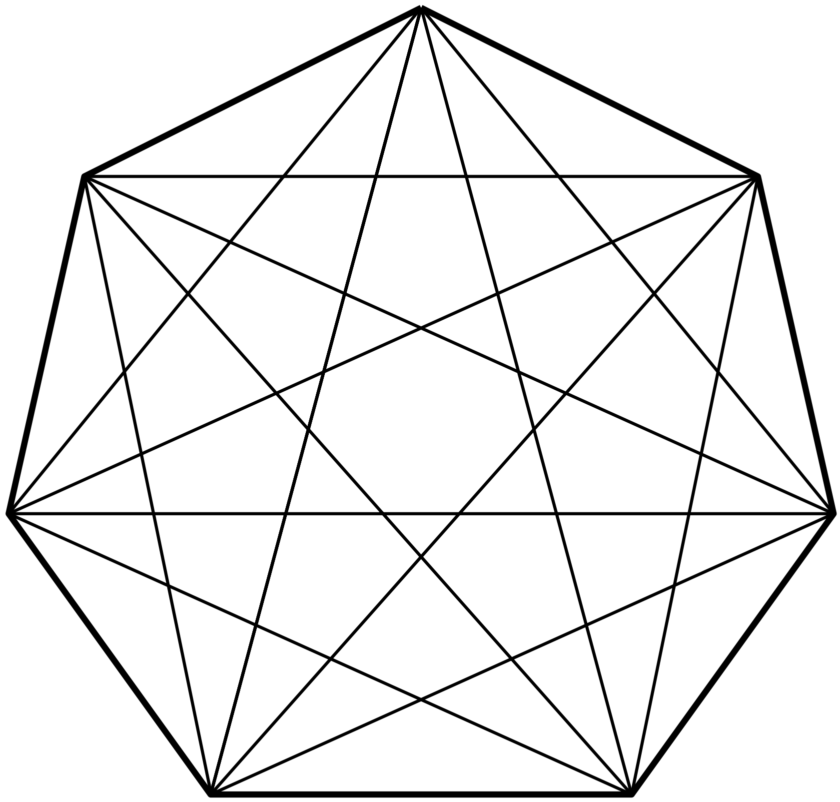
Jahrgang 31 Heft 108 Dezember 2011

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins" hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.03.2012.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Kunz, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Gutzler, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

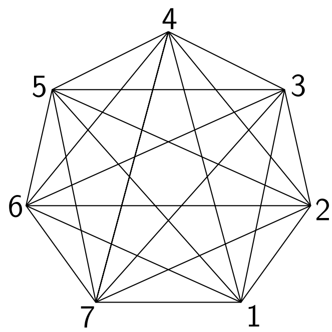
Die Rosen des Monsieur Poinsot

von Hartwig Fuchs

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts beschäftigte sich der französische Physiker und Mathematiker Louis Poinsot* mit Polyedern und Polygonen. Dabei entdeckte er – zum Teil wiederentdeckte er – nicht nur die sternförmigen Polyeder, er stieß in diesem Zusammenhang wohl auch auf ein Problem bei Vielecken, das er nicht lösen konnte.

Poinsots Rosen

In der Ebene sei ein regelmäßiges Polygon aus n Ecken und n Seiten gegeben, $n \geq 3$. Wenn man in diesem n-Eck jede zwei nicht benachbarten Ecken durch genau eine Strecke verbindet, dann ergibt sich eine geometrische Figur, die Poinsot eine „rose mystique" (geheimnisvolle Rose) nannte. Die nebenstehende Figur stellt so eine Poinsot-Rose mit sieben Ecken dar.



Poinsots Problem

Sei mit R_n eine Poinsot-Rose mit n Ecken bezeichnet. Dann fragte Poinsot:

(1) Bei welchen Eckenzahlen n ist es möglich, die jeweils zugehörige Rose R_n in einem ununterbrochenen Streckenzug so zu zeichnen, dass sein Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen und dass jede Strecke von R_n genau einmal durchlaufen wird?

Man findet an geometrischen Beispielen heraus, dass für $n = 3$, 5 und 7 mindestens ein solcher Streckenzug in der jeweiligen Rose R_n existiert – in obiger Figur ist beispielsweise 1-3-5-7-2-4-6-1-4-7-3-6-2-5-1 ein derartiger Streckenzug – für R_4 und R_6 lassen sich aber keine solchen Streckenzüge finden! Für nur ein wenig größere n ist Poinsots Frage jedoch durch zeichnerisches Probieren praktisch nicht mehr zu beantworten. Zum Beispiel kommen in R_9 genau $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27$ Strecken vor.** Aus diesen lassen sich dann $27! = 27 \cdot 26 \cdots 2 \cdot 1 \approx 1{,}09 \cdot 10^{28}$ mögliche Streckenzüge s_1-s_2-...-s_{27} bilden, denn für s_1 existieren 27 verschiedene Möglichkeiten, für s_2 sind es dann nur noch 26, und so weiter, bis für s_{27} nur noch eine Möglichkeit übrig bleibt. Damit muss also ein Streckenzug in R_9, welcher (1) erfüllt, aus mehr als 10^{28} Streckenkombinationen herausgefiltert werden!

Wenn man aber mit Methoden der Graphentheorie an das Poinsot-Problem herangeht, dann findet sich ein recht übersichtlicher Zugang zu seiner Lösung. Beschreiben wir es daher in der Sprache der Graphen.

* * 3. Januar 1777 in Paris, † 5. Dezember 1859 ebenda

** Zu jeder der neun Ecken gibt es sechs nicht benachbarte Ecken.

Euler-Graphen

In der Ebene seien n Ecken (das sind die Punkte) so gegeben, dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Wenn man nun jede zwei dieser Ecken durch genau eine Kante (das sind die Strecken) verbindet, dann stellt das entsprechende geometrische Gebilde einen *vollständigen Graph* dar. Dieser Graph wird mit K_n bezeichnet, wenn er ein regelmäßiges n-Eck zusammen mit seinen sämtlichen „Diagonalen" ist. Gibt es in einem vollständigen Graphen G einen zusammenhängenden Kantenzug, bei dem Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen und der jede Kante von G genau einmal enthält, dann heißt dieser Kantenzug ein *Euler-Weg****
und G wird ein *Euler-Graph* genannt.

Mit diesen Begriffen transformieren wir Poinsots Problem in ein Problem der Graphentheorie:

(2) Welche vollständigen Graphen K_n, mit $n = 3, 4, 5, \ldots$, sind Euler-Graphen?

Die Abbildung zuvor stellt einen vollständigen Graphen K_7 dar; K_7 ist ein Euler-Graph, weil er den Euler-Weg 1-2-3-4-5-6-7-1-3-5-7-2-4-6-1-4-7-3-6-2-5-1 besitzt. Zur Beantwortung der Frage (2) verwenden wir die für jeden Euler-Graphen G geltenden nachfolgenden Aussagen (3) und (4):

(3) Ist G ein Euler-Graph, dann stoßen in jeder Ecke von G geradzahlig viele Kanten zusammen.

Weil G als Euler-Graph einen Euler-Weg besitzt, muss es zu jeder Kante k, die in eine Ecke von G hineinläuft, auch eine von k verschiedene Kante k' geben, die von der Ecke wegführt – woraus (3) folgt.

Euler hatte 1747 die erste Herleitung von (3) veröffentlicht, während die Umkehrung (4) von (3) merkwürdigerweise erst 1873 von Hierholzer**** bewiesen wurde.

(4) Wenn in jeder Ecke eines vollständigen Graphen G geradzahlig viele Kanten zusammenstoßen, dann ist G ein Euler-Graph.

Lösung des Poinsot-Problems

In einem vollständigen Graphen G mit n-Ecken, wobei $n \geq 3$ sein soll, gehen von jeder Ecke $n-1$ Kanten aus. Das trifft natürlich auch für die vollständigen Graphen K_n zu. Daher gilt für K_n: Falls n gerade ist, dann gehen von jeder Ecke von K_n $n-1$ Kanten aus – also ungeradzahlig viele. K_n kann demnach kein Euler-Graph sein, weil man sonst einen Widerspruch zu (3) erhielte. Im Fall eines ungeraden n und damit einhergehenden geraden $n-1$, beginnen in jeder Ecke von K_n geradzahlig viele Kanten, so dass wegen (4) K_n jetzt ein Euler-Graph ist. Damit ist also Frage (2) beantwortet:

*** Leonhard Euler, * 15. April 1707 in Basel, † 18. September 1783 in Sankt Petersburg, schweizer Mathematiker, publizierte (unter Anderem) die ersten Schriften zur Graphentheorie

**** Carl Hierholzer, * 2. Oktober 1840 in Freiburg im Breisgau, † 13. September 1871 in Karlsruhe, deutscher Mathematiker, gab die erste vollständige Charakterisierung von Euler-Graphen an

(5) K_n ist genau dann ein Euler-Graph, wenn n ungerade und ≥ 3 ist.

Geht man nun von (2) und (5) zurück zu (1), so erhält man als Lösung des Poinsot-Problems:

(6) Man kann eine Poinsot-Rose R_n genau dann in einem ununterbrochenen, die Bedingungen von (1) erfüllenden Streckenzug zeichnen, wenn $n \geq 3$ und ungerade ist.

Ein Algorithmus zur Bestimmung eines Euler-Wegs

Die Sätze (5) und (6) versichern uns, dass es für ungerade n in K_n und R_n Euler-Wege gibt; sie sagen aber nichts darüber aus, wie man sie finden kann. Dieses Problem löst der nun vorgestellte Algorithmus:

> Von einer beliebigen Ecke E_1 von K_n (beziehungsweise R_n) aus bilde man einen möglichst langen Kantenzug k_1 aus lauter verschiedenen Kanten, bis man wieder zur Ecke E_1 gelangt. Hat man dabei alle Kanten von K_n (beziehungsweise R_n) benutzt, so ist man fertig.
> Andernfalls gibt es in k_1 eine Ecke E_2, von der (mindestens) zwei noch nicht benutzte Kanten ausgehen. Von E_2 aus stelle man einen Kantenzug k_2 mit lauter noch nicht verwendeten Kanten her, der zu E_2 zurückführt. So fortfahrend bilde man Kantenzüge k_3 und so weiter, bis man keine unbenutzte Kante mehr finden kann. Nun setze man die Kantenzüge k_1, k_2, k_3, ... zusammen zu einem einzigen Kantenzug, der dann ein Euler-Weg in K_n (beziehungsweise R_n) ist.

Beispiel: Um einen Euler-Weg für die Poinsot-Rose R_7 zu finden, konstruieren wir nacheinander die Streckenzüge:

$k_1 = 1-2-3-4-5-6-7-1$ $\qquad$ $k_2 = 2-5-7-2$

$k_3 = 3-6-1-3$ $\qquad$ $k_4 = 4-7-3-5-1-4$

$k_5 = 6-2-4-6$

Diese fügen wir so zu einem Euler-Weg in R_7 zusammen:

$$1-\underbrace{2-5-7-2}_{k_2}-\underbrace{3-6-1-3}_{k_3}-$$

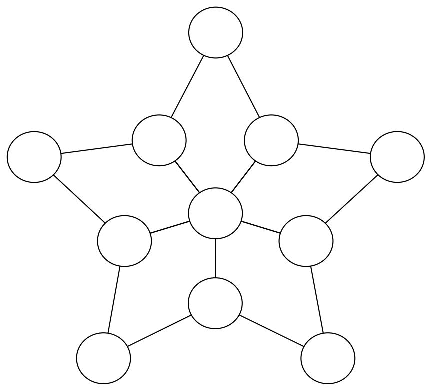
$$\underbrace{4-7-3-5-1-4}_{k_4}-\underbrace{6-2-4-6}_{k_5}-7-1$$

Aufgaben zum Neuen Jahr

von Hartwig Fuchs

Zahlenstern

Trage die Zahlen 2002, 2003, ..., 2012 so in die Kreise der Figur ein, dass die Summen der vier Zahlen an den Ecken eines jeden der fünf Vierecke übereinstimmen und 2012 in möglichst vielen Vierecken vorkommt.



Eine langwierige Rechnung?

Gelten die beiden Ungleichungen

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot ... \cdot \frac{2012}{2011} > \sqrt{2012}$$

und

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2011}{2010} < \sqrt{2012}\ ?$$

Zwei letzte Ziffern

Wie lauten die beiden letzten Ziffern von 2012^{2013}?

Zeitlich begrenzt bemerkenswerte Quersumme

Wie groß ist die Quersumme von $7 \cdot 10^{223} - 2$?

Eine Frage der Teilbarkeit

Gegeben seien 2012 Primzahlen p_1, p_2, ..., p_{2012} mit $p_1 < p_2 < ... < p_{2012}$, für die die Summe $p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{2012}^2$ eine Quadratzahl ist. Begründe, dass jede Differenz $p_i^2 - p_j^2$ mit $1 < j < i \leq 2012$ durch p_1 teilbar ist.
(Hinweis: Betrachte die Fälle $p_1 > 3$ und $p_1 \leq 3$.)

Die Lösungen zu den Aufgaben findet Ihr in diesem Heft ab Seite 32.

Die Ecke für den Computer-Fan

Eine unbewiesene Primzahl-Vermutung

Es seien m und n zwei natürliche Zahlen mit $m \geq 2$ und geradem $n \geq 2$; ferner sei $s = m^0 + m^1 + m^2 + ... + m^n$ mit (wie üblich) $m^0 = 1$. Wir stellen die folgende bisher unbewiesene Behauptung auf:

Für jedes m lässt sich eine gerade Zahl n finden, sodass s eine Primzahl ist.

Untersuche diese Vermutung für ein möglichst großes Anfangsstück der Folge $m = 2, 3, 4, 5, ...$. (H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. März 2012 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen. Die Lösungen der Computer-Fan-Aufgabe aus Heft 106 erscheinen ausnahmsweise erst in Monoid 109.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

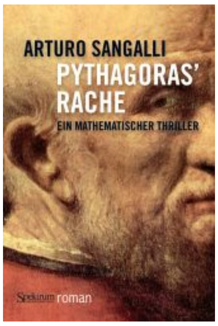
Arturo Sangalli: „Pythagoras' Rache. Ein mathematischer Thriller."

Arturo Sangalli, Wissenschaftsjournalist und promovierter Mathematiker, ist mit „Pythagoras' Rache" ein spannender mathematischer Thriller gelungen, der den Leser in die Gedankenwelt der antiken Pythagoreer, den antiquarischen Buchmarkt historischer Handschriften und die Methoden der modernen Altertumswissenschaften bei der Analyse schriftlicher Quellen entführt. Dabei entwickelt der Autor die fiktive Geschichte in zunächst unabhängig nebeneinander herlaufenden Handlungssträngen mit jeweils eigenen Protagonisten: Da ist zunächst der junge Mathematiker Jule Davidson, der von einer neupythagoreischen Sekte angeworben wird, um die Reinkarnation des griechischen Mathematikers Pythagoras, der nach Meinung der Sektenanhänger in der Mitte des 20. Jahrhunderts geboren wurde, zu finden. Zunächst parallel dazu verläuft die Geschichte des Oxford-Professors für Alte Geschichte Elmer Galway, der gelegentlich wissenschaftliche Expertisen für einen Buchantiquar anfertigt, und dabei auf die Abschrift eines Briefes eines Pythagoreers stößt, in dem dieser einem Freund vom Ende des Meisters berichtet. Ein dritter Handlungsstrang handelt von Jules Schwester Johanna und dem berühmten international anerkannten Mathematiker Norton Thorp. Zusätzlich wird noch ein

Blick auf die Geschichte des Briefschreibers im antiken Griechenland erzählt. Auch wenn diese verschiedenen Handlungsstränge zunächst scheinbar nichts miteinander zu tun haben, so kreisen sie alle um ein in dem antiken Brief erwähntes angebliches Originalmanuskript von Pythagoras und nähern sich einander immer mehr an, so dass sich am Ende ein stimmiges Gesamtbild ergibt. Die in dem Thriller enthaltenen – auch für Laien leicht verständlichen – mathematischen Inhalte werden als das eingeflochten, was sie sind: ein selbstverständlicher Anteil unserer Kultur. Im Anhang werden noch fünf etwas tiefer gehende Ausführungen zu mathematischen Inhalten ergänzt, die für das Verständnis des Buches nicht notwendig sind, aber angesprochene Mathematik vertiefen.

Fazit: Gerade weil am Anfang alle Handlungsstränge scheinbar unabhängig nebeneinander stehen, wird man von dem Thriller gepackt und ist gespannt, wie sich denn alles auflösen wird.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Sangalli, Arturo: Pythagoras' Rache. Ein mathematischer Thriller. Spektrum 2010, ISBN 978-3-8274-2547-8, geb. 236 Seiten, 19,95 €.

Art des Buches:	Thriller
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Henri Poincaré und David Hilbert

von Robin Jamet

Viele Spezialisten sind sich darüber einig, dass Poincaré[1] und Hilbert[2] die letzten Mathematiker waren, die einen Blick auf die Gesamtheit der Mathematik ihres Zeitalters geworfen haben. Sie lebten zu einer Zeit, um 1900 herum, in der eine der größten mathematischen Debatten stattfand (nein, Mathematiker sind sich nicht immer einig untereinander!). Um diese Streitigkeit verstehen zu können, muss man zuerst einmal verstehen, was Mathematik überhaupt ist. Lasst uns hierfür einmal einen kleinen Zeitsprung machen. Nehmen wir beispielsweise das Theorem von Pythagoras[3], das ja viele kennen: In einem Dreieck $\triangle ABC$, das im Punkt B rechtwinklig ist, gilt für dessen Seiten $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$. Die Umkehrung

[1] Jules-Henri Poincaré, * 29.04.1854 in Nancy, † 17.07.1912 in Paris; Mathematiker, Physiker, Astronom, Philosoph.

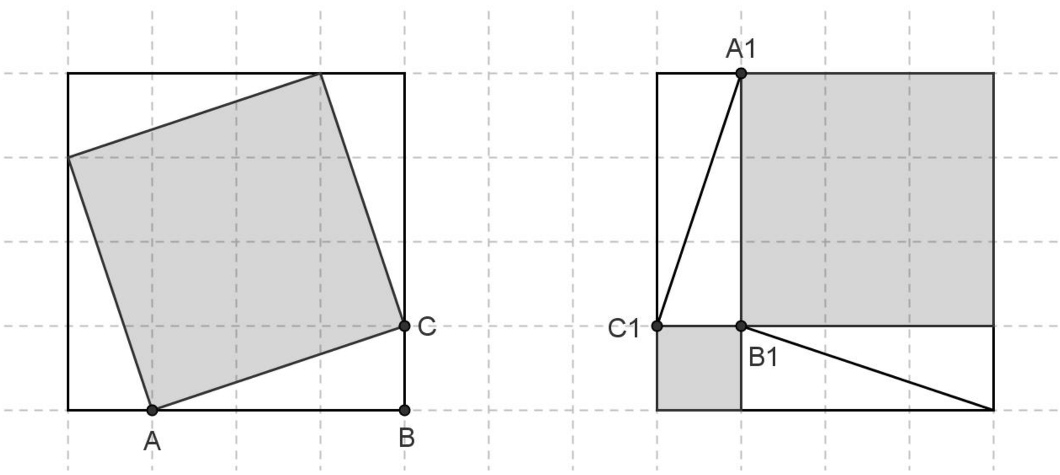
[2] David Hilbert, * 23.01.1862 in Königsberg (Kaliningrad), † 14.02.1943 in Göttingen; H. arbeitete auf zahlreichen Gebieten der Mathematik und der theoretischen Physik; als Vertreter der axiomatischen Richtung Entwicklung einer Beweistheorie.

[3] Pythagoras von Samos, * etwa 580 v. Chr., † etwa 500 v. Chr., Führer einer mystischen Sekte („Pythagoreer"), Mathematiker und Astronom.

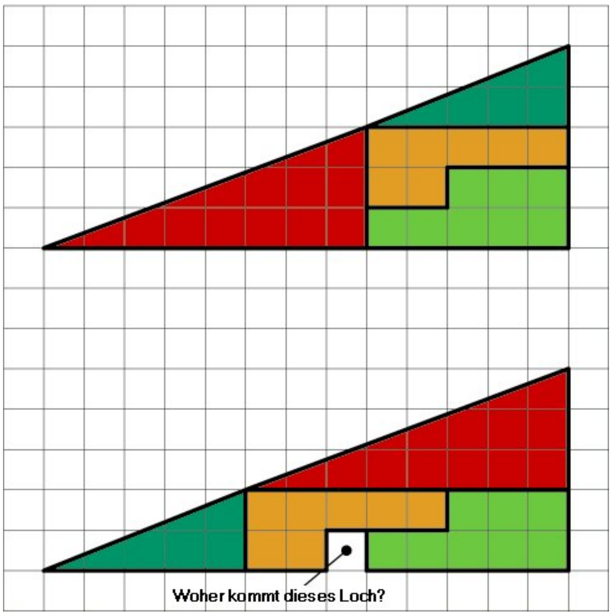
des Satzes sollte man nicht vergessen, da sie genauso wichtig ist: Wenn man in einem Dreieck diese Seitenbeziehung vorfindet, dann ist dieses Dreieck im Punkt B rechtwinklig.

Beginnen wir mit Dingen, die nicht der Mathematik zugehörig sind, nicht einmal ihrer Vorgeschichte: Lange Zeit vor Pythagoras haben die Menschen schon eine Beziehung zwischen bestimmten Zahlen und den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bemerkt. So kann man bei den Babyloniern „Pythagoreische Zahlentripel“ vorfinden, Reihen aus drei ganzen Zahlen, die die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, denn sie bestätigen die berühmte Beziehung wie zum Beispiel die Zahlen 3, 4, 5: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Man weiß leider weder, wie die Babylonier diese Tripel gefunden haben, noch warum sie diese überhaupt gesucht haben, aber offensichtlich haben sie auf die eine oder andere Art etwas verstanden, das sich dem Theorem annähert. Ein weiteres Beispiel: Viele Maurer benutzen auch heutzutage noch eine Kordel mit regelmäßig verteilten Knoten, um einen rechten Winkel herzustellen; es reicht dafür, ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 zu bilden, indem man nur die Knoten abzählt:

Das alles ist reine Beobachtung, reine Feststellung. Die Frage nach der Allgemeingültigkeit wird nicht wirklich gestellt. Es handelt sich lediglich um einen „Trick“, der funktioniert, ohne dass man sich dabei überhaupt die Frage stellt, ob und warum der besagte Winkel exakt rechtwinklig ist oder nur ungefähr. Man kann sich aber, zum Beispiel anhand der beiden untenstehenden Zeichnungen, dennoch davon überzeugen, dass diese Beziehung für jedes rechtwinklige Dreieck gilt:



Beim Versuch, einen Beweis zu finden, kann man die Geometrie heranziehen: die Gleichheit zwischen Zahlen wird zu einer Gleichheit zwischen Flächen. $\overline{AC}^2$ ist der Flächeninhalt des Quadrats, dessen Seite der Hypotenuse des Dreiecks entspricht, und $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$ sind die Flächen der Quadrate, deren Seiten den beiden anderen Seiten des Dreiecks entsprechen. Hier hat man lediglich die vier gleichen weißen Dreiecke im selben großen Quadrat umgesetzt. Die grauen Flächen links und rechts sind dementsprechend gleich groß, auch wenn die Quadratseite links die Hypotenuse des weißen Dreiecks im großen Quadrat bildet, während die Seiten der beiden grauen Quadrate rechts die beiden anderen Seiten dieses Dreiecks ausmachen. Bedeutet es nun, diese beiden Zeichnungen anzufertigen, Mathematik zu betreiben? Vorsicht! Denn eine Zeichnung beweist nichts, wie man anhand einer anderen Situation sehen kann:



Man hat dieselben farbigen Teile so arrangiert, dass sie zweimal ein gleiches Dreieck bilden. Unten aber hat dieses Dreieck ein Loch! Und doch müssten die beiden Flächen gleich sein. Hierfür gibt es natürlich eine Erklärung: Die beiden „Dreiecke“ sind eigentlich Vierecke. Was als die Hypotenuse erscheint, ist eigentlich ein Gebilde aus zwei Strecken mit einem leicht nach innen gehenden Winkel in dem einen Fall und einem nach außen gehenden Winkel im anderen Fall; das ist kaum sichtbar, genügt aber, um eine Flächendifferenz von einem Karo auszumachen. Dennoch sollte man wachsam sein, denn eine Zeichnung genügt niemals, um etwas zu beweisen.

Um „sauber“ Mathematik betreiben zu können, muss man etwas einführen, das man „Strenge“ nennt. Es geht darum, alle Worte, die man benutzt, zu definieren und alles zu beweisen, was man sagt. In beiden Fällen trifft man aber auf ein Problem: Um ein Wort zu definieren, muss man Worte benutzen, die man wiederum mit Worten definieren muss und so weiter. Man muss daher darauf achten, dass gewisse Basiswörter allen bekannt sind. Das gleiche Problem begegnet uns beim Beweis: Beweisen heißt, etwas, das nicht offensichtlich erscheint (wie zum Beispiel das Theorem von Pythagoras), in eine Abfolge von kleinen einfacheren Begründungsschritten zu zerlegen. Aber auch diese Etappen müssten bewiesen werden. Man könnte daher niemals abbrechen! Die Lösungsidee besteht daher darin, eine gewisse Anzahl von Ergebnissen am Anfang als „Basis" zuzugestehen: die Axiome. Anschließend handelt es sich darum, alles zu zeigen, indem man sich nichts Anderem bedient. Die Elemente Euklids sind das älteste uns bekannte Werk, das dieser Vorgehensweise folgt; im ersten dieser Bücher, einer wesentlichen Bezugsquelle für alle Mathematiker, setzt Euklid fünf Axiome für die Geometrie:

1. Zwischen zwei Punkten kann eine Strecke gezogen werden.
2. Es ist immer möglich, eine Strecke um so viel, wie man möchte, zu einer Geraden zu verlängern.
3. Es ist möglich, einen Kreis von zwei Punkten aus zu zeichnen (wenn man den einen als Zentrum nimmt und durch den anderen den Kreis hindurch zeichnet).
4. Alle rechten Winkel sind gleich (man kann sie übereinander legen).
5. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden verläuft genau eine Gerade, die zu dieser Geraden parallel ist.

Indem er sich nur dieser Axiome bedient, zeigt Euklid Schritt für Schritt alle zu seiner Zeit bekannten Resultate bis zum Theorem von Pythagoras im 47. und letzten Schritt!

Die Elemente waren ein Modell für alle Mathematiker. In der Geschichte der Mathematik durchlaufen Fortschritte in der Folge anfangs Phasen wirrer Entdeckungen, die dann geordnet werden. Ende des 19. Jahrhunderts wurden viele neue Ideen geboren, die Mathematiker wollten für alles Axiome finden, die Ordnung wiederherstellen, mehr oder weniger wie Euklid. Doch welche Axiome wählen? Welche Basisobjekte benutzen?

Hilbert schafft dies in der Geometrie. Was die Arithmetik angeht, so stehen hier die „Mengen" als „Ansammlungen von Objekten" im Zentrum dieser Überlegung. Doch sie bereiten Probleme, vor allem als Folge von Paradoxa, die Russel[4] aufgeworfen hat. Seine Idee ist eigentlich ganz primitiv und er hat sie selbst in einer anderen Form formuliert. Der Begriff der „Menge" ist so vage, dass man zum Beispiel von „der Menge aller Mengen" sprechen kann. Aber ist dieses Objekt selbst eine Menge?

[4] Bertrand Arthur William Earl of Russel, geb. 18.05.1872 in Ravenscroft (England), gest. 02.02.1970 in Plas Penrhyn (Wales); Philosoph, Logiker, Mathematiker, Sozialwissenschaftler, Politiker; erhielt 1950 den Nobelpreis für Literatur und war nach 1960 ein führender Vertreter der Weltfriedensbewegung; beschäftigte sich u. a. mit grundlagentheoretischen Problemen der Mathematik.

Schlimmer noch, das berühmte „Barbier-Paradoxon“ ist, ein wenig überarbeitet, ein echtes Problem, das mit Mengen zu tun hat: Stellt Euch ein Land vor, in dem es nur einen Barbier gibt, und dieser rasiert alle Leute, die sich nicht selbst rasieren, und nur diese. Da stellt sich die Frage: „Wer rasiert den Barbier?“ Wenn er sich selbst rasiert, muss der Barbier ihn nicht rasieren, aber er ist ja selbst der Barbier! Und wenn er sich selbst nicht rasiert, dann muss der Barbier (also er selbst) ihn rasieren. Ihr könnt mir noch folgen? Aus diesem Dilemma kommt man nicht heraus, es ist ein einziger Albtraum. Auf die gleiche Art hat Russel gezeigt, dass man Mengen definieren kann, die nicht existieren können – was die Hoffnung all derjenigen zerstörte, die dachten, man könne alle mathematischen Theorien auf diesen Begriff stützen.

Dieser selbe Russel geht (ausgehend von anderen, aber immer noch unvollkommenen Axiomen), begleitet von Whitehead[5], in seiner Auslegeordnung am weitesten: So beweisen die beiden Mathematiker auf sage und schreibe 350 Seiten, dass $1 + 1 = 2$ ist!

Für Poincaré, dem Urgestein des „Intuitionismus“ (auch wenn er eine gewisse Distanz dazu bewahrt), ist eine solche Suche nutzlos. Man verliert den Sinn dessen, was man macht, und die Mathematik wird in dieser Form niemals Fortschritte machen, es ist eine vergebliche Mechanik. Man muss auch der Intuition noch ihren Platz lassen und nicht denken, dass eine einfache Maschine die Mathematik voranbringen könnte. „Man hat aus Fakten Wissenschaft gemacht, genauso wie man aus Steinen ein Haus macht: Doch eine Anhäufung von Fakten ist ebenso wenig eine Wissenschaft, wie ein Haufen Steine ein Haus ist.“

Hilbert hingegen ist ein leidenschaftlicher Verfechter dieser Suche und davon überzeugt, sie zu einem Ende bringen zu können. Man muss ein perfektes System finden können, in dem man alles entweder beweisen oder aber widerlegen kann. Ohne die extremen Positionen derer einzunehmen, die die Mathematik auf die Logik reduzieren wollen, schlägt Hilbert vor, dass man mathematischen Gegenständen problemlos auch andere Namen geben kann: Es stört ihn nicht, zum Beispiel „Punkt“ durch „Bier“ zu ersetzen und „Gerade“ durch „Tisch“ und zu beweisen, dass durch zwei Biere ein, aber auch nur ein einziger Tisch hindurchgeht. Alles was zählt, ist die relative Gültigkeit der Aneinanderreihung von Aussagen. Denn hat man tatsächlich die Existenz eines Objekts bewiesen, wenn der Beweis, den man hat, es nicht zulässt, das Objekt zu zeigen? Hilbert vertraut vollkommen auf die Macht der Mathematik und der Logik. Eines Tages warf er der mathematischen Gemeinschaft diesen berühmten Satz entgegen: „Wir müssen wissen, wir werden wissen“, der nun seine Grabinschrift ist. Kurzum ist eine Konfrontation wirklich essenziell in der Mathematik.

---

[5] Alfred North Whitehead,* 15.02.1861 in Ramsgate (England), † 30.12.1947 in Cambridge (Mass.), Mathematiker, Logiker, Physiker, Philosoph; Versuch einer Gesamtdarstellung der Mathematik auf dem Boden der formalen Logik in drei Bänden der „Principia Mathematica“.

Ergänzend kann noch Folgendes festgehalten werden: 1931 zeigte der junge Logiker Kurt Gödel[6] ein außerordentliches Ergebnis, das den Traum von Hilbert für immer zerstören sollte: In jeder Theorie, sofern diese die ganzen Zahlen enthält, kann kein einziges Axiomensystem perfekt sein. Genauer gesagt, behauptet sein Theorem, dass das Axiomensystem es entweder erlaubt, falsche Ergebnisse zu zeigen, oder es gibt immer ein richtiges Ergebnis, das nicht gezeigt werden kann. Da dies sehr schwierig mit mathematischer Strenge zu zeigen ist, ist seine Idee hier noch sehr einfach: Er schafft es, den Satz „ich bin nicht anhand dieser Axiome beweisbar" in mathematischen Termini zu formulieren. Von diesem Zeitpunkt an gilt: Wenn man es schafft, etwas zu beweisen, dann zählt man zum ersten Fall, wenn man es nicht schafft, zum zweiten Fall. Man ist sozusagen in der Zwickmühle!

Es geht hier nicht um eine Gegenüberstellung von Deutschen und Franzosen, und es gibt weder Gewinner noch Verlierer, alle Mathematiker haben ihren Platz zwischen den beiden. Bourbaki, Codename einer Gruppe französischer Mathematiker, stürzt sich in die Elemente der Mathematik und folgt der Linie Euklids und Hilberts. Auch das Auftauchen von Computern ändert schrittweise den Begriff des Beweises: Ein aufgrund von Computerkalkulationen bewiesenes Ergebnis ist damit vielleicht gezeigt, wahrscheinlich aber nicht verstanden. Den Sinn, wie Poincaré ihn wollte, gibt es nicht mehr, und doch: Das Ergebnis kann gezeigt werden!

Informationen zum Artikel

Robin Jamet arbeitet als Wissenschaftler in der mathematischen Abteilung des Wissenschaftsmuseums „Palais de la Découverte/Universcience" in Paris. Im Jahr 2009 erschien im Verlag Belin, Paris, sein Buch „Les maths, à quoi ça sert?" („Wozu dient die Mathematik?"). Am 29. September 2011 hielt er in der Ausstellung „Mathematik be-greifen" im Institut Français Mainz einen Vortrag über „Henri Poincaré & David Hilbert", aus dem dieser Beitrag in französischer Sprache für Monoid hervorgegangen ist (Übersetzung: Judith Schmidt, Institut Français, Mainz; Nachbearbeitung: E. K., Monoid-Redaktion).

Dieser Vortragsabend war eine Veranstaltung des Institut Français Mainz und des Büros für deutsch-französische Hochschul- und Forschungskooperation für Baden-Württemberg, Rheinland-Pfalz und dem Saarland im Rahmen des Programms „Mainz – Stadt der Wissenschaft 2011" in Zusammenarbeit mit der Attachée pour le français, der Abteilung für Wissenschaft und Technologie der Französischen Botschaft in Deutschland, der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und dem Palais de la Découverte/Universcience Paris.

[6] Kurt Gödel, * 28.04.1906 in Brünn (Brno), † 14.01.1978 in Princeton (N. J.), Logiker; unter anderem bewies er 1938, dass auf der Basis der üblichen mengentheoretischen Axiome weder das Auswahlaxiom noch die Kontinuumshypothese widerlegt werden können.

Hättest Du es gewusst?
Warum darf man nicht durch Null dividieren?

von Hartwig Fuchs

Das Verbot

In der Schule lernt man die Rechenregel, die wir in diesem Artikel das Verbot V nennen:

(V) Man darf eine Zahl nicht durch Null dividieren!

Vermutlich hat schon jeder von uns ein Beispiel des folgenden Typs kennengelernt, mit dem das Verbot V begründet werden soll:

Die folgenden Gleichungen gehen durch Umformungen aus (1) hervor:

$$\frac{4x+2}{x+11} - 1 = \frac{3x-9}{x+12} \quad , x \neq -11, -12 \tag{1}$$

$$\frac{(4x+2)-(x+11)}{x+11} = \frac{3x-9}{x+12} \tag{2}$$

$$\frac{3x-9}{x+11} = \frac{3x-9}{x+12} \tag{3}$$

$$\frac{1}{x+11} = \frac{1}{x+12} \tag{4}$$

$$x+12 = x+11 \tag{5}$$

Aus (5) folgt nun der Widerspruch $11 = 12$.
Welcher Umformungsschritt ist wohl verantwortlich für dieses Desaster?

Die Übergänge von (1) nach (2), von (2) nach (3) sowie von (4) nach (5) sind unproblematisch. Aber bei der Umformung von (3) in (4) werden beide Seiten von (3) durch $3x-9$ dividiert – und wir haben es unterlassen zu überprüfen, ob nicht vielleicht $3x-9$ den Wert 0 besitzt.

Tatsächlich gilt $3x-9=0$, weil $x=3$ eine Lösung der Gleichung (1) ist, wie sich durch Einsetzen von 3 in (1) zeigt. Hätten wir bemerkt, dass $3x-9=0$ ist, hätten wir (3) nicht in (4) transformieren können – aus (3) folgt nämlich $\frac{0}{x+11} = \frac{0}{x+12}$ – und der Widerspruch $12 = 11$ wäre gar nicht erst entstanden. Wir haben jedoch die Umformung von (3) in (4) vorgenommen, was beweist dass wir dabei aus Nachlässigkeit gegen das Verbot V verstoßen haben. Und nur daraus kann der Widerspruch herrühren. Also: Das Verbot V ist notwendig.

Schaut man sich die Argumentation allerdings genauer an, dann zeigt sich, dass sie gar keine Begründung für das Verbot V gibt, sondern nur behauptet, dass der Widerspruch $12 = 11$ eine Folge der Nichtbeachtung von V ist. Unser Beispiel – und mit ihm alle analog konstruierten Beispiele – liefert also keine Begründung für V. Die findet man ganz woanders.

Begründung des Verbots

Den nachfolgenden Überlegungen legen wir die Menge $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, 3, \ldots$ der nicht-negativen ganzen Zahlen zu Grunde – mit unwesentlichen Modifikationen in der Argumentation könnte es auch die Menge der rationalen oder der reellen Zahlen sein.

Zwischen der Addition und der Subtraktion in $\mathbb{N}_0$ besteht ein ganz elementarer Zusammenhang – er sei (A) genannt:

(A) Zu je zwei Zahlen m und n aus $\mathbb{N}_0$ gibt es genau eine Summe $m + n = s$ sowie genau eine Differenz $s - n = m$ in $\mathbb{N}_0$.

$$\begin{tikzcd} m \arrow[r, bend left, "+n"] & s \arrow[l, bend left, "-n"] \end{tikzcd}$$

Da die Multiplikation in $\mathbb{N}_0$ als eine wiederholte Addition und die eine Multiplikation rückgängig machende Division in $\mathbb{N}_0$ als eine wiederholte Subtraktion aufgefasst werden dürfen, sollten beide Operationen wohl auch in einer (A) entsprechenden Beziehung stehen, also:

(M) Zu je zwei Zahlen m und n aus $\mathbb{N}_0$ gibt es genau ein Produkt $m \cdot n = p$ sowie genau einen Quotienten $p : n = m$ in $\mathbb{N}_0$.

$$\begin{tikzcd} m \arrow[r, bend left, "\cdot n"] & p \arrow[l, bend left, ": n"] \end{tikzcd}$$

Tatsächlich gilt (M) uneingeschränkt für die Produktbildung $m \cdot n = p$. Deren Umkehrung $p : n = m$ ist jedoch nur möglich, wenn $n \neq 0$ ist.Warum ist das so? Um diese Frage zu klären, untersuchen wir den Term $p : 0$ unter der Annahme

(6) (M) gilt ohne jede Einschränkung.

a) Es sei $p \neq 0$. Welchen Wert kann man dann dem Term $p : 0$ zuordnen? Angenommen in $\mathbb{N}_0$ gibt es ein m so, dass $p : 0 = m$ ist. Dann gilt nach (M): $m \cdot 0 = p$. Folglich muss $p = 0$ sein, und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $p \neq 0$. Unsere Annahme hinsichtlich m ist also falsch, es gibt in $\mathbb{N}_0$ keine Zahl m, die den Wert von $p : 0$ darstellt. Somit ist $p : 0$ mit $p \neq 0$ ein arithmetisch sinnloser Term, der folgerichtig durch das Verbot V aus der Arithmetik ausgeschlossen wird.

b) Es sei $p = 0$. Kann man jetzt eine Zahl m in $\mathbb{N}_0$ finden, sodass $0 : 0 = m$ ist? Falls $0 : 0 = m$, gilt, dann gilt auch $m \cdot 0 = 0$. Da die letzte Gleichung für jedes m aus $\mathbb{N}_0$ zutrifft, gilt auch $0 : 0 = m$ für jedes m aus $\mathbb{N}_0$. Jede Zahl m aus $\mathbb{N}_0$ stellt den Wert von $0 : 0$ dar. Damit ist $p : 0$ mit $p = 0$ ein arithmetisch unbrauchbarer Term, den man deshalb mit dem Verbot V aus der Arithmetik ausschließt.

Aus a) und b) ergibt sich, dass die Annahme (6) nicht haltbar ist und dass die Regel (M) nur mit der Einschränkung V für die Division Gültigkeit besitzt.

Das Verbot und die Widersprüche

In unserem Beispiel oben bleibt die interessante Frage ungeklärt, wie dort durch ein Verstoß gegen die Regel V bei der Umformung von (3) in (4) der Widerspruch $12 = 11$ entstanden ist.

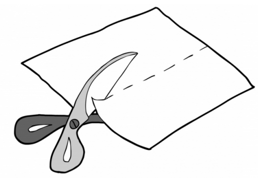
Alle Gleichungstransformationen, die in unserem Beispiel vorkommen, sind sogenannte Äquivalenzumformungen. Diese haben die Eigenschaft, dass sie eine lösbare Gleichung in eine lösbare Gleichung überführen. Da die Gleichung (1) lösbar ist (ihre Lösung ist $x = 3$), sind die von unseren Umformungen erzeugten Gleichungen (2), (3), (4) und schließlich (5) ebenfalls lösbar.
Damit aber (5) lösbar ist, muss $12 = 11$ gelten!

Die Kette der Transformationen enthält jedoch einen Fehler. Unsere „Transformation" von (3) besteht darin, dass wir die Zähler auf beiden Seiten der Gleichung (3) durch $3x - 9$ dividiert haben. Weil nun aber $3x - 9 = 0$ gilt, ist eine Umformung von (3) in (4) wegen des Verbots V gar nicht möglich. Wir aber haben das Unmögliche möglich gemacht – und darin liegt der Grund für das Auftreten des Widerspruchs $12 = 11$ – wir haben $3x - 9$ wie einen von Null verschiedenen Term behandelt und so die beidseitige Divsion von (3) durch $3x - 9$ fälschlicherweise zu einer Äquivalenzumformung erklärt mit der bereits genannten Konsequenz, dass (5) lösbar sein muss – was $12 = 11$ nach sich zieht.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 107

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

2011 Papierstücke



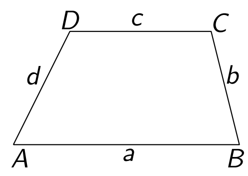
Jemand hat elf Blätter Papier. Einige oder alle Blätter zerschneidet er in jeweils neun Stücke. Von diesen Papierstücken zerschneidet er wiederum einige oder alle in neun Teile. Wenn er so weitermacht, wird er dann irgendwann 2011 Papierstücke erhalten? Wie viele Schnitte benötigt er dazu, falls dies möglich ist? Als ein Schnitt wird jeweils das Zerteilen eines Papierstücks in neun angesehen, auch wenn man dafür natürlich mehr als einmal schneiden muss. (H.F.)

Lösung:

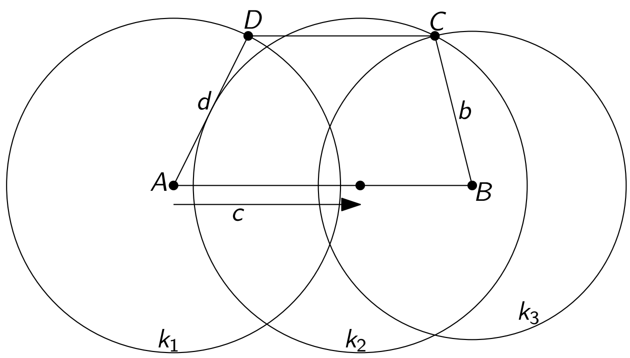
Nach jedem Schnitt erhöht sich die Anzahl der vorher vorhandenen Papierstücke um 8. Nun ist $2011 = 11 + n \cdot 8$, wobei n die Anzahl der Schnitte ist. Für $n = 250$ stimmt die Gleichung, also kann man elf Blätter Papier mit 250 Schnitten in 2011 Stücke zerschneiden.

Konstruktion eines Trapezes

Mathis hat vor einiger Zeit bei einem Trapez $ABCD$ die Seitenlängen a, b, c und d gemessen. Später möchte er ein Trapez mit genau diesen Seitenlängen konstruieren. Wie könnte er dazu vorgehen? (H.F.)



Lösung:



Zeichne eine Strecke AB der Länge a in die Ebene. Konstruiere den Kreis k_1 mit Mittelpunkt A und Radius d. Verschiebe k_1 um c parallel zu AB in Richtung B. Der verschobene Kreis sei k_2. Konstruiere nun den Kreis k_3 mit Mittelpunkt B und Radius b. Ein Schittpunkt der beiden Kreise k_2 und k_3 sei C. (Diesen Schnittpunkt C muss es geben, weil das Trapez $ABCD$ nach Voraussetzung existiert).

Wenn man nun den Punkt C parallel zu AB um c in Richtung AB verschiebt, dann erhält man den Punkt D. Also sind CD und AB parallel und $|CD| = c$. Ferner ist $|AB| = a$, $|AD| = d$ und $|BC| = b$. Damit hat Mathis das gesuchte Trapez $ABCD$ konstruiert.

Paare ganzer Zahlen

Finde alle Paare (a, b) ganzer Zahlen, für die $3ab - 7 = 5a + 2b$ gilt.

(Robin Fritsch, Kl. 10, Gymnasium Lehrte)

Lösung:

Wir formen die Gleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned} 3ab - 7 = 5a + 2b &\iff 3ab - 5a = 2b + 7 \\ &\iff a \cdot (3b - 5) = 2b + 7 \\ &\iff 3a = \frac{6b + 21}{3b - 5} = \frac{6b - 10 + 31}{3b - 5} = 2 + \frac{31}{3b - 5} \end{aligned} \qquad (*)$$

Da a eine ganze Zahl sein soll, muss demnach $\frac{31}{3b-5}$ ebenfalls ganzzahlig sein. Nun ist 31 eine Primzahl, weshalb für den Nenner folgt: $(3b-5) \in \{-31, -1, 1, 31\}$. Damit bestimmen wir nun b zu:

$$b \in \left\{-\frac{26}{3}, \frac{4}{3}, 2, 12\right\}.$$

Da wir auch verlangt haben, dass b ganzzahlig sein soll, bleibt als Lösung für b nur noch:

$$b \in \{2, 12\}.$$

Diese in die Gleichung $(*)$ eingesetzt ergibt für a:

$$a \in \{11, 1\}.$$

Damit lösen die Paare $(11, 2)$ und $(1, 12)$ die Gleichung.

Zahlenspielerei

a) Das Doppelte einer Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der Zahl.

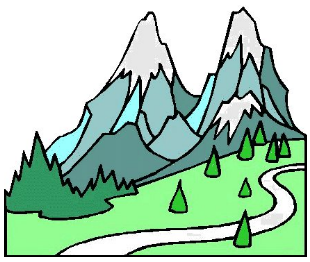
b) Hätte ich eineinhalb Äpfel mehr, hätte ich eineinhalb Mal so viele Äpfel, wie ich jetzt habe. Wie viele habe ich? (CE)

Lösung:

a) Die Bedingungen führen zu der Gleichung $2m = \frac{m}{2} + 2$. Dies nach m aufgelöst ergibt $m = \frac{4}{3}$.

b) Die entsprechende Gleichung lautet: $m + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}m$. Somit habe ich drei Äpfel. (B.B.)

Die Räuber von Ladronien



Die Räuber in den Bergen von Ladronien haben vereinbart, dass sie den von ihnen überfallenen Reisenden immer nur die Hälfte ihres Geldes abnehmen. Der Kaufherr Ricardo Astuto hat das Pech, gleich von drei Räubern überfallen zu werden. Der erste übersieht jedoch einen 200-Euro-Schein in einer Geheimtasche; der zweite verliert einen 100-Euro-Schein, welchen Astuto findet. Anschließend macht der dritte Räuber beim Nachzählen einen Fehler und gibt 50 Euro zurück. Zum Schluss besitzt Astuto noch 200 Euro. Wie viel Geld hatte er ursprünglich dabei? (WJB)

Lösung:

Ohne den Fehler des letzten Räubers hätte Astuto 150 Euro, also hatte er vor diesem Überfall 300 Euro. Ohne den wiedergefundenen 100-Euro-Schein wären das 200 Euro. Das doppelte, also 400 Euro, hatte er vorher, einschließlich der versteckten 200 Euro. Ohne die waren es 200 Euro, die der erste Räuber ihm ließ. Also war sein ursprüngliches Vermögen das doppelte, also 400 Euro, und noch die 200 versteckten Euro, insgesamt also 600 Euro.

Gefangener Ritter

Ein Ritter wurde von einer Räuberbande überfallen und gefangen genommen. Weil der Ritter sehr knapp bei Kasse war, gab der Räuberhauptmann ihm die Chance, um seine Freilassung zu spielen.

Der Ritter erhält 50 weiße und 50 schwarze Steine, die er beliebig auf zwei Säcke verteilen kann. Der Hauptmann wählt dann blind einen der beiden Säcke aus und nimmt daraus einen Stein. Ist der Stein weiß, dann ist der Ritter ohne Lösegeld frei, aber wenn der Räuber einen schwarzen Stein zieht, dann beträgt das Lösegeld 200 Golddukaten.

Wie kann der Ritter die Steine so verteilen, dass er möglichst gute Gewinnchancen hat? Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er Lösegeld bezahlen muss? (gefunden CE)

Lösung:

Ein weißer Stein in Sack 1 und alle übrigen 99 Steine in Sack 2 ergeben folgende Wahrscheinlichkeiten:

Lösegeld $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{99} = 25,25\%$

Frei $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{99} = 74,75\%$

Zahlen zählen

Aus den zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 sollen zehnstellige Zahlen so gebildet werden, dass in jeder Zahl jede Ziffer genau einmal vorkommt.

a) Wie viele verschiedene Zahlen gibt es?
b) Wie viele dieser Zahlen sind durch 3 teilbar?
c) Wie viele dieser Zahlen sind durch 5 teilbar?
d) Wie viele dieser Zahlen sind gerade? (H.F.)

Lösung:

a) Für die erste Ziffer gibt es 9 Möglichkeiten: 1, 2, 3,..., 9 (wäre die erste Ziffer 0, so wäre die Zahl nur neunstellig). Für die zweite Ziffer gibt es ebenfalls 9 Möglichkeiten: alle zehn Ziffern außer der, die bereits für die erste Ziffer verwendet wurde. Für die dritte Ziffer gibt es noch 8 Möglichkeiten, nämlich die Ziffern, die noch nicht für die erste und noch nicht für die zweite Stelle verwendet wurden, für die vierte Ziffer gibt es 7 Möglichkeiten ... und für die letzte Ziffer nur noch eine, nämlich die, die für keine der anderen Ziffern verwendet wurde. Insgesamt gibt es also $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot ... \cdot 1 = 3265920$ Möglichkeiten.
b) Eine Zahl ist bekanntlich durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Alle Zahlen haben die Quersumme $0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45$. Da 45 durch 3 teilbar ist, sind alle diese Zahlen ebenfalls durch 3 teilbar.
c) Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist. Wenn vorgegeben ist, dass die letzte Ziffer 0 ist, gibt es für die erste Ziffer immer noch 9

Möglichkeiten, für die zweite aber nur noch 8 (keine 0 und nicht die erste Ziffer), für die dritte noch 7... und für die vorletzte Ziffer noch eine Möglichkeit, also insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot ... \cdot 1 = 362880$ Möglichkeiten. Wenn als letzte Ziffer 5 vorgegeben ist, ist es ähnlich; hier gibt es jedoch nur 8 Möglichkeiten für die erste Ziffer (keine 0 und keine 5), also insgesamt $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot ... \cdot 1 = 322560$ Möglichkeiten. Insgesamt sind also $322560 + 362880 = 685440$ Zahlen durch 5 teilbar, etwa 21 Prozent.

d) Eine Zahl ist gerade, wenn die letzte Ziffer eine 0, 2, 4, 6 oder 8 ist. Wie oben gezeigt gibt es 362880 Zahlen mit 0 als letzte Ziffer. Es gibt genauso viele Zahlen mit 2 als letzte Ziffer wie es Zahlen mit 5 als letzte Ziffer gibt, nämlich 322560, wie oben gezeigt, und ebenso viele mit 4, 6 oder 8 als letzte Ziffer. Die Gesamtanzahl an geraden Ziffern ist also $362880 + 4 \cdot 322560 = 1653120$, etwa 50,6 Prozent.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Summe 2011?

Kannst du eine natürliche Zahl n finden, sodass gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = 2011$?

(H.F.)

II. Eine Aufgabe aus dem alten China

Wenn im alten China des 9. Jahrhunderts sich jemand um die Stelle eines Staatsdieners bewarb, musste er eine Prüfung ablegen, in der auch die Lösung von mathematischen Aufgaben verlangt war. Eine der uns überlieferten Prüfungsaufgaben lautete so: Als ein Holzfäller durch den Wald ging, hörte er, wie sich Diebe über die Aufteilung von Stoffballen unterhielten, die sie bei einem kürzlichen Überfall auf eine Handelskarawane erbeutet hatten. Einer aus der Räuberbande sagte: Wenn jeder von uns sechs Ballen erhält, bleiben fünf Ballen übrig. Aber sieben Ballen kann nicht jeder bekommen – dazu fehlen uns acht Ballen. Der Bewerber für die Beamtenstelle sollte nun berechnen: Wie viele Räuber waren es und wie viele Ballen hatten sie erbeutet?

(gefunden: H.F.)

III. Trockenobst

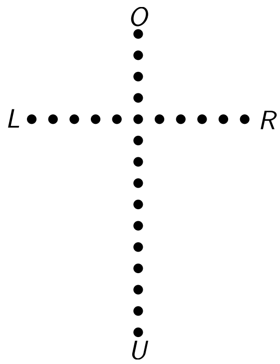
Herr Winter möchte von seiner großen Apfelernte einen Teil als Wintervorrat trocknen. Er bereitet 10kg Apfelscheiben vor und überlegt, wie viel Trockenobst er davon bekommen wird.

Wenn frische Äpfel 80% Wasser enthalten und getrocknete Äpfel nur noch 20%, wie viel Trockenobst erhält Herr Winter dann?

(C.E.)

IV. Petras Perlen

Petra hat 25 Perlen, welche sie auf einem Samttuch als Kreuz angeordnet aufbewahrt. Jeden Abend zählt sie von unten nach oben, von unten nach links und von unten nach rechts, jeweils 15 Perlen. Eines Tages spielt ihr Bruder Jonas mit den Perlen. An diesem Abend zählt Petra nur noch 13. Jonas behauptet, es seien noch alle Perlen da. Kann das sein? (gefunden WJB)



V. Lauter Primzahlen?

Mathis behauptet, dass die Zahlen $409 + 210 \cdot n$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ allesamt Primzahlen sind. Hat Mathis Recht? (H.F.)

VI. Ein pfiffiger Wirt

Sechs Schüler, die das Bestehen ihres Abiturs feiern wollen, lassen sich in einer stets überfüllten Kneipe einen Tisch mit sechs Plätzen reservieren. Als sie sich abends in dem Lokal zusammenfinden, hat einer von ihnen seine Freundin mitgebracht – und für sie ist leider kein freier Stuhl aufzutreiben. Der Wirt will das Problem so lösen: Zwei Personen – der Schüler mit seiner Freundin auf dem Schoß – setzen sich auf den ersten Stuhl; die dritte Person setzt sich auf den zweiten Stuhl und so weiter. Also setzt sich die sechste Person auf den fünften Stuhl – ein Stuhl bleibt somit frei und auf den setzt sich die Freundin. Worin ist der offensichtliche Trugschluss der Wirtes begründet? (H.F.)

VII. Fehlende Vielfache

Es sei S die Menge der 6-ziffrigen natürlichen Zahlen in deren Dezimaldarstellung jede der Ziffern 4, 5, 6, 7, 8 und 9 genau einmal vorkommt.

Dann gilt: Für kein $n \in S$ gibt es in S ein Vielfaches $v \cdot n$ von n, $v = 2, 3, 4, \ldots$.

Begründe dies mit Logik – nicht mit Computerrechnereien. (H.F.)

Impression der MONOID-Jahresfeier 2011

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Ein gutes neues Jahr

wünscht die MONOID-Redaktion
allen Leserinnen und Lesern für **2012!**

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1036: Teilbarkeit durch 7

Wir wollen eine $(n+1)$-stellige Zahl $99\dots98$ mit n Ziffern 9 durch 9_n8 abkürzen. Untersuche die Behauptung: Es gibt unendlich viele unter den Zahlen 9_n8, die durch 7 teilbar sind. (H.F.)

Aufgabe 1037: Summe aus Dreien und Fünfen

Jede natürliche Zahl $n \geq 8$ hat eine mindestens 2-gliedrige Summendarstellung $n = z_1 + z_2 + \dots + z_m$, mit $m \geq 2$, wobei die z_i nur Dreien oder Fünfen sind. Zeige, dass die Aussage stimmt. (H.F.)

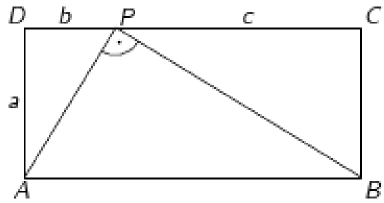
Aufgabe 1038: Eine Gleichung im Rechteck

Im Rechteck $ABCD$ mit $|AD| < \frac{|AB|}{2}$ sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ADP$ mit $P \in CD$ konstruiert; es seien $|AD| = a$, $|DP| = b$ und $|PC| = c$.

Dann gilt:

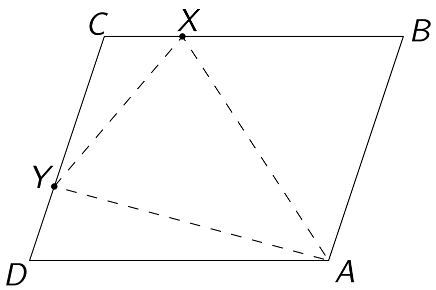
$$a\sqrt{a^2 + c^2} = c\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Trifft diese Behauptung zu?



(H.F.)

Aufgabe 1039: Gleichseitiges Dreieck im Parallelogramm



Im Parallelogramm $ABCD$ mit vier gleich langen Seiten und einem Innenwinkel von $120°$ bei C werden in der Seite BC ein Punkt X und in der Seite CD ein Punkt Y beliebig aber so gewählt, dass $|CX|$ gleich $|DY|$ ist. Zeige: Das Dreieck $\triangle AXY$ ist gleichseitig. (H.F.)

Aufgabe 1040: Zahlen aus gleichen Ziffern

Eine Zahl die aus 3^n gleichen Ziffern besteht ist für jedes n, mit $n = 1, 2, 3, \dots$, durch 3^n teilbar. Zeige, dass die Aussage stimmt. (H.F.)

Aufgabe 1041: Konkave Funktionen und n-Ecke

Die Funktion f heiße konkav im Intervall $[a, b]$, wenn für $x_1, x_2 \in [a, b]$, $0 < p_1, p_2 < 1$, $p_1 + p_2 = 1$ immer gilt $f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$

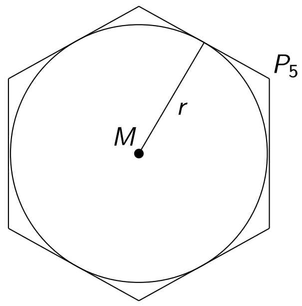
a) Zeige: Ist f konkav in $[a, b]$, so gilt für $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, mit $0 < p_1, p_2, \dots p_n < 1$ und $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, immer $f(p_1x_1 + \dots + p_nx_n) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)$

b) Unter Verwendung von a zeige, dass unter allen in einem Kreis einbeschriebenen n-Ecken das regelmäßige n-Eck den größten Umfang hat.
Hinweis: Benutze die Sinusfunktion für geeignete Werte und arbeite am Einheitskreis.

Aufgabe 1042: Eine Frage der Vererbung

Es sei $\{P_n \mid n = 3, 4, ...\}$ eine Folge von regelmäßigen n-Ecken P_n, die sämtlich den Kreis K um den Punkt M mit Radius r als Inkreis besitzen. Dann sind die n-Eckseiten Tangenten an den Kreis K und die Seitenmitten haben alle den Abstand r von M.

In der Schule erfährt man, dass die n-Ecke P_n sich immer mehr der Form des Kreises K annähern, je größer n gewählt wird und dass man schließlich K als ein „Polygon mit unendlich vielen Ecken" vorstellen dürfe.



Die Fläche des Kreises K ist $A = \pi r^2$ und sein Umfang $U = 2\pi r$, woraus

$$\frac{A}{U} = \frac{r}{2}$$

folgt. Besitzt nun der Kreis K allein diese Eigenschaft, oder ist sie ihm von jedem einzelnen n-Eck P_n „vererbt" worden – das heißt: Gilt diese Gleichung auch für jedes P_n, $n = 3, 4, \dots$, wenn A die Fläche und U der Umfang von P_n ist? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 107

Klassen 9–13

Aufgabe 1029: Primzahl-freie Intervalle

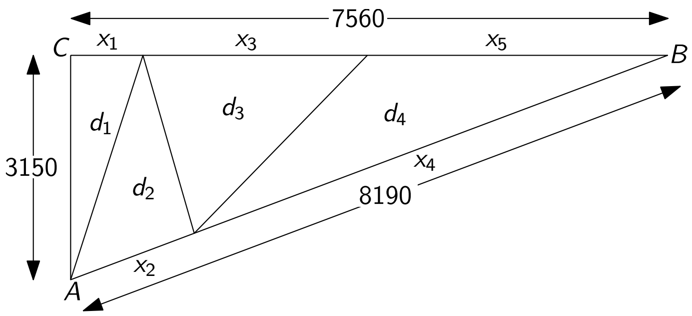
Es gibt unendlich viele 5-Tupel unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist. (H.F.)

Lösung:

Für jede Primzahl $p \geq 5$ gilt: $p = 6n - 1$ oder $p = 6n + 1$ für ein $n \geq 1$.

Dann ist $p^2 = 36n^2 \pm 12n + 1$. Damit sind dann $p^2 - 1$, $p^2 + 1$ und $p^2 + 3$ gerade Zahlen; p^2 ist keine Primzahl und $p^2 + 2$ ist ein Vielfaches von 3. Damit sind die fünf Zahlen $p^2 - 1$ bis $p^2 + 3$ keine Primzahlen.

Aufgabe 1030: Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks



Zerlege das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ in vier Teildreiecke d_1, d_2, d_3, d_4 wie in der Figur, und zwar so, dass sich die Flächen von d_1, d_2, d_3, d_4 verhalten, wie $1 : 2 : 3 : 4$. Berechne die Streckenlängen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. (H.F.)

Lösung:

Die Fläche der Dreiecke $\triangle ABC$ und d_i seien mit $|ABC|$ und $|d_i|$ bezeichnet. Aus der Voraussetzung folgt dann: $|ABC| = \frac{1}{2} \cdot 7560 \cdot 3150$ und $|d_1| = \frac{1}{10}|ABC|$, $|d_2| = 2 \cdot |d_1|$, $|d_3| = 3 \cdot |d_1|$, $|d_4| = 4 \cdot |d_1|$.

Aus $|d_1| = \frac{1}{2}x_1|AC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot |BC| \cdot |AC| \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{10}|BC| = 756$.

Es sei h die zu AB orthogonale Höhe im Dreieck d_2. Aus $|d_2 \cup d_3 \cup d_4| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{9}{10}|ABC| \Longrightarrow h = 2 \cdot \frac{9}{10}|ABC| : |AB|$. Wegen $|d_2| = \frac{1}{2}x_2 \cdot h$ ist $x_2 = 2 \cdot |d_2| : h = 2 \cdot \frac{2}{10}|ABC| : h \Longrightarrow x_2 = 1820$. Damit ist $x_4 = 6370$.

Es sei h^* die zu BC orthogonale Höhe im Dreieck d_3. Aus $|d_3 \cup d_4| = \frac{1}{2}(x_3 + x_5)h^* = \frac{7}{10}|ABC|$ folgt $h^* = 2 \cdot \frac{7}{10}|ABC| : (x_3 + x_5)$. Wegen $|d_3| = \frac{1}{2}x_3 \cdot h^*$ und mit $x_3 + x_5 = |BC| - x_1 = 6804$ gilt: $x_3 = 2|d_3| : h^* = 2 \cdot \frac{3}{10}|ABC| : h^* = 2916$. Damit ist $x_5 = 3888$.

Aufgabe 1031: Wahr oder Falsch?

Jede Zahl $2^{(2^n)} + 4$, wobei $n = 2, 3, 4, \ldots$, ist ein Vielfaches von 10. Begründe Deine Antwort. (H.F.)

Lösung:

Mit $[a]$ sei die Einerziffer der natürlichen Zahl a gemeint. Setze $P_n := 2^{(2^n)}$. Damit ist für $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$\begin{aligned} &[P_2] = \left[2^{(2^2)}\right] = \left[2^4\right] = 6 \\ &[P_3] = \left[(P_2)^2\right] = [6 \cdot 6] = 6 \text{ und so weiter (vollständige Induktion)} \\ \Longrightarrow\ &[P_n] = 6 \end{aligned}$$

Daraus folgt: $[P_n + 4] = 0$ – die Behauptung ist also wahr.

Aufgabe 1032: Hochstapler?

René macht ein Praktikum bei der Stadtverwaltung. Dabei muss er 1 cm dicke Aktenmappen aufeinander in Schränke stapeln. Dabei fällt ihm auf, dass sich die Mappen fast bis auf 0,6 cm zusammen drücken lassen, wenn weitere Mappen darauf gestapelt werden. Wir nehmen an, eine Mappe wird bei jeder Mappe, welche darauf gestapelt wird, um 20% der Differenz zu 0,6 cm zusammen gedrückt.

a) Wie hoch ist ein Stapel aus 50 Mappen?

b) Wie viele Mappen passen maximal in eine 50 cm hohe Ablage?

(Robin Fritsch, Kl. 10, Gymnasium Lehrte)

Lösung:

a) Da sich die Differenz zu 0,6 cm stets um 20% verringert, sind nach einer weiteren Mappe stets nur noch 80% der vorherigen Differenz übrig. Nach n Mappen ist es dann noch ein Anteil von $0{,}8^n$. Da die Differenz ohne Mappen oben drauf 0,4 cm beträgt, gilt für die Dicke h_n einer Mappe mit n darauf gestapelten Mappen $h_n = 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}8^n$. Damit folgt für die Höhe h_n eines Stapels aus n Mappen mit der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{i=0}^{n-1} h_i = \sum_{i=0}^{n-1} (0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}8^i) \\ &= 0{,}6n + 0{,}4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 0{,}8^i = 0{,}6n + 0{,}4 \cdot \frac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8} \\ &= 0{,}6n + 2 - 2 \cdot 0{,}8^n. \end{aligned}$$

Also hat ein Stapel aus 50 Mappen die Höhe

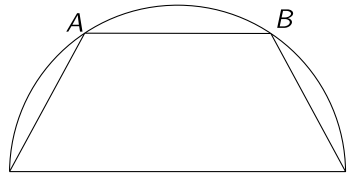
$$h_{50} = 0{,}6 \cdot 50 + 2 - 2 \cdot 0{,}8^{50} = 31{,}99997\ldots$$

Also ungefähr 32 cm.

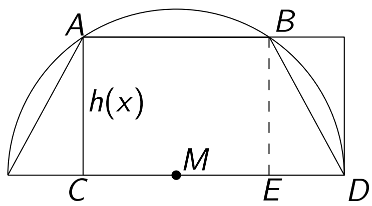
b) Wenn n Mappen in die Ablage passen, gilt $h_n = 0{,}6n + 2 - 2 \cdot 0{,}8^n = 50$. Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach n auflösen, allerdings kann man n wie folgt bestimmen:
Damit der Stapel 50 cm hoch wird muss offensichtlich $n > 50$ sein. Dann ist $2 \cdot 0{,}8^n$ aber sehr klein ($< 0{,}00003$) und wir können zur groben Bestimmung von n zunächst anehmen, es sei gleich 0. Dann folgt $0{,}6n + 2 \approx 50 \Leftrightarrow n \approx 80$. Diese Schätzung können wir bestätigen, indem wir $h_{80} < 50$ und $h_{81} > 50$ zeigen:
Für $n = 80$ ist offensichtlich $h_{80} = 0{,}6 \cdot 80 + 2 - 2 \cdot 0{,}8^{80} < 0{,}6 \cdot 80 + 2 = 50$. Also passen 80 Mappen in die Ablage. Für $n = 81$ erhält man mit der Abschätzung $0{,}8^{81} < 0{,}5$ leicht $h_{81} = 0{,}6 \cdot 81 + 2 - 2 \cdot 0{,}8^{81} > 50{,}6 - 2 \cdot 0{,}5^{20} > 50{,}6 - 2 \cdot 0{,}5^2 > 50$. Das heißt ein Stapel aus 81 Mappen passt nicht mehr in die Ablage. Man kann also höchstens 80 Mappen in die Ablage stapeln.

Aufgabe 1033: Trapez

Auf dem Kreis mit Radius 1 wähle A und B symmetrisch so, dass die Fläche des Trapezes maximal wird. (WJB)



Lösung:



Die Fläche des Trapezes ist gleich der des Rechtecks $AEDC$. Ist $\overline{CM} = x$, so ist $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ und die Fläche $F(x) = (1+x)h(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Wir bestimmen nun das Maximum von $f(x) = F^2(x) = (1+x)^2(1-x^2) = (1-x)(1+x)^3$. Differenzieren ergibt $f'(x) = -(1+x)^3 + (1-x)\cdot 3(1+x)^2 = (1+x)^2(2-4x)$. Die einzige Nullstelle zwischen 0 und 1 ist $x_0 = \frac{1}{2}$. $F(x)$ hat also seinen maximalen Wert bei $F(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ und $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Das maximale Trapez ist also ein halbes regelmäßiges 6-Eck.

Aufgabe 1034: Nachkommastellen einer rationalen Zahl

Zeige:

a) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine reelle Zahl $a(n)$ zwischen n und $n+1$, deren Nachkommastellen mit denen von $b(n) := \frac{1}{a(n)}$ übereinstimmen.

b) $b(n)$ konvergiert gegen 0.

c) $n \cdot b(n)$ konvergiert gegen 1. (WJB)

Lösung:

a) Die Bedingung bedeutet $a(n) - n = \frac{1}{a(n)} = b(n)$. Wir lösen deshalb die Gleichung $x - n = \frac{1}{x}$, das heißt $x^2 - nx - 1 = 0$, zu $x = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1}$. Diese Zahl liegt zwischen n und $n+1$, erfüllt also die Bedingung.

b) Wegen $0 < n < a(n) < n+1$ folgt durch Kehrwertbildung:

$(*)$ $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{a(n)} = b(n) < \frac{1}{n}$;

mit der Folge $\frac{1}{n}$ strebt also auch $b(n)$ gegen 0.

c) Multiplikation von $(*)$ mit n liefert die Abschätzung

$$1 > n \cdot b(n) > \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

wonach $n \cdot b(n)$ für $n \to \infty$ gegen 1 strebt.

Bemerkung: Für $n = 1$ ist $a(n) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ die Zahl, die das Verhältnis beim Goldenen Schnitt angibt und auch das Grenzverhalten der Fibonacci-Folge beschreibt.

Aufgabe 1035: Zur Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung $B(p, n)$ sind

$$P(X = k) = b(p, n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n, \text{ wobei } q = 1 - p.$$

a) Berechne für $k = 0, 1, \dots, n-1$ den Ausdruck: $\dfrac{b(p, n, k)}{b(p, n, k-1)}$.

b) Verwende das Ergebnis aus a), um zu zeigen, dass $b(p, n, k)$ bei festen Werten p und n in Abhängigkeit von k steigt, bis es bei einem Wert k_0 sein Maximum erreicht und danach wieder fällt.

c) Ist k_0 eindeutig bestimmt? Gib zur Begründung auch ein Beispiel an.

(WJB)

Lösung:

a) $\frac{b(p,n,k)}{b(p,n,k-1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \cdot \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} \frac{1}{p^{k-1}q^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)}{k} \frac{p}{q}$.

b) $b(p, n, k-1) < b(p, n, k)$ wenn der Quotient größer als 1 ist,

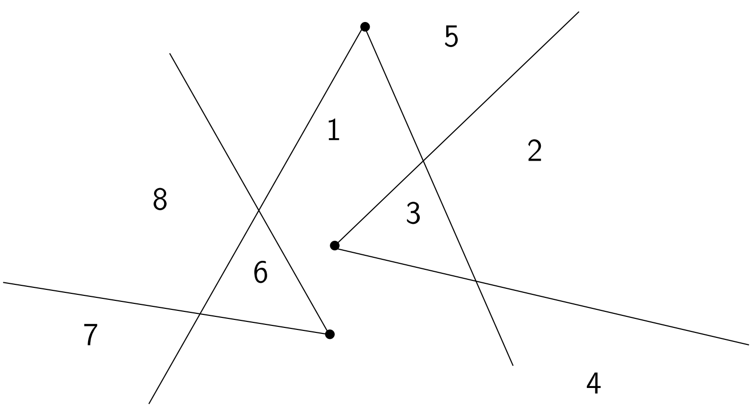
$$\frac{(n-k+1)}{k} \frac{p}{q} - 1 = \frac{(n-k+1)p - k(1-p)}{kq} = \frac{1}{kq}((n+1)p - k).$$

Dies ist positiv, falls $k < (n+1)p$ und negativ, falls $k > (n+1)p$. $b(p, n, k)$ wächst also bis zu einem (ganzzahligen) Wert k_0, wobei $k_0 < (n+1)p$ und $k_0 + 1 \geq (n+1)p$.

c) Es ist möglich, dass das Maximum an zwei aufeinander folgenden Werten k_0, $k_0 + 1$ angenommen wird. Beispielsweise ist für $n = 3$ und $p = \frac{1}{2}$ $k_0 = 1$ oder $k_0 = 2$.

Mathematische Entdeckungen

Winkel in der Ebene



Zwei von einem Punkt in der Ebene ausgehende Halbgerade bilden einen Winkel. Durch einen oder mehrere solcher Winkel sind in der Ebene Gebiete festgelegt – beispielsweise bestimmen die drei Winkel in der Abbildung acht mit 1, 2, 3, ..., 8 nummerierte Gebiete.

Finde nun für möglichst viele Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Antwort auf die Frage: Welches ist die Maximalzahl $M(n)$ von Gebieten, die n Winkel festlegen können? Kannst Du auch eine Formel angeben – und sie vielleicht sogar beweisen –, aus der sich die Zahl $M(n)$ für jedes $n \geq 1$ direkt berechnen lässt? (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2012 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der „Wer forscht mit?“-Aufgabe aus Heft 106

In Heft 106 stellten wir Euch eine Aufgabe zur sogenannten Kolakoski-Folge:

Eine sich selbst reproduzierende Zahlenfolge

In der Aufgabenstellung wurde erläutert, wie die Kolakoski-Folge $F : q_1, q_2, q_3, \dots$ gebildet wird, und folgende Aufgaben gestellt:

a) Wie heißen die F-Elemente g_{13}, ..., g_{21}?

b) Untersuche (eventuell mit dem Computer), ob in F Zykeln (das heißt Ketten gleicher Längen bestehend aus den gleichen Zahlen) auftreten.

c) Man suche eine Formel, die für eine gegebene Nummer n das Folgenelement g_n zu berechnen erlaubt. (H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe hat sich Philipp Delhougne, Klasse 12, von der Otto-Hahn-Schule Hanau beschäftigt.

Anstatt von F nach H „abzuleiten“ integriert er umgekehrt von H nach F und bestimmt dabei korrekt die F-Elemente $g_{13}, \dots, g_{21}$ zu: 1 1 2 1 1 2 2 1 2.

Weiterhin bestimmt er sogar die ersten 163 Elemente der Kolakoski-Folge und findet dabei, dass die ersten 28 Elemente der Folge sich von Position 82 an wiederholen.

Die besondere Aufgabe
Versteckte Bedingungen
von Hartwig Fuchs

Mathis stellt Mette und Matheo eine Aufgabe, an der er selbst lange geknobelt hat: „Ich denke mir zwei verschiedene natürliche Zahlen a und b, beide > 1. Mette teile ich das Produkt $P = a \cdot b$ und Matheo die Summe $S = a + b$ mit.“ Wie heißen a und b?

Daraufhin führen die drei etwas später den folgenden Dialog:

(1) Mette: „Mit diesen wenigen Angaben kann ich a und b nicht bestimmen.“

(2) Mathis: „Lass mich dir helfen; die Summe S ist nicht größer als 22.“

(3) Mette: „Jetzt kenne ich a und b.“

(4) Matheo (nach längerer Pause): „Auch ich kenne nun a und b.“

Wer von unseren L(o)esern kann a und b angeben?

Auf den ersten Blick hat man den Eindruck, die Aufgabe sei unlösbar – sie enthält anscheinend zu wenige Informationen, um a und b bestimmen zu können. Aber genau das macht den Reiz dieses Typs scheinbar unterbestimmter Probleme (das sind Probleme, bei denen nicht genug Informationen angegeben sind, um sie zu lösen) aus.

Die Lösung

Die Aufgabenstellung enthält nur wenige direkte Angaben zu a und b. Wenn wir $a < b$ annehmen, dann gilt $2 \leq a < b$. Alle übrigen Informationen über a und b müssen in (1) bis (4) versteckt sein.

Untersuchen wir die Aussage (1)

Obgleich Mette die Zahl P kennt, kann sie a und b nicht bestimmen. Das ist nur der Fall, wenn gilt:

(5) P ist eine Zahl, die (mindestens) zwei verschiedene Produktdarstellungen mit lauter verschiedenen Faktoren > 1 besitzt.

Beispiele:

1. Sei $P = 77$. Da P außer $P = 7 \cdot 11$ keine weiteren Produktdarstellungen mit Faktoren > 1 besitzt, sind a und b eindeutig durch $a = 7$ und $b = 11$ festgelegt.
2. Für $P = 78 = 2 \cdot 39 = 6 \cdot 13$ kann man nicht entscheiden, aus welchen Faktoren das von Mathis genannte Produkt entstanden ist. Man weiß also nicht, ob $a = 2$, $b = 39$ oder $a = 6$, $b = 13$ ist.

Folgerungen aus (2)

Wegen (2) gilt für a und b:

(6) $S = a + b \leq 22$.

Daraus folgt wegen $2 \leq a < b$ unmittelbar:

(7) $2 \leq a \leq 10$ sowie $3 \leq b \leq 20$.

Für $a \geq 11$ wäre nämlich $b \geq 12$ wegen (5) und damit $a + b > 22$; für $b \geq 21$ wäre $a + b \geq 2 + 21 > 22$.

Mit Hilfe von (6) und (7) gelingt es nun, die endlose Liste $\{12, 16, 18, 20, 24, ...\}$ derjenigen Zahlen P, die (5) erfüllen, zu reduzieren. Es gilt nun $12 \leq P \leq 121$, denn aus $P = a \cdot b > 121$ folgte – weil dann nämlich $b > \frac{121}{a}$ wäre – dass $a + b > a + \frac{121}{a} > 22$ ist für $a = 2, 3, 4, \ldots, 10$ (selbst nachrechnen!). Und 12 war schon das kleinste Element der Liste.

Folgerungen aus (3)

Mette kann (3) nur dann behaupten, wenn für die ihr bekannte Zahl $P \leq 121$ gilt, dass P gemäß (5) zwar (mindestens) zwei verschiedene Produktdarstellungen besitzt, aber nur eine von ihnen die Bedingung $a + b \leq 22$ erfüllt.

Beispiele:

1. Sei $P = 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$: Hier kann man nicht entscheiden, ob $a = 2$, $b = 10$ oder $a = 4$, $b = 5$ ist.
2. Sei $P = 66 = 2 \cdot 33 = 3 \cdot 22 = 6 \cdot 11$: Die beiden ersten Produkte erfüllen (6) nicht – wohl aber das dritte. Dann muss $a = 6$, $b = 11$ sein.

Wenn man nun nachrechnet, welche von den möglichen Zahlen $P \leq 121$ diese Bedingung erfüllen, dann erhält man die folgende Liste, zu der P gehören muss: $\{44, 50, 52, 63, 64, 66, 68, 75, 78, 88, 98, 99, 104, 105, 108, 110, 112, 117, 120\}$.

Folgerungen aus (4)

Da Matheo alle hierhin führenden Überlegungen selbst anstellen wird, kennt er auch diese Zahlenliste. In ihr hat er dann jene Zahl P bestimmt, bei der die Faktoren die ihm bekannte Summe S haben. Aus S und P hat er dann nach seiner Aussage a und b berechnet. Das aber konnte ihm nur gelingen, wenn gilt:

(8) Zu Matheos Zahl S gibt es in der Liste nur eine Zahl P.

Beispiel: Es sei $S = 19$, dann wüsste Matheo, dass Mettes Zahl P entweder $P = 78$ oder $P = 88$ ist (vergleiche die nachfolgende Tabelle) – er könnte aber nicht entscheiden, welche von beiden Mettes Zahl P ist und deshalb könnte er a und b nicht bestimmten.

Finale

Im Hinblick auf (8) gruppieren wir die Zahlen der Liste nach den Summen S aus den Faktoren von P:

S	15	16	17	18	19	20	21	22
P	44	63	52	–	78	64	68	105
	50		66		88	75	98	112
						99	104	117
							108	120
							110	

In dieser Tabelle gibt es tatsächlich nur ein Zahlenpaar S und P, das die Bedingung (8) erfüllt: $S = 16$ und $P = 63$. Wegen $63 = 7 \cdot 9$ ist $a = 7$ und $b = 9$. Dieses Zahlenpaar ist das einzige, welches die Sätze (1) bis (4) zu wahren Aussagen macht und das zugleich die Bedingungen (5) bis (9) erfüllt.

Historische Nachbemerkung

Der niederländische Mathematiker Hans Freudenthal* hat die Urform unserer Aufgabe als Rätsel im „Nieuw Archif voor Wiskunde, Serie 3, Vol. 17 (1969)“ veröffentlicht. Martin Gardner**, hat es dann mit einem seiner vielen Zeitschriften-Artikel bekannt gemacht. Seither kursiert es in vielen Varianten durch die Rätsel-Literatur und nun auch als „Besondere Aufgabe“ bei Monoid.

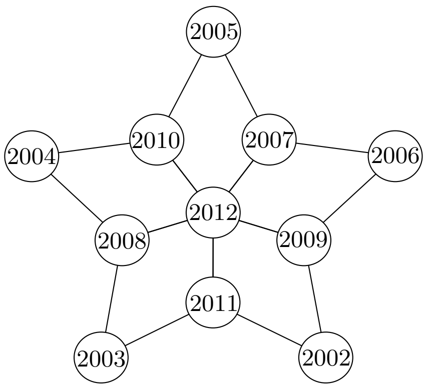
* Hans Freudenthal, * 17. September 1905 in Luckenwalde; † 13. Oktober 1990 in Utrecht

** Martin Gardner, * 21. Oktober 1914 in Tulsa, Oklahoma; † 22. Mai 2010 in Norman, Oklahoma, amerikanischer Wissenschaftsjournalist, in Deutschland vorwiegend bekannt für seine mathematischen Rätsel und Spielereien

Lösungen zu den Aufgaben zum Neuen Jahr von Seite 6

Zahlenstern

Eine mögliche Lösung ist:



Eine langwierige Rechnung?

Es sei G das erste und U das zweite Produkt aus den gegebenen Ungleichungen. Aus $n^2 > (n+1)(n-1)$ folgt $\frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n}$.
Damit ist $G^2 > (\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}) \cdot (\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}) \cdot (\frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6}) \cdot \ldots \cdot (\frac{2012}{2011} \cdot \frac{2012}{2012}) = 2012$, sodass $G > \sqrt{2012}$ ist. Genauso ist $U^2 < (\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}) \cdot (\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}) \cdot (\frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6}) \cdot \ldots \cdot (\frac{2010}{2009} \cdot \frac{2011}{2010}) \cdot \frac{2012}{2011} = 2012$, sodass $U < \sqrt{2012}$ ist.

Zwei letzte Ziffern

Mit $[n]$ bezeichnen wir die beiden letzten Ziffern einer natürlichen Zahl n. Wir berechnen einige Werte von $[2012^m]$, um eventuell ein Bildungsgesetz der Terme $[2012^m]$ zu erkennen:

m	1	2	3	4	5	...	12	13	14	...	19	20	21	22	...	41	...
$[2012^m]$	12	44	28	36	32	...	56	72	64	...	48	76	12	44	...	12	...

Die Ziffernpaare 12, 44, ..., 76 wiederholen sich mit einer Periode der Länge 20.
Aus $2001 = 1 + 100 \cdot 20$ folgt $[2012^{2001}] = 12$. Nun gilt:
$[2012^{2013}] = [2012^{2001} \cdot 2012^{12}] = [[2012^{2001}] \cdot [2012^{12}]] = [12 \cdot 56] = 72$.
Die beiden letzten Ziffern der 6651-stelligen Zahl 2012^{2013} sind also 72.

Zeitlich begrenzt bemerkenswerte Quersumme

Mit $Q(n)$ sei die Ziffernsumme der natürlichen Zahl n bezeichnet.

$$Q(7 \cdot 10^223 - 2) = Q(6\underbrace{999\ldots99}_{\text{222 Ziffern 9}}8) = 6 + 222 \cdot 9 + 8 = 2012.$$

Eine Frage der Teilbarkeit

1. Fall: Es sei $p_1 > 3$.
Für jedes i mit $1 \leq i \leq 2012$ ist dann $p_i = 3m+1$ oder $3m+2$ für eine natürliche Zahl m, woraus folgt: $p_i^2 = 3m_i+1$ mit $m_i = 3m^2+2m$ oder $m_i = 3m^2+4m+1$. Daher gilt:

(1) $p_1^2+p_2^2+...+p_{2012}^2 = 3(m_1+m_2+...+m_{2012})+2012$ mit $2012 = 3\cdot 670+2$.

Für jede natürliche Zahl n ist nun $n = 3m$ oder $n = 3m+1$ oder $3m+2$. Damit ist n^2 von folgender Form:

(2) $n^2 = 3\cdot k$ oder $n^2 = 3k+1$.

Nach Voraussetzung soll $p_1^2+p_2^2+...+p_{2012}^2$ eine Quadratzahl sein. Dies ist jedoch wegen (2) nicht möglich, der Fall $p_1 > 3$ tritt also nicht ein.
2. Fall: Es sei nun $p_1 \leq 3$.
Für $p_1 = 3$ ist für jedes p_i mit $i > 1$ wie oben $p_i^2 = 3m_i + 1$, sodass jetzt $p_1^2 + p_2^2 + ... p_{2012}^2 = 3(1 + m_2 + ... + m_{2012}) + 2011$ mit $2011 = 3\cdot 670 + 1$ ist. Also kann wegen (2) die Summe $p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{2012}^2$ eine Quadratzahl sein.
Da nun $p_i^2 = 3m_i+1$ und $p_j^2 = 3m_j+1$ für $1 < j < i$ gilt, ist $p_i^2-p_j^2 = 3(m_i-m_j)$ und folglich gilt die Behauptung, falls $p_1 = 3$ ist.
Für $p_1 = 2$ gilt wegen $p_1^2 = 3+1$ wieder die Gleichung (1) mit $m_1 = 1$, sodass $p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{2012}^2$ keine Quadratzahl sein kann. Der Fall $p_1 = 2$ tritt also nicht ein.

Ist die $3n+1$-Vermutung bewiesen?

von Hartwig Fuchs

Am 5. Juni 2011 meldete eine deutsche Wochenzeitschrift, die eher nicht für die Verbreitung mathematischer Nachrichten bekannt ist, dass die $3n+1$-*Vermutung von Lothar Collatz*, nach deren Beweis Mathematiker über ein halbes Jahrhundert vergeblich gesucht hatten, möglicherweise von dem Hamburger Mathematiker Gerhard Opfer als richtig nachgewiesen wurde – allerdings müsse abgewartet werden, ob seine Beweisführung einer noch ausstehenden Überprüfung durch seine Kollegen vom Fach standhält!

Die Vorgeschichte

Die Entdeckungsgeschichte der $3n+1$-Vermutung beginnt mit einem Tagebucheintrag des Mathematikers Lothar Collatz[1] unter dem Datum 1. Juli 1932. Dort notierte er, dass er sich eine zahlentheoretische Funktion f vorgegeben und dann das „Wachstumsverhalten“ der zu f gehörigen Iteriertenfolgen untersucht hatte, indem er so vorging:

[1] Lothar Collatz, * 6. Juli 1910 in Arnsberg, † 26. September 1990 in Warna; Hauptarbeitsgebiet: Numerik

Zunächst zerlegte er die Zahlenmenge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ in die elementefremden Teilmengen $\mathbb{N}_1 = \{3v \mid v = 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{N}_2 = \{3v + 1 \mid v = 0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_3 = \{3v + 2 \mid v = 0, 1, 2, ...\}$. Sodann definierte er eine dreiteilige Funktion f für jede natürliche Zahl[2] n:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}n\,, & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{4}{3}n - \frac{1}{3}\,, & n \in \mathbb{N}_2 \\ \frac{4}{3}n + \frac{1}{3}\,, & n \in \mathbb{N}_3 \end{cases}$$

Für jedes n, $n \geq 1$, legte er dann die Iteriertenfolge $F_n = \left\langle f^0(n), f^1(n), f^2(n), ...\right\rangle$ fest:

$$(2) \quad f^0(n) = n, f^1(n) = f(n), f^{i+1}(n) = f(f^i(n)) \text{ für } 1 = 1, 2, 3, ...$$

Als Eigenschaften der Folgen F_n halten wir fest: Alle Funktionswerte $f(n)$ von f sind ganzzahlig, denn es gilt:

$$\frac{2}{3}n = \frac{2}{3} \cdot 3v = 2v;$$

$$\frac{4}{3}n - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}(3v + 1) - \frac{1}{3} = 4v + 1;$$

$$\frac{4}{3}n + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}(3v + 2) + \frac{1}{3} = 4v + 3.$$

Daraus folgt, dass sämtliche Glieder $f(n)$ einer jeden Folge $F(n)$ ganzzahlig sind. Falls für ein $i \geq 0$ und ein $j \geq 1$ das Folgenglied $f^{i+j}(n) = f^i(n)$ ist, muss auch für jedes $k \geq 2$ das Folgenglied $f^{i+k\cdot j}(n) = f^i(n)$ sein[3]. Das j-Tupel

$$\left\langle f^i(n), f^{i+j}(n), \dots, f^{i+j-1}(n)\right\rangle$$

nennt man dann einen Zykel der Länge j in $F(n)$. Zwei Zykel $\langle z_1, z_2, \dots, z_m\rangle$ und $\langle z_2, z_3, \dots, z_m, z_1\rangle$ werden als gleich betrachtet.

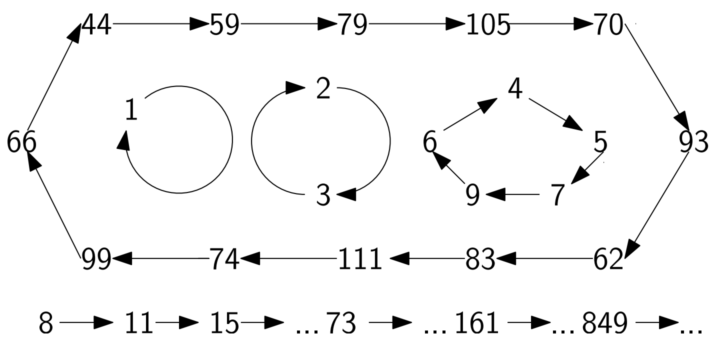
Beispiele

1. $F_1 = \langle 1, 1, 1, ...\rangle$ mit dem Zykel $\langle 1\rangle$.
2. $F_2 = \langle 2, 3, 2, 3, ...\rangle$ mit dem Zykel $\langle 2, 3\rangle$ und $F_3 = \langle 3, 2, 3, 2 ...\rangle$ mit dem gleichen Zykel $\langle 2, 3\rangle$.
3. $F_4 = \langle 4, 5, 7, 9, 6, 4 ...\rangle$; damit kennt man auch $F_5 = \langle 5, 7, 9, 6, 4, 5 ...\rangle$ sowie F_6, F_7 und F_9. Alle fünf haben den gleichen Zykel $\langle 4, 5, 7, 9, 6\rangle$.

Collatz veranschaulichte diese F_n-Folgen, $n = 1, 2, 3, \dots, 7, 9$ und zusätzlich noch die Folge F_{44} durch „gerichtete Graphen" (Pfeildiagramme).

[2] Im Folgenden wird der Zusatz „natürlich" weggelassen.

[3] Dies lässt sich zeigen, indem man die Aussage zunächst für ein bestimmtes $n_0 \in \mathbb{N}$ nachrechnet und dann zeigt, dass wenn die Aussage für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ gilt, diese auch für $n + 1$ richtig ist (Beweis durch vollständige Induktion).



Ebenfalls erwähnte er noch die Folge

$$F_8 = \left\langle 8, 11, 15, \dots, f^{10}(8) = 73, \dots, f^{20}(8) = 161, \dots, f^{30}(8) = 717, \dots \right\rangle,$$

bei der er nicht entscheiden konnte, ob sie in einen Zykel führt oder ob sie zykelfrei ist und ihre Glieder deshalb über jede gegebene Schranke hinauswachsen.[4] Das wird ihn veranlasst haben, sich den Iterierten-Folgen von Funktionen zuzuwenden, die einfacher gebaut sind als die Funktion f. Aber auch dabei geriet er schnell wieder an ein Problem, dessen Lösung er nicht finden, sondern nur vermuten konnte – er war so auf sein $3n + 1$-Problem gestoßen.

Erst viele Jahre danach berichtete Collatz einigen Kollegen – darunter Stanislaw Ulam, Shizuo Kakutani und Helmut Hasse[5] – von seinen im Wesentlichen erfolglosen zahlentheoretischen Untersuchungen und seiner daraus resultierenden $3n+1$-Vermutung. Mathematiker verbreiten gerne ein neu aufgetauchtes ungelöstes Problem und genau das taten die drei Genannten. Durch sie geriet die $3n+1$-Vermutung ins Blickfeld der Mathematik und sie wurde schnell als die Ulam- oder auch als die Kakutani-Vermutung bekannt; manchmal wird sie auch als Syracuse conjecture bezeichnet, weil sie von Hasse während eines Forschungsaufenthalts an der Universität von Syracuse (USA) in Umlauf gebracht wurde. Inzwischen heißt sie allgemein nach ihrem Entdecker *die* $3n + 1$-*Vermutung von Collatz.*

Vorstufen der 3n + 1-Vermutung

Collatz selbst beschrieb in einem 1986 erschienenen Artikel – in chinesischer Sprache! –, wie er zu seiner $3n + 1$-Vermutung gelangt ist. Nachdem er den Versuch aufgegeben hatte, die Struktur der zu f gehörigen Folgen F_n aufzuklären, hatte er sich mit anderen, „einfacheren“ zahlentheoretischen Funktionen und ihren Iterationsfolgen befasst.

Die erste dieser „Collatz-Funktionen“ sei hier mit a und die daraus ableitbaren Iteriertenfolgen mit $A_n = \left\langle n, a(n), a^2(n), \dots \right\rangle$ bezeichnet.

---

4 Diese Frage ist bis heute noch nicht beantwortet.

5 Stanislaw Ulam, * 13. April 1909 in Lwow (Ukraine, dt. Lemberg), † 13. Mai 1984 in Santa Fe (USA), polnisch-US-amerikanischer Mathematiker; Shizup Kakutani, * 28. August 1911 in Osaka (Japan), † 17. August 2004 in New Haven (USA), japanisch-US-amerikanischer Mathematiker; Helmut Hasse, * 25. August 1898 in Kassel, † 26. Dezember 1979 in Ahrensburg (bei Hamburg), deutscher Mathematiker

$$(3)\quad a(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\,, & n \text{ gerade} \\ n+1\,, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Beispiele

1. $A_1 = \langle 1, 2, 1, 2, \dots \rangle$
2. $A_{49} = \langle 49, 50, 25, 26, 13, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \dots \rangle$

Beide Folgen führen in den gleichen Zykel $\langle 1, 2 \rangle$.

In der Folge A_{49} bilden die Glieder 49, $a^2(49)$, $a^4(49)$, $a^6(49)$ und $a^8(49)$ eine absteigende Teilfolge, die in einen Zykel führt. Die entsprechende Eigenschaft kann man bei jeder Folge A_n mit $n > 2$ nachweisen. Dazu zeigen wir als erstes, dass $n > a^2(n)$ ist für $n > 2$. Der Wert von $a^2(n)$ ergibt sich aus dem folgenden Pfeildiagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & a(n) = \frac{n}{2},\ n \text{ gerade} \arrow[r] \arrow[dr] & a^2(n) = \frac{n}{4},\ n \text{ Vielfaches von } 4, \\
n \arrow[ur] \arrow[dr] & & a^2(n) = \frac{n}{2}+1,\ n \text{ Vielfaches von } 2, \text{ nicht von } 4 \\
 & a(n) = n+1,\ n \text{ ungerade} \arrow[r] & a^2(n) = \frac{n+1}{2},\ n \text{ ungerade}
\end{tikzcd}$$

Wegen $n > \frac{n}{4}$, $n > \frac{n}{2} + 1$ und $n > \frac{n+1}{2}$ für $n > 2$ gilt somit $n > a^2(n)$.
Ist nun $a^2(n) > 2$, so erkennt man mit der gleichen Überlegung, dass auch $a^2(n) > a^2(a^2(n)) = a^4(n)$ ist; und für $a^4(n) > 2$ ist $a^4(n) > a^6(n)$ usw.
Also gilt $n > a^2(n) > a^4(n) > a^6(n) > \dots$

In einer solchen Ungleichungskette gibt es ein kleinstes Element $a^{2k}(n)$ mit $a^{2k}(n) > 2$. Weil dann $a^{2k}(n) > a^{2k+2}(n)$ ist, muss $a^{2k+2}(n) \leq 2$ und daher $a^{2k+2}(n) = 1$ oder $= 2$ sein. Daraus folgt:

(3') Jede Collatz-Folge A_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, führt in den gleichen Zykel $\langle 1, 2 \rangle$.

Die nächste von Collatz untersuchte Funktion bezeichnen wir mit b und die zu b gehörige Iteriertenfolge mit $B_n = \left\langle n, b(n), b^2(n), \dots \right\rangle$. Die „Collatz-Funktion" b ist so definiert:

$$(4)\quad b(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\,, & n \text{ gerade} \\ 2n+1\,, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Beispiel

$B_{24} = \langle 24, 12, 6, 3, 7, 15, 31, \dots \rangle$; B_{24} ist zykelfrei.

Die Struktur der B_n-Folgen ist sehr überschaubar. Jede Zahl $n \geq 1$ besitzt eine Darstellung der Form $2^k u$, $k \geq 0$, $u \geq 1$ und u ungerade. Aus (4) folgt für $n = 2^k u$ unmittelbar: $b^k(n) = u$ für jedes $k \geq 0$. Danach ist weiter: $b^{k+1}(n) = 2u + 1$, $b^{k+2}(n) = 2^2 u + 2 + 1$, $b^{k+3}(n) = 2^3 u + 2^2 + 2 + 1, \dots$ Daraus folgt für B_n, $n \geq 1$:

(4') Jede Collatz-Folge B_n, $n = 1, 2, 3, ...$ ist zykelfrei und sie ist ab ihrem kleinsten ungeraden Glied streng monoton anwachsend. Setzt man $n = 2^k u$, $k \geq 0$, $u \geq 1$ und u ungerade, dann sieht der zu B_n gehörige Graph so aus:
$n \to b(n) = 2^{k-1}u \to ... \to b^k(n) = u \to b^{k+1}(n) = 2u + 1 \to b^{k+2}(n) = 2^2 u + 2 + 1 \to ...$

Die 3n + 1-Vermutung

Collatz hat nach den Funktionen a und b auch noch die Funktion c samt ihren Iteriertenfolgen $C_n = \langle n, c(n), c^2(n), ... \rangle$ untersucht:

$$(5) \quad c(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ 3n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Beispiele

1. $C_1 = \langle 1, 4, 2, 1, ... \rangle$
2. $C_3 = \langle 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, ... \rangle$

Beide Folgen führen in den Zykel $\langle 1, 4, 2 \rangle$.

Collatz hatte viele Folgen C_n berechnet und bei allen übereinstimmend gefunden, dass sie sämtlich in den Zykeln $\langle 1, 4, 2 \rangle$ führen. Grundsätzlich hatte er drei Möglichkeiten in Betracht zu ziehen:

1. Jede Folge C_n, $n = 1, 2, 3, ...$, führt in den Zykel $\langle 1, 4, 2 \rangle$;
2. Es gibt Folgen C_n, die in von $\langle 1, 4, 2 \rangle$ verschiedene Zykel führen;
3. Es gibt zykelfreie Folgen.

Auf der Basis seiner Berechnungen gelangte er jedoch zu der Überzeugung, dass er die beiden letzten Fälle ausschließen sollte und nur der erste Fall eintreten könne – das aber zu beweisen vermochte er nicht. Und so stellte er sein $(3n+1)$-Vermutung auf:

(6) Jede Iteriertenfolge C_n, $n = 1, 2, 3, ...$, führt in den Zykel $\langle 1, 4, 2 \rangle$.

Viele Mathematiker nach Collatz scheiterten ebenfalls bei dem Versuch, dies zu beweisen. Sie fanden allerdings viele Hinweise dafür, dass die $3n + 1$-Vermutung dennoch zutrifft. Hier nur einige davon:

- Mit Hilfe von Computern wurde gezeigt: Jede Folge C_n mit $n < 5,76 \cdot 10^{18}$ führt in den Zykel $\langle 1, 4, 2 \rangle$. (Stand 2009)
- Man hat unendliche Teilmengen M von $\mathbb{N}$ entdeckt mit der Eigenschaft: Für jedes $m \in M$ führt die Collatz-Folge C_m in den Zykel $\langle 1, 4, 2 \rangle$. Ein Beispiel für eine solche Menge M ist $\{2^k | k = 0, 1, 2, ...\}$.
- Falls es Folgen C_n mit einem von $\langle 1, 4, 2 \rangle$ verschiedenen Zykel gibt, dann hat dieser Zykel mindestens die Länge $1,04 \cdot 10^{10}$.

- Es sei v die kleinste Zahl, sodass für das Element $c^v(n)$ einer Folge C_n gilt: $c^v(n) = 1$. Dann heißt $\langle n, c(n), \dots, c^{v-1}(n) \rangle$ der Vorlauf von C_n – auf den dann der mit $c^v(n)$ beginnende Zykel $\langle 1, 4, 2 \rangle$ folgt.
  Beispiel: Die Folge C_5 hat den Vorlauf $\langle 5, 16, 8, 4, 2 \rangle$ der Länge 5

Man konnte nun beweisen (1976):

(7) Fast alle[6] Collatz-Folgen C_n haben einen endlichen Vorlauf.

Ein wichtiger Satz – bedeutet er doch, dass für fast alle Collatz-Folgen die $3n+1$-Vermutung gilt und es nur eine bestimmte Anzahl an Ausnahmen gibt (oder gar keine). Allerdings sind hierdurch die oben für C_n-Folgen genannten möglichen Fälle (2) und (3) nicht ausgeschlossen.

In den nächsten 30 Jahren nach (7) wurden noch viele weitere Eigenschaften der Collatz-Folgen hergeleitet. Aber ein Beweis der $3n + 1$-Vermutung war nicht darunter – und dafür gibt es einen guten Grund:
Stuart A. Kurtz und Jonas Simon zeigten nämlich 2007, dass eine relativ einfache Abänderung der Definition von Collatz-Folgen zu einer unentscheidbaren verallgemeinerten Collatz-Vermutung führt, das heißt zu einer arithmetischen Vermutung, von der man – auch wenn man weiß, dass sie entweder wahr oder falsch ist – weder das Eine noch das Andere im Rahmen der Arithmetik beweisen kann.

Wegen des Satzes von Kurtz und Simon liegt nun die $3n+1$-Vermutung so „nahe“ an der Grenzscheide zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit, dass für sie ein arithmetischer Beweis entweder nur sehr schwer (im entscheidbaren Fall) oder aber gar nicht (im unentscheidbaren Fall) zu führen ist.

Wenn man einmal davon ausgeht, dass das $3n + 1$-Problem durch den Beweis-Versuch von G. Opfer tatsächlich gelöst wäre, dann wüsste man: Die Collatz-Vermutung ist wahr. Aber wie so oft in der Mathematik ist die Lösung eines Problems der Ursprung eines neuen Problems. So auch hier!
Weil G. Opfer in seiner Argumentation Hilfsmittel aus der Funktionentheorie benutzt, stellt sich die Frage: Ist die Collatz-Vermutung auch allein mit den Mitteln der Arithmetik beweisbar und dann (arithmetisch) entscheidbar? Oder ist sie (arithmetisch) unentscheidbar?

Vorschläge zum Selbermachen

Wer sich nun – mit Computer oder Taschenrechner – selbst ein wenig im Collatz-Gebiet tummeln möchte, dem schlagen wir vor, sich eine der nachfolgenden Funktionen und ihre Iteriertenfolgen „anzusehen“:

a) Die Funktion c in (5) mit dem Definitionsbereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

b) Die Funktion $\bar{c}$ mit $\bar{c}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n\,, & n \text{ gerade} \\ 3n - 1\,, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$

6 „fast alle“ bedeutet, dass es nur endlich viele Ausnahmen gibt.

c) Die Funktionen t, $t = 5, 6, 7, \dots$ mit

$$t(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n\,, & n \text{ gerade} \\ tn + 1\,, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Rubrik der Löser und Löserinnen

Endstand nach Heft 106

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrerinnen: Frau Frohs, Frau Farag)**:**

Kl. 7: Farah Ashraf 9, Iman Seif Al-Islam 6;

Kl. 8: Mariam Ahmed 9, Marianne Michel 26, Chantal Ragy 8;

Kl. 9: Farieda Gaber 17;

Kl. 12: Nada Mohamed ElAttar 35.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Kunz)**:**

Kl. 5: Daniela Jungbluth 1, Fabian Küster 2, Florian Lehn 3, Marc Schäfer 4;

Kl. 6: Ariane Essig 4;

Kl. 7: Sandra Keil 5, Sara-Teresa Vesely 9, Niclas Mayer 11, Jann Ole Neitzel 18, Sebastian Maak 55, Katharina Rößler 57;

Kl. 9: Marc de Zoeten 17, Laura Tabea Galkowski 26, Sebastian Ludwig 78, Benedikt Maurer 20, Alexander Rupertus 28, Julia Scherner 2;

Kl. 10: Lara Bergjohann 2, Andreas Pitsch 17;

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum:

Kl. 6: Valentin Jacobsen 3.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 10: Frank Schindler 83.

Beselich: Kl. 11: Moritz Heep 10.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:

Kl. 8: Christopher Patzanovsky 99;

Kl. 9: Cascaya Schade 61.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:

Kl. 5: Iolanthe Köcher 76; **Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium:**

Kl. 10: Marcella Beck 19.

Coburg, Gymnasium Casimirianum: Kl. 10: Markus Voelckel 21.

Dieburg, Alfed-Delp-Schule:

Kl. 12: Hanna Kraffcyk 29, Eva Springer 20, Sonja Steineck 20, Cornelia Stuckert 33.

Eching, Imma-Mack-Realschule: Kl. 10: Bettina Diller 37.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betr. Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 6: Emmanuel Höfer 5;
Kl. 7: Katharina Eibich 7, Annika Ellenberger 8, Verena Rübsam 17, Anne Vogel 40.

Erkner, Carl-Bechstein-Gymnasium:
Kl. 7: Sonja Witte 22;
Kl. 9: Wanda Witte 4.

Erlangen, Gymnasium Fridericianum: Kl. 8: Nadja Motova 38.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider):
Kl. 5: Michelle Bader 2, Jule Koob 10;
Kl. 6: Tillmann Ballweber 88, Christoph Hemmer 16;
Kl. 7: Larissa Kießling 10, Kevin Moun 10, Jana Pacyna 5, Matthias Witt 8, Tobias Witt 7, Marcel Wittmann 146;
Kl. 8: Christian Effen 13, Gregor Hanisch 23, Alexander Schleicher 1;
Kl. 10: Henning Ballweber 84.

Frankfurt, Heinrich-von-Gagern-Gymnasium: Kl. 5: Katharina Koch 15.

Gießen, Landgraf-Ludwigs-Gymnasium:
Kl. 4: Laura Kristin Kettner 2, Felix Köhler 10, Madeleine Schäfer 1;
Kl. 5: Ahmet Adil Cihangeri 12, Lukas Dille 11, Siavash Jannat Khah Doost 4;
Kl. 6: Naomi Buhmann 34, Anna Peitz 11, Lea Terhüme 21.

Günzburg, Dossenberger-Gymnasium:
Kl. 9: Dominik Ruf 40.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 5: Ken Biet 23, Kim Bruder 5, Noah Fuchs 20, Matthias Hannappel 32, Julia Holzhüter 27, Emma Mais 25, Nils Prepens 49, Max Schneider 17, Simon Schneider 26, David Storze 67;
Kl. 6: Sven Glombitza 6, Steffi Langer 19, Lea Stiehl 11, Pauline von Ryssel 2, Justin Wunderlich 75, Emily Zollmann 32;
Kl. 7: Moritz Schäfer 10;
Kl. 8: Lars Prepens 10.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:
Kl. 10: Michael Delhougne 35;
Kl. 12: Philipp Delhougne 37.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 5: Mariam Baher 14;
Kl. 10: Shaima'a Ahmed Doma 58.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Lukas Arda 6, Tamara Bentz 7, Luca Langer 4, Patrick Piosch 7, Zora

Rabeneck 28;
Kl. 6: Leonard Röhl 7, Max Rosenberg 2, Tom Sprenger 13;
Kl. 7: Victor Brendel 29, Philipp Faber 7, Björn Stanischewski 86;
Kl. 8: Maike Stanischewski 70.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 10: Robin Fritsch 83.

Limburg, Tilemannschule:
Kl. 7: Michael von Baeckmann 29;
Kl. 9: David Andrick 4.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Julia Adam 8, Jason Beck 4, Salka Beck 2, Jana Eichhorn 6, Angela Hahn 6, Marc Hoffmann 23, Sebastian Hospice 6, Sophia Keller 2, Lukas Koenen 4, Annika Kunz 10, Fabienne van Lier 5, Tim Morsbach 7, Julia Maria Ortmann 8, Antonia Winterling 1;
Kl. 6: Kira Benzing 2, Lea Böhres 7, Lena Christ 8, Robin Frauenderka 1, Enrico Heppler 2, Ivan Mijokovic 18, Laura Nikolay 6, Helena Pörtner 2, Josephine Quierbach 6, Maximilian Schneider 1, Annalena Silz 1, Melanie Weibrich 23;
Kl. 7: Hermine Granger 12;
Kl. 8: Jakub Dreijkarz 12, Valentina Preuhs 5, Theresa Schöche 3, Nina Troppens 8;
Kl. 9: Alina Heihoff 2, Gesa Jonat 2;
Kl. 10: Michelle Benzing 2;
Kl. 11: Giang Phi 51, Malik Wagner 3.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 11: Niklas Bockius 81.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 7: Benjamin Raible 13.

Mannheim, Ludwig-Frank-Gymnasium: Kl. 10: Illja Fodorov 31.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Wittekindt)**:**
Kl. 7: Lena Bagnar 6, Noah Hayek 39, Hana Kadrija 3, Kim Klüber 3, Jasmin Lichtenberger 7, Leo Lutz 57, Julia Niederschmidt 5, Vithursan Thanabalasingam 7, Jan Ulex 36;
Kl. 8: Léonard Wagner 16;
Kl. 11: Tim Lutz 46.

Markt Indersdorf, Gymnasium: Kl. 11: Katharina Münster 30.

München, Max-Planck-Gymnasium:
Kl. 6: Josef Sandor 6;
Kl. 8: Greta Sandor 35.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 4: Simon Stenzel 1; **Kl. 6:** Jasmin Hallyburton 13;

Niddatal-Assenheim, Geschwister-Scholl-Schule:
Kl. 3: Leonie Rößler 68.

Nieder-Olm, Gymnasium: Kl. 12: Heike Karin Herr 35.

Oberursel, Grundschule Mitte: Kl. 4: Max Göbel 4.

Oberursel, Gymnasium (betr. Lehrer: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Hannah Beckenbauer 7, Riccardo Brode 6, Jill Frey 6, Adrian Fritsch 3, Marie Langer 15, Mia-Marie Leun 5, Zoe Müller 5, Simon Petri 2, Niklas Witt 8;
Kl. 6: Alisia Desor 5, Jonathan Drewes 10, Tim Frauenstein 4, Arne Friedrich 5, Nicole Hardock 3, Felix Häßler 5, Benedikt Kiefer 5, Anna Ledro 6, Jakob Schorr 3, Christian Schröder 13, Mona Weigel 7;
Kl. 7: Kendra Bender 5, Tobias Bienert 7, Lorena Bürke 10, Hannah Döll 10, Nina Friedrich 1, Jonathan Gutsche 10, Matthias Kerscher 5, Leon Marzeion 5, Katja Offen 4, Svenja Thier 9, Janna Vahlhaus 8, Tim-Leon Weist-Ruff 7, Yeong-Chul Yun 45;
Kl. 8: Lutz Bischoff 21, Heiko Kötzsche 99.

Oppenheim, St.-Katharinen-Gymnasium:
Kl. 5: Thomas Blankenburg 22;
Kl. 8: Daniel Blankenburg 41.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (betr. Lehrer Klaus Ronellenfitsch)**:**
Kl. 6: Patrick Günther 7, Annika Hock 4.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 9: Luis Ressel 34.

Templin, Egelpfuhlschule: Kl. 5: Ronja Gantzke 30.

Wiesbaden, Leibnitzschule: Kl. 6: Elisa Dernier 41. **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium** (betr. Lehrer: Herr Kuntz)**:**
Kl. 5: Julian Asel 9, Luisa Bruch 6, Marcel Dick 4, Laura Dinges 6, Luisa Kirch 28, Jannik Kropf 5, Ignaz Kunz 4, Sabrina Liebetrau 36, Leonie Scharff 5, Michelle-Romy Scheuffele 5, Maximilian Schreiber 3, Johannes Vatter 7, Lena Zuspann 11;
Kl. 6: Pascal Grabowsky 12, Denise Lembrich 17.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium:
Kl. 6: Noah Schleidweiler 26, Luka Schermann 37, Philipp Schmitz 69.

Zwingenberg, Melibokusschule: Kl. 4: Katharina Volk 55.

Die MONOID-Preisträger 2011

Das Goldene M: Robin Fritsch (Gymnasium, Lehrte).

Sonderpreis: Marcel Wittmann (Karolinen-Gymnasium, Frankenthal).

1. Preise: Heiko Kötzsche, Christopher Patzanovsky, Tillmann Ballweber, Björn Stanischewski, Henning Ballweber, Robin Fritsch, Frank Schindler, Niklas Bockius, Sebastian Ludwig, Iolanthe Köcher, Justin Wunderlich.

2. Preise: Maike Stanischewski, Philipp Schmitz, Leonie Rößler, David Storzer, Cascaya Schade, Shaima'a Ahmed Doma, Leo Lutz, Katharina Rößler, Katharina Volk, Sebastian Maak, Giang Phi, Philipp Delhougne, Dominik Ruf.

3. Preise: Nils Prepens, Tim Lutz, Yeong-Chul Yun, Elisa Dernier, Daniel Blankenburg, Anne Vogel, Noah Hayek, Nadja Motova, Lukas Schermann, Bettina Diller, Sabrina Liebetrau, Jan Ulex, Greta Sandor, Heike Karin Herr, Nada Mohamed ElAttar.

Monoid-Jahresabonnenments 2012: Naomi Buhmann, Luis Ressel, Cornelia Stuckert, Matthias Hannappel, Emily Zollmann, Illja Fodorov, Ronja Gantzke, Katharina Münster, Victor Brendel, Michael von Baeckmann, Hanna Kraffcyk, Luisa Kirch, Zora Rabeneck, Alexander Rupertus, Julia Holzhüter, Noah Schleidweiler, Marianne Michel, Laura Tabea Galkowski, Emma Mais, Simeon Schneider, Michael Delhougne.

Forscherpreise: Niklas Bockius (Gymnasium Gonsenheim, Mainz) und Leonie Rößler (Geschwister-Scholl-Schule, Niddatal-Assenheim).

Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2010/2011 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die ersten, zweiten und dritten Preise, sowie der Preis für den Träger des Goldenen M wurden vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet, die Forscherpreise von Herrn Dr. Genannt, der Sonderpreis von Texas Instruments.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf mit freundlicher Unterstützung von Marcel Gruner
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr
Versand: Katherine Pillau

Jahrgang 31 | Heft 108 | Dezember 2011

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid