorten aufgedruckt, ein Joker und ein Rabe. Auf einem

Spielfeld sind von jeder der vier Obstsorten je $n = 10$ Exemplare vorhanden. Nun wird gewürfelt: Erscheint eine Obstsorte, so kann eine der entsprechenden Früchte vom Spielfeld entfernt werden. Ist die Obstsorte nicht mehr vorhanden, passiert nichts. Erscheint der Joker, können zwei beliebige (eventuell gleiche) Früchte vom Spielfeld entfernt werden. Erscheint der Rabe, bekommt der Rabe einen Punkt. Die Spieler haben gewonnen, falls sie alle Früchte vom Spielfeld entfernt haben, bevor der Rabe $m = 9$ Punkte hat. Ansonsten haben die Spieler verloren.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spieler gewinnen, wenn die Spieler bei einem Joker zufällig zwei Früchte aussuchen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spieler gewinnen, wenn die Spieler bei einem Joker immer Früchte von der oder den Obstsorten nehmen, von der oder denen noch am meisten vorhanden ist?

c) Beantworte dieselben Fragen für andere Parameter m und n.

d) Beantworte dieselben Fragen für beliebige Parameter m und n. (V. Blomer)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe hat sich Andreas Pitsch, Kl. 10, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey beschäftigt. Er stellt den Wahrscheinlichkeitsbaum für einmaliges Würfeln auf und berechnet den Erwartungswert bei n-maligem Würfeln, wobei n ein Vielfaches von 6 ist.

Der Verfasser der Aufgabe, V. Blomer, hat uns auch seine Lösungsideen gesandt:
Zum Aufwärmen vereinfachen wir das Problem ein wenig und vergessen den Joker. Wir nehmen an, der Würfel hat nur 5 Seiten, und es wird entweder eine der 4 Obstsorten entfernt, oder der Rabe bekommt einen Punkt. Wenn der Rabe im k-ten Schritt gewinnt, muss folgendes Szenario geschehen sein: es gibt nicht-negative ganze Zahlen $a_1, \dots, a_4$ mit $\min(a_1, \dots a_4) < 10$ und $a_1 + \dots + a_4 + 9 = k$, so dass in den ersten $k-1$ Schritten a_1-mal die erste Frucht, a_2-mal die zweite Frucht, a_3-mal die dritte Frucht und a_4-mal die vierte Frucht und 8-mal der Rabe gewürfelt wurde, und im k-ten Schritt wird wieder der Rabe gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Rabe gewinnt, ist also

$$(1) \qquad \sum_{\substack{a_1,a_2,a_3,a_4 \geq 0 \\ \min(a_1,\dots,a_4)<10}} \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+8)!}{a_1!a_2!a_3!a_4!\,8!\,5^{(a_1+a_2+a_3+a_4+8)}} \cdot \frac{1}{5}.$$

Es ist nicht offensichtlich, wie man diesen Term exakt berechnen kann, aber man kann ihn zum Beispiel für numerische Abschätzungen benutzen.
Kommt der Joker ins Spiel, wird die Sache noch komplizierter. Mit Gewalt kann man zum Beispiel folgendermaßen vorgehen. Wir nehmen an, dass beim Würfeln des Jokers zufällig zwei Obstsorten entfernt werden (selbst dann, wenn es diese Obstsorten gar nicht mehr gibt). Das modellieren wir so. Wir teilen die Würfelseite mit dem Joker in 6 Teile, die zu den 6 Paaren von Obstsorten gehören. Der erste

Teil bedeutet dann etwa, dass die Obstsorten 1 und 2 entfernt werden; der zweite, dass die Sorten 1 und 3 entfernt werden etc. Aus demokratischen Gründen teilen wir alle anderen Würfelseiten auch in 6 Teile, unser Würfel hat jetzt also 36 Seiten. Bei 6 Seiten (etwa den Seiten 31 - 36) bekommt der Rabe einen Punkt und bei je 9 Seiten wird eine Obstsorte entfernt. Wir bezeichnen mit $S_i \subseteq \{1, \dots, 30\}$ die Menge der 9 Seiten, bei denen die Obstorte i entfernt wird, und wir schreiben

$$A_i = \sum_{j \in S_i} a_j.$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Rabe gewinnt

$$(2) \qquad \sum_{\substack{a_1, \dots, a_{36} \geq 0 \\ a_{31} + \dots + a_{36} = 8 \\ \min(A_1, A_2, A_3, A_4) < 10}} \frac{(a_1 + \dots + a_{36})!}{a_1! \cdots a_{36}!\, 36^{(a_1 + \dots a_{36})}} \cdot \frac{1}{6}.$$

Es ist klar, wie der Term für andere Werte von n, m modifiziert wird.

Man kann auch ganz anders vorgehen, um der Gewinnwahrscheinlichkeit näher zu kommen. Man kann einfach hinreichend oft spielen. Oder man kann den Computer spielen lassen. Das ist keineswegs ehrenrührig (wenn auch kein Beweis). Bei 1.000.000 Spielen und zufälligem Entfernen von Obstsorten im Falle eines Jokers hat der Rabe 498216mal gewonnen, bei optimaler Strategie wie in Teil b) hat der Rabe nur noch 329963mal gewonnen. Mit anderen Worten, haben die Kinder das Spiel verstanden, sollten sie bei 2 von 3 Spielen gewinnen. Das ist eigentlich nicht so schlecht...

Einige weiterführende Bemerkungen von Hans-Jürgen Schuh

1. Ein Zufallsexperiment werde n-mal unabhängig durchgeführt, wobei als Ereignis eines von ℓ Merkmalen auftreten kann und zwar mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, ..., p_ℓ, das heißt $p_1 + \dots + p_\ell = 1$. $N_1, \dots, N_\ell$ geben an, wie oft die einzelnen Merkmale unter den n Versuchen auftreten, das heißt $N_1 + \dots + N_\ell = n$.
   Der Zufallsvektor $(N_1, N_2, \dots, N_\ell)$ hat die sogenannte *Multinomiale Verteilung* $Mn(p_1, \dots, p_\ell; n)$, das heißt
   $$\begin{aligned} P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_\ell = n_\ell) &= Mn(p_1, \dots, p_\ell; n; n_1, \dots, n_\ell) \\ &= \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_\ell^{n_\ell} \end{aligned}$$
   für alle ganzzahligen Vektoren $(n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ mit $n_j \geq 0$ und $n_1 + \dots + n_\ell = n$, wobei
   $$\binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_\ell!}.$$
   Im Spezialfall $\ell = 2$ ergibt sich die *Binomialverteilung*: $Mn(p_1, p_2; n; n_1, n_2) = b(p_1, n; n_1)$ $(= b(p_2, n; n_2))$ wobei hier N_1 und N_2 durch $N_2 = n - N_1$ mitein-

ander verkettet sind.

Demgemäß schreibt sich nun (1) als:

$$\frac{1}{5} \cdot \sum_{\substack{a_1,a_2,a_3,a_4 \geq 0 \\ \min(a_1,\ldots,a_4)<10}} Mn\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}; a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 8; a_1, a_2, a_3, a_4, 8\right)$$

und (2) als :

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_{36} \geq 0 \\ a_{31}+\ldots+a_{36}=8 \\ \min(A_1,A_2,A_3,A_4)<10}} Mn\left(\frac{1}{36}, \ldots, \frac{1}{36}; a_1 + \ldots + a_{36}; a_1, a_2, \ldots, a_{36}\right)$$

2. Einen 5-seitigen Würfel gibt es natürlich nicht. Man kann ihn jedoch mit Hilfe eines normalen (6-seitigen) Würfels simulieren, indem man immer wenn 6 Augen fallen solange weiter wirft, bis die Augenzahl zum ersten Mal zwischen 1 und 5 liegt.
   Aufgabe: Man zeige, daß dann jede der Augenzahlen von 1 bis 5 mit Wahrscheinlichkeit auftritt.
3. Einen 36-seitigen Würfel simuliert man, indem man 6 unterscheidbare Würfel gleichzeitig wirft. Man interpretiert dann beispielsweise $(1, 1 \ldots, 1)$ als 1, $(2, 1 \ldots, 1)$ als 2, ... $(1, 2, 1 \ldots, 1)$ als 7, ... bis $(6, 6, \ldots, 6)$ als 36.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Paul, Dietrich: „Was ist an Mathematik schon lustig?“

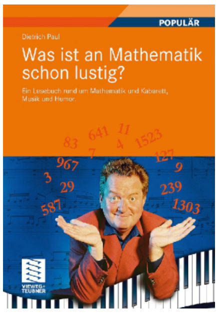
Wenn sich jemand wie Dietrich „Piano“ Paul der im Buchtitel selbst gestellten Frage annimmt, darf man einiges erwarten: handelt es sich bei dem Autor doch um einen promovierten Mathematiker und Kabarettisten, der seit 1988 als freischaffender Künstler acht Kabarett-Programme auf die Bühne brachte.

Anders als bei dem 2005 erschienenen „PISA, Bach, Pythagoras“ handelt es sich beim vorliegenden Band jedoch nicht um die Druckfassung eines Kabarett-Programm, sondern um „ein vergnügliches Lesebuch rund um die Mathematik“ (so der Klappentext). Inhaltlich ist das Buch in drei Teile gegliedert: „Mathematik und Kabarett“, „Mathematische Zeitgeistglossen“ sowie „Musik, Mathematik und Humor“. Außerdem wird immer wieder ein mathematisches Zwischenspiel eingebaut, in dem der Leser sich selbst aktiv mit – auch für typisches deutsches InMathewarichimmerschlecht-Kabarettpublikum geeigneten – Fragestellun-

gen über Primzahlen beschäftigen kann.
Nach einer kurzen Einführung über die Frage der Kompatibilität von Kabarett und Mathematik und historischen Vorbildern aus der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts beleuchtet Paul in humoristischer Weise zunächst. Die im Sommer 2007 von der polnischen Regierung ins Gespräch gebrachte Abstimmungsregelung nach der Quadratwurzel für den europäischen Grundlagenvertrag und die völlige Kopflosigkeit der deutschen Medien bei der Interpretation dieser Forderung. Für Leser, die gerne selbst kabarettistisch tätig werden wollen, gibt es einen fertig vorbereiteten Vortrag über „Moderne Verkehrsgestaltung“ zum selbst ausprobieren vor geneigtem Publikum (inklusive Regieanweisungen und Fußnoten).
Weitere im ersten Teil behandelte Themenfelder sind: Promis in die Schulen? Subtrahieren schwer gemacht und Logik. Im zweiten Teil finden sich dann drei mathematische Zeitgeistglossen über Einstein, Gödel und Perelmann; im dritten Teil folgt dann Diverses über Musik, Mathematik und Humor.

Fazit: Sofern man der Mathematik und dem manchmal etwas schrägen Humor von Mathematikern nicht abgeneigt ist – was ich bei Leserinnen und Lesern der Zeitschrift MONOID voraussetze – wird man von „Was ist an Mathematik schon lustig?“ begeistert sein. Allerdings richtet sich das Buch eher an etwas Ältere. Dies nicht wegen der behandelten mathematischen Inhalte, sondern weil einige der Pointen – wie beim Kabarett üblich – nur mit gewissen Hintergrundkenntnissen aus Politik und Zeitgeschichte richtig wirken.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:
Paul, Dietrich: Was ist an Mathematik schon lustig? Vieweg 2011, ISBN 978 3 8348 04662, gebunden, 236 Seiten, 24,95 €

Art des Buches:	„Ein vergnügliches Lesebuch rund um die Mathematik“
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 16 Jahren

Lösung der Aufgaben von Seite 14

Lösung zu Beispiel 1:

a) Für jede Rosine besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{200}$, in das gewählte Hörnchen zu geraten. Daraus folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$b\left(250, \frac{1}{200}; 2\right) = \binom{250}{2} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^2 \cdot \left(\frac{199}{200}\right)^{248} \approx 0{,}22448.$$

Die Poisson-Näherung beträgt:

$$b\left(250, \frac{1}{200}; 2\right) \approx p\left(\frac{250}{200}; 2\right) = e^{-1{,}25} \cdot \frac{1{,}25^2}{2!} \approx 0{,}22383.$$

b) Die *gesuchte Wahrscheinlichkeit* ist:

$$b\left(25, \frac{1}{20}; 2\right) = \binom{25}{2} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{23} \approx 0{,}23052,$$

was sich deutlich von obigem Poisson-Wert unterscheidet.

Lösung zu Beispiel 2: Unter obigen Annahmen können wir davon ausgehen, dass die *Anzahl der Autos pro Tag* angenähert *Poisson-verteilt* ist. Also:

$$P\,(\textit{morgen kein Auto}) \approx p(3; 0) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = e^{-3} \approx 0{,}04979.$$

Lösung der Übungen von Seite 33

Auflösung der Übung von Seite 33: Das Glied $q(a+q+1)+a = (q+1)(q+a)$ ist sicher keine Primzahl für $q, a \geq 1$.

Auflösung der Übung von Seite 33: Es gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N}\omega(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N}\sum_{p|n} 1 = \frac{1}{N}\sum_{p\leq N}\sum_{\substack{2\leq n\leq N\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ p)}} 1 = \frac{1}{N}\sum_{p\leq N}\left(\frac{N}{p} + O(1)\right)$$
$$= \sum_{p\leq N}\frac{1}{p} + O(1) \sim \log\log N.$$

Im Mittel hat eine Zahl der Größenordnung N also etwa $\log\log N$ Primteiler.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 104

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen
(betr. Lehrerinnen: Frau Frohs, Frau Farag)**:**

Kl. 7: Farah Ashraf 9, Iman Seif Al-Islam 6;

Kl. 8: Mariam Ahmed 9, Marianne Michel 17, Chantal Ragy 8;

Kl. 9: Farieda Gaber 17;

Kl. 12: Nada Mohamed ElAttar 35.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Kunz)**:**
Kl. 5: Fabian Küster 2, Florian Lehn 3, Marc Schäfer 4;
Kl. 6: Ariane Essig 4 ;
Kl. 7: Sandra Keil 5, Sara-Teresa Vesely 9, Niclas Mayer 11, Jann Ole Neitzel 11, Sebastian Maak 16, Katharina Rößler 16;
Kl. 9: Marc de Zoeten 5, Laura Tabea Galkowski 17, Alexander Rupertus 12, Sebastian Ludwig 20, Benedikt Maurer 20;
Kl. 10: Lara Bergjohann 2, Andreas Pitsch 4;

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum :
Kl. 6: Valentin Jacobsen 3 .

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 10: Frank Schindler 42.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 8: Christopher Patzanovsky 48;
Kl. 9: Cascaya Schade 28.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 5: Iolanthe Köcher 30;

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium:
Kl. 10: Marcella Beck 19.

Coburg, Gymnasium Casimirianum:
Kl. 10: Markus Voelckel 21.

Dieburg, Alfed-Delp-Schule:
Kl. 12: Hanna Kraffcyk 29, Eva Springer 20, Sonja Steineck 20, Cornelia Stuckert 33.

Eching, Imma-Mack-Realschule:
Kl. 10: Bettina Diller 14.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betr. Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 6: Emmanuel Höfer 5;
Kl. 7: Katharina Eibich 7, Annika Ellenberger 8, Verena Rübsam 17, Anne Vogel 18.

Erkner, Carl-Bechstein-Gymnasium:
Kl. 7: Sonja Witte 11;
Kl. 9: Wanda Witte 4.

Erlangen, Gymnasium Fridericianum:
Kl. 8: Nadja Motova 16.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Jule Koob 6 ;
Kl. 6: Tillmann Ballweber 53, Christoph Hemmer 16 ;

Kl. 7: Kevin Moun 10, Jana Pacyna 5, Tobias Witt 7, Marcel Wittmann 54;
Kl. 8: Christian Effen 13, Gregor Hanisch 19;
Kl. 10: Henning Ballweber 47.

Frankfurt, Heinrich-von-Gagern-Gymnasium:
Kl. 5: Katharina Koch 15.

Gießen, Landgraf-Ludwigs-Gymnasium:
Kl. 5: Ahmet Adil Cihangeri 12, Lukas Dille 5, Siavash Jannat Khah Doost 4;
Kl. 6: Naomi Buhmann 13, Anna Peitz 11, Lea Terhüme 11.

Günzburg, Dossenberger-Gymnasium:
Kl. 9: Dominik Ruf 17.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule
(betr. Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 5: Ken Biet 21, Kim Bruder 5, Noah Fuchs 12, Matthias Hannappel 32, Julia Holzhüter 14, Emma Mais 10, Nils Prepens 29, Max Schneider 13, David Storze 31;
Kl. 6: Sven Glombitza 2, Steffi Langer 15, Lea Stiehl 11, Pauline von Ryssel 2, Justin Wunderlich 36, Emily Zollmann 14;
Kl. 7: Moritz Schäfer 10;
Kl. 8: Lars Prepens 6.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:
Kl. 10: Michael Delhougne 6;
Kl. 12: Philipp Delhougne 34.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 5: Mariam Baher 14;
Kl. 10: Shaima'a Ahmed Doma 25.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Tamara Bentz 7, Luca Langer 4, Patrick Piosch 7 Zora Rabeneck 19;
Kl. 6: Leonard Röhl 7, Tom Sprenger 7;
Kl. 7: Victor Brendel 19, Philipp Faber 7, Björn Stanischewski 36;
Kl. 8: Maike Stanischewski 32.

Lehrte, Gymnasium Lehrte:
Kl. 10: Robin Fritsch 39.

Limburg, Tilemannschule:
Kl. 7: Michael Von Baeckmann 15;
Kl. 9: David Andrick 4.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Sebastian 5, Julia Adam 8, Jana Eichhorn 6, Angela Hahn 3, Marc Hoff-

mann 12, Sophia Keller 2, Annika Kunz 10, Tim Morsbach 4, Julia Maria Ortmann 5, Fabienne van Lier 5, Antonia Winterling 1;

Kl. 6: Lea Böhres 7, Lena Christ 8, Enrico Heppler 2, Ivan Mijokovic 14, Laura Nikolay 5, Josephine Quierbach 6, Maximilian Schneider 1, Melanie Weibrich 23;

Kl. 8: Jakub Dreijkarz 12, Valentina Preuhs 5, Theresa Schöche 3, Nina Troppens 8;

Kl. 11: Giang Phi 30, Malik Wagner 3.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim:

Kl. 11: Niklas Bockius 41.

Mannheim, Ludwig-Frank-Gymnasium:

Kl. 10: Illja Fodorov 31.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Wittekindt)**:**

Kl. 7: Kim Klüber 3, Lena Bagnar 6, Noah Hayek 23, Hana Kadrija 3, Jasmin Lichtenberger 7, Leo Lutz 31, Julia Niederschmidt 5, Vithursan Thanabalasingam 7, Jan Ulex 15;

Kl. 8: Léonard Wagner 5;

Kl. 11: Tim Lutz 25.

Markt Indersdorf, Gymnasium:

Kl. 11: Katharina Münster 25.

München, Max-Planck-Gymnasium:

Kl. 6: Josef Sandor 6;

Kl. 8: Greta Sandor 12.

Niddatal-Assenheim, Geschwister-Scholl-Schule:

Kl. 3: Leonie Rößler 39.

Nieder-Olm, Gymnasium:

Kl. 12: Heike Karin Herr 35.

Oberursel, Gymnasium (betr. Lehrer: Frau Beitlich)**:**

Kl. 5: Hannah Beckenbauer 7, Riccardo Brode 6, Jill Frey 6, Adrian Fritsch 3, Marie Langer 15, Mia-Marie Leun 5, Simon Petri 2, Niklas Witt 8;

Kl. 6: Alisia Desor 5, Jonathan Drewes 10, Nicole Hardock 3, Anna Ledro 6, Jakob Schorr 3, Christian Schröder 8;

Kl. 7: Kendra Bender 5, Tobias Bienert 7, Lorena Bürke 10, Hannah Döll 10, Nina Friedrich 1, Jonathan Gutsche 10, Matthias Kerscher 5, Leon Marzeion 5, Katja Offen 4, Svenja Thier 9, Janna Vahlhaus 8, Tim-Leon Weist-Ruff 7, Yeong-Chul Yun 25;

Kl. 8: Lutz Bischoff 21, Heiko Kötzsche 42.

Oppenheim, St. Katharinen-Gymnasium :

Kl. 5: Thomas Blankenburg 12;

Kl. 8: Daniel Blankenburg 25.
Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch)**:**
Kl. 6: Patrick Günther 7, Annika Hock 4.
Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium:
Kl. 9: Luis Ressel 16.
Templin, Egelpfuhlschule:
Kl. 5: Ronja Gantzke 19.
Wiesbaden, Leibnitzschule:
Kl. 6: Elisa Dernier 8.
Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kuntz)**:**
Kl. 5: Julian Asel 9, Luisa Bruch 6, Marcel Dick 4, Laura Dinges 6, Luisa Kirch 28, Jannik Kropf 5, Ignaz Kunz 4, Sabrina Liebetrau 25, Leonie Scharff 5, Michelle-Romy Scheuffele 5, Maximilian Schreiber 3, Johannes Vatter 7, Lena Zuspann 10;
Kl. 6: Pascal Grabowsky 12, Denise Lembrich 17.
Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium :
Kl. 6: Noah Schleidweiler 16, Lukas Schermann 25, Philipp Schmitz 29.
Zwingenberg, Melibokusschule:
Kl. 4: Katharina Volk 20.

Mitteilung

Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Schuljahr 2011 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf mit freundlicher Unterstützung von Marcel Gruner
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr
Versand: Katherine Pillau

Jahrgang 31 | Heft 106 | Juni 2011

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid