

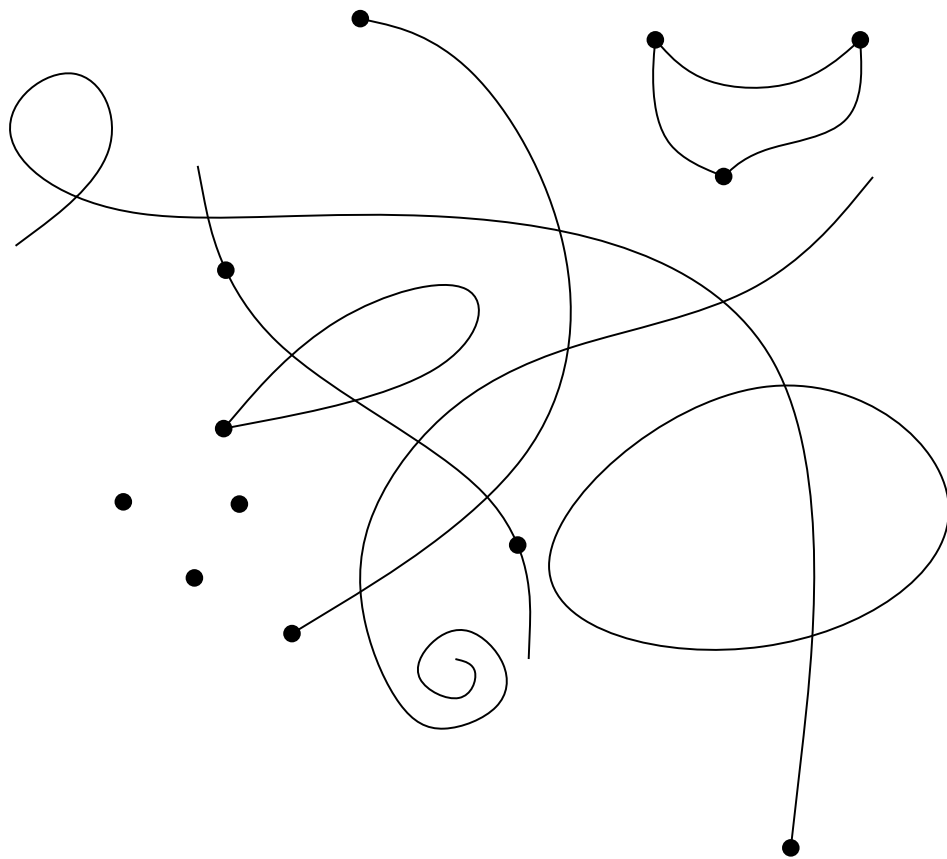
Jahrgang 31

Heft 107

September 2011

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.11.2011.

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

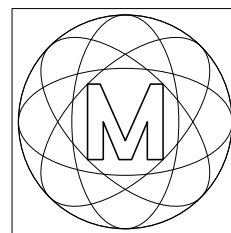
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Kunz, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.



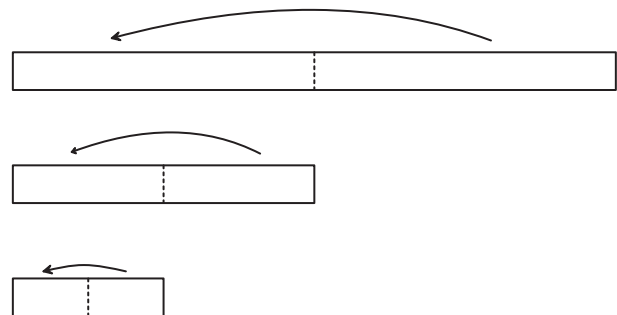
Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Bänder falten und eine Zahlenfolge

Stephan Rosebrock

In Monoid 101 habe ich die Morse-Thue-Folge vorgestellt. Sie hat ein einfaches Erzeugungsschema und führt schließlich zu einem Fraktal. Hier wollen wir eine ähnliche Folge betrachten, die wir diesmal aber durch Basteln gewinnen können. Schneide Dir dazu von einem DIN-A4-Blatt einen Streifen Papier ab. Faltest Du ihn einmal nach links



und öffnest das Band wieder halb, so hast Du einen Linksknick im Band.

Wir notieren $F_1 = L$. Dabei steht das L für den Linksknick. Faltest Du zweimal und öffnest wieder, so hast Du $F_2 = LLR$, weil Du nach dem Öffnen erst zwei Linksknicke hast und danach einen Rechtsknick. Der nächste Knick ergibt $F_3 = LLRLLRR$ und der vierte gibt $F_4 = LLRLLRLLLRRLRR$. Man sieht: Der Anfang von F_i ist F_{i-1} . Weil das so ist, können wir die Folge von L und R betrachten, wenn wir unendlich oft falten. Sie heiße *Bänder-Folge* und erhält die Bezeichnung F .

Könnt Ihr noch ein fünftes Mal falten? Welche Folge bekommt Ihr jetzt? Viel öfter falten klappt nicht. Auch wenn wir ein längeres Band nehmen, wird das Papier nach wenigen Faltungen sperrig. Deswegen wollen wir durch Nachdenken verstehen, wie die Folge für viele Knicke aussieht.

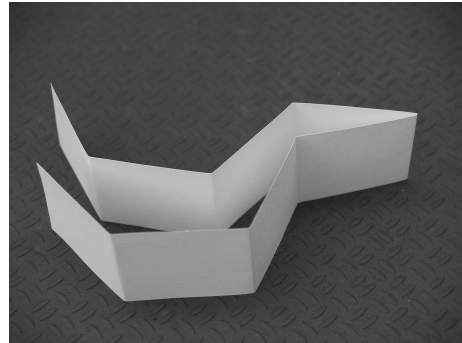
Wenn wir einmal falten, haben wir zwei Lagen Papier aufeinander. Beim zweiten Falten sind es schon vier und beim dritten Falten acht Lagen. Die Anzahl Papierlagen verdoppelt sich in jedem Schritt. Wir haben also bei n Faltungen 2^n Lagen Papier übereinander.

Wenn wir einmal falten, haben wir einen Knick, beim zweiten Falten sind es drei Knicke. Wir haben immer einen Knick weniger als Lagen Papier aufeinander liegen, weil zwischen je zwei Lagen, die aufeinander folgen, ein Knick ist. Bei n Faltungen haben wir also $2^n - 1$ Knicke.

In jedem F_i ist die Anzahl der Buchstaben L um eins größer als die Anzahl der R 's. Das Band geht nämlich immer hin und her im Wechsel, also genauso oft hin wie her. Knicke ich jetzt erneut, so erzeugt das ein L , bei einem Bandteil, welches von links nach rechts geht und ein R bei einem Bandteil, welches von rechts nach links geht. Das sind also gleich viele. Weil es am Anfang, in F_1 , ein L mehr gibt,

als R , gibt es insgesamt ein L mehr als R in jedem F_i .

Wie bekommen wir aber die weiteren Glieder der Folge F , ohne dass wir falten müssen? Stellen wir uns dazu vor, wir haben schon ganz oft gefaltet und jetzt falten wir den Streifen wieder auf, bis auf den letzten Knick wie in der nebenstehenden Abbildung.



Das Band ist also noch einmal gefaltet, hat aber ganz viele Knicke, die einmal hin und danach wieder zurück durchlaufen werden. Jeder Linksknick im unteren Teil des Bandes wird zu einem Rechtsknick oben und jeder Rechtsknick im unteren Teil wird oben zu einem Linksknick. Dabei wird die Folge des unteren Bandes oben rückwärts durchlaufen. Also wenn wir beispielsweise aus F_3 die Folge F_4 machen wollen, so müssen wir F_3 noch einmal hinschreiben, dann ein L schreiben (für den einzigen noch bestehenden Knick) und dann die Folge F_3 noch einmal rückwärts schreiben, wobei L und R vertauscht werden:

$$F_4 = LLRLLRR \quad L \quad LLRRLRR$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir F_5 aus F_4 :

$$F_5 = LLRLLRRLLLRLRR \quad L \quad LLRLLRRLLLRLRR$$

und so weiter. Wir müssen nicht mehr wirklich falten.

Es gibt aber noch eine zweite Weise, die Folgen F_i zu erzeugen. Nehmen wir einmal an, wir haben unser Papierband schon ein paar Mal gefaltet. Jetzt soll es noch einmal gefaltet werden. Zwischen je zwei bestehende Knicke wird ein neuer Knick dadurch eingeführt. Weil das Band abwechselnd vor und zurück läuft, werden diese Knicke im Wechsel Links- und Rechtsknicke. Wir erhalten also F_4 aus F_3 , indem wir immer zwischen bestehende Buchstaben im Wechsel L und R einfügen.

$$F_3 = \quad L \quad L \quad R \quad L \quad L \quad R \quad R$$

$$F_4 = LL \quad RL \quad LR \quad RL \quad LL \quad RR \quad LR \quad R$$

Das erste L muss dabei vor das bestehende Wort eingefügt werden. Genauso entsteht jedes F_i aus F_{i-1} . Ganz an den Schluss kommt das letzte R . Weißt Du, warum an den Schluss immer ein R kommt? Wenn wir also bei der unendlich langen Folge F jeden zweiten Buchstaben streichen, erhalten wir wieder F . Das war auch schon bei der Morse-Thue-Folge so. Diese zweite Methode, die Folge zu erzeugen, zeigt auch, dass niemals mehr als drei L oder R nebeneinander stehen. Wie kannst Du Dir das klar machen?

Wenn wir ein Band oft gefaltet haben und dann wieder auffalten, wie sieht das Ergebnis aus? Da oft falten schwierig ist, lassen wir den Computer das Ergebnis

zeichnen. Dabei soll jeder Links- oder Rechtsknick genau 90° haben. Im folgenden Mathematica Programm wird die Folge für 13-mal knicken erzeugt.

```
b = {0}; n = 13; j = 1;
For[i = 1, i < n, i++,
  AppendTo[b, 0]; j = 2*j;
  For[k = j - 1, k >= 1, k--,
    e1 = 1 - b[[k]]; AppendTo[b, e1]]];
```

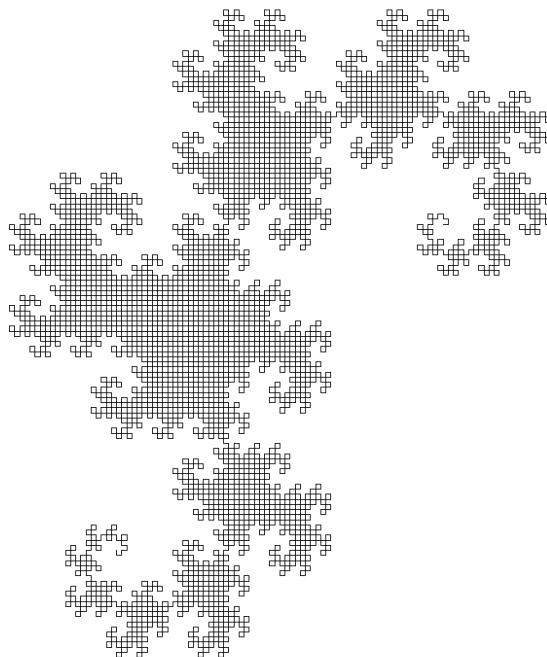
Sie hat die Länge 8191. Um es in Mathematica leichter zu haben, schreiben wir dabei eine 0 statt einem L und eine 1 statt einem R . Mit dem folgenden Code erzeugen wir das geknickte Band, wobei jeder Knick als 90° -Knick interpretiert wird.

```
matl = {{0, -1}, {1, 0}};
v = {1.0, 0.0}; band = {{0.0, 0.0}};
For[i = 1, i <= Length[b], i++,
  AppendTo[band, Last[band] + v];
  If[b[[i]] == 1, v = -matl.v, v = matl.v]];
```

Zum Verständnis ist etwas lineare Algebra notwendig. Der Mathematica-Code

```
Show[Graphics[Line[band]], AspectRatio -> Automatic];
```

zeichnet die auf band erzeugte Zeichenvorschrift und man erhält das Bild aus der nachfolgenden Abbildung.



Diese Kurve nennt man die *Drachenkurve*. Du kannst viel über sie im Internet erfahren.

Graphen

Zwei Axiome begründen eine Theorie

von Hartwig Fuchs

Vorweg

Axiome sind unbewiesene, aber als wahr betrachtete Annahmen, von denen aus Theorien entwickelt werden. Sie sind mächtige Gesellen – reichen doch in vielen Fällen einige wenige von ihnen aus, um auf ihnen auch hochkomplexe mathematische Gebäude zu errichten.

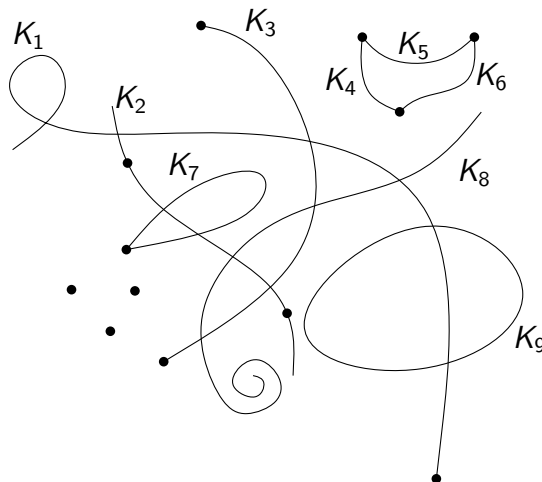
So etwa gründet sich die euklidische Geometrie in der Fassung, die ihr David Hilbert (1862-1943) gegeben hat, auf nur 15 Axiome und nach Giuseppe Peano (1858-1939) lässt sich die elementare Arithmetik aus nur sechs Axiomen entwickeln.

Aber auch bereits ein einziges Axiom kann ein so großes Potential besitzen, dass es in der Lage ist, in einer mathematisch unangreifbar scheinenden Materie Strukturen zu finden – für die sich dann eine Theorie entwickeln lässt. Ein solcher Fall ist die weit ausgefächerte *Theorie der Graphen*, die ihren Ausgang nimmt von zunächst nur einem Axiom.

Das erste Axiom und die Graphen

Die Gesamtheit F der Punkte und Linien in einer Ebene bildet für die Neugier der Mathematiker ein undurchdringliches Tohuwabohu geometrischer Gebilde. Das gilt auch für jeden noch so kleinen Teilbereich der Ebene mit seinen unendlich vielen Figuren.

Und es trifft sogar auch zu für jede Menge $F(e, k)$, deren Elemente geometrische Gebilde aus jeweils nur einer endlichen Anzahl von e Punkten und k Linien sind: Denn da für die e Punkte und k Linien jede Lage in der Ebene und für jede Linie zudem noch jede beliebige Form erlaubt ist, gibt es zu jedem Zahlenpaar (e, k) immer ein unentwirrbares Konglomerat von unendlich vielen Figuren in $F(e, k)$.



In dieser Abbildung ist nur eine der unendlich vielen verschiedenen Figuren aus $F(12, 9)$ dargestellt. Doch lässt schon allein dieses Beispiel etwas von der unfassbaren Vielfalt der Erscheinungsformen der Figuren aus $F(12, 9)$ und darüber hinaus auch der Figuren aus $F(e, k)$ mit beliebigen e, k erahnen und den daraus resultierenden Widerstand erkennen, den die Figurenmengen $F(e, k)$ einer mathematischen Untersuchung entgegensetzen.

Diesen Widerstand aber bricht ein einziges Axiom!

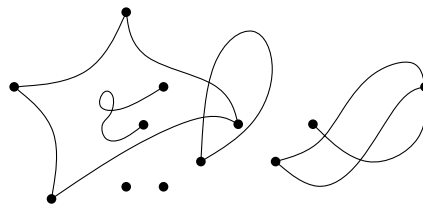
Dabei geht es allerdings nicht ohne Verluste zu: Die Figurenmengen $F(e, k)$ werden drastisch ausgedünnt.

Es sei G eine Figur aus einer Menge $F(e, k)$, wobei $e \geq 1$ sei. Wir bezeichnen wie allgemein üblich die Punkte und Linien von G als *Ecken* und *Kanten*. Dann ist G ein *Graph*^{*}, wenn die Kanten von G die folgende Forderung erfüllen:

Axiom 1: Jede Kante von G verbindet genau zwei Ecken von G , wobei die Ecken verschieden oder gleich sind.

Anschaulich bedeutet „verbinden“ hier, dass eine Kante in einer Ecke beginnt und in einer anderen Ecke oder in der gleichen Ecke endet.

Die erste Abbildung stellt nach Axiom 1 keinen Graph dar, denn nur die Kanten K_3 bis K_7 gehorchen dem Axiom, während das bei K_1 , K_2 , K_8 und K_9 nicht der Fall ist. Dagegen stellt die untere Abbildung einen der unendlich vielen Graphen mit 12 Ecken und neun Kanten dar.



Für jedes Zahlenpaar (e, k) sei nun $G(e, k)$ die Gesamtheit aller Graphen G mit e Ecken, $e \geq 1$ und k Kanten, $k \geq 0$.

Das Axiom 1 beschränkt dann bei jedem Graphen $G \in G(e, k)$ das Verbindungsmuster zwischen den Ecken und Kanten von G – die sogenannte Struktur von G – auf die folgenden Möglichkeiten:

- (g_1) Ecken sind unverbunden;
- (g_2) Ecken sind mit sich selbst durch eine oder mehrere Kanten verbunden;
- (g_3) Paare verschiedener Ecken sind durch eine oder mehrere Kanten verbunden.

Dabei können für eine Ecke auch die beiden letzten Möglichkeiten zugleich erfüllt sein.

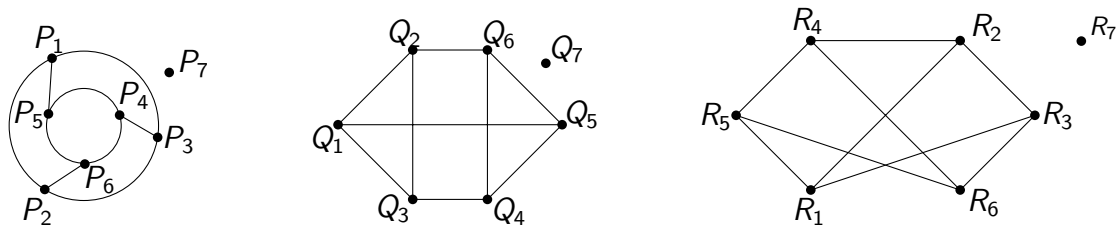
^{*} Das Wort „Graph“ wurde erstmals 1878 von dem englischen Mathematiker James J. Sylvester (1814 – 1897) als mathematischer Begriff benutzt. Die erste mathematische Arbeit, in der Graphen untersucht wurden, hat jedoch bereits 1741 Leonhard Euler verfasst – weshalb er auch als Begründer der Graphentheorie gilt.

Die Beschreibung und Untersuchung dieser vom Axiom 1 aus F ausgesonderten Figuren bilden eine Ausgangsbasis der weit verzweigten *Graphentheorie*. Wir werden hier nur einen kleinen Schritt in die Theorie machen, um die mit (g_1) – (g_3) möglichen Verbindungsmuster von Graphen kennen zu lernen.

Es ist leicht, zu einem gegebenen Graphen G mit den Ecken $P_1, P_2, \dots, P_e$ beliebig viele weitere Graphen G^* mit gleichem Verbindungsmuster** anzugeben:

In der Ebene legt man e Ecken $Q_1, Q_2, \dots, Q_e$ beliebig fest. Immer dann, wenn in G zwei Ecken P_i und P_j durch eine Kante verbunden sind, verbinde man auch Q_i mit Q_j . Der resultierende Graph G^* hat dann das gleiche Verbindungsmuster wie G .

Beispiel: Die Verbindungsmuster der ersten beiden Graphen in der folgenden Abbildung stimmen überein, nicht aber die des ersten und des dritten oder des zweiten und des dritten Graphen.



Für die Graphen aus jeder der Mengen $G(e, k)$ gibt es jeweils nur endlich viele Verbindungsmuster, weil die Zahlen e und k endlich sind. Daher wird man versuchen, für jede feste Eckenzahl e der Reihe nach sämtliche in $G(e, 0)$, $G(e, 1)$, $G(e, 2)$, ... auftretenden Verbindungsmuster zu finden. In der folgenden Tabelle ist das für $G(1, k)$ und $G(2, k)$, mit $k = 0, 1, 2, 3, 4$, gemacht – wobei wir jedes Verbindungsmuster durch einen Graphen geometrisch veranschaulicht haben. Es ist jedoch keine Methode bekannt, mit der man für jedes Zahlenpaar e, k die in $G(e, k)$ vorkommenden Verbindungsmuster systematisch angeben kann.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	...
$G(1, k)$	•					
$G(2, k)$	• •	•	•	•	•	

** In der Graphentheorie werden Graphen mit gleichem Verbindungsmuster auch als „isomorph“ bezeichnet

Aus der Tabelle lässt sich ein elementarer, für alle Graphen zutreffender Sachverhalt herauslesen: Zu jeder Zahl $e \geq 1$ gibt es stets Graphen mit e Ecken und k Kanten und zwar für jedes $k \geq 0$. Daraus folgt:

- (1) Zwischen den Eckenzahlen e und den Kantenzahlen k von Graphen besteht kein Zusammenhang.

Das zweite Axiom und die schlichten Graphen

Während das erste Axiom festlegt, welche Bedingung die Kanten eines jeden Graphen erfüllen, bewirkt das zweite Axiom, dass auch die Ecken eines Graphen einer einschränkenden Bedingung unterliegen.

Axiom 2: Je zwei Ecken eines Graphen G sind durch höchstens eine Kante aus G verbunden und falls zwei Ecken verbunden sind, dann sind sie verschieden.

Graphen, die den Axiomen 1 und 2 „gehörchen“, nennt man *schlicht*. Wir fassen sie nach der Anzahl e ihrer Ecken und der Anzahl k ihrer Kanten zusammen in den Mengen $S(e, k) \subset G(e, k)$. ($A \subset B$ bedeutet: „ A ist eine echte Teilmenge von B “, also alle Elemente aus A sind in B enthalten und $A \neq B$.)

Die Vielfalt der Verbindungsmuster von Graphen aus $G(e, k)$ wird durch das Axiom 2 beträchtlich reduziert. Es bleiben für die schlichten Graphen aus $S(e, k)$ nur noch die Möglichkeiten:

(s_1) Zwei Ecken sind unverbunden.

(s_2) Zwei verschiedene Ecken sind durch genau eine Kante verbunden.

Mit (s_2) kann keine Ecke eines schlichten Graphen mit sich selbst durch eine oder mehrere Kanten verbunden sein. Auch zwei Ecken von G können keine Verbindung durch mehrere Kanten haben.

In der folgenden Tabelle sind die möglichen Verbindungsmuster der schlichten Graphen aus $S(1, k)$, $S(2, k)$, $S(3, k)$ und $S(4, k)$ für $k = 0, 1, 2, \dots, 6$ mit diesmal geradlinigen Graphen geometrisch veranschaulicht.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$S(1, k)$							
$S(2, k)$							
$S(3, k)$							
$S(4, k)$			  	  	 		

In der Tabelle fällt auf, dass in jeder Zeile nach einer bestimmten Zahl k die Liste der Verbindungsmuster abbricht – tatsächlich gibt es danach keine Verbindungsmuster mehr: Das ist eine Folge des Axioms 2. Denn die für alle Graphen aus den Mengen $G(e, k)$ zutreffende Aussage (1) ist für schlichte Graphen falsch; bei ihnen gibt es einen Zusammenhang zwischen den Eckenzahlen e und den Kantenzahlen k . Es gilt nämlich:

(2) Für die Kantenzahl k eines schlichten Graphen mit e Ecken ist stets $k \leq \frac{1}{2}e(e-1)$.

Beweis: Von jeder der e Ecken eines schlichten Graphen G gehen nach (s_2) höchstens $e-1$ Kanten aus. Deshalb wird man zunächst $k \leq e(e-1)$ für die Kantenzahl k von G annehmen. Weil aber in dieser Berechnung jede Kante doppelt gezählt wird – etwa die Kante zwischen den Ecken P und Q als PQ und QP – gilt $k \leq \frac{1}{2}e(e-1)$.

Die Aussage (2) darf nun aber nicht zu der Vermutung verleiten, es sei eine leichte Aufgabe, für eine feste Zahl e sämtliche Verbindungsmuster der schlichten Graphen aus $S(e, k)$ anzugeben. Denn hätte zum Beispiel die Tabelle noch eine siebte Zeile, so wären für die Mengen $S(7, k)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, 6$ insgesamt 1044 Verbindungsmuster einzutragen (wir raten davon ab, diese Zahl nachzuprüfen)!

Tatsächlich ist das Problem, die Anzahl der Verbindungsmuster von schlichten Graphen zu bestimmen, nur für sehr kleine Eckenzahlen e und Kantenzahlen k gelöst. Das gilt aber nicht mehr, wenn wir die Menge der schlichten Graphen einschränken auf die Teilmenge der vollständigen Graphen.

Vollständige Graphen

Ein schlichter Graph ist *vollständig*, wenn seine Ecken die folgende Bedingung erfüllen:

(v) Jedes Paar unterschiedlicher Ecken ist durch eine Kante verbunden.

Die Konsequenzen aus (v) sind einschneidend:

- Ein Graph mit mindestens zwei Ecken kann keine isolierten, das heißt unverbundene Ecken wie etwa die Graphen mit $k = 0$ besitzen.
- Bei gegebener Eckenzahl e ist die Kantenzahl k festgelegt; es gilt nämlich:

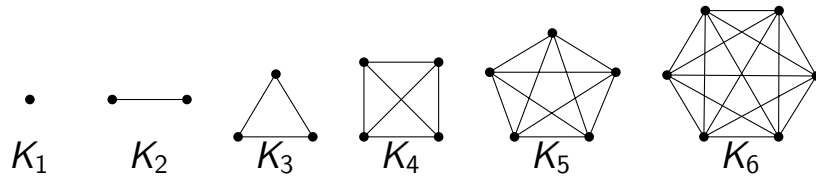
(3) Für die Kantenzahl k eines vollständigen Graphen mit e Ecken ist stets $k = \frac{1}{2}e(e-1)$, was man ganz ähnlich wie in (2) herleitet.

Wegen (3) fassen wir vollständige Graphen in Mengen $V(e) \subset S(e, k)$, $e = 1, 2, 3, \dots$ zusammen.

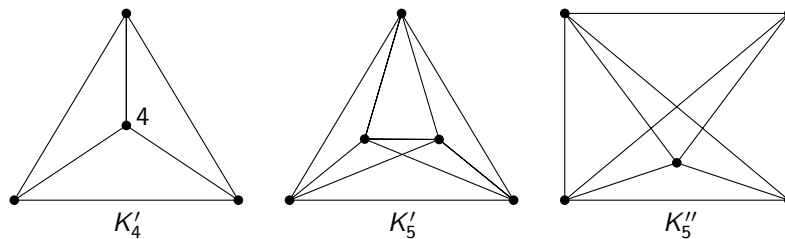
Für jede Menge $V(e)$ gilt: Sämtliche Graphen aus $V(e)$ haben das gleiche Verbindungsmuster. Denn für jedes Zahlenpaar (i, j) mit $i \neq j$ sind in einem Graphen G mit den Ecken $P_1, P_2, \dots, P_e$ und einem beliebigen zweiten Graphen G^* mit

den Ecken $Q_1, Q_2, \dots, Q_e$ jeweils die Ecken P_i und P_j sowie die entsprechenden Ecken Q_i und Q_j durch eine Kante verbunden.

Häufig standardisiert man das zu jeder Menge $V(e)$ gehörige einzige Verbindungsmuster als Graph K_e in der folgenden Weise: K_1 ist ein Punkt und K_2 eine Strecke mit ihren Endpunkten; für $e \geq 3$ sind die e Ecken von K_e die Eckpunkte eines regelmäßigen e -Ecks und dessen Seiten und Diagonalen sind die Kanten von K_e .



Für vollständige Graphen gleicher Eckenzahl ist das ihnen allen gemeinsame Verbindungsmuster kein Unterscheidungsmerkmal mehr, obgleich sie nicht immer in ihren topologischen Eigenschaften übereinstimmen – um das zu sehen, braucht man nur die Graphen K_4 und K'_4 oder K_5 , K'_5 und K''_5 zu vergleichen:



In K_4 kreuzen sich zwei Kanten, in K'_4 nicht; und in K_5 , K'_5 und K''_5 sehen wir fünf, einen und drei Kreuzungspunkte von Kanten.

Deshalb wurde 1983 von Goodman und Pollak vorgeschlagen, als topologisches Unterscheidungsmerkmal bei Graphen gleicher Eckenzahl sogenannte „order types“ einzuführen; dabei verstehen sie unter dem Ordnungstyp das einer Gruppe von Graphen aus $V(e)$ gemeinsame Muster, mit dem sich ihre Kanten kreuzen oder nicht kreuzen. So repräsentieren zum Beispiel K_5 , K'_5 und K''_5 drei verschiedene Kreuzungsmuster von Graphen aus $V(5)$.

Um bei der Bestimmung solcher Kreuzungsmuster mit Computern arbeiten zu können, standardisierten sie die Graphen aus $V(e)$ durch folgende Bedingung:

- (4) Die Kanten der vollständigen Graphen sind geradlinig und keine zwei Kanten bilden eine Strecke.

Vollständige Graphen mit $e = 1, 2$ oder 3 Ecken haben jeweils nur ein Kreuzungsmuster, da sie keine sich kreuzenden Kanten besitzen; bei vier Ecken gibt es die zwei verschiedenen Ordnungstypen K_4 und K'_4 und bei fünf Ecken sind es drei: K_5 , K'_5 und K''_5 .

Mit wachsender Eckenzahl e wird die Zahl der Kreuzungsmuster schnell gigantisch groß. Eine Mathematikergruppe aus Graz (Oswin Aichholzer und andere) haben

sie für $e \leq 11$ systematisch erfasst und so zum Beispiel herausgefunden, dass es für $e = 10$ etwa $1,4 \cdot 10^7$ Ordnungstypen und für $e = 11$ sogar 2 334 512 907 Kreuzungsmuster gibt – womit sie allerdings die Grenzen der Leistungsfähigkeit ihrer Computer erreicht hatten.

Mit ihren Berechnungen waren die Grazer Mathematiker – zunächst wohl unbeabsichtigt – Mitstreiter bei der Bearbeitung eines Problems geworden, das Richard Guy 1960 veröffentlicht hatte: Welches ist die kleinstmögliche Anzahl $K(e)$ von Kantenkreuzungen, die ein vollständiger Graph mit e Ecken hat, wobei nur Graphen in Betracht kommen sollen, bei denen sich höchstens zwei Kanten in einem Punkt kreuzen?

Guys Problem erwies sich als enorm schwierig. Zwar konnte man $K(e)$ für $e \leq 7$ ziemlich bald bestimmen, aber erst im Jahr 2000 wurde $K(10)$ gefunden. Und vier Jahre später hat Aichholzer mit seiner Erfassung aller Ordnungstypen von Graphen mit elf Ecken zugleich auch $K(11)$ berechnet. Der dazu erforderliche Computeraufwand veranlasste ihn, ein internationales Projekt zu starten, bei dem jeder die Rechenkapazität seines Computers in die Bestimmung von $K(e)$ mit $e \geq 12$ einbringen konnte – zeitweise gab es 7500 Teilnehmer in 80 Ländern (Informationen dazu unter <http://dist.ist.tugraz.at/cape5>). Bis 2010 wurde so eine vollständige $K(e)$ -Liste für $e \leq 19$ und zusätzlich für $e = 21$ erstellt:

Jahr	1960								2000	2004	
e	1	...	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$K(e)$	0	...	0	1	3	9	19	36	62	102	153
									2006		2010
e	13	14	15	16	17	19	21	18			
$K(e)$	229	324	447	603	798	1318	2055	1029			

Eine Aufgabe zur elementaren Zahlentheorie

von Kurt Rosenbaum

Zum Artikel „Wie groß ist eine Primzahl höchstens?“ von Hartwig Fuchs (MONOID 104, Seite 33) hat uns Kurt Rosenbaum folgende Ergänzung geschickt:

Aufgabe

Sind p_k, p_{k+1}, p_{k+2} drei aufeinander folgende Primzahlen, so gilt:

$$\frac{1}{p_k} < \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}}$$

Lösung

Die Folge der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \dots$ beginnt mit

2, 3, 5, 7, 13, 17 ...

Die Behauptung der Aufgabe ist gleichwertig mit

$$p_{k+1} \cdot p_{k+2} < p_k \cdot (p_{k+1} + p_{k+2})$$

Offenbar ist sie richtig für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$, denn

$$3 \cdot 5 < 2 \cdot (3 + 5), 5 \cdot 7 < 3 \cdot (5 + 7), 7 \cdot 11 < 5 \cdot (7 + 11).$$

Nach dem Satz von Tschebyscheff, wonach für alle natürlichen Zahlen $n > 5$ zwischen n und $2n$ wenigstens zwei verschiedene Primzahlen liegen, gilt für alle $k > 3$:

$$p_k < p_{k+1} < p_{k+2} < 2p_k.$$

Aus $p_{k+2} < 2p_k$ folgt nach Multiplikation mit p_{k+1} :

$$p_{k+1} \cdot p_{k+2} < 2p_k \cdot p_{k+1}$$

und wegen $2p_{k+1} < p_{k+1} + p_{k+2}$ schließlich die Behauptung.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Schlichte geradlinige Graphen

Wenn Du den Artikel „Graphen“ (Seite 6) durchliest, begegnen Dir dort schlichte Graphen, deren e Ecken und k Kanten den dort angegebenen Axiomen 1 und 2 gehorchen. Diese Graphen seien geradlinig genannt, wenn ihre Kanten geradlinig sind. In der Abbildung auf Seite 9 ist für jede Eckenzahl e mit $e = 1, 2, 3$ und 4 eine (horizontale) Liste von schlichten geradlinigen Graphen (kurz: sg-Graphen) dargestellt. Jeder dieser Graphen veranschaulicht eines der möglichen Verbindungsmuster, die sg-Graphen mit e Ecken und k Kanten, $k > 0$, haben können.

Beispiel: Die sg-Graphen  und  haben übereinstimmende,  und  haben verschiedene Verbindungsmuster.

Finde nun für sg-Graphen mit $e = 5$ Ecken und $k \geq 0$ Kanten sämtliche möglichen Verbindungsmuster und veranschauliche jedes von ihnen durch einen sg-Graphen. *Hinweis:* Damit Du kein mögliches Verbindungsmuster übersiehst, solltest Du überlegen, wie man bei der Suche nach ihnen systematisch vorgehen kann.

Lösungshinweis

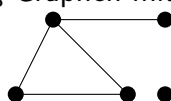
Wir bezeichnen die Anzahl der Kanten, die in einer Ecke E eines sg-Graphen mit k Kanten zusammenkommen, als den Eckengrad g von E , wobei $0 \leq g \leq k$ ist. In einem Graphen mit k Kanten ist dann die Summe der Eckengrade $g_1, g_2, \dots, g_e$ seiner sämtlichen e Ecken:

$$(1) \quad g_1 + g_2 + \dots + g_e = 2k$$

Da zu jedem Verbindungsmuster eines sg-Graphen mit e Ecken und k Kanten das e -Tupel $g_1 g_2 \dots g_e$ seiner sämtlichen Eckengrade $g_1, g_2, \dots, g_e$ gehört – wir nennen $g_1 g_2 \dots g_e$ das Gradmuster des Graphen –, befinden sich diese e -Tupel unter den nicht negativen ganzen Lösungen von (1). Man bestimmt nun systematisch sämtliche Lösungen $g_1, g_2, \dots, g_e$ von (1) – wobei es auf die Reihenfolge der Komponenten g_i nicht ankommt. Dann braucht man nur noch zu untersuchen, ob es zu einer Lösung $g_1, g_2, \dots, g_e$ Graphen mit diesem Gradmuster $g_1, g_2, \dots, g_e$ gibt. Mit Hilfe der Gradmuster lassen sich das oder die gesuchten Verbindungsmuster bestimmen.

Beispiel für $e = 5$ und $k = 4$

- Das 5-Tupel 3, 3, 1, 1, 0 ist eine Lösung der Gleichung (1) für $k = 4$. Es gibt jedoch keine sg-Graphen mit dem Gradmuster 33110.
- 3, 2, 2, 1, 0 ist eine Lösung von (1) für $k = 4$; zum zugehörigen Gradmuster 32210 gibt es genau ein Verbindungsmuster von sg-Graphen mit $e = 5, k = 4$.



- 2, 2, 2, 1, 1 ist eine Lösung von (1) für $k = 4$; zum zugehörigen Gradmuster 22211 gibt es genau zwei verschiedene Verbindungsmuster von sg-Graphen mit $e = 5, k = 4$.



(H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2011 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 105

In Heft 105 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Ziffernspielereien

Wähle eine dreistellige Zahl, bei der nicht alle Ziffern gleich sind. Ordne die Ziffern Deiner Zahl einmal so an, dass die größtmögliche Zahl entsteht, und dann so (gegebenenfalls mit führenden Nullen), dass die kleinstmögliche Zahl entsteht. Dann bilde die Differenz und wende das Verfahren auf das Resultat erneut an.

- Was fällt Dir bei der entstehenden Zahlenfolge auf?
- Wie verhält es sich für zwei- beziehungsweise vierstellige Zahlen?

(nach H. Rössler)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Robin Fritsch (Gymnasium Lehrte, Kl. 9), Leonie Rößler (Geschwister-Scholl-Schule Niddatal, Kl. 3), Cascaya Scha-

de (Gymnasium Burglengenfeld, Kl. 10), Maike Stanischewski (Eichendorffschule Kelkheim, Kl. 8), Marcel Wittmann (Karolinengymnasium Frankenthal, Kl. 7).

Maike hat für $n = 3$ und Leonie für $n = 2, 3, 4$ alle sowie für $n = 5, 6$ einige Lösungen gefunden. Marcel hat die Quersummen der entsprechenden Zahlenfolge untersucht – dabei konnte er die Anzahl der Folgenglieder erheblich einschränken und Teilbarkeitsbedingungen herleiten. Cascaya hat für $n = 4$ und 3 die Lösung angegeben und bewiesen. Robins Lösung drucken wir hier auszugsweise ab:

- a) Wir beginnen mit einer dreistelligen Zahl mit den Ziffern a_1, a_2, a_3 mit $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, wobei auch $a_1 > a_3$ sein muss, damit nicht alle drei Ziffern gleich sind. Nun bilden wir die beschriebene Differenz:

$$\begin{array}{r} a_1 a_2 a_3 \\ - a_3 a_2 a_1 \\ \hline (a_1 - a_3 - 1) 9 (10 + a_3 - a_1) \end{array}$$

Wegen $a_3 < a_1$ ergibt sich als letzte Ziffer $10 + a_3 - a_1$ und wir haben eine 1 als Übertrag in die Zehnerspalte. So ergibt sich dort als Ziffer $10 + a_2 - a_2 - 1 = 9$. Wegen des Übertrags ergibt sich in der Hunderterspalte dann $a_1 - a_3 - 1$ als Ziffer. Da a_1, a_2 und a_3 Ziffern sind und $a_1 > a_3$ gilt, sind auch die drei Ziffern zwischen 0 und 9.

Die Summe der ersten und der letzten neu entstandenen Ziffer ergibt nun $(a_1 - a_3 - 1) + (10 + a_3 - a_1) = 9$. Es entsteht also eine Zahl, die eine 9 als Ziffer hat und deren andere beiden Ziffern zusammen 9 ergeben. Da die Ziffern bei der Berechnung des nächsten Folgengliedes geordnet werden, genügt es, nur die Zahlen mit geordneten Ziffern zu betrachten.

Es entsteht also nach dem ersten Schritt eine der Zahlen 990, 981, 972, 963, 954. Wenn man nun mit 990 fortfährt, ergibt sich die Folge $990 \rightarrow 981 \rightarrow 972 \rightarrow 963 \rightarrow 954 \rightarrow 954 \rightarrow 954 \rightarrow \dots$ Jede der obigen fünf Zahlen führt also zur 954, welche sich dann ständig wiederholt. Nach dem ersten Schritt erhält man also eine der Zahlen 990, 981, 972, 963 oder 954 und nach spätestens vier weiteren Schritten gelangt man zu 954, welche sich dann ständig wiederholt.

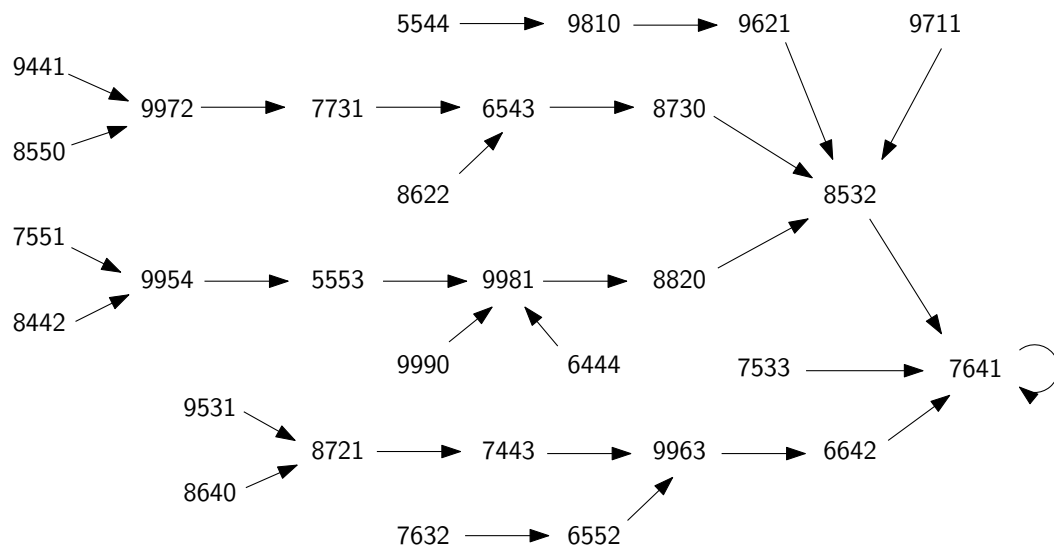
- b) Wir betrachten eine beliebige zweistellige Zahl mit den Ziffern a_1, a_2 und mit $a_1 > a_2$. Dann ergibt sich als Differenz:

$$\begin{array}{r} a_1 a_2 \\ - a_2 a_1 \\ \hline (a_1 - a_2 - 1) (10 + a_2 - a_1) \end{array}$$

Diese Zahl hat offensichtlich die Quersumme $(a_1 - a_2 - 1) + (10 + a_2 - a_1) = 9$. Nach dem ersten Schritt erhält man also eine der Zahlen 90, 81, 72, 63 oder 54. Wenn man nun die Folge weiter betrachtet, erhält man $90 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 72 \rightarrow 54 \rightarrow 90 \rightarrow \dots$ Es ergibt sich also stets eine Periode der Länge 5 als Abfolge dieser fünf Zahlen.

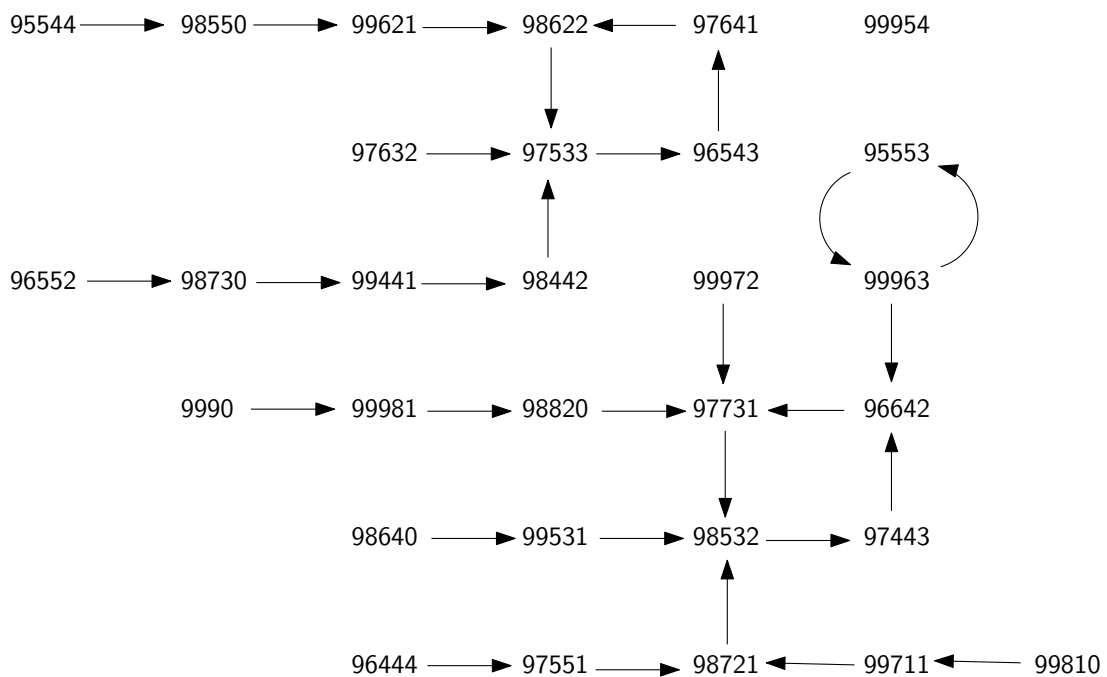
Bei vierstelligen Zahlen hat Robin das Problem mit analogen Betrachtungen auf

30 Zahlen reduziert, die er mit Hilfe eines Computerprogrammes untersucht hat und dabei folgendes Muster gefunden:



Wie bei $n = 3$ gelangt man stets zur selben Zahl, hier der 7641.

Bereits für $n = 5$ bleiben zwar nach dem ersten Schritt auch nur 30 Möglichkeiten; das Problemmuster ist aber weitaus komplexer:



Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 106

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Der hungrige Wanderer

Ein hungriger Wanderer trifft zwei Männer, die gerade ihre Vorräte auspacken und bittet um etwas zu essen. Der erste Mann hat noch drei Brote übrig, der andere fünf und sie beschließen, alles zu teilen. Sie essen gemeinsam und jeder bekommt genau gleich viel. Am Ende bedankt sich der Wanderer, gibt dem ersten Mann drei Kreuzer und dem anderen fünf und macht sich wieder auf den Weg.

Der erste Mann überlegt nun, ob die Aufteilung der Münzen fair war – was denkst Du? (gefunden CE)



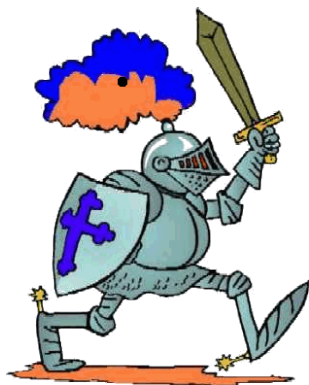
Lösung:

Die Aufteilung war nicht gerecht. Der eine hatte fünf Brote ($\frac{15}{3}$). Der andere hatte drei Brote ($\frac{9}{3}$). Jeder bekommt $\frac{8}{3}$ Brote, da es insgesamt $\frac{24}{3}$ Brote sind ($\frac{15}{3} + \frac{9}{3} = \frac{24}{3}$). Der erste hat $\frac{7}{3}$ abgegeben, der andere hat $\frac{1}{3}$ abgegeben. Eine gerechte Aufteilung wäre, wenn der mit acht Broten sieben Münzen erhalten würde und der andere eine Münze. (Elisa Dernier, Kl. 6d, Leibnizschule Wiesbaden)

Erbe

Ein Ritter wird bei einem Duell schwer verwundet und gibt seiner schwangeren Frau für den Fall seines Todes letzte Anweisungen, wie sein Vermögen von 420 Golddukaten verteilt werden soll:

„Wenn das Kind ein Junge wird, dann bekommst du $\frac{1}{3}$ und unser Sohn $\frac{2}{3}$ des Vermögens. Wenn es ein Mädchen wird, dann bekommst du $\frac{2}{3}$ und unsere Tochter $\frac{1}{3}$ des Vermögens.“
Wie wird das Vermögen nach diesen Wünschen verteilt, wenn der Ritter stirbt und seine Frau Zwillinge bekommt, ein Mädchen und einen Jungen? (CE)



Lösung:

Die Mutter soll doppelt so viel bekommen wie die Tochter und der Sohn doppelt so viel wie die Mutter:

$$m = 2t$$

$$s = 2m$$

Insgesamt sind 420 Golddukaten zu verteilen:

$$420 = m + t + s$$

$$420 = 2t + t + 4t = 7t$$

$$t = 60$$

Also bekommt die Tochter 60, die Mutter 120 und der Sohn 240 Golddukaten.

Anikas Spiel

Anika hat ein neues Spiel erfunden und möchte es ihrem Bruder Moritz zeigen. Sie legt einen runden Damestein irgendwo auf ein rundes Spielfeld, dann ist Moritz an der Reihe und legt ebenfalls einen runden Damestein irgendwo auf das Spielfeld. Dies wird so lange wiederholt, bis der nächste Stein nicht mehr vollständig in das Spielfeld passt und der Spieler, der seinen letzten Stein nicht mehr ablegen kann, hat verloren.

Gibt es eine sichere Strategie, mit der man dieses Spiel gewinnen kann? (WJB)

Lösung:

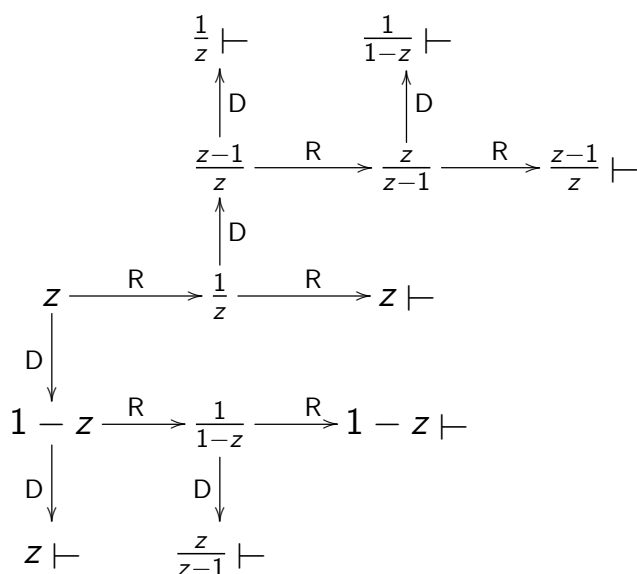
Es ist bei dieser Strategie immer der Spieler im Vorteil, der beginnt. Wenn man als Erster an der Reihe ist, dann legt man den ersten Stein genau in die Mitte des Spielfeldes. Dieser Stein ist dann das Symmetriezentrum für die weiteren Positionen: Man legt immer punktsymmetrisch zum Stein des Mitspielers den nächsten Stein ab, also wird der Mitspieler dann am Ende keinen Platz mehr für seinen nächsten Stein finden und verlieren.

Zahlen-Algorithmus

Anne hat sich einen Algorithmus ausgedacht: Sie beginnt mit einer beliebigen (rationalen) Zahl z , wobei $z \neq 0$ und $z \neq 1$ ist. Dann führt sie zwei Rechenvorschriften mit dieser Zahl durch: Die Kehrwertbildung $z \xrightarrow{R} \frac{1}{z}$, die sie mit R für Reziprok bezeichnet, und die Subtraktion $z \xrightarrow{D} 1 - z$, die sie mit D für Differenz bezeichnet. Es ergeben sich (meistens) zwei neue Zahlen. Auf diese beiden Zahlen wendet Anne erneut die beiden Rechenvorschriften an. Dies wiederholt sie nun immer wieder, bis sie schließlich feststellt, dass sich irgendwann die erhaltenen Zahlen wiederholen. „Dann können ja jetzt keine neuen Zahlen mehr kommen“, denkt sich Anne und hört mit den Berechnungen auf.

- Beginne mit $z = 5$ und berechne, wie Anne, alle Zahlen, die sich mit diesem Verfahren ergeben.
- Gib alle Zahlen an, die sich ergeben, wenn Anne mit der allgemeinen Zahl z beginnt. (MG nach H.F.)

Lösung:



Den Prozess der wiederholten Anwendung von R und D stellen wir durch das nebenstehende Diagramm dar. Mit dem Zeichen $y \vdash$ zeigen wir einen Abbruch des R-D-Prozesses mit der Zahl y an, weil der Prozess an einer anderen Stelle des Diagramms durchgeführt oder sogar beendet wird. Aus dem Diagramm entnimmt man, dass der R-D-Prozess mit der Startzahl z genau sechs Zahlen produziert, nämlich: $z, \frac{1}{z}, 1 - z, \frac{1}{1-z}, \frac{z}{z-1}, \frac{z-1}{z}$. Insbesondere erhält man für $z = 5$: $5, \frac{1}{5}, -4, \frac{-1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}$.

Die Länge von Zahlwörtern

Wenn man eine natürliche Zahl z als Zahlwort schreibt, dann benötigt man dazu eine bestimmte Anzahl von Buchstaben. Wie heißt die kleinste natürliche Zahl, für die man 100 Buchstaben braucht? (H.F.)

Hinweis: Wir schreiben einhundert, eintausend, ... und nicht hundert, tausend, ...

Lösung:

Wir bezeichnen die Anzahl der Buchstaben, die man benötigt, um die Zahl z als Zahlwort zu beschreiben, mit $|z|$. So gilt: $|1| = |2| = |3| = |4| = |5| = |8| = |9| = 4$, $|6| = 5$ und $|7| = 6$. In den ausgeschriebenen Zahlwörtern reduziert sich die benötigte Anzahl Buchstaben für 1 sogar meistens auf 3 (beispielsweise einundzwanzig).

1. Konstruktion einer Zahl z mit $|z| = 100$.

Unter allen natürlichen Zahlen z mit gleicher Buchstabenanzahl $|z|$ haben diejenigen die wenigsten Ziffern, deren Ziffern die größte Buchstabenanzahl besitzen. Dies sind Zahlen z mit lauter Ziffern 7.

Versuchen wir es also mit $z_0 = 7777777777$.

Für z_0 gilt: $|z_0| = 119$. Streichen wir die erste Ziffer 7, dann wird $|z_0|$ um 16 vermindert und für $z_1 = 777777777$ ist $|z_1| = 103$. Wir brauchen nun in z_2 nur drei Ziffern 7 in geeigneter Position durch drei Ziffern 6 zu ersetzen – etwa so: $z_2 = 677777676$ – um eine Zahl mit $|z_2| = 100$ zu erhalten.

2. Konstruktion der kleinstmöglichen Zahl z mit $|z| = 100$.

Aus z_1 erhalten wir die kleinere Zahl $z_3 = 177777777$ mit $|z_3| = 100$. Man darf nun in den drei Ziffernblöcken 177, 777 und 777 die jeweils erste und letzte Ziffer nicht durch eine kleinere Ziffer ersetzen, weil sonst die Buchstabenanzahl von z_3 verändert würde. Wohl aber darf man die jeweils mittlere Ziffer

7 (geschrieben: siebzig) durch eine Ziffer 2 (geschrieben: zwanzig) ersetzen.
Damit ergibt sich $z_4 = 127\,727\,727$.

z_4 ist die gesuchte kleinste Zahl mit $|z_4| = 100$.

Fußballturnier

Bei der Fußballweltmeisterschaft besteht jede Vorrundengruppe aus vier Teams, und es spielt jeder gegen jeden. Ein Sieg bringt drei Punkte, ein Unentschieden einen Punkt und ein Verlust keinen Punkt. Die beiden Teams mit der höchsten Punktzahl kommen weiter ins Achtelfinale. Bei Gleichheit entscheidet die Tordifferenz.



- Mit welchen Punktzahlen kommt ein Team sicher ins Achtelfinale?
- Mit welchen Punktzahlen kommt ein Team sicher nicht ins Achtelfinale?

(Valentin Blomer)

Lösung:

Insgesamt werden bei allen Spielen 18 Punkte oder weniger vergeben.

- Ein Team bekommt mit neun und sieben Punkten sicher ins Achtelfinale. mit neun Punkten gewinnt das Team dreimal. Da müssen die anderen mindestens einmal verlieren. Da höchstens 18 Punkte vergeben werden, können nicht drei Teams sieben Punkte haben. Mit sechs Punkten kommt man nicht sicher weiter, denn es können, wie im Beispiel, auch drei Teams sechs Punkte haben.

	A	B	C	D		Team	Punkte	Torverhältnis
A	x	1:0	1:5	2:0	1.	C	6	9:4
B	0:1	x	1:0	3:0	2.	B	6	4:1
C	5:1	0:1	x	4:2	3.	A	6	4:5
D	0:2	0:3	2:4	x	4.	D	0	2:9

B und C kommen ins Achtelfinale.

- Man kommt mit keinem und einem Punkt sicher nicht ins Achtelfinale. Mit null Punkten gewinnen alle anderen drei Teams mindestens einmal. also kommt man nicht weiter. Bei einem Punkt gewinnen zwei Teams mindestens einmal. Auch hier kommt das Team nicht weiter, Im Beispiel beweise ich, dass man mit zwei Punkten weiterkommen kann.

	A	B	C	D		Team	Punkte	Torverhältnis
A	x	3:3	1:1	0:1	1.	D	9	3:0
B	3:3	x	2:2	0:1	2.	B	2	5:6
C	1:1	2:2	x	1:0	3.	A	2	4:5
D	1:0	1:0	1:0	x	4.	C	2	3:4

D und B kommen ins Achtelfinale.

(Iolanthe Köcher, Kl. 5, Hermann-Hesse-Gymnasium Calw)

Gemeinsame Teiler benachbarter Zahlen

Zwei benachbarte, natürliche Zahlen n und $n+1$ haben keinen gemeinsamen Teiler $\neq 1$. Du weißt es – kannst Du es auch begründen? (H.F.)

Lösung:

Mit $t \mid a$ sei der Satz „die positive, ganze Zahl t ist ein Teiler der Zahl a “ abgekürzt. Wenn $t \mid a$ gilt, dann ist a ein Vielfaches von t , $a = v \cdot t$ mit $v \geq 1$.

Es gilt: Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ mit $a > b$ folgt $t \mid (a - b)$. Wegen $t \mid a$ bzw. $t \mid b$ ist nämlich $a = v \cdot t$, $v \geq 1$, bzw. $b = w \cdot t$, $w \geq 1$, so dass aus $a - b = (v - w)t$ folgt: $t \mid (a - b)$.

Nun zur Aufgabe: Angenommen für zwei Zahlen n und $n+1$ gilt $t \mid n$ und $t \mid n+1$ für ein $t > 1$. Dann gilt $t \mid [(n+1) - n]$ also $t \mid 1$ und daher $t = 1$ im Widerspruch zu $t > 1$.

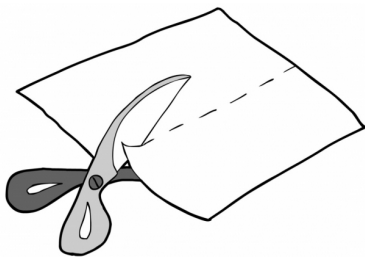
Da die Annahme falsch war, trifft die Behauptung zu.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

2011 Papierstücke

Jemand hat elf Blätter Papier. Einige oder alle Blätter zerschneidet er in jeweils neun Stücke. Von diesen Papierstücken zerschneidet er wiederum einige oder alle in neun Teile. Wenn er so weitermacht, wird er dann irgendwann 2011 Papierstücke erhalten? Wie viele Schnitte benötigt er dazu, falls dies möglich ist? Als ein Schnitt wird jeweils das Zerteilen eines Papierstücks in neun angesehen, auch wenn man dafür natürlich mehr als einmal schneiden muss. (H.F.)



Paare ganzer Zahlen

Finde alle Paare (a, b) ganzer Zahlen, für die $3ab - 7 = 5a + 2b$ gilt.

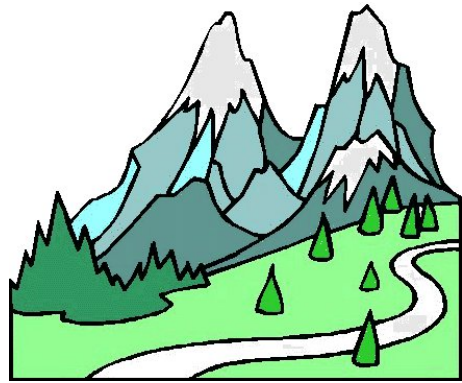
(Robin Fritsch, Kl. 10, Gymnasium Lehrte)

Zahlenspielerei

- a) Das Doppelte einer Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der Zahl.
- b) Hätte ich eineinhalb Äpfel mehr, hätte ich eineinhalb Mal so viele Äpfel, wie ich jetzt habe. Wie viele habe ich? (CE)

Die Räuber von Ladronien

Die Räuber in den Bergen von Ladronien haben vereinbart, dass sie den von ihnen überfallenen Reisenden immer nur die Hälfte ihres Geldes abnehmen. Der Kaufherr Ricardo Astuto hat das Pech, gleich von drei Räubern überfallen zu werden. Der erste übersieht jedoch einen 200-Euro-Schein in einer Geheimitasche; der zweite verliert einen 100-Euro-Schein, welchen Astuto findet. Anschließend macht der dritte Räuber beim Nachzählen einen Fehler und gibt 50 Euro zurück. Zum Schluss besitzt Astuto noch 200 Euro. Wie viel Geld hatte er ursprünglich dabei?



(WJB)

Gefangener Ritter

Ein Ritter wurde von einer Räuberbande überfallen und gefangen genommen. Weil der Ritter sehr knapp bei Kasse war, gab der Räuberhauptmann ihm die Chance, um seine Freilassung zu spielen.

Der Ritter erhält 50 weiße und 50 schwarze Steine, die er beliebig auf zwei Säcke verteilen kann. Der Hauptmann wählt dann blind einen der beiden Säcke aus und nimmt daraus einen Stein. Ist der Stein weiß, dann ist der Ritter ohne Lösegeld frei, aber wenn der Räuber einen schwarzen Stein zieht, dann beträgt das Lösegeld 200 Golddukat.

Wie kann der Ritter die Steine so verteilen, dass er möglichst gute Gewinnchancen hat? Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er Lösegeld bezahlen muss?

Zahlen zählen

Aus den zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 sollen zehnstellige Zahlen so gebildet werden, dass in jeder Zahl jede Ziffer genau einmal vorkommt.

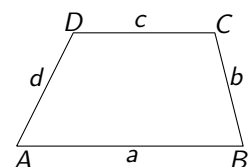
- Wie viele verschiedene Zahlen gibt es?
- Wie viele dieser Zahlen sind durch 3 teilbar?
- Wie viele dieser Zahlen sind durch 5 teilbar?
- Wie viele dieser Zahlen sind gerade?

(H.F.)

Konstruktion eines Trapezes

Mathis hat vor einiger Zeit bei einem Trapez $ABCD$ die Seitenlängen a , b , c und d gemessen. Später möchte er ein Trapez mit genau diesen Seitenlängen konstruieren. Wie könnte er dazu vorgehen?

(H.F.)



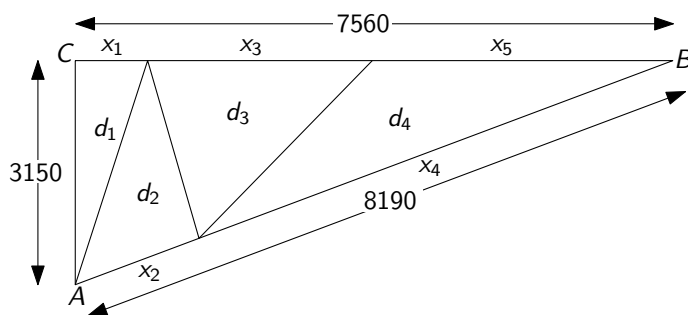
Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1029: Primzahlen-freie Intervalle

Es gibt unendlich viele 5-Tupel unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist. (H.F.)

Aufgabe 1030: Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks



Zerlege das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ in vier Teildreiecke d_1, d_2, d_3, d_4 wie in der Figur, und zwar so, dass sich die Flächen von d_1, d_2, d_3, d_4 verhalten, wie $1 : 2 : 3 : 4$. Berechne die Streckenlängen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . (H.F.)

Aufgabe 1031: Wahr oder Falsch?

Jede Zahl $2^{(2^n)} + 4$, wobei $n = 2, 3, 4, \dots$, ist ein Vielfaches von 10. Begünde Deine Antwort. (H.F.)

Aufgabe 1032: Hochstapler?

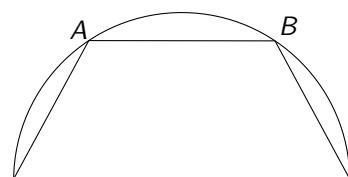
René macht ein Praktikum bei der Stadtverwaltung. Dabei muss er 1 cm dicke Aktenmappen aufeinander in Schränke stapeln. Dabei fällt ihm auf, dass sich die Mappen fast bis auf 0,6 cm zusammen drücken lassen, wenn weitere Mappen darauf gestapelt werden. Wir nehmen an, eine Mappe wird bei jeder Mappe, welche darauf gestapelt wird, um 20 % der Differenz zu 0,6 cm zusammen gedrückt.

- Wie hoch ist ein Stapel aus 50 Mappen?
- Wie viele Mappen passen maximal in eine 50 cm hohe Ablage?

(Robin Fritsch, Kl. 10, Gymnasium Lehrte)

Aufgabe 1033: Trapez

Auf dem Kreis mit Radius 1 wähle A und B symmetrisch so, dass die Fläche des Trapezes maximal wird. (WJB)



Aufgabe 1034: Nachkommastellen einer rationalen Zahl

Zeige:

- Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine reelle Zahl $a(n)$ zwischen n und $n+1$, deren Nachkommastellen mit denen von $b(n) := \frac{1}{a(n)}$ übereinstimmen.
- $b(n)$ konvergiert gegen 0.
- $n \cdot b(n)$ konvergiert gegen 1. (WJB)

Aufgabe 1035: Zur Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung $B(p, n)$ sind

$$P(X = k) = b(p, n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n, \text{ wobei } q = 1 - p.$$

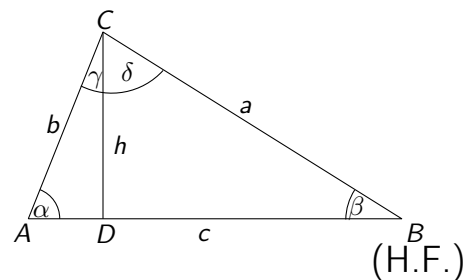
- Berechne für $k = 0, 1, \dots, n-1$ den Ausdruck: $\frac{b(p, n, k)}{b(p, n, k-1)}$.
- Verwende das Ergebnis aus a), um zu zeigen, dass $b(p, n, k)$ bei festen Werten p und n in Abhängigkeit von k steigt, bis es bei einem Wert k_0 sein Maximum erreicht und danach wieder fällt.
- Ist k_0 eindeutig bestimmt? Gib zur Begründung auch ein Beispiel an.

Gelöste Aufgaben aus MONOID 106

Klassen 8–13

Aufgabe 1022: Ein Abstandsproblem

Im Dreieck $\triangle ABC$ mit $|\overline{CA}| = b$ und $|\overline{CB}| = a$ sei D der Fußpunkt der Höhe h aus dem Punkt C . Wenn nun $b < a$ gilt, dann liegt D näher bei A als bei B .



Du siehst es – kannst Du es auch begründen?

Lösung:

Aus der Gegebenheit, dass $b < a$, soll gefolgert werden, dass $x < p$, mit $x = |\overline{AD}|$ und $p = |\overline{DB}|$, also dass D näher an A als an B liegt. Wir können annehmen, dass alle Längen positiv sind.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt im Dreieck $\triangle ADC$ $b^2 = x^2 + h^2$ und im Dreieck $\triangle DBC$ gilt $a^2 = p^2 + h^2$. Umformen gibt $h^2 = b^2 - x^2 = a^2 - p^2$. Daraus folgt dann $a^2 - b^2 = p^2 - x^2$, also $(a+b)(a-b) = (p+x)(p-x)$. Nun wissen wir, dass $b < a$ und somit auch $b^2 < a^2$ da $a, b > 0$. Folglich ist dann $(a+b)(a-b) > 0$, was impliziert, dass $(p+x)(p-x) > 0$. Das wiederum funktioniert nur, falls $p > x$, da andernfalls der Term $(p-x)$ dafür sorgen würde, dass $(p+x)(p-x) \leq 0$ wäre.

Somit gilt also $p > x$ falls $b < a$. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass D näher an A als an B liegt.

(Philipp Delhougne, Kl. 12, Otto-Hahn-Schule Hanau)

Aufgabe 1023: Teilbarkeit

Überprüfe die Behauptungen:

- Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n , für die $2^n + 1$ und $3^n + 1$ beide den Teiler 5 haben.
- Es gibt keine natürliche Zahl n , sodass $2^n + 1$ und $3^n + 2$ zugleich den Teiler 5 besitzen. (H.F.)

Lösung:

- Wenn man 2^n der Reihe nach für $n = 1, 2, 3, \dots$ durch 5 teilt, dann erhält man die periodische Folge 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, ... von Resten. Dann aber ergibt sich bei Division durch 5 von $2^n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, die periodische Folge 3, 0, 4, 2, 3, 0, 4, 2, ... von Resten. Entsprechend lautet 4, 0, 3, 2, 4, 0, 3, 2, ... die Folge von Resten bei Division von $3^n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ durch 5. Daraus folgt: Für $n = 2, 6, 10, \dots$ sind $2^n + 1$ und $3^n + 1$ beide ohne Rest durch 5 teilbar.
- Die Restfolge bei Division von $2^n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, durch 5 ist 3, 0, 4, 2, 3, 0, 4, 2, ..., die Restfolge von $3^n + 2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, durch 5 ist 0, 1, 4, 3, 0, 1, 4, 3, ... Daher gibt es kein n , für das sowohl $2^n + 1$ als auch $3^n + 2$ den Teiler 5 haben.

Aufgabe 1024: Quadrat im Dreieck

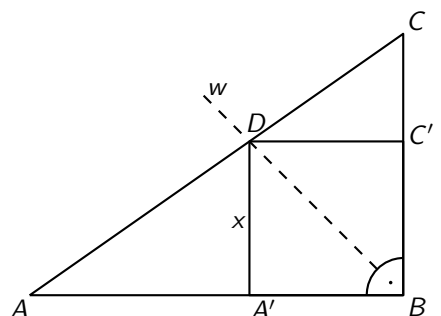
In einem rechtwinkligen Dreieck seien a und c die Längen der Katheten. Wie lang ist dann die Seite des größten, vollständig im Dreieck liegenden Quadrats, dessen eine Ecke im rechten Winkel des Dreiecks liegt? (H.F.)

Lösung:

Da die Ecke B' des Quadrats zugleich auch die Ecke B des Dreiecks ist, liegen die Seiten $A'B$ und $C'B$ auf den Katheten des Dreiecks $\triangle ABC$ und somit natürlich auch die Punkte A' und C' .

Der vierte Eckpunkt eines jeden so gelegenen Quadrats liegt dann auf Winkelhalbierenden w des rechten Winkels bei B , welche somit auch die Diagonale des Quadrates ist. Beim größtmöglichen Quadrat ist er daher der Schnittpunkt von w und AC .

Es sei nun x die Seitenlänge des größten Quadrats im Dreieck, also $x = |BC'|$, und es seien $c = |AB|$



und $a = |BC|$.

Wegen $DC' \parallel AB$ sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DC'C$ ähnlich. Daraus folgt:

$$\frac{|BC| - |BC'|}{|DC'|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

oder $\frac{a-x}{x} = \frac{a}{c}$. Somit ist $x = \frac{c \cdot a}{c+a}$.

Die Seitenlänge des größten Quadrats ist also $\frac{c \cdot a}{c+a}$.

Aufgabe 1025: Teiler-Problem

Es seien $a \geq 1$ und $b \geq 1$ ganze Zahlen mit $a + b = 210$.

Kann dann 210 ein Teiler von $a \cdot b$ sein? (H.F.)

Lösung:

Annahme: $210 \mid a \cdot b$ (das heißt 210 ist Teiler von $a \cdot b$, also gibt es eine ganze Zahl $t \geq 1$ mit $a \cdot b = 210 \cdot t$).

Wegen $b = 210 - a$ folgt $a \cdot b = 210 \cdot a - a^2$ und daraus wegen $a^2 = 210a - ab = 210a - 210 \cdot t$ auch $210 \mid a^2$.

Wegen $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ folgt: $2 \mid a^2$ also $2 \mid a$, $3 \mid a^2$ also $3 \mid a$, $5 \mid a^2$ also $5 \mid a$ und $7 \mid a^2$ also $7 \mid a$. Aus $2 \mid a$, $3 \mid a$, $5 \mid a$ und $7 \mid a$ folgt $210 \mid a$, also $a = x \cdot 210$. Dann aber ist $x \geq 1$ also $a \geq 210$.

Dies steht im Widerspruch zu $a + b = 210$ und $b \geq 1$. Die Annahme ist also falsch. 210 ist kein Teiler von $a \cdot b$.

Aufgabe 1026: Was ist wahr?

Von einem beliebigen Punkt P im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$ seien die Lote mit den Längen x , y und z auf die Dreiecksseiten konstruiert.

Wenn nun h die Höhe im Dreieck $\triangle ABC$ ist, gilt dann $x + y + z < h$ oder $x + y + z = h$ oder $x + y + z > h$? (H.F.)

Lösung:

Sei a die Seitenlänge des Dreiecks. Dann gilt bekanntlich $F(\triangle ABC) = \frac{a \cdot h}{2}$. Außerdem gilt aber $F(\triangle ABC) = F(\triangle ABP) + F(\triangle BCP) + F(\triangle CAP) = \frac{z \cdot a}{2} + \frac{x \cdot a}{2} + \frac{y \cdot a}{2} = \frac{a}{2} \cdot (x + y + z)$. Also folgt $\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot (x + y + z) \Leftrightarrow h = x + y + z$
(Robin Fritsch, Kl. 10, Gymnasium Lehrte)

Aufgabe 1027: Eine Abschätzung

Für $a, b, c > 0$ und $a + b + c = 1$ beweise man

$$\frac{a+b}{c+ab} + \frac{b+c}{a+bc} + \frac{c+a}{b+ca} \geq \frac{9}{2}.$$

(Robin Fritsch, Kl. 10, Gymnasium Lehrte)

Lösung:

Mit $a + b + c = 1$ gilt:

$$\frac{a+b}{c+ab} = \frac{1-c}{1-a-b+ab} = \frac{1-c}{(1-a)(1-b)} = \frac{(1-c)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Analog gelten $\frac{b+c}{a+bc} = \frac{(1-a)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ und $\frac{c+a}{b+ca} = \frac{(1-b)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$. Daraus ergibt sich:

$$\frac{a+b}{c+ab} + \frac{b+c}{a+bc} + \frac{c+a}{b+ca} = \frac{(1-c)^2 + (1-a)^2 + (1-b)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und quadratischen Mittel gilt:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3} \text{ bzw. } x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^2$$

und aufgrund der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel gilt:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \text{ bzw. } \frac{1}{xyz} \geq \left(\frac{3}{x+y+z} \right)^3.$$

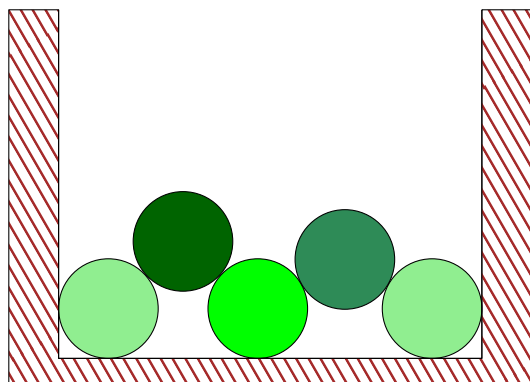
Damit folgt:

$$\frac{(1-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)} \geq \frac{3 \left(\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} \right)^2}{\left(\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} \right)^3}$$

Gekürzt ergibt das:

$$\frac{(1-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)} \geq \frac{9}{(1-a) + (1-b) + (1-c)} = \frac{9}{2}.$$

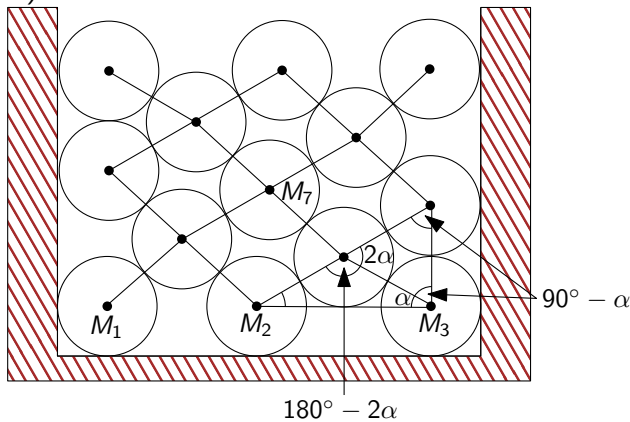
Aufgabe 1028: Alkoholische Probleme



13 Flaschen Wein gleicher Sorte sollen in eine Kiste verpackt werden. Auf den Boden passen drei Flaschen nebeneinander, darauf schichten wir zwei, die im Allgemeinen nicht horizontal zu liegen kommen (siehe Skizze). Legt man nun aber wieder drei Flaschen, dann zwei und schließlich die letzten drei, so liegen die letzten drei auf jeden Fall wieder horizontal, so dass der Deckel wunderbar passt. Warum? (gefunden Manfred Lehn)

Lösung:

Wir repräsentieren jede Flaschenbodenmitte durch einen Punkt M_i , $1 \leq i \leq 13$, und jede Verbindung sich berührender Flaschen durch eine Kante der Länge 1 (ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Durchmesser jedes Flaschenbodens 1).

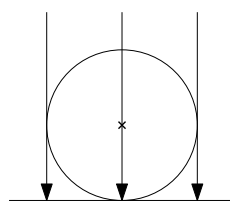


Da Vierecke mit gleichlangen Seiten Rauten sind, entstehen vier Rauten. Aufgrund der Winkelverhältnisse (siehe Skizze) setzen sich diese zu einer großen Raute mit Mittelpunkt M_7 zusammen. Es folgt, dass die gesamte Anordnung unter 180° -Drehung um M_7 invariant ist. (C. H.-A.)

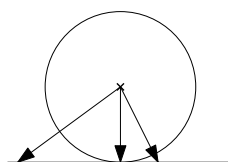
Von der Kugel auf die Ebene

von Catharina Bauer

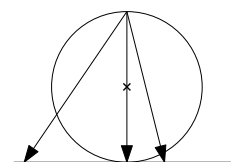
Stellen wir uns vor, wir sind im 16. Jahrhundert auf einem alten Segelschiff unterwegs. Nach langem Suchen haben wir auf einer Insel einen Schatz entdeckt. Um diesen Ort jederzeit wieder zu finden, wollen wir den Fundort auf einer Karte einzeichnen. Leider gibt es jedoch noch keine Karten. Doch wir finden Feder, Tinte und Papier an Bord. Mit welcher Methode wäre es uns möglich, unsere Erdkugel auf ein Blatt Papier zu projizieren? Welche Anforderungen würden wir an die Projektion stellen, wenn wir auf unserem Schiff nach dieser Karte segeln wollen?



orthografisch



gnomonisch



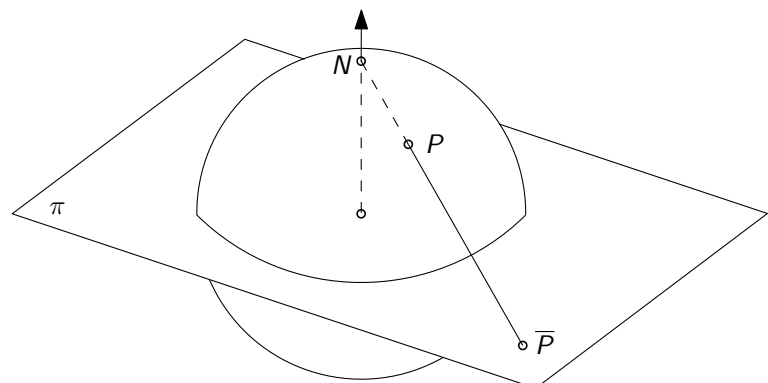
stereografisch

Es gibt drei verschiedene Arten der Projektion: die orthografische, die gnomonische und die stereografische Projektion. Hierbei werden die Punkte der Kugel mittels der dargestellten Pfeile auf die Ebene projiziert. Auf hoher See gibt es drei Anforderungen an eine Karte, die für die Seefahrer wichtig sind. Zum Einen sollen alle Strecken im gleichen Maßstab dargestellt werden (Längentreue) und zum Anderen sollen die Winkel in ihrer wahren Größe erscheinen (Winkeltreue), damit der Kapitän einen eindeutigen Kurs festlegen kann. Außerdem sollte das Verhältnis zwischen zwei Flächen richtig dargestellt werden (Flächentreue), damit die Länder in der richtigen Größe erscheinen. Im 19. Jahrhundert hat man

gezeigt, dass keine Karte alle drei Anforderungen erfüllen kann. Die zwei wichtigsten Kartentypen stammen von Gerhard Mercator (1512 – 1594) und Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777). Die Mercator-Projektion entstand 1568 und ist eine winkeltreue Kartenprojektion mit dem Projektionszentrum in der Erdmitte. Von hier aus werden alle Punkte der Erdoberfläche auf ein umliegendes Band in die Ebene projiziert. Lamberts Zylinderprojektion ist eine flächentreue Projektion. Die Projektionsstrahlen verlaufen waagrecht zur Zylinderebene.

Die stereografische Projektion

Bei der stereografischen Projektion handelt es sich um eine Projektion, die vom Nordpol ausgeht. Mathematisch ausgedrückt gelangt man zu folgender *Definition*: Die stereografische Projektion ist eine Abbildung von der Kugel auf die Ebene, bei der ein Kugelpunkt P vom Nordpol N auf die Äquatorebene π projiziert wird, indem die Gerade $\overline{NP}$ mit der Ebene π geschnitten wird. Der Bildpunkt in der Bildebene wird mit $\bar{P}$ bezeichnet.



Mit der stereografischen Projektion können alle Kugelpunkte mit Ausnahme des Projektionszentrums N abgebildet werden. Der Projektionsstrahl des Punktes N bildet beim Grenzübergang eine Tangente zur Kugel durch den Punkt N . Daher käme das Bild von N im „Unendlichen“ zu liegen. Erweitert man die Bildebene um diesen Punkt, gelangt man zur *konformen* Ebene. Auf diese können wirklich *alle* Punkte der Kugel abgebildet werden.

Nun können wir einige Eigenschaften dieser Abbildung nennen: Die Abbildung der Kugel auf die konforme Ebene ist bijektiv (das heißt, jeder Punkt der Ebene ist Bildpunkt genau eines Punktes der Kugeloberfläche), der Äquatorkreis bildet bei der stereografischen Projektion einen Fixpunktkreis (das heißt, diese Punkte werden bei der stereografischen Projektion auf sich selbst abgebildet) und die stereografische Projektion ist *nicht* längentreu.

Nun können wir einige Eigenschaften dieser Abbildung nennen: Die Abbildung der Kugel auf die konforme Ebene ist bijektiv (das heißt, jeder Punkt der Ebene ist Bildpunkt genau eines Punktes der Kugeloberfläche), der Äquatorkreis bildet bei der stereografischen Projektion einen Fixpunktkreis (das heißt, diese Punkte werden bei der stereografischen Projektion auf sich selbst abgebildet) und die stereografische Projektion ist *nicht* längentreu.

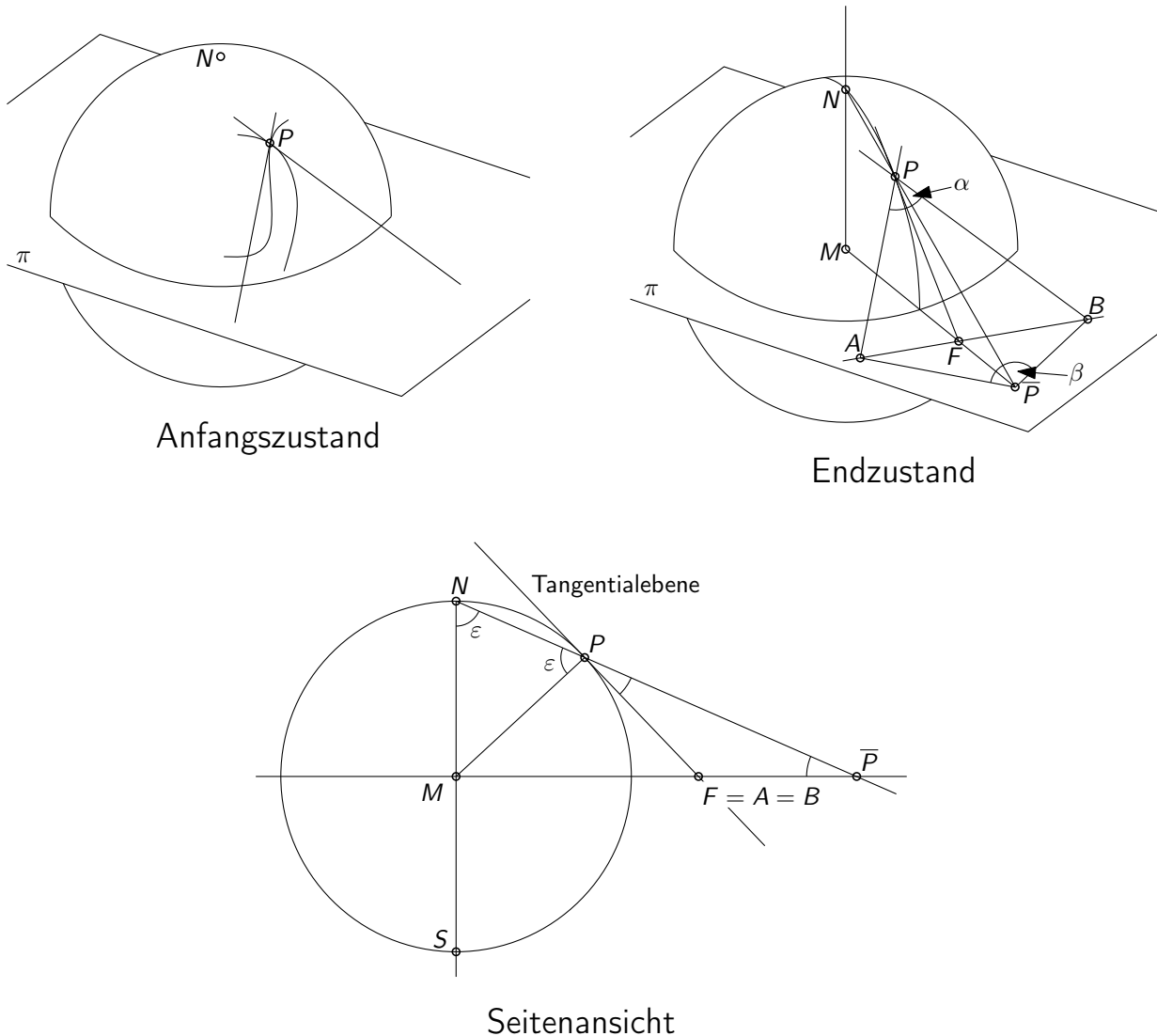
Die folgende Behauptung kannst Du beweisen, indem Du zu der gegebenen Abbildung Aussagen über die Winkel und über gleichschenklige Dreiecke sammelst.

Behauptung 1: Die stereografische Projektion ist winkeltreu.

Beweisidee: Hat man auf der Kugel zwei sich im Winkel α schneidende Linien, so soll bewiesen werden, dass sich nach der stereografischen Projektion die Bilder dieser Linien in der Bildebene π in dem gleichen Winkel $\beta = \alpha$ schneiden. Es

ist also zu zeigen, dass sich der Schnittwinkel bei der stereografischen Projektion nicht verändert.

Dazu betrachtet man die Tangenten der beiden Linien im Schnittpunkt, wie es in der ersten Abbildung dargestellt ist. Dann überlegt man sich mit Hilfe der zweiten Abbildung, welche Aussagen man über das Dreieck $\triangle MPN$, das Dreieck $\triangle MPF$ und schließlich über das Dreieck $\triangle PFP$ machen kann. Dann zeigt man mit diesen Aussagen und der dritten Abbildung, dass $\alpha = \beta$ ist. (Tipp: Betrachte hierzu die Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle AB\bar{P}$.)



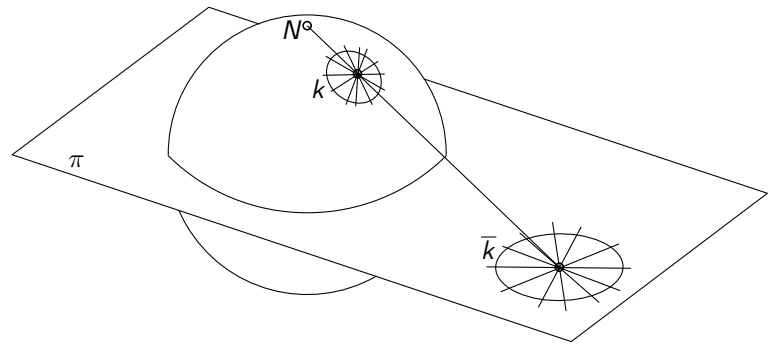
Darauf aufbauend lässt sich zeigen, dass die stereografische Projektion auch kreistreu ist; sofern man Geraden auch zu den Kreisen zählt.

Behauptung 2: Die stereografische Projektion ist kreistreu.

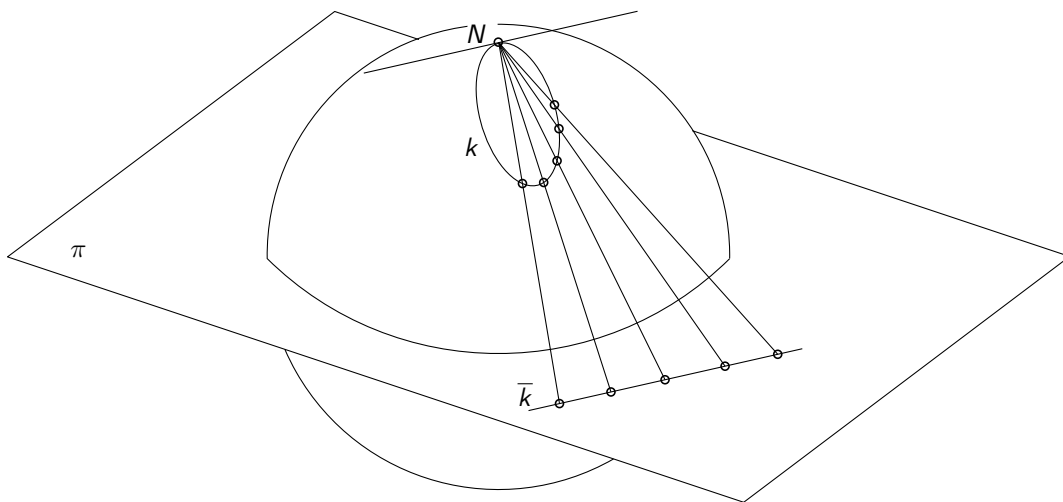
Beweis: Drei Fälle sind zu betrachten: Kleinkreise, Großkreise sowie Kreise durch N .

1. Fall: (Ein Kleinkreis k ist ein Kreis auf der Kugel, dessen Radius kleiner ist als der Radius der Kugel.) Wir bilden in jedem Kreispunkt die zu der Kreislinie von k

senkrechten Kugeltangenten. Bei der stereografischen Projektion mit Zentrum N entsteht ein Geradenbüschel mit gemeinsamem Schnittpunkt S auf π . Aufgrund der Winkeltreue muss aber in der Ebene π das Bild von k auch wieder senkrecht zu den Geraden sein. Somit erhalten wir einen Kreis $\bar{k}$.



2. Fall: (Unter einem Großkreis verstehen wir Kreise, die den gleichen Radius haben wie die Kugel. Hierbei sollen diese nicht durch den Nordpol gehen.) Die Vorgehensweise gleicht der im 1. Fall. Beim Anlegen der Kugeltangenten erhalten wir einen Zylinder. Bei der stereografischen Projektion der zueinander parallelen Mantellinien dieses Zylinders erhalten wir einen Fluchtpunkt. Der Fluchtpunkt ist der Schnittpunkt der zu den Mantellinien parallelen Gerade durch N mit der Äquatorebenen π . Somit ist das Bild wieder ein Geradenbüschel mit einem gemeinsamen Punkt S . Das Bild eines Großkreises, der nicht durch N verläuft, ist also wieder ein Kreis. (Am besten veranschaulichst Du Dir das, indem Du Dir einen Großkreis wählst und die stereografische Projektion durchführst.)



3. Fall: Hier werden nun die Kreise betrachtet, die durch N verlaufen. Sowohl Großkreise als auch Kleinkreise durch N werden auf Geraden in der Ebene π abgebildet. Dies ergibt sich, da sich bei der stereografischen Projektion genau zwei Ebenen (zum Einen die Bildebene π und zum Anderen die Ebene, die durch N und den Kreis vorgegeben ist) schneiden und so eine Gerade, die Schnittgerade, entsteht.

Folglich ergeben sich bei der stereografischen Projektion von Kreisen wieder Kreise oder Geraden. Wir definieren nun: Ein *Möbiuskreis* in der Ebene ist ein Kreis oder eine Gerade. Die stereographische Projektion ist also möbiuskreistreue.

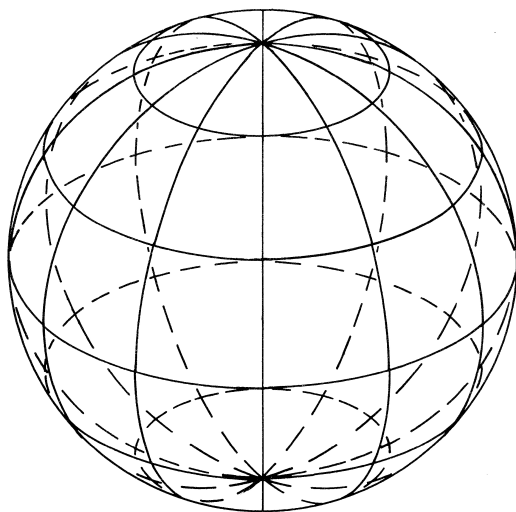
Navigieren auf der Erde

von Sebastian Weyer

Wer von uns ist noch nicht mit dem Flugzeug in den Urlaub geflogen? Sicherlich die wenigsten. Dabei kann man häufig den Reiseverlauf des Flugzeuges auf einem Monitor oberhalb der Sitzreihen verfolgen. Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass sich das Flugzeug auf einem Bogen bewegt und das, obwohl man für gewöhnlich eine Gerade als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten annehmen würde.



Der Grund für diese ungewöhnliche Strecke liegt in der Tatsache, dass es sich bei den Monitordarstellungen der Erde um Karten handelt, die die Erde in einer Ebene zeigen. In Wirklichkeit jedoch bewegt sich das Flugzeug entlang eines Kreises auf der Erdoberfläche. Erst die Abbildung der kugelförmigen Erde in die flache Ebene, das heißt in die Karte, erschafft die Täuschung, als fliege man nicht die kürzeste Strecke zwischen Start- und Zielort.



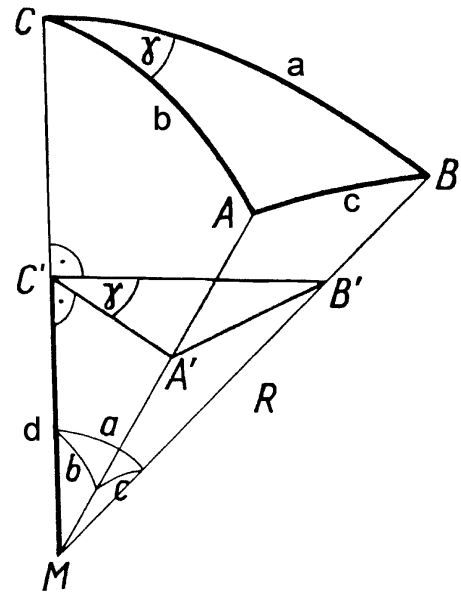
Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten auf der Kugel bezeichnet man in der Mathematik mit dem Begriff *Großkreis* beziehungsweise *Orthodrome* (von griech. *orthos* gerade und *dromos* Lauf). Einen Großkreis erhalten wir, indem wir eine Ebene E , die den Kugelmittelpunkt M enthält, mit der Kugel schneiden.

Weitere wichtige Kreise der Kugel (auch *Sphäre* genannt) sind die Längen- und Breitenkreise. Längengrade bzw. Längengrade λ teilen die Erde ausgehend vom Nullmeridian durch Green-

wich (England) nach Osten bzw. Westen hin in gleich große Abschnitte ein, während die Breitenkreise beziehungsweise Breitengrade φ die Erde ausgehend vom Äquator nach Norden beziehungsweise Süden hin in gleich große Stücke teilen. Die Längengrade zählt man vom Nullmeridian aus nach Osten und Westen von 0° bis 180° , wobei eine Angabe hinter der Gradzahl die Richtung angibt, beispielsweise steht 170°O oder 50°W . Die Breitengrade zählt man hingegen nach Norden hin von 0° bis 90° und nach Süden hin von 0° bis -90° . Einem Grad entspricht dabei eine Distanz von $\frac{2\pi \cdot 6371 \text{ km}}{360} \approx 111,195 \text{ km}$, wobei 6371 km der Erdradius ist.

Kommen wir auf unser Flugzeug zurück. Kennen wir die geographischen Koordinaten des Start- und des Zielortes, so interessieren wir uns vor allem für die zurückzulegende Strecke und damit für die Dauer unseres Fluges. Dazu müssen wir einige trigonometrische Überlegungen auf der Kugel anstellen.

Wir betrachten das Kugeldreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ und den Seiten a, b, c mit $a, b < 90^\circ$. Die Seitenlängen eines sphärischen Dreiecks entsprechen dabei dem Winkel, den die Strecken $\overline{MA}, \overline{MB}$ beziehungsweise $\overline{MC}$ einschließen* und der Winkel zwischen den Kreisbögen $\widehat{CA}$ und $\widehat{CB}$ ist gleich dem Winkel zwischen den jeweiligen Tangenten an die Kreisbögen im Punkt C . Wir errichten nun in einem beliebigen Punkt C' auf $\overline{MC}$ im Abstand d von M die Senkrechten, die $\overline{MA}$ beziehungsweise $\overline{MB}$ in A' beziehungsweise B' treffen. Dann ist der Winkel $\angle B'C'A' = \gamma$, denn die Strecken $\overline{C'A'}$ und $\overline{C'B'}$ sind zu den Tangenten an $\widehat{CA}$ und $\widehat{CB}$ in C parallel. Jetzt lesen wir ab:



$$\overline{C'A'} = d \cdot \tan b, \quad \overline{C'B'} = d \cdot \tan a, \quad \overline{MA'} = \frac{d}{\cos b}, \quad \overline{MB'} = \frac{d}{\cos a}.$$

Zusammen mit dem Kosinussatz ($c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma$) gilt dann für das Dreieck $A'B'C'$

$$\begin{aligned} \overline{A'B'}^2 &= \overline{C'B'}^2 + \overline{C'A'}^2 - 2 \overline{C'B'} \cdot \overline{C'A'} \cos \gamma \\ &= d^2 (\tan^2 a + \tan^2 b - 2 \tan a \tan b \cos \gamma) \end{aligned}$$

und für das Dreieck $MA'B'$

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{MB'}^2 + \overline{MA'}^2 - 2 \overline{MB'} \cdot \overline{MA'} \cos c = d^2 \left(\frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2 \frac{\cos c}{\cos a \cdot \cos b} \right).$$

* Es gilt also beispielsweise $|\widehat{AC}| \triangleq \angle AMC$.

Setzen wir diese beiden Terme gleich und benutzen $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$, so folgt

$$2 \tan a \tan b \cos \gamma = -2 + 2 \frac{\cos c}{\cos a \cdot \cos b}.$$

Multiplizieren wir jetzt noch mit $\frac{1}{2} \cos a \cdot \cos b$, erhalten wir wegen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ schließlich

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Diese Formel nennt man auch *Seitenkosinussatz*.

Und nun bist Du gefragt. Mit Hilfe des Seitenkosinussatzes kannst Du sicher die folgende Aufgabe lösen:

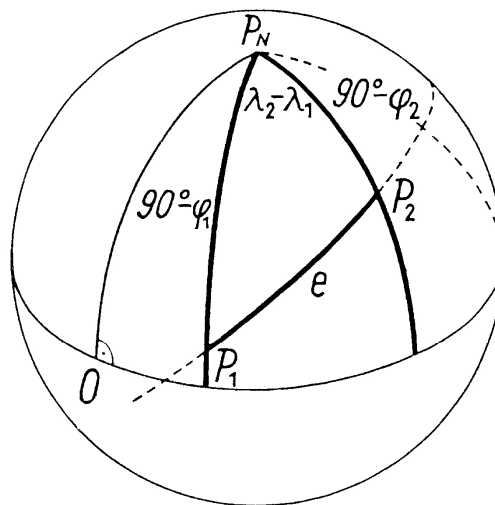
Wie groß ist die Entfernung e und die Flugdauer T für ein Flugzeug, das mit $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ von Frankfurt nach New York fliegt? Die geographischen Koordinaten von Frankfurt sind

$$P_1 = (\varphi_1; \lambda_1) = (50,12^\circ\text{N}; 8,68^\circ\text{O})$$

und die von New York

$$P_2 = (\varphi_2; \lambda_2) = (40,75^\circ\text{N}; 74^\circ\text{W}).$$

Die folgende Abbildung soll Dir eine Hilfestellung sein.



Die Lösung zu dieser Aufgabe findest Du auf Seite 41.

Mathematische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

Dörte Haftdorn: „Mathematik sehen und verstehen. Schlüssel zur Welt.“

„Besser Verstehen ohne zu rechnen als Rechnen ohne zu verstehen.“ Unter diesem Motto steht das Buch „Mathematik sehen und verstehen“ der Lüneburger Mathematikprofessorin Dörte Haftdorn. Entstanden ist es aus einer an der Leuphana-Universität Lüneburg ab 2007 für Studienanfänger aller Fächer angebotenen Einführungsvorlesung, e mit der allgemeinbildende Grundlagen der Mathematik vermittelt werden sollen, damit alle Studierende (und nicht nur die der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Fächer) eine Chance erhalten zu erkennen, dass Mathematik den Schlüssel zum Verständnis unserer Welt darstellt.

Dieser Zielsetzung folgend ist der Band durchgehend mit bunten Illustrationen und Visualisierungen der einzelnen Fragestellungen versehen. Wer weitergehende Anregungen – unter anderem mit Hilfe von Computerwerkzeugen zur Mathematik – in Anspruch nehmen möchte, wird auf der Homepage zu oben genannter Vorlesung fündig (www.leuphana.de/matheomnibus). Die folgenden Themengebiete werden von Haftdorn behandelt: Kryptographie, Codierung, Graphentheorie, Fraktale, Funktionen, Optimierung, Computer und Mathematik, Numerik, Stochastik, Geometrie sowie als Abschluss ein Kapitel über das Selbstverständnis der Mathematik. Die unterschiedlichen Themenbereiche bewegen sich auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus, doch können die meisten schon von mathematikinteressierten Oberstufenschülerinnen und Oberstufenschülern verstanden werden. Was auf jeden Fall nach der Lektüre bleiben wird, ist – auch und gerade für mathematische Laien – dass viele uns umgebende alltägliche Dinge voller Mathematik stecken, die man allerdings nicht immer sofort sieht. Zur Verdeutlichung und zum neugierig machen seien hier nur wahllos ein paar der Anwendungen von Mathematik aufgezählt: Verschlüsselungsverfahren, ISBN, fehlerkorrigierende Codes bei CDs, kürzeste Wege bei Streckenplänen, Aufstellung von Mobilfunkmasten, Muster der Natur, Sinuswellen in der Musik, Minimalflächen bei Sonnensegeln sowie der goldene Schnitt in der Architektur.

Fazit: Dörte Haftdorn ist ein Buch gelungen, mit dessen Hilfe auch mathematische Laien interessante Einblicke sowohl in Anwendungen der Mathematik als auch in die Schönheit der Mathematik an sich gewinnen können, wenn sie es nur lesen!

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Haftdorn, Dörte: Mathematik sehen und verstehen. Schlüssel zur Welt; Spektrum, 2010, PB 341 Seiten, ISBN: 978-3-8274-2044-2, 24,95 €

Art des Buches: „Sachbuch zu mathematischen Anwendungen im realen Leben“

Mathematisches Niveau: verständlich

Altersempfehlung: ab 16 Jahren

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2011

mit der Preisvergabe

an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2010/2011

am Samstag, dem 26. November 2011, Beginn 10 Uhr,

im Atrium Maximum (Alte Mensa), der Uni Mainz.

Johann-Joachim-Becher-Weg 3 – 9

Den Festvortrag wird Herr Prof. Dr. Duco van Straten, Universität Mainz, halten.

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.

Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite

www.mathematik.uni-mainz.de/monoid.

Die Ecke für den Computer-Fan

Darstellung als Summen von Quadratzahlen

Die Zahl 169 besitzt hinsichtlich ihrer Darstellung als Summen von Quadratzahlen wie etwa $169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 = \dots$ eine bemerkenswerte Eigenschaft: Es gibt eine natürliche Zahl m , so dass 169 darstellbar ist als Summe von n Quadratzahlen > 0 für alle n mit $1 \leq n \leq m$, nicht jedoch für alle n mit $m < n < 169$. Versuche, dieses m herauszufinden! (nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2011 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 105

Suche nach Primzahlen

Immer wieder taucht bei mathematischen Untersuchungen im Bereich der natürlichen Zahlen die Frage auf, ob es in bestimmten Serien von natürlichen Zahlen Primzahlen gibt. Hierzu zwei Beispiele:

- a) Die bei Narren beliebte Zahl 11 ist eine Primzahl; dagegen sind 111, 1111, 11111, ... erst mal keine Primzahlen. Gibt es außer 11 überhaupt Zahlen aus lauter Einsen, die Primzahlen sind?

- b) Wie steht es mit der Häufigkeit von Primzahlen in der Serie $n^6 + 1091$, mit $0 \leq n \leq 10^4$? (E.K.)

Ergebnisse

- a) Tatsächlich gibt es außer der Zahl 11 weitere Zahlen aus lauter Einsen, die Primzahlen sind; beispielsweise im Bereich der Zahlen mit maximal 1001 Einsen sind dies die drei Zahlen aus 19, 23 oder 317 Einsen wie Frank Schindler vom Peter-Joerres-Gymnasium in Bad Neuenahr-Ahrweiler mit dem TI-Nspire CAS und Luis Ressel vom Friedrich-List-Gymnasium in Reutlingen heraus gefunden haben. Luis Ressel hat mit seinem auf der GNU MP-library basierenden Programm noch als weitere Primzahl die Zahl aus 1031 Einsen als prim ausfindig gemacht. Auch Christopher Patzanovsky vom Johann-Michael-Fischer-Gymnasium in Burglengenfeld hat sich mit den Zahlen aus lauter Einsen beschäftigt und für eine ganze Reihe von ihnen die Primzahlzerlegung ermittelt.
- b) Im Bereich $0 \leq n \leq 104$ ist $n^6 + 1091$ nur für folgende sieben Werte von n prim: 0, 3906, 4620, 5166, 5376, 5460, 8190. Das haben auch Frank Schindler und Luis Ressel herausgefunden.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 105

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrerinnen: Frau Frohs, Frau Farag):

Kl. 7: Farah Ashraf 9, Iman Seif Al-Islam 6;

Kl. 8: Mariam Ahmed 9, Marianne Michel 26, Chantal Ragy 8;

Kl. 9: Farieda Gaber 17;

Kl. 12: Nada Mohamed ElAttar 35.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Kunz):

Kl. 5: Daniela Jungbluth 1, Fabian Küster 2, Florian Lehn 3, Marc Schäfer 4;

Kl. 6: Ariane Essig 4;

Kl. 7: Sandra Keil 5, Sara-Teresa Vesely 9, Niclas Mayer 11, Jann Ole Neitzel 11, Sebastian Maak 48, Katharina Rößler 50;

Kl. 9: Marc de Zoeten 16, Laura Tabea Galkowski 17, Sebastian Ludwig 58, Benedikt Maurer 20, Alexander Rupertus 28;

Kl. 10: Lara Bergjohann 2, Andreas Pitsch 8;

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum:

Kl. 6: Valentin Jacobsen 3.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 10: Frank Schindler 63.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:

Kl. 8: Christopher Patzanovsky 72;

Kl. 9: Cascaya Schade 45.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:

Kl. 5: Iolanthe Köcher 58;

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium:

Kl. 10: Marcella Beck 19.

Coburg, Gymnasium Casimirianum: Kl. 10: Markus Voelckel 21.

Dieburg, Alfred-Delp-Schule:

Kl. 12: Hanna Kraffcyk 29, Eva Springer 20, Sonja Steineck 20, Cornelia Stuckert 33.

Eching, Imma-Mack-Realschule: Kl. 10: Bettina Diller 14.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betr. Lehrer: Herr Jakob):

Kl. 6: Emmanuel Höfer 5;

Kl. 7: Katharina Eibich 7, Annika Ellenberger 8, Verena Rübsam 17, Anne Vogel 34.

Erkner, Carl-Bechstein-Gymnasium:

Kl. 7: Sonja Witte 22;

Kl. 9: Wanda Witte 4.

Erlangen, Gymnasium Fridericianum: Kl. 8: Nadja Motova 32.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

Kl. 5: Jule Koob 10;

Kl. 6: Tillmann Ballweber 74, Christoph Hemmer 16;

Kl. 7: Larissa Kießling 10, Kevin Moun 10, Jana Pacyna 5, Tobias Witt 7, Marcel Wittmann 96;

Kl. 8: Christian Effen 13, Gregor Hanisch 19, Alexander Schleicher 1;

Kl. 10: Henning Ballweber 68.

Frankfurt, Heinrich-von-Gagern-Gymnasium: Kl. 5: Katharina Koch 15.

Gießen, Landgraf-Ludwigs-Gymnasium:

Kl. 5: Ahmet Adil Cihangeri 12, Lukas Dille 11, Siavash Jannat Khah Doost 4;

Kl. 6: Naomi Buhmann 34, Anna Peitz 11, Lea Terhüme 21.

Günzburg, Dossenberger-Gymnasium:

Kl. 9: Dominik Ruf 40.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin: Frau Niederle):

Kl. 5: Ken Biet 21, Kim Bruder 5, Noah Fuchs 20, Matthias Hannappel 32, Julia Holzhüter 23, Emma Mais 17, Nils Prepens 39, Max Schneider 15, Simon

Schneider 12, David Storze 43;

Kl. 6: Sven Glombitza 4, Steffi Langer 18, Lea Stiehl 11, Pauline von Ryssel 2, Justin Wunderlich 56, Emily Zollmann 20;

Kl. 7: Moritz Schäfer 10;

Kl. 8: Lars Prepens 10.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:

Kl. 10: Michael Delhougne 6;

Kl. 12: Philipp Delhougne 34.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:

Kl. 5: Mariam Baher 14;

Kl. 10: Shaima'a Ahmed Doma 42.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 5: Lukas Arda 6, Tamara Bentz 7, Luca Langer 4, Patrick Piosch 7, Zora Rabeneck 28;

Kl. 6: Leonard Röhl 7, Tom Sprenger 13;

Kl. 7: Victor Brendel 29, Philipp Faber 7, Björn Stanischewski 58;

Kl. 8: Maike Stanischewski 47.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 10: Robin Fritsch 64.

Limburg, Tilemannschule:

Kl. 7: Michael Von Baeckmann 29;

Kl. 9: David Andrick 4.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Mattheis):

Kl. 5: Julia Adam 8, Jason Beck 4, Salka Beck 2, Jana Eichhorn 6, Angela Hahn 5, Marc Hoffmann 20, Sebastian Hospice 6, Sophia Keller 2, Annika Kunz 10, Fabienne van Lier 5, Tim Morsbach 4, Julia Maria Ortmann 5, Antonia Winterling 1;

Kl. 6: Kira Benzing 2, Lea Böhres 7, Lena Christ 8, Enrico Heppler 2, Ivan Mijokovic 18, Laura Nikolay 6, Helena Pörtner 2, Josephine Quierbach 6, Maximilian Schneider 1, Melanie Weibrich 23;

Kl. 8: Jakub Dreijkarz 12, Valentina Preuhs 5, Theresa Schöche 3, Nina Tropens 8;

Kl. 11: Giang Phi 38, Malik Wagner 3.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 11: Niklas Bockius 62.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 7: Benjamin Raible 13.

Mannheim, Ludwig-Frank-Gymnasium: Kl. 10: Illja Fodorov 31.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Wittekindt):

Kl. 7: Lena Bagnar 6, Noah Hayek 39, Hana Kadrija 3, Kim Klüber 3, Jasmin Lichtenberger 7, Leo Lutz 47, Julia Niederschmidt 5, Vithursan Thanabalasingam 7,

Jan Ulex 36;

Kl. 8: Léonard Wagner 16;

Kl. 11: Tim Lutz 36.

Markt Indersdorf, Gymnasium: Kl. 11: Katharina Münster 25.

München, Max-Planck-Gymnasium:

Kl. 6: Josef Sandor 6;

Kl. 8: Greta Sandor 22.

Niddatal-Assenheim, Geschwister-Scholl-Schule:

Kl. 3: Leonie Rößler 52.

Nieder-Olm, Gymnasium: Kl. 12: Heike Karin Herr 35.

Oberursel, Grundschule Mitte: Kl. 4: Max Göbel 4.

Oberursel, Gymnasium (betr. Lehrer: Frau Beitlich):

Kl. 5: Hannah Beckenbauer 7, Riccardo Brode 6, Jill Frey 6, Adrian Fritsch 3, Marie Langer 15, Mia-Marie Leun 5, Zeo Müller 5, Simon Petri 2, Niklas Witt 8;

Kl. 6: Alisia Desor 5, Jonathan Drewes 10, Tim Frauenstein 4, Arne Friedrich 5, Nicole Hardock 3, Felix Häßler 5, Benedikt Kiefer 5, Anna Ledro 6, Jakob Schorr 3, Christian Schröder 13, Mona Weigel 7;

Kl. 7: Kendra Bender 5, Tobias Bienert 7, Lorena Bürke 10, Hannah Döll 10, Nina Friedrich 1, Jonathan Gutsche 10, Matthias Kerscher 5, Leon Marzeion 5, Katja Offen 4, Svenja Thier 9, Janna Vahlhaus 8, Tim-Leon Weist-Ruff 7, Yeong-Chul Yun 34;

Kl. 8: Lutz Bischoff 21, Heiko Kötzsche 71.

Oppenheim, St.-Katharinen-Gymnasium:

Kl. 5: Thomas Blankenburg 20;

Kl. 8: Daniel Blankenburg 36.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch):

Kl. 6: Patrick Günther 7, Annika Hock 4.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 9: Luis Ressel 34.

Templin, Egelpfuhlschule: Kl. 5: Ronja Gantzke 29.

Wiesbaden, Leibnitzschule: Kl. 6: Elisa Dernier 27.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kuntz):

Kl. 5: Julian Asel 9, Luisa Bruch 6, Marcel Dick 4, Laura Dinges 6, Luisa Kirch 28, Jannik Kropf 5, Ignaz Kunz 4, Sabrina Liebetrau 36, Leonie Scharff 5, Michelle-Romy Scheuffele 5, Maximilian Schreiber 3, Johannes Vatter 7, Lena Zuspahn 10;

Kl. 6: Pascal Grabowsky 12, Denise Lembrich 17.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium:

Kl. 6: Noah Schleidweiler 26, Lukas Schermann 37, Philipp Schmitz 51.

Zwingenberg, Melibokusschule: Kl. 4: Katharina Volk 41.

Lösung der Aufgabe von Seite 34

Im Dreieck $P_N P_1 P_2$ gilt nach dem Seitenkosinussatz

$$\cos e = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Diesen Ausdruck können wir vereinfachen zu

$$\cos e = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Entspricht Frankfurt dem Punkt P_1 und New York dem Punkt P_2 , so ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \cos e &= \sin 50,12^\circ \sin 40,75^\circ + \cos 50,12^\circ \cos 40,75^\circ \cos(-74^\circ - 8,68^\circ) \\ \Leftrightarrow e &= 55,75^\circ \hat{=} 55,75 \cdot 111,195 \text{ km} \approx 6199 \text{ km}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine Flugdauer von $T \approx \frac{6199 \text{ km}}{800 \text{ km/h}} \approx 7,749 \text{ h} \approx 7 \text{ Stunden und } 45 \text{ Minuten}.$

Mainzer Mathe-Akademie 2011

von Tim Knochenhauer und Ann-Kathrin Hientzsch,
Frauenlob-Gymnasium Mainz

Ist es möglich mithilfe der Mathematik hinter das Geheimnis verschlüsselter Texte zu kommen und kann man eine Nachricht wirklich so verschlüsseln, dass sie nur der gewollte Empfänger lesen kann? Was haben Töne mit Mathematik zu tun? Wie lässt sich die Kamerahöhe bei einer Photographie rekonstruieren?

Die Antworten auf diese und weitere Fragen wurden uns auf der Mainzer Mathe-Akademie 2011 gegeben.

Wir trafen uns am 24. August abends im Jugendhaus Don Bosco mit 22 anderen Schülern verschiedener Schulen aus Rheinland-Pfalz und Hessen. Nach einem Kennenlernabend war die Grundlage für unsere Gruppenarbeit geschaffen.

Am nächsten Tag teilten wir uns in drei Gruppen ein, die jeweils ein Thema mit einem Dozenten der Johannes Gutenberg-Universität Mainz intensiv bearbeiteten. Es standen „Projektive Geometrie“, „Kryptographie“ und „Obertöne und Fourierreihen“ zur Auswahl. Die nächsten Tage waren sehr arbeitsintensiv, aber auch abwechslungsreich. Neben den Arbeitsphasen, in denen wir teilweise verzweifelt

am Tisch saßen und nicht mehr weiter wussten, gab es eine Uniführung, ein Mini-golfspiel, ein Tischkicker-/Tischtennisturnier und ein Improvisationstheater. Nach den Arbeitsphasen ließ ein nettes Beisammensein am Abend jeden Tag gut ausklingen. Der letzte Tag endete mit einer Präsentation unserer Ergebnisse, bei der wir auch erfuhren, was die anderen Gruppen innerhalb der fünf Tage erarbeitet haben.

Die Zeit der Akademie hat uns sehr gut gefallen und wir können jedem Interessierten nur empfehlen, auch mal an dieser teilzunehmen. Wir haben viele nette Menschen kennengelernt und einen ersten Einblick ins Studierendenleben erlangen dürfen.

Ein großes Dankeschön geht auf diesem Wege an die Dozenten (Dr. Cynthia Hog-Angeloni, Prof. Dr. Manfred Lehn, Prof. Dr. Ysette Weiss-Pidstrygach), die uns fünf Tage lang betreut haben, an die Veranstalter, den „Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.“, und unsere zahlreichen Betreuer, die uns unsere Freizeit immer verschönert haben.



Errata zu Heft 106

Leider sind im letzten MONOID-Heft einige Tippfehler unentdeckt geblieben.

- Im Artikel „Eine Vermessung der Zahlenwelt“ (ab Seite 3 im letzten Heft) muss auf Seite 8 in Zeile 8 für die obere Schranke für L gelten: $L < \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ und in Zeile 9 geht, wenn man n gegen ∞ laufen lässt, $\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ gegen 0.
- In der Rubrik „Wer forscht mit?“ (ab Seite 33 im letzten Heft) lautet die Aufgabe auf Seite 37 in Zeile 9: Man zeige, dass dann jede der Augenzahlen von 1 bis 5 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ auftritt.

Wir bitten Euch, diese Fehler zu entschuldigen.

Mitteilungen

- Bitte beachtet die geänderten Wertung bei den Mathespielereien: Schülerinnen und Schüler der Klasse 8 erhalten hier nun volle Punktezahl. Mit dieser Änderung soll die Gerechtigkeit beim Lösen der Aufgaben und somit bei der Preisvergabe erhöht werden. Näheres hierzu auf Seite 2.
- Die Ausstellung Mathematik be-greifen ist wieder zu sehen und zwar nacheinander an unterschiedlichen Standorten in Mainz, derzeit im Institut français und im November im Neustadtzentrum. Nähere Informationen findet Ihr im Internet unter www.mathematik-begreifen.de.
- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Schuljahr 2011 auf das MONOID-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf, Marcel Gruner

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr

Versand: Katherine Pillau

Inhalt

S. Rosebrock: Bänder falten und eine Zahlenfolge	3
H. Fuchs: Graphen – zwei Axiome begründen eine Theorie	6
K. Rosenbaum: Aufgabe zu einem Artikel in MONOID 104	12
Mathis machen mathematische Entdeckungen	13
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 106	17
Neue Mathespielereien	21
Neue Aufgaben	23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 106	24
C. Bauer: Von der Kugel auf die Ebene	28
S. Weyer: Navigieren auf der Erde	32
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	34
Einladung zur MONOID-Feier 2011	36
Die Ecke für den Computer-Fan	36
Rubrik der Löser und Löserinnen	37
Lösung der Aufgabe von Seite 34	41
Bericht zur Mainzer Mathe-Akademie 2011	41
Errata zu Heft 106	43
Mitteilungen	43
Impressum	43

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift:	Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon:	06131/39-26107, Fax: 06131/39-21295
E-Mail:	monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage:	http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid