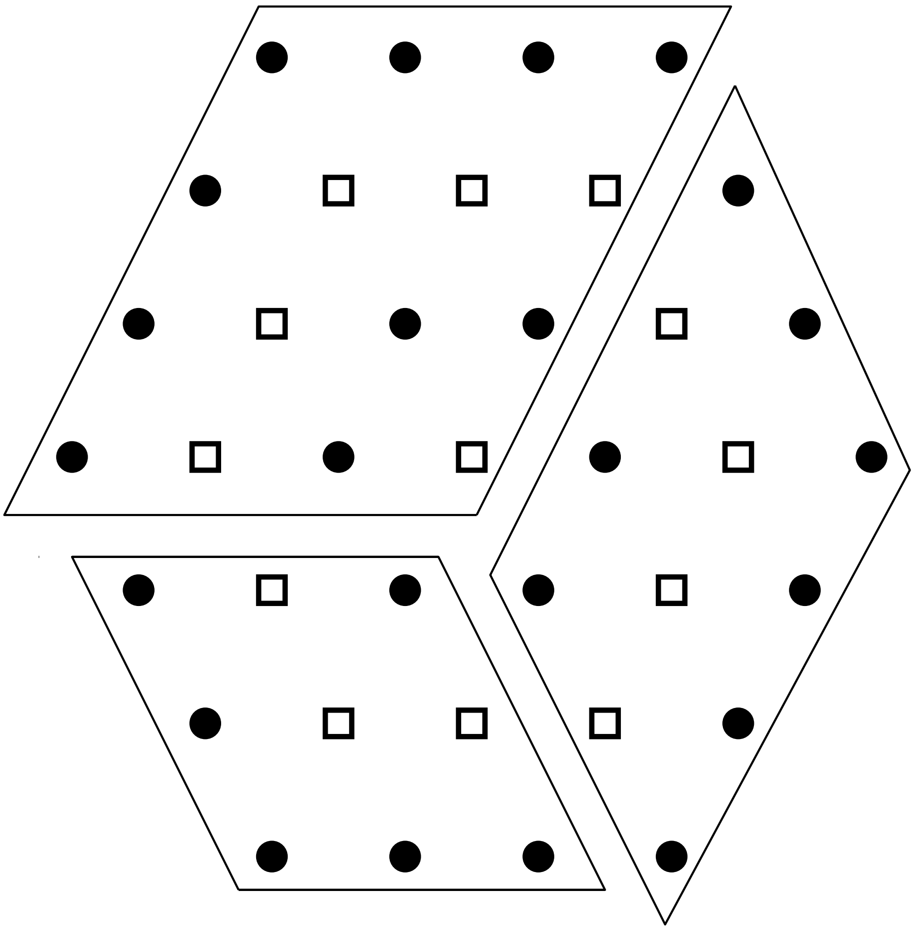
Jahrgang 32 Heft 109 März 2012

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.05.2012.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

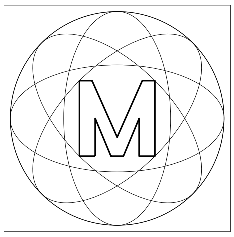
Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Kunz, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Gutzler, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Elze, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Malerei – ein leichtes (?) mathematisches Denksporträtsel

von Tom Ballik

Aufgabe

Ein Malermeister und sein Geselle wollen einen Raum ausmalen. Wenn der Meister die Arbeit alleine erledigen würde, bräuchte er 2 Stunden, der Geselle bräuchte alleine 3 Stunden. Wie lange brauchen sie gemeinsam?

So weit, so gut. Klingt nicht besonders schwierig. Aber stellt diese Aufgabe mal in Eurem Bekannten- und/oder Verwandtenkreis! Ihr werdet sehen, dass Ihr Antworten wie 5 Stunden, $2\frac{1}{2}$ Stunden oder oftmals auch $1\frac{1}{4}$ Stunden (noch am besten) hören werdet, aber selten gleich die richtige Antwort.

Ich möchte Euch gerne einige verschiedene Lösungsstrategien für dieses schöne Beispiel vorstellen.

Lösung 1 – kgV

Da man auf den ersten Blick nicht die benötigte Zeit der beiden für einen Raum ausrechnen kann, liegt es nahe, die Zeit für mehrere Räume auszurechnen. Bleibt man in den natürlichen Zahlen, so kann man sofort erkennen, dass die beiden in 6 Stunden eine ganzzahlige Anzahl Räume schaffen, denn $\text{kgV}(2, 3) = 6$.
In 6 Stunden schaffen sie gemeinsam fünf Räume, der Meister streicht davon drei aus, der Geselle zwei. Nun ergibt sich eine einfache Schlussrechnung:

$$\begin{array}{ll} 5 \text{ Räume} & 6 \text{ Stunden} \\ 1 \text{ Raum} & ? \text{ Stunden} \end{array}$$

Die Lösung ist $\frac{6}{5}$ Stunden $=$ 1:12 Stunden.

Lösung 2 – Anteil

Man braucht eigentlich nur irgendein gemeinsames Teilergebnis, das dann auf die Lösung führt. Für den halben Raum braucht der Meister eine Stunde. Der Geselle schafft in dieser Zeit ein Drittel des Raumes. Also schaffen sie gemeinsam in einer Stunde $\frac{5}{6}$ des Raumes. Den Rest kann man leicht mit einer Schlussrechnung schaffen:

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{6} \text{ Raum} & 1 \text{ Stunde} \\ \frac{6}{6} \text{ Raum} & ? \text{ Stunden} \end{array}$$

Die Lösung ist wiederum $\frac{6}{5}$ Stunden, also 1:12 Stunden.

Lösung 3 – Prozente

Da der Meister für die gleiche Arbeit 2 Stunden braucht, wenn der Geselle 3 Stunden benötigt, ist der Meister also um 50% schneller als der Geselle. Er wird also von dem Raum auch 50% mehr ausmalen als der Geselle. Schauen wir mal, wie viel das ist (x bezeichne in Prozent, wie viel der Geselle ausmalt):

$$\begin{aligned} x + 1{,}5x &= 100 \\ 2{,}5x &= 100 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Der Geselle malt also 40% des Raumes aus, der Meister 60%. Nun kann man mit einer der beiden Personen eine Schlussrechnung machen (hier am Beispiel des Meisters):

100% Raum	2 Stunden
60% Raum	? Stunden

$2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$, was wiederum 1:12 Stunden entspricht.
Alternativ kann man sich auch ein bisschen Arbeit sparen, wenn man nicht auf 100% zurück rechnet:

Geselle	100%
Meister	150%, da er um 50% mehr Wand streicht
„Gesamtleistung“	250%

Die gemeinsame Zeit ergibt sich nun als Produkt von der Zeit, die der Geselle allein für den Raum brauchen würde, und dem jetzigen Arbeitsaufwand: $3 \cdot \frac{100}{250} = \frac{6}{5}$ Stunden ergibt erneut 1:12 Stunden.

Lösung 4 – Gleichung

Aufgrund der Formel $s = t \cdot v$ (Weg = Zeit · Geschwindigkeit) ergibt sich folgende Gleichung:

$x \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{3} = 1$, wobei x die gesuchte Zeit ist.

Die Geschwindigkeit des Meisters beträgt $\frac{1}{2}$ $(\frac{\text{Raum}}{\text{Stunde}})$, die des Gesellen $\frac{1}{3}$ $(\frac{\text{Raum}}{\text{Stunde}})$. Gemeinsam ergeben die beiden „Wege“ (hier natürlich Wandflächen) dann 1, das heißt einen Raum.

$$\begin{aligned} x \cdot \tfrac{1}{2} + x \cdot \tfrac{1}{3} &= 1 \\ 3x + 2x &= 6 \\ 5x &= 6 \\ x &= \tfrac{6}{5} \end{aligned}$$

Dies ergibt wiederum 1:12 Stunden.

Lösung 5 – unendliche geometrische Reihe

Wir wissen ja, wie schnell beide malen. Wenn man sich überlegt, wie lang der schnellere von den beiden für eine Hälfte des Raumes braucht, kann man ausrechnen, wie viel der andere in der gleichen Zeit schafft und wie viel noch übrig bleibt. Das macht man einige Male hintereinander und so kann man sich sehr rasch an die Lösung heranpirschen.

Für den halben Raum braucht der Meister eine Stunde, das ist leicht. Der Geselle schafft inzwischen ein Drittel des Raumes, bleibt noch ein Sechstel übrig. Für die Hälfte dieses Sechstels, also ein Zwölftel, braucht der Meister $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ Stunden, also 10 Minuten. In 10 Minuten schafft der Geselle $\frac{1}{6} : 3 = \frac{1}{18}$ des Raumes. Gemeinsam schaffen sie also in 10 Minuten $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$ des Raumes. Bleibt noch übrig: $\frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{1}{36}$. So macht man immer weiter.

In einer Tabelle zusammengefasst sieht das so aus:

Meister	Geselle	Summe	in Prozent	übrig	Zeit	Gesamtzeit
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	83,33%	$\frac{1}{6}$	1 Stunde	1:00 Std.
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{35}{36}$	97,22%	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$ Stunde	1:10 Std.
$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{215}{216}$	99,54%	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{36}$ Stunde	1:10:40 Std.
$\frac{1}{432}$	$\frac{1}{648}$	$\frac{1295}{1296}$	99,92%	$\frac{1}{1296}$	$\frac{1}{216}$ Stunde	1:11:56,67 Std.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Man sieht, dass es nicht mehr lange dauern kann, wenn die beiden in 1:11:56,67 Stunde bereits 99,92% des Raumes ausgemalt haben, man vermutet das richtige Resultat 1:12 Stunden. Selbstverständlich kann man es auch ausrechnen: Die zu addierenden Zeiten 1, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{216}$,... sind Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Faktor $q = \frac{1}{6}$ und dem Anfangsglied $b_1 = 1$. Die Formel für die unendliche geometrische Reihe lautet:

$s_\infty = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$, wobei b_1 das Anfangsglied und q der Faktor ist.

Also errechnet sich die Gesamtzeit als $s_\infty = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$, also 1:12 Stunden.

Lösung 6 und 7 – arithmetisches und harmonisches Mittel

Man kann dieses Beispiel viel schneller durchschauen, wenn man sich mit Durchschnittsgeschwindigkeiten auskennt, daher möchte ich nun ein bisschen weiter ausholen. Ein nettes mathematisches „Paradoxon“ ist folgendes:

(1) Ein Jogger läuft auf der Donauinsel eine Laufstrecke hin und zurück. In die eine Richtung schafft er $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$, in die andere wegen des Gegenwindes nur $8\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie hoch ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

Die offenbar „logische“ Antwort $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (der „Durchschnitt“ von 12 und 8) ist falsch! Warum? Nun, rechnen wir es genau aus: Angenommen, die Strecke in eine Richtung beträgt x km. Dann braucht er hin $\frac{x}{12}$ Stunden und zurück $\frac{x}{8}$ Stunden (Zeit $= \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$). Insgesamt ist er also $\frac{x}{12} + \frac{x}{8} = \frac{5}{24}x$ Stunden unterwegs. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt also $2x : \frac{5x}{24} = 2x \cdot \frac{24}{5x} = \frac{48}{5} = 9{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$! Der Grund, warum die tatsächliche Durchschnittsgeschwindigkeit weniger ist als der gefühlte Durchschnitt, ist folgender: Da der Jogger für die Teilstrecke, wo er langsamer unterwegs ist, auch länger braucht, hat die Geschwindigkeit in diesem Zeitraum auch mehr Einfluss auf die Gesamtgeschwindigkeit. Bei fixer Strecke braucht man langsam eben auch länger. Der Durchschnittswert bei solchen zeitabhängigen Größen errechnet sich durch einen besonderen anderen Durchschnittswert, man braucht das sogenannte harmonische Mittel, das sich folgendermaßen berechnet, wie man oben bei der Rechnung gesehen hat:

$$\text{HM} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Das harmonische Mittel wird also bei fixen Strecken und unterschiedlichen Zeiten verwendet. Anders wäre das Beispiel zu rechnen, wenn der Jogger eine fixe Zeit mit der einen Geschwindigkeit und die gleiche Zeit mit einer anderen Geschwindigkeit läuft:

(2) Ein Jogger läuft in seinem Training exakt nach Trainingsplan, immer abwechselnd 10 Minuten mit $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und 10 Minuten mit $8\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie hoch ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?

Nun wäre die Anwendung des harmonischen Mittels falsch, weil ja der Jogger beide Geschwindigkeiten gleich lange läuft (dafür schafft er auch mehr Wegstrecke mit $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$). Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist nun tatsächlich der „normale“ Durchschnittswert $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$, in der Mathematik auch arithmetisches Mittel genannt, errechnet durch

$$\text{AM} = \frac{a+b}{2}.$$

Die Läufer unter den Lesern werden vielleicht wissen, dass man die Geschwindigkeit eines Läufers meistens nicht in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, sondern mit Pace angibt. Der Kilometerpace ist jene Zeit, die ein Jogger für einen Kilometer braucht: Je geringer der Pace, desto schneller. So rennt ein Spitzenmarathonläufer einen 3er-Pace, ein Hobbyläufer einen 5er-Pace. Formulieren wir nun das Joggerbeispiel folgendermaßen:

(3) Ein Jogger läuft auf der Donauinsel eine Laufstrecke hin und zurück. In die eine Richtung schafft er einen 4er-Pace, in die andere wegen des Gegenwindes nur einen 6er-Pace. Wie ist sein Durchschnittspace?

Die offensichtliche Antwort 5er-Pace ist nun... richtig! Warum ist das plötzlich korrekt, gerade hat es doch geheißen, bei Geschwindigkeiten braucht man das harmonische Mittel, wenn die Strecke konstant ist (was hier der Fall ist)? Der Pace ist eben doch nicht einfach eine Geschwindigkeit (wenngleich er de facto so verwendet wird), sprich ein Verhältnis von Weg zu Zeit. Der Pace ist genau genommen nur eine Zeit, eben die, die man für genau 1km braucht. Da die Strecke hin und die Strecke zurück gleich lang ist, stehen eben gleich viele 4er-Minutenblöcke gleich vielen 6er-Minutenblöcken gegenüber, der Durchschnitt ist klarerweise das arithmetische Mittel, der Jogger rennt im Schnitt einen 5er-Pace.

Nun müssen wir den letzten möglichen Fall natürlich auch noch betrachten, der aufmerksame Leser wird schon ahnen, was nun kommt:

(4) Ein Jogger läuft in seinem Training exakt nach Trainingsplan, immer abwechselnd 10 Minuten mit einem 4er-Pace und 10 Minuten mit einem 6er-Pace. Wie ist sein Durchschnittspace?

Nun läuft der Jogger ja in den gleichen Zeitintervallen verschiedene Streckenlängen. Also hat ein geringerer (schnellerer) Pace auch mehr Gewicht für den Durchschnittspace, weil in der fixen Zeit bei höhrerer Geschwindigkeit auch eine größere Strecke zurückgelegt wird. Die Lösung liegt nun wieder im harmonischen Mittel:

$\mathrm{HM} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4+6} = 4{,}8$er-Durchschnittspace.

Man kann auch übrigens sofort Pace in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ umrechnen und sieht den Unterschied bei den Durchschnittswerten:

$$\begin{aligned}
&\text{4er-Pace} = 15\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, \text{6er-Pace} = 10\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \\
&\text{4,8er-Pace} = 12{,}5\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \quad (\mathrm{HM}/\mathrm{AM}) \\
&\text{5er-Pace} = 12\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \quad (\mathrm{AM}/\mathrm{HM})
\end{aligned}$$

Mit diesem Wissen sollte man also auch das Malereibeispiel schnell und effektiv lösen können.

Lösung 6 – harmonisches Mittel

Die Information, dass der Meister 2 Stunden und der Geselle 3 Stunden allein für den Raum brauchen würde, entspricht sozusagen dem Pace. Der Meister malt mit einem 2er-Pace, der Geselle mit einem 3er-Pace. Da die beiden gleich lange arbeiten (bis sie fertig sind), berechnet sich der Durchschnittspace also mit dem harmonischen Mittel (vergleiche Joggerbeispiel (4)):

$$\mathrm{HM} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} = \frac{12}{5}.$$

Dies ist nun allerdings der Durchschnittspace (also wenn quasi nur einer arbeitet, die Hälfte der Zeit mit dem einen Pace, die Hälfte der Zeit mit dem anderen Pace). Da sie aber gleichzeitig arbeiten und zu zweit sind, muss man klarerweise noch halbieren:

$\frac{12}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$ Stunden ergibt 1:12 Stunden.

Lösung 7 – arithmetisches Mittel

Rechnen wir nicht mit Pace, sondern mit Geschwindigkeit, sieht die Sache so aus: Die Geschwindigkeit des Meisters beträgt $\frac{1}{2}$ Raum pro Stunde, die des Gesellen $\frac{1}{3}$ Raum pro Stunde. Da die beiden gleich lange arbeiten (bis sie fertig sind), berechnet sich die Durchschnittsgeschwindigkeit also mit dem arithmetischen Mittel (vergleiche Joggerbeispiel (2)):

$$\text{AM} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{12}.$$

Dies ist nun allerdings die Durchschnittsgeschwindigkeit (also wenn quasi nur einer arbeitet, die Hälfte der Zeit mit der einen Geschwindigkeit, die Hälfte der Zeit mit der anderen Geschwindigkeit). Da sie aber gleichzeitig arbeiten und zu zweit sind, muss man klarerweise noch verdoppeln:

$$\frac{5}{12} : 2 = \frac{5}{6} \text{ Raum pro Stunde.}$$

Nun errechnet sich die benötigte Zeit für einen Raum einfach mit einer Schlussrechnung (wie schon bei Lösung 2):

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{6} \text{ Raum} & 1 \text{ Stunde} \\[1em] \frac{6}{6} \text{ Raum} & ? \text{ Stunden} \end{array}$$

Die Lösung ist $\frac{6}{5}$ Stunden, also 1:12 Stunden.

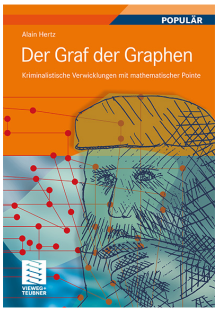
Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Alain Hertz: „Der Graf der Graphen“

Der Protagonist des Buches, Maurice Manori, Kriminalinspektor aus Quebec, befindet sich zum Erfahrungsaustausch bei einer internationalen Tagung von Kriminaltechnikern in Lausanne. Eingebettet in diese ansprechende Rahmenhandlung schafft Manori es, in den neun Kapiteln einen Fehler bei der Organisation einer Tagung zu entdecken, „die Schuldigen in einer Diebstahlsache und bei einem Raub zu benennen, einen Betrüger in einer Erbangelegenheit zu entlarven, eine Maus wieder einzufangen, die aus ihrem Käfig geflüchtet war, einer Angestellten ihr Lächeln wiederzugeben und einer Familie anderthalb Stunden Schlaf zu schenken. Tatsächlich hat er auch einem Sudoku-Lehrling geholfen, einige Kästchen auszufüllen, und sogar seinem Freund Courtel den für Marseiller typischen Hang zur Übertreibung“ nachzuweisen, als dieser ihm seine Unterkunft beschrieb. Jeder der behandelten Kriminalfälle wird von Manori – der von seinen Kollegen den Beinamen „Graf der Graphen“ erhielt – in ein graphentheoretisches Problem übersetzt und dann als solches gelöst. Mit Graphen sind dabei nicht die aus der Schule bekannten Funktionsgraphen gemeint, sondern die einfache Verbindung von verschiedenen Punkten (Knoten genannt) durch Striche (Kanten genannt). Die durch Inspektor Manori gelösten Rätsel wurden vom Autor Alain Hertz, Professor an der Ècole Polytechnique in Montreal, ursprünglich in seiner Vorlesung über Graphentheorie zur Veranschaulichung verwendet, später von ihm ausgearbeitet und mit der gemeinsamen Rahmenhandlung miteinander verbunden. Bei der populärwissenschaftlichen Ausgestaltung wurde dabei bewusst auf eine zu formalistische Verwendung der mathematischen Fachsprache verzichtet, um das Buch einer möglichst breiten Leserschaft zugänglich zu machen.

Fazit: Der Rezensent fühlte sich beim Lesen des Buches ein wenig an die Fernsehserie NUMB3RS erinnert, in der ein Mathematikprofessor dem FBI mit mathematischen Methoden hilft, Kriminalfälle zu lösen. Im Vergleich dazu bleibt als einziger Schönheitsfehler des Buches „Der Graf der Graphen", dass die Graphentheorie als mathematisches Allheilmittel zur Lösung sämtlicher Probleme dargestellt wird. Davon abgesehen handelt es sich um ein schönes Buch, mit dessen Hilfe auch mathematische Laien einen schönen ersten Einblick in diese mathematische Teildisziplin erhalten.

Gesamtbeurteilung: gut ☺☺



Angaben zum Buch:
Hertz, Alain: Der Graf der Graphen. Kriminalistische Verwicklungen mit mathematischer Pointe, Vieweg+Teubner, 2011, ISBN 978-3-8348-1814-0, broschiert, 192 Seiten, 29,95 €.

Art des Buches:	Kriminalroman
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Die Ecke für den Computer-Fan

Immer symmetrisch?

Die Buchstaben a, b, c, d bezeichnen im Folgenden die Ziffern natürlicher Zahlen. Der Quotient $\frac{ab}{ba}$ mit $1 \le a \le 9$, $1 \le b \le 9$ ist genau dann eine ganze Zahl, wenn $a = b$ ist; er hat dann den Wert 1. Analog ist der Quotient $\frac{abc}{cba}$ mit $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $1 \le c \le 9$ genau dann eine ganze Zahl, nämlich wieder gleich 1, wenn $a = c$ ist. Überprüfe diese beiden Aussagen mit Deinem Computer und untersuche, ob für vierziffrige Zahlen $abcd$ mit $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 \le c \le 9$, $1 \le d \le 9$ Ähnliches gilt, nämlich dass der Quotient $\frac{abcd}{dcba}$ genau dann eine ganze Zahl ist, wenn $abcd$ symmetrisch ist, also $a = d$ und $b = c$ gilt. (E.K.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2012 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 106

Immer lauter gleiche Ziffern?

Eine beliebige natürliche Zahl $A > 10$, die kein Vielfaches von 10 sein soll, wird mit einer n-ziffrigen Zahl B aus lauter gleichen Ziffern multipliziert, $n \geq 2$. Das Produkt AB sei eine $(k+n)$-ziffrige Zahl, wobei $k \geq 1$ ist. Es sei nun

$$AB = x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_n, \text{ mit Ziffern } x_i \text{ und } y_j,$$

die Dezimaldarstellung von AB.

In vielen Beispielen findet man die folgende Aussage bestätigt:

(1) Die Summe der Zahlen $x_1 x_2 \dots x_k$ und $y_1 y_2 \dots y_n$ ist stets eine Zahl aus lauter gleichen Ziffern.

Beispiele:

Für $576 \cdot 77777 = 44799552$ ist $447 + 99552 = 99999$;
für $2479 \cdot 444444 = 1101776676$ ist $1101 + 776676 = 777777$.

Kannst Du die Aussage (1) beweisen oder gibt es vielleicht doch Gegenbeispiele, die die Aussage (1) widerlegen? (H.F.)

Ergebnisse

Auch wenn sich leicht weitere Beispiele als Bestätigung für (1) finden lassen, so stößt man doch ebenso rasch auf Gegenbeispiele. Philipp Delhougne vono der Otto-Hahn-Schule in Hanau hat eine ganze Tabelle von Beispielen und Gegenbeispielen aufgestellt; hier zwei seiner Gegenbeispiele:

$A = 83$, $B = 77$, $A \cdot B = 63\underline{91}$, $63 + 91 = 154$;
$A = 965497$, $B = 6666$, $A \cdot B = 643600\underline{3002}$, $643600 + 3002 = 646602$.

Niklas Bockius vom Otto-Schott-Gymnasium in Mainz beobachtete, dass eine Iteration der Summenbildung bei den Gegenbeispielen letztlich doch zu Zahlen mit n gleichen Ziffern führt. Bei obigen Gegenbeispielen sieht dies so aus:

$1 + 54 = 55$; $64 + 6602 = 6666$.

Dies hat auch Robin Fritsch vom Gymnasium Lehrte beobachtet. Dass dies so sein muss, beweist er folgendermaßen:

Es ist $B = \underbrace{z \dots z}_{n \text{ Ziffern}} = z \cdot \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ Einsen}}$, das heißt B ist durch $\underbrace{1 \dots 1}_{n}$ teilbar. Damit ist auch das Produkt $A \cdot B$ durch diese Zahl teilbar und es folgt:

$$\begin{aligned}\underbrace{1 \dots 1}_{n} | AB = x_1x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_n &= x_1x_2 \dots x_k \cdot 10^n + y_1y_2 \dots y_n \\ &= x_1x_2 \dots x_k \cdot (9 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_{n} + 1) + y_1y_2 \dots y_n \\ &= x_1x_2 \dots x_k \cdot 9 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_{n} + x_1x_2 \dots x_k + y_1y_2 \dots y_n.\end{aligned}$$

Damit teilt $\underbrace{1 \dots 1}_{n}$ also auch die neu entstandene Zahl $x_1 \dots x_k + y_1 \dots y_n$. Diese teilen wir erneut in eine n-stellige Zahl $y'_1 \dots y'_n$, bestehend aus den letzten n Ziffern, und eine k_1-stellige Zahl $x'_1 \dots x'_{k_1}$ mit $k_1 < k$ auf. Mittels des gleichen Arguments folgt, dass auch deren Summe $x'_1 \dots x'_k + y'_1 \dots y'_n$ von $\underbrace{1 \dots 1}_{n}$ geteilt wird. Diesen Prozess wiederholen wir solange, bis wir eine n-stellige Zahl erhalten. Diese ist dann auch durch $\underbrace{1 \dots 1}_{n}$ teilbar. Die einzigen durch $\underbrace{1 \dots 1}_{n}$ teilbaren Zahlen $< 10^n$ sind aber $\underbrace{1 \dots 1}_{n}$, $\underbrace{2 \dots 2}_{n}$, ... und $\underbrace{9 \dots 9}_{n}$. Also ist unser Endergebnis eine dieser Zahlen und besteht damit aus lauter gleichen Ziffern.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 107

Darstellung als Summen von Quadratzahlen

Die Zahl 169 besitzt hinsichtlich ihrer Darstellung als Summen von Quadratzahlen wie etwa $169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 = \dots$ eine bemerkenswerte Eigenschaft: Es gibt eine natürliche Zahl m, so dass 169 darstellbar ist als Summe von n Quadratzahlen > 0 für alle n mit $1 \leq n \leq m$, nicht jedoch für alle n mit $m < n < 169$. Versuche, dieses m herauszufinden!

(nach H.F.)

Ergebnisse

So wie die Aufgabe gestellt wurde, gibt es kein solches m, wie Niklas Bockius vom Otto-Schott-Gymnasium Mainz mit einem Python-Programm heraus gefunden hat. Dieses Programm überprüft, ob sich eine Zahl z als Summe einer bestimmten Anzahl a (statt n) an Quadratzahlen darstellen lässt. Dabei müssen zu Beginn die Zahlen z und a eingegeben werden. Ein weiteres Python-Programm erwartet als Eingabe ebenfalls z, danach jedoch nicht eine, sondern zwei weitere Zahlen a und b mit $a \leq b$, und überprüft anschließend für alle Zahlen zwischen

a und b (diese beiden eingeschlossen), ob man z als Summe von so vielen Quadratzahlen bilden kann. Zuletzt wird noch eine Zusammenfassung ausgegeben, für welche der untersuchten Zahlen man die erste Zahl als Summe aus entsprechend vielen Quadratzahlen darstellen kann und für welche nicht.

169 ist die Summe von 169 Einsen, also von 169-mal dem Quadrat 1^2. Da man 169 als $2^2 + 165 \cdot 1^2$, also mit 166 Quadraten und ersichtlich nicht mit 168 oder 167 Quadraten darstellen kann, müsste $m = 166$ sein. 169 lässt sich jedoch nicht als Summe von 165 Quadratzahlen darstellen. Daher vermutete Niklas Bockius, dass bei der Aufgabenstellung ein Fehler vorliegen könnte, womit er auch Recht hatte. Die Behauptung sollte eigentlich lauten:

> Es gibt eine natürliche Zahl m, so dass 169 darstellbar ist als Summe von n Quadratzahlen > 0 für alle n mit $1 \leq n \leq m$, *jedoch nicht* für alle n mit $m < n < 169$. (Unsere Sprache ist eben nicht kommutativ! Wir bitten um Entschuldigung!)

Tatsächlich erhielt Niklas Bockius als Ergebnis, dass 169 darstellbar ist als Summe von n Quadratzahlen für alle $n \leq 169$ außer 156, 159, 162, 164, 165, 167 und 168. Die eigentlich gesuchte Zahl ist also $m = 155$.

Niklas Bockius hat auch die abgewandelte Fragestellung untersucht, dass alle quadratischen Summanden > 1 sein sollen. Sein Ergebnis: 169 lässt sich für alle n als Summe von n Quadratzahlen > 1 darstellen, wenn n eine der folgenden Zahlen ist: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, also alle n bis 38 sowie 41. (E.K.)

Mathematische Entdeckungen

Teilerreiche Zahlen

Man nennt eine natürliche Zahl $n > 1$ teilerreich, wenn die Anzahl ihrer Teiler größer ist als die Anzahl der Teiler einer jeden natürlichen Zahl m, $m = 1, 2, 3, \dots, n-1$.
Beispiel:

Zahl n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
Anzahl der Teiler von n	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	…

Also sind 2, 4, 6 und 12 teilerreich.
Erweitere die Liste und untersuche beispielsweise: Gibt es Sorten von Zahlen, die nicht als teilerreich in Frage kommen beziehungsweise die Kandidaten für teilerreiche Zahlen sind?

Hinweis: Die Darstellung von n als Primzahl-Produkt sei $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r}$ mit Primzahlen p_1, p_2, ..., p_r. Dann hat n genau $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_r + 1)$ Teiler. (H.F.)

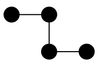
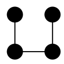
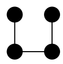
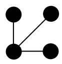
Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2012 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 107

In Heft 107 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Schlichte geradlinige Graphen

Wenn Du den Artikel „Graphen“ (in Monoid 107) durchliest, begegnen Dir dort schlichte Graphen, deren e Ecken und k Kanten dem Axiom 1 und dem Axiom 2 gehorchen. Diese Graphen seien geradlinig genannt, wenn ihre Kanten geradlinig sind. In Monoid 107 ist für jede Eckenzahl e mit $e = 1$, 2, 3 und 4 eine (horizontale) Liste von schlichten geradlinigen Graphen (kurz: sg-Graphen) dargestellt. Jeder dieser Graphen veranschaulicht eines der möglichen Verbindungsmuster, die sg-Graphen mit e Ecken und k Kanten, $k > 0$, haben können.

Beispiel: Die sg-Graphen  und  haben übereinstimmende,  und  haben verschiedene Verbindungsmuster.

Finde nun für sg-Graphen mit $e = 5$ Ecken und $k \geq 0$ Kanten sämtliche möglichen Verbindungsmuster und veranschauliche jedes von ihnen durch einen sg-Graphen.
Hinweis: Damit Du kein mögliches Verbindungsmuster übersiehst, solltest Du überlegen, wie man bei der Suche nach ihnen systematisch vorgehen kann.

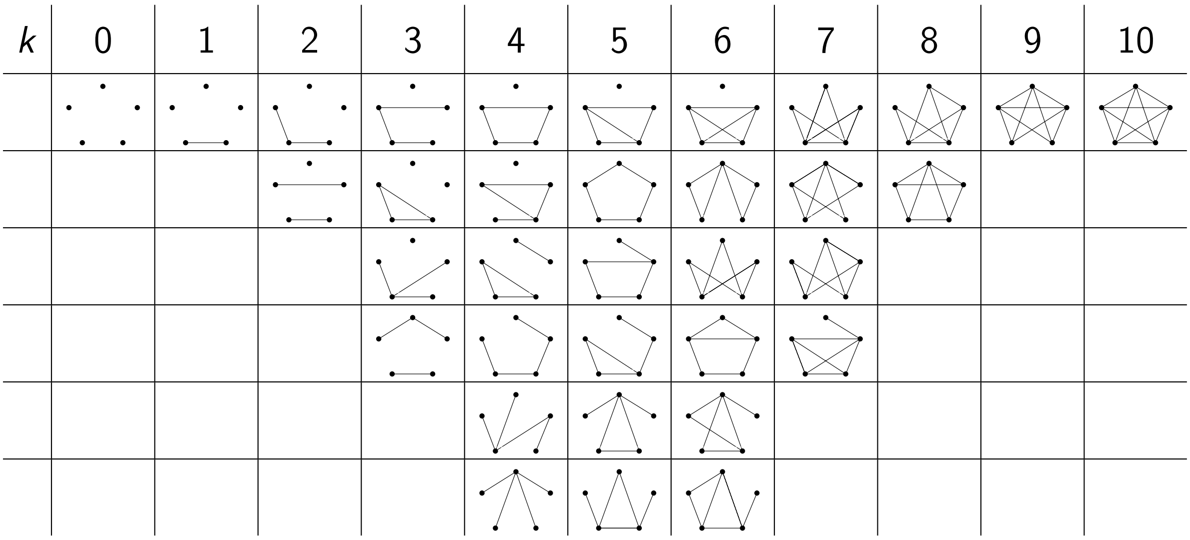
Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Leonie Rößler (Geschwister-Scholl-Schule Niddatal, Klasse 3) und Marcel Wittmann (Karolinen-Gymnasium Frankenthal, Klasse 8).

Leonie berechnet alle möglichen Kombinationen von Eckengraden der fünf Ecken bei $0, 1, 2, \ldots, 10$ Kanten. 27 hiervon kann sie durch sg-Graphen realisieren.

Marcel beobachtet, dass wenn 0 als Eckengrad vorkommt, man gerade die elf Graphen $S(4, k)$ mit einer zusätzlichen Ecke erhält, die mit keiner anderen Ecke verbunden ist. Da ein Punkt mit höchstens vier anderen Punkten verbunden sein kann, können wir somit annehmen, dass alle Eckengrade $g_1, \ldots, g_5$ zwischen 1 und 4 liegen.
Da die Summe über die Eckengrade $g_1, \ldots, g_5$ eine gerade Zahl ergibt, sind unter ihnen keine, zwei oder vier ungerade Zahlen. Somit hat Marcel das Problem auf 28 Fälle reduziert, die er einzeln bespricht, einige als geometrisch nicht realisierbar

ausschließen kann sowie einige andere als auf verschiedene Weise geometrisch realisierbar erkennt.
Damit erhält er folgende Tabelle aller Verbindungsmuster von sg-Graphen mit fünf Ecken:



Beachte, dass es genügt, die sg-Graphen mit n Ecken für k Kanten zu bestimmen, wobei k kleiner oder gleich der Hälfte der Kantenanzahl des vollständigen Graphen ist, denn zu jedem sg-Graphen G mit n Ecken und k Kanten erhält man einen sg-Graphen G', in dem zwei Ecken genau dann eine Kante aufspannen, wenn sie es in G nicht tun. Die Vereinigung von G und G' ist also der vollständige Graph und die Summe der Kanten von G und G' ist daher die Kantenanzahl des vollständigen Graphen.

D'Alemberts Irrtum

von Hartwig Fuchs

Jean-Baptiste d'Alembert (1717–1783), Mathematiker und Physiker, war einer der wichtigsten und herausragendsten Autoren der berühmten französischen „Encyclopédie", mit der Mitte des 18. Jahrhunderts der großangelegte Versuch unternommen wurde, das gesamte Wissen jener Zeit darzustellen.
Dieser Herr d'Alembert wurde einmal gefragt – damals steckte die Wahrscheinlichkeitstheorie noch sehr in ihren Kinderschuhen –:

> Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einem Wurf zweier Münzen „mindestens einmal Kopf" erhält?

Seine Antwort: Diese Wahrscheinlichkeit ist $\frac{2}{3}$. Und seine Begründung: Beim Wurf zweier Münzen sind drei Ausgänge möglich: (Kopf, Kopf), (Kopf, Wappen) und (Wappen, Wappen). Jeder dieser Ausgänge ist gleichwahrscheinlich, hat also die

Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Nun hat aber „mindestens einmal Kopf" – verursacht vom Ausgang (Kopf, Kopf) oder (Kopf, Wappen) – eine doppelt so hohe Wahrscheinlichkeit wie das auf (Wappen, Wappen) zurückgehende Ereignis „kein Kopf". Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

Führt man nun aber den Münzwurf mit zwei Münzen sehr häufig durch, dann bemerkt man, dass in Abweichung von d'Alemberts Behauptung das Ereignis „mindestens einmal Kopf" tatsächlich häufiger als in der vorausgesagten $\frac{2}{3}$ der Fälle eintritt. Hat sich also d'Alembert bei seiner Antwort und ihrer Begründung geirrt?

Wir wollen annehmen, bei den beiden Münzen M_1 und M_2 seien sowohl die Darstellungen der Köpfe K_1 und K_2 als auch die der Wappen W_1 und W_2 unterscheidbar – was aber keinerlei Einfluss auf ihr Verhalten beim Münzwurf habe. Wenn wir nun die beiden Münzen M_1 und M_2 werfen, dann wird das Ergebnis eine der folgenden Kombinationen sein:

$$(K_1, K_2), (K_1, W_2), (W_1, K_2), (W_1, W_2).$$

Das Experiment hat also nicht drei – wie von d'Alembert angenommen – sondern vier mögliche Ausgänge. Da jeder dieser Ausgänge die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ hat, muss das Ereignis „mindestens einmal Kopf", weil es von einem der drei Ausgänge (K_1, K_2), (K_1, W_2), (W_1, K_2) verursacht ist, die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ besitzen.

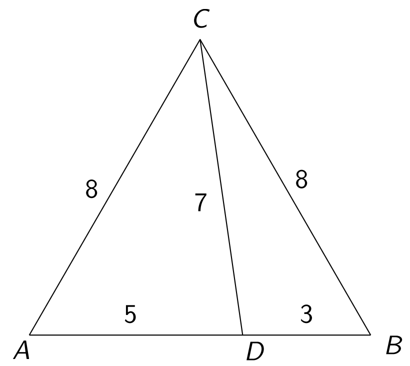
60°-Tripel

von Roland Schröder

Das Tripel $(3, 4, 5)$ heißt Pythagoreisches Tripel, denn es gilt: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Die Frage nach weiteren Pythagoreischen Tripeln wurde erschöpfend beantwortet. Wenden wir uns daher einer anderen Frage zu:

Gibt es Dreiecke, die einen Innenwinkel der Größe 60° *und drei ganzzahlige Seitenlängen besitzen?*

Die Antwort ist: Ja! Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 8 und einen Punkt D, der die Seite AB im Verhältnis 3 zu 5 teilt. Die Dreiecke ABC, ADC, DBC sind dann solche Dreiecke. Der Nachweis der Richtigkeit dieser Aussage gelingt mit dem Kosinussatz:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \cos(60^\circ) \cdot a \cdot b.$$

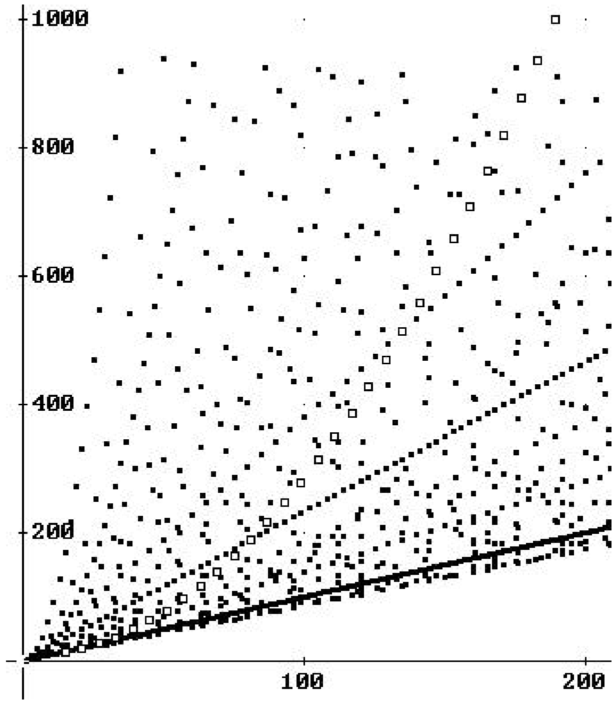
Oder wegen $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$:

(1) $c^2 = a^2 + b^2 - a \cdot b.$

Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, welche die Gleichung (1) erfüllen, sollen 60°-Tripel heißen. Und die Frage lautet jetzt:

Gibt es Konstruktionsprinzipien für $60°$-Tripel?

Im ersten Zugriff lassen wir ein kleines Computerprogramm für uns arbeiten. Aus den Tripeln (x, y, z), die es für uns generiert, zeichnen wir die Paare (x, y) in ein Koordinatensystem:



In dieser Punktmenge erkennt man sofort Anordnungen in Form von Geraden und bei genauem Hinsehen auch in Form von Parabeln. Die Punkte einer solchen Parabel wurden mit □ gekennzeichnet. Die Geraden sind schnell erklärt: Mit jedem $60°$-Tripel (x, y, z) und für eine natürliche Zahl k ist auch (kx, ky, kz) ein $60°$-Tripel. Aber auch die Gesetzmäßigkeit für Punkte auf einer Parabel ist mit elementaren Mitteln zu finden. Die mit □ gekennzeichneten Punkte haben die Form $(6n + 9, (n + 1)(n + 2) + 7)$. Für natürliche Vielfache dieser Koordinaten ergeben sich weitere Parabeln. Die Punkte anderer Parabeln können aber auch andere algebraische Formeln haben. In jedem Fall lässt sich die dritte Koordinate des zu einem Paar gehörigen Tripels mit Hilfe von Gleichung (1) bestimmen. Die Tripel zu den mit □ gekennzeichneten Punkten haben die Form $(6n+9, (n+1)(n+2)+7, n(n+6))$. Weitere Tripel, die auf diese Art gefunden wurden, sind (a, b, c) mit:

a	b	c
$(n+1)\cdot(3n+1)$	$2n+1$	$(n+1)\cdot(3n+1)-n$
$n\cdot(n+2)$	$2n+1$	$n\cdot(n+1)+1$
$3n^2+2n-1$	$4n$	$3n^2+1$
n^2+6n	$6n+9$	$(n+1)\cdot(n+2)+7$
n^2+4n	$4n+4$	n^2+2n+4

Gleichzeitig gibt es auch die Tripel (ka, kb, kc) für natürliche Zahlen k. Ob damit jedoch alle 60°-Tripel gefunden wurden, bleibt offen. Um die Suche nach 60°-Tripeln erschöpfend zu behandeln, entlehnen wir eine Methode, die bereits bei Euklid, Elemente X, §§ 28, 29 Verwendung fand:
Die Ellipse mit der Gleichung

(2) $x^2+y^2-x\cdot y=1$

schneidet die Gerade $y=t\cdot x+t$ in $A(-1;0)$ und $B(\frac{1-t^2}{t^2-t+1};\frac{2t-t^2}{t^2-t-1})$. Wählt man t rational, also $t=\frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m, hat der zweite Schnittpunkt die Form

$$B(\tfrac{m^2-n^2}{m^2-mn+n^2};\tfrac{2mn-n^2}{m^2-mn+n^2}).$$

Für $x=\frac{a}{b}$ und $y=\frac{b}{c}$ wird die oben genannte Ellipsengleichung (2) zu Gleichung (1) und gleichzeitig gilt:

(3) $\frac{a}{c}=\frac{m^2-n^2}{m^2-mn+n^2}$

sowie

(4) $\frac{b}{c}=\frac{2mn-n^2}{m^2-mn+n^2}$.

Die beiden Gleichungen (3) und (4) sind erfüllt für

$$a=m^2-n^2$$
$$b=2mn-n^2$$
$$c=m^2-mn+n^2.$$

Sind m und n natürliche Zahlen mit $m>n$, so sind auch a,b und c natürliche Zahlen, welche die Gleichung (1) erfüllen.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 108

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Eine Summe 2011?

Kannst Du eine natürliche Zahl n finden, sodass gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = 2011$?

(H.F.)

Lösung:

Es gilt $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Also müsste hier gelten: $n(n + 1) = 2 \cdot 2011$, woraus folgt, dass n ein Teiler von $2 \cdot 2011 = 4022$ ist. Da 2 und 2011 Primzahlen sind, bleiben damit für n nur die Möglichkeiten $n = 1$, $n = 2$, $n = 2011$ beziehungsweise $n = 4022$. Damit erhalten wir für $n \cdot (n + 1)$ die Produkte $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $2011 \cdot 2012$ beziehungsweise $4022 \cdot 4023$, welche offensichtlich alle verschieden von 4022 sind, es ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch. Also gibt es keine natürliche Zahl n, sodass $1 + 2 + 3 + ... + n = 2011$ ist.

II. Eine Aufgabe aus dem altem China

Wenn im alten China des 9. Jahrhunderts sich jemand um die Stelle eines Staatsdieners bewarb, musste er eine Prüfung ablegen, in der auch die Lösung von mathematischen Aufgaben verlangt war. Eine der uns überlieferten Prüfungsaufgaben lautete so: Als ein Holzfäller durch den Wald ging, hörte er, wie sich Diebe über die Aufteilung von Stoffballen unterhielten, die sie bei einem kürzlichen Überfall auf eine Handelskarawane erbeutet hatten. Einer aus der Räuberbande sagte: Wenn jeder von uns 6 Ballen erhält, bleiben 5 Ballen übrig. Aber 7 Ballen kann nicht jeder bekommen – dazu fehlen uns 8 Ballen. Der Bewerber für die Beamtenstelle sollte nun berechnen: Wie viele Räuber waren es und wie viele Ballen hatten sie erbeutet? (gefunden: H.F.)

Lösung:

Es seien x die Anzahl der Räuber und y die Anzahl der Stoffballen. Dann gilt:

$$6x + 5 = y \qquad (1)$$

$$7x - 8 = y \qquad (2)$$

Also gilt auch $6x + 5 = 7x - 8$. Wenn man nun auf beiden Seiten $6x$ subtrahiert, erhält man $5 = x - 8$ und durch Addieren von 8 auf beiden Seiten dann $x = 13$. Jetzt kann man in einer der beiden Formel x durch 13 ersetzen und erhält $6 \cdot 13 + 5 = y$ bei der ersten bzw. $7 \cdot 13 - 8 = y$ bei der zweiten Gleichung. Das Ergebnis ist bei beiden Gleichungen $y = 83$, also waren es 13 Räuber und 83 Stoffballen.

III. Trockenobst

Herr Winter möchte von seiner großen Apfelernte einen Teil als Wintervorrat trocknen. Er bereitet 10kg Apfelscheiben vor und überlegt, wie viel Trockenobst er davon bekommen wird.
Wenn frische Äpfel 80% Wasser enthalten und getrocknete Äpfel nur noch 20%, wie viel Trockenobst erhält Herr Winter dann? (C.E.)

Lösung:
10kg frische Äpfel enthalten 8kg Wasser, davon verdunsten x kg:

$$\begin{aligned} 8 - x &= 0{,}2 \cdot (10 - x) \\ 6 &= 0{,}8 \cdot x \\ 7{,}5 &= x \end{aligned}$$

Also verdunsten 7,5kg Wasser und es bleiben 2,5kg Trockenobst.

Oder bezüglich der „Trockenmasse“:

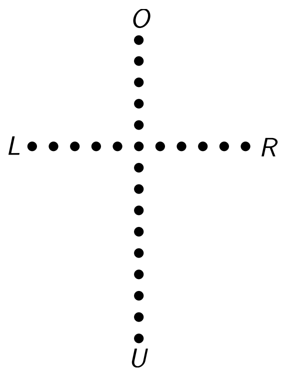
10kg Äpfel enthalten 2kg „Trockenmasse“, diese 2kg entsprechen 80% in y kg Trockenobst:

$$\begin{aligned} 2 &= 0{,}8 \cdot y \\ y &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Also bleiben 2,5kg Trockenobst.

IV. Petras Perlen

Petra hat 25 Perlen, welche sie auf einem Samttuch als Kreuz angeordnet aufbewahrt. Jeden Abend zählt sie von unten nach oben, von unten nach links und von unten nach rechts, jeweils 15 Perlen. Eines Tages spielt ihr Bruder Jonas mit den Perlen. An diesem Abend zählt Petra nur noch 13. Jonas behauptet, es seien noch alle Perlen da. Kann das sein?
(gefunden WJB)



Lösung:
Jonas hat von den beiden untersten Perlen eine bei L und eine bei R angefügt und dann den Querbalken des Kreuzes um eins nach unten verschoben.
Hinweis: In der Skizze im letzten Heft ist uns leider ein kleiner Fehler unterlaufen und der Querbalken war um eine Perle zu weit oben platziert. Wir bitten dies zu entschuldigen.

V. Lauter Primzahlen?

Mathis behauptet, dass die Zahlen $409 + 210 \cdot n$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ allesamt Primzahlen sind. Hat Mathis Recht? (H.F.)

Lösung:

Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8$ gilt Mathis Behauptung.

Für $n = 9$ ist jedoch $409 + 210 \cdot 9 = 2299 = 11 \cdot 209$ keine Primzahl.

Auch ist für $n = 409$ die Summe $409 + 210 \cdot 409 = 211 \cdot 409$ offensichtlich keine Primzahl.

Allerdings gilt nach einem berühmten Primzahlensatz von Peter J. G. Dirichlet (1805–1859):

> Jede arithmetische Zahl $a + b \cdot n$, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ und teilerfremden natürlichen Zahlen a und b, enthält unendlich viele Primzahlen.

Danach enthält auch die Folge $409 + 210 \cdot n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, unendlich viele Primzahlen, weil 409 und 210 teilerfremd sind – aber eben nicht nur Primzahlen, wie die Fälle $n = 9$ und $n = 409$ beweisen.

VI. Ein pfiffiger Wirt

Sechs Schüler, die das Bestehen ihres Abiturs feiern wollen, lassen sich in einer stets überfüllten Kneipe einen Tisch mit sechs Plätzen reservieren. Als sie sich abends in dem Lokal zusammenfinden, hat einer von ihnen seine Freundin mitgebracht – und für sie ist leider kein freier Stuhl aufzutreiben. Der Wirt will das Problem so lösen: Zwei Personen – der Schüler mit seiner Freundin auf dem Schoß – setzen sich auf den ersten Stuhl; die dritte Person setzt sich auf den zweiten Stuhl und so weiter. Also setzt sich die sechste Person auf den fünften Stuhl – ein Stuhl bleibt somit frei und auf den setzt sich die Freundin. Worin ist der offensichtliche Trugschluss der Wirtes begründet? (H.F.)

Lösung:

Die sechs Schüler mit der Freundin sind nicht sechs sondern sieben Personen, die siebte Person (der sechste Schüler) setzt sich also auf den sechsten Stuhl und kein Stuhl bleibt frei.

VII. Fehlende Vielfache

Es sei S die Menge der 6-ziffrigen natürlichen Zahlen in deren Dezimaldarstellung jede der Ziffern 4, 5, 6, 7, 8, und 9 genau einmal vorkommt.

Dann gilt: Für kein $n \in S$ gibt es in S ein Vielfaches $v \cdot n$ von n, $v = 2, 3, 4, \ldots$.

Begründe dies mit Logik – nicht mit Computerrechnereien. (H.F.)

Lösung:

Es sei $n \in S$ mit $n = x_1 x_2 x_3 \ldots x_6$ und x_i Ziffern.

Die kleinste Zahl n in S ist $n = 456789$. Dann ist $v \cdot n$ bereits mindestens 7-ziffrig für jedes $v = 3, 4, 5, \ldots$ und Gleiches gilt für jedes $n' \in S$ mit $n' > n$.

Für jede Ziffern x_i von n gilt $x_i \cdot 2 \leq 18$.
Daraus folgt für die Ziffer x_j von n mit $x_j = 5$, dass auf der j-ten Ziffernposition von $2n$ entweder die Ziffer 0 oder die Ziffer 1 steht. Dann aber gilt: $2n \notin S$ für jedes $n \in S$.
Die Behauptung trifft also zu.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I: Ein Kurort mit drei Quellen

In einem Kurort gibt es drei heiße Quellen. Das Schwimmbad dort kann aus der ersten Quelle in 30 Minuten, aus der zweiten in 20 Minuten und aus der dritten in 12 Minuten gefüllt werden. Eines Tages beschließt der Kurleiter, alle drei Quellen gleichzeitig zu benutzen. Nach welcher Zeit ist das Bad voll? (WJB)

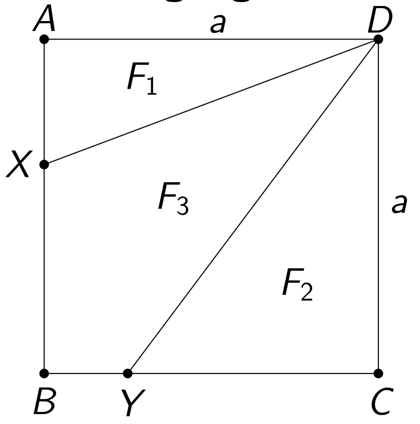
II: Teiler einer großen Zahl

Wie heißt die kleinste natürliche Zahl, die durch jede Zahl t mit $t = 1, \dots, 100$ teilbar ist? Wie viele Teiler hat sie? (H.F.)

III: Teilbarkeit durch Neun

Die Summe dreier unmittelbar aufeinander folgenden positiven ganzen Kubikzahlen ist stets durch 9 teilbar. Stimmt das? (H.F.)

IV: Zerlegung eines Quadrats



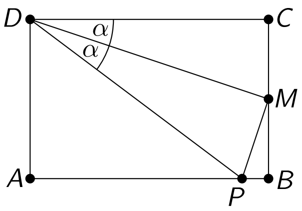
Im Quadrat $ABCD$ sind der Punkt X auf der Strecke AB und der Punkt Y auf der Strecke BC so zu bestimmen, dass für die Flächen F_1, F_2 und F_3 der Dreiecke $\triangle AXD$ und $\triangle YCD$ und des Vierecks $XBYD$ gilt: $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$. (H.F.)

V: Die Abschlussprüfung

Es war keine gute Idee, das Fest auf den Vorabend der Jahrgangsklausur zu legen! 105 unausgeschlafene Schüler brüten über den 50 Fragen, und es zeichnet sich ab, dass die durchschnittliche Erfolgsquote wohl eher unter 50% liegen wird. In diesem Fall gibt es aber immerhin eine Sonderregel, dass schon bestanden hat, wer die durchschnittliche Anzahl richtiger Antworten um nicht mehr als 15% unterschreitet.

Rachel hat bisher 22 Fragen korrekt beantwortet und weiß zu einer weiteren die richtige Antwort. Wenn der bisherige Durchschnitt 49,98% an richtigen Antworten beträgt, wäre es dann besser für sie, die dreiundzwanzigste Frage zu beantworten oder nicht? (C. H.-A.)

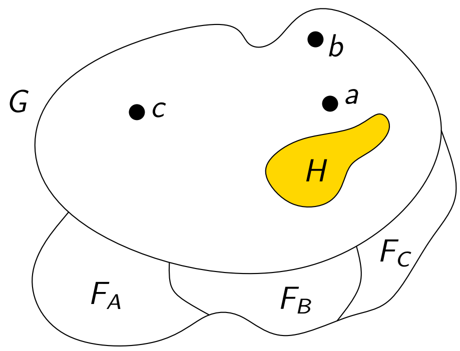
VI: Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks



Konstruiere im Rechteck $ABCD$ den Mittelpunkt M der Seite BC sowie einen Punkt P auf der Seite AB so, dass die Winkel $\sphericalangle MDC$ und $\sphericalangle PDM$ gleich groß sind. Dann ist das Dreieck $\triangle DPM$ rechtwinklig. Du siehst es – kannst Du es auch begründen? (H.F.)

VII: Ein Planungsproblem

In einer Ebene besitzen Ali, Bab und Cham in dieser Reihenfolge jeweils eines der Felder F_A, F_B und F_C, sowie jeweils einen Brunnen a, b und c – die Situation gibt die nebenstehende Landkarte wieder. Zur Bewässerung der Felder sollen nun Kanäle aA, bB und cC von den Brunnen zu den Punkten A, B und C mit A auf der Grenze von F_A (und so weiter) gegraben werden. Wie sollten diese Kanäle gebaut werden, damit kein Kanal außerhalb der Gebietsgrenze G, über den Hügel H, durch ein fremdes Feld oder durch einen anderen Kanal verläuft, wobei genau einer der Kanäle geradlinig sein soll? (H.F.)



♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Mathematik ist eine weite schöne Landschaft, die man zuerst aus der Ferne bewundert, die es aber wert ist, durchwandert und in allen Einzelheiten ihrer Hügel und Täler, ihrer Bäche, Felsen, Bäume und Blumen studiert zu werden."

Arthur Cayley
1821–1895
englischer Mathematiker, Mitbegründer der Gruppentheorie

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1036: Sprachen-Umfrage

Bei einer Umfrage auf einem Flughafen werden n Personen danach befragt, welche Sprache(n) sie sprechen: Deutsch (D), Englisch (E), Französisch(F) und/oder mindestens eine andere Sprache.

Das Ergebnis der Umfrage lautete:

> 48 Personen sprachen ausschließlich Deutsch oder Deutsch sowie mindestens eine der Sprachen Englisch und Französisch;
> 63 sprachen kein Französisch;
> 11 sprachen kein Englisch;
> 74 sprachen zwei oder drei der Sprachen Deutsch, Englisch, Französisch.

Wie viele Personen wurden nach diesem Umfrageergebnis höchstens und wie viele Personen wurden mindestens befragt? (H.F.)

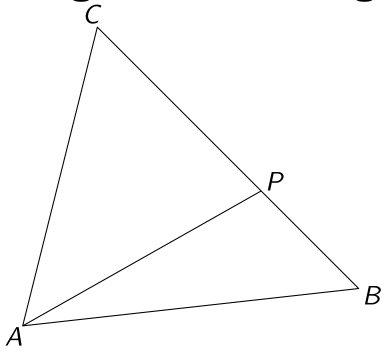
Aufgabe 1037: Die bemerkenswerte Hausnummer

Mathis wohnt in einer Straße, bei der die Häuser von 1 ab fortlaufend nummeriert sind. Die Nummer M von Mathis Haus ist mindestens 30 sowie kleiner als 40 und die Summe aller Hausnummern vor M und nach M stimmen überein.

a) In welchem Haus wohnt Mathis?

b) Wie viele Häuser hat die Straße? (H.F.)

Aufgabe 1038: Länge einer Transversalen



Es sei P ein beliebiger Punkt der Seite BC eines Dreiecks $\triangle ABC$. Dann gilt für die Länge $|AP|$ der Transversalen AP:

$$|AP| < |AB| + |AC|.$$

Du siehst es – kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Aufgabe 1039: Ein (Tisch-)Tennis-Turnier

Dein Freund Alexander fordert Dich zu einem Turnier heraus, bei dem abwechselnd Tennis und Tischtennis gespielt wird. Er lässt Dir die Wahl, mit welcher Sportart du beginnen willst. Du weißt, dass die Wahrscheinlichkeit p, beim Tischtennis gegen ihn zu gewinnnen, größer ist als die Wahrscheinlichkeit r beim Tennis.

a) Das Turnier besteht aus drei Spielen. Du bist Turniersieger, wenn Du zwei aufeinanderfolgende Spiele gewinnst. Mit welcher Sportart solltest du beginnen?

b) Wie solltest Du beginnen, wenn das Turnier aus fünf Spielen besteht?

c) Für welchen Beginn stehen Deine Chancen besser, wenn Du von insgesamt fünf Spielen drei aufeinanderfolgende gewinnen musst, um Turniersieger zu sein? (WJB)

Aufgabe 1040: Zirkel und Lineal

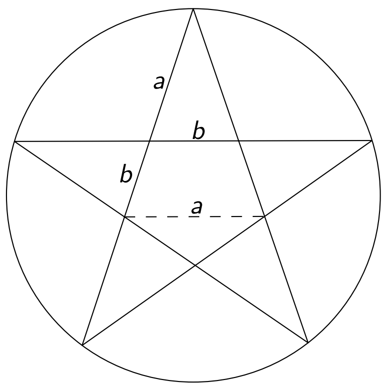
Gegeben sei eine Strecke der Länge 1.

a) Lässt sich daraus für jede natürliche Zahl n eine Strecke der Länge $\sqrt{n}$ konstruieren?

b) Lässt sich sogar für jede positive rationale Zahl r eine Strecke der Länge $\sqrt{r}$ konstruieren? (WJB)

Aufgabe 1041: Wo liegt der Fehler?

Teilt man die Kreislinie in fünf gleich lange Bogenstücke und verbindet dann die Teilungspunkte wie in der Figur, so erhält man ein reguläres Pentagramm. Man kann nun zeigen, dass die mit a beziehungsweise mit b bezeichneten Strecken jeweils gleichlang sind. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.



Daraus folgt:

(1) $a^2 - b^2 = ab$.

Nun kennst Du die dritte binomische Formel, nach der gilt:

(2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Setzt man (1) und (2) gleich, gilt also: $(a+b)(a-b) = ab$.

Wie Du Dir an Zahlenbeispielen leicht klar machst, ist aber meistens $(a+b)(a-b) \neq ab$.

Etwa: $(5+2)(5-2) = 21$, während $5 \cdot 2 = 10$ ist.

Wo liegt also der Denkfehler in dieser Überlegung? (H.F.)

Aufgabe 1042: Eine Eigenschaft der Fermat-Zahlen

Die Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$ mit $n \geq 1$ heißen Fermat-Zahlen. Beweise die folgende Behauptung: Eine Fermat-Zahl F_n ist niemals eine Kubikzahl. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 108

Klassen 9–13

Aufgabe 1036: Teilbarkeit durch 7

Wir wollen eine $(n+1)$-stellige Zahl $99\ldots98$ mit n Ziffern 9 durch 9_n8 abkürzen. Untersuche die Behauptung: Es gibt unendlich viele unter den Zahlen 9_n8, die durch 7 teilbar sind. (H.F.)

Lösung:

$98 = 9_1 8$ ist durch 7 teilbar. Die nächste durch 7 teilbare Zahl der Form $9_n 8$ ist $9_7 8 = 99999998 = 7 \cdot 14285714$. Die kleinste durch 7 teilbare Zahl der Form $9_m = 99\ldots9$ (mit m Ziffern 9) ist $9_6 = 999999 = 7 \cdot 142857$. Damit gilt: Jede der Zahlen $9_7 8, 9_{13} 8, 9_{19} 8, 9_{25} 8, \ldots$ ist durch 7 teilbar.

Aufgabe 1037: Summe aus Dreien und Fünfen

Jede natürliche Zahl $n \geq 8$ hat eine mindestens 2-gliedrige Summendarstellung $n = z_1 + z_2 + \ldots + z_m$, $m \geq 2$, wobei die z_i nur Dreien oder Fünfen sind. Zeige, dass diese Aussage stimmt. (H.F.)

Lösung:

Für die Zahlen $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ gibt es keine solche Darstellung, während $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$ und $11 = 5 + 3 + 3$ gilt. Es sei nun im folgenden $n \geq 11$, dann ist jede solche Summe mindestens 3-gliedrig. Wir wollen nun annehmen, dass die Behauptung für die Zahlen 11, 12, 13, ..., n zutreffend sei. Wenn in der Darstellung von n keine Zahl 5 vorkommt, dann sind mindestens drei Summanden die Zahl 3. Ersetzt man daher $3+3+3$ durch $5+5$, so hat man eine Darstellung für $n + 1$.

Wenn aber ein Summand die Zahl 5 ist, dann ersetzt man diese 5 durch $3 + 3$ und erhält jetzt eine Darstellung für $n + 1$.

Die Aussage ist also wahr.

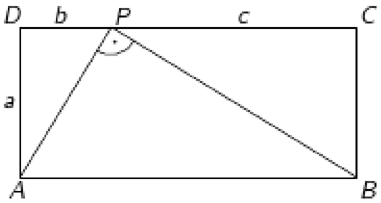
Aufgabe 1038: Eine Gleichung im Rechteck

Im Rechteck $ABCD$ mit $|AD| < \frac{|AB|}{2}$ sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABP$ mit $P \in CD$ konstruiert; es seien $|AD| = a$, $|DP| = b$ und $|PC| = c$.

Dann gilt:

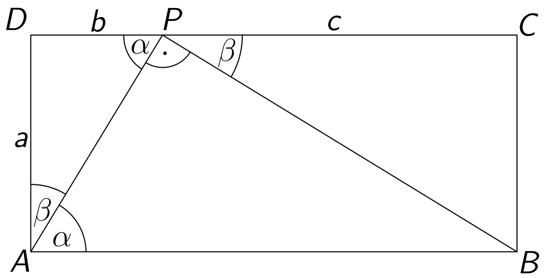
$$a\sqrt{a^2 + c^2} = c\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Trifft diese Behauptung zu?



(H.F.)

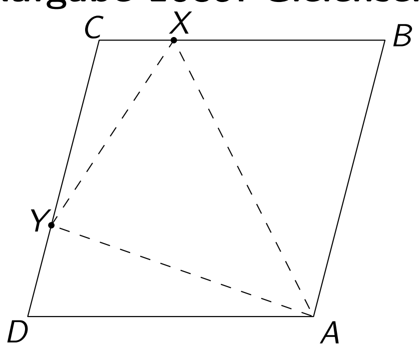
Lösung:



Die Dreiecke $\triangle APD, \triangle ABP$ und $\triangle BCP$ stimmen in ihren Innenwinkeln überein – siehe Abbildung –; sie sind daher *ähnlich*.

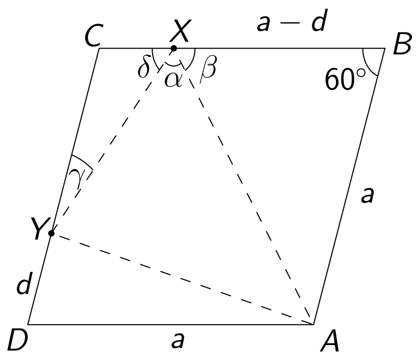
Mithin gilt: $|AP| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $|BP| = \sqrt{a^2 + c^2}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle APD$ und $\triangle BCP$ folgt also $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$, und damit die Behauptung.

Aufgabe 1039: Gleichseitiges Dreieck im Parallelogramm



Im Parallelogramm $ABCD$ mit vier gleich langen Seiten und einem Innenwinkel von $120°$ bei C werden in der Seite BC ein Punkt X und in der Seite CD ein Punkt Y beliebig aber so gewählt, dass $|CX|$ gleich $|DY|$ ist. Zeige: Das Dreieck $\triangle AXY$ ist gleichseitig. (H.F.)

Lösung:



1. Im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist $|\sphericalangle CBA| = 60°$, also gilt $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACB| = 60°$, so dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Insbesondere ist also $|AC| = |AB|$.
2. Die Dreiecke $\triangle ABX$ und $\triangle ACY$ sind kongruent, weil $|AB| = |AC|$ und $|BX| = |CY|$ sowie $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle YCA| = 60°$ ist.
3. Aus 2. folgt: $|AX| = |AY|$, also: Das Dreieck $\triangle AXY$ ist gleichschenklig und daher sind die Innenwinkel bei X und Y gleich groß. Sie werden im Folgenden mit α bezeichnet.
4. Es sei $|\sphericalangle AXB| = \beta$. Aus 2. folgt dann, dass auch $|\sphericalangle AYC| = \beta$ ist. Dann ist $\gamma := |\sphericalangle XYC| = \beta - \alpha$ und $\delta := |\sphericalangle CXY| = 180° - (\alpha + \beta)$. Daraus folgt: $\gamma + \delta = (\beta - \alpha) + 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 2\alpha$. Für das Dreieck $\triangle CYX$ gilt nun: $\gamma + \delta = 180° - 120° = 60°$. Also ist $180° - 2\alpha = 60°$, so dass $\alpha = 60°$ ist. Daraus folgt: Das Dreieck $\triangle AXY$ ist gleichseitig.

Aufgabe 1040: Zahlen aus gleichen Ziffern

Eine Zahl die aus 3^n gleichen Ziffern besteht ist für jedes n, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, durch 3^n teilbar. Zeige, dass die Aussage stimmt. (H.F.)

Lösung:

Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion.

Es sei m eine Zahl mit 3^n Ziffern z.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $m = zzz = z \cdot 111$ und 3^1 ist ein Teiler von 111 und mithin von m.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei bewiesen für die Exponenten 1, 2, 3, ..., $n - 1$.

Induktionsschritt: Deshalb ist die Zahl $m' = zzz\ldots z = z \cdot 111\ldots 1$ mit 3^{n-1} Ziffern z durch 3^{n-1} teilbar.

Damit gilt für $m = zzz\ldots z\, zzz\ldots z\, zzz\ldots z$ mit $3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ Ziffern z:

$$m = m' \cdot 10^{2 \cdot 3^{n-1}} + m' \cdot 10^{3^{n-1}} + m' = m' \cdot \left(10^{2 \cdot 3^{n-1}} + 10^{3^{n-1}} + 1\right).$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung m' ein Vielfaches von 3^{n-1} und die Klammer – deren Quersumme 3 ist – ist ein Vielfaches von $3^{n-1} \cdot 3 = 3^n$; was zu zeigen war.

Aufgabe 1041: Konkave Funktionen und n-Ecke

Die Funktion f heiße konkav im Intervall $[a, b]$, wenn für $x_1,x_2 \in [a,b]$, $0 < p_1, p_2 < 1$, $p_1 + p_2 = 1$ immer gilt $f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$

a) Zeige: Ist f konkav in $[a, b]$, so gilt für $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, mit $0 < p_1, p_2, ...p_n < 1$ und $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, immer $f(p_1x_1 + ... + p_nx_n) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + ... + p_nf(x_n)$

b) Unter Verwendung von *a* zeige, dass unter allen in einem Kreis einbeschriebenen n-Ecken das regelmäßige n-Eck den größten Umfang hat.
Hinweis: Benutze die Sinusfunktion für geeignete Werte und arbeite am Einheitskreis.

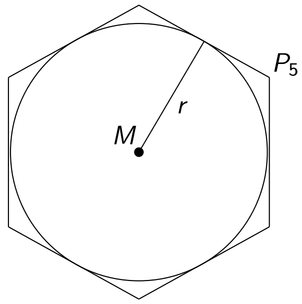
Lösung:

a) Es gilt $\sum_{j=1}^{n} p_jx_j = p_nx_n + (1 - p_n) \sum_{j=1}^{n-1} p'_jx_j$ wobei $p'_j = \frac{p_j}{1-p_n}$ die Bedingungen $0 < p'_1, p'_2...p'_{n-1} < 1$, $\sum_{j=1}^{n-1} p'_j = 1$ erfüllt. Die Annahme, dass die Behauptung für die $n-1$ Werte $x_1...x_{n-1}, p'_1...p'_{n-1}$ gelte, führt dann zu $f(\sum_{j=1}^{n} p_jx_j) = p_nf(x_n) + (1 - p_n)f(\sum_{j=1}^{n-1} p'_jx_j) \geq p_nf(x_n) + (1 - p_n) \sum_{j=1}^{n-1} p'_jf(x_j) = \sum_{j=1}^{n} p_jf(x_j)$.

b) Man überzeugt sich zunächst, dass das einbeschriebene n-Eck mit dem größten Umfang nicht ganz in einem Halbkreis liegen kann. n-Ecke, die nicht ganz in einem Halbkreis liegen, setzen sich zusammen aus n Dreiecken mit Innenwinkel $2\alpha_j$, wobei $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \pi$. $0 < \alpha_j < \frac{\pi}{2}$, $j = 1, 2, ..., n$. Der Umfang ist dann $\sum_{j=1}^{n} 2\sin(\alpha_j)$. Die Sinusfunktion ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ konkav. Deshalb gilt $2\sum_{j=1}^{n} \sin(\alpha_j) = 2n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sin(\alpha_j) \leq 2n \sin(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\alpha_j) = n \cdot 2\sin(\frac{\pi}{2n})$, und die rechte Seite ist der Umfang des regelmäßigen n-Ecks.

Aufgabe 1042: Eine Frage der Vererbung

Es sei $\{P_n \mid n = 3, 4, ...\}$ eine Folge von regelmäßigen n-Ecken P_n, die sämtlich den Kreis K um den Punkt M mit Radius r als Inkreis besitzen. Dann sind die n-Eckseiten Tangenten an den Kreis K und die Seitenmitten haben alle den Abstand r von M.



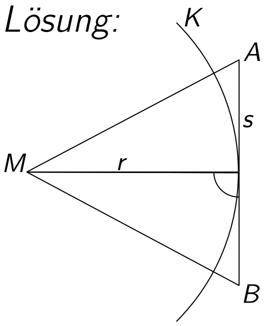
In der Schule erfährt man, dass die n-Ecke P_n sich immer mehr der Form des Kreises K annähern, je größer n gewählt wird und dass man schließlich K als ein „Polygon mit unendlich vielen Ecken“ vorstellen dürfe.

Die Fläche des Kreises K ist $A = \pi r^2$ und sein Umfang $U = 2\pi r$, woraus

$$\frac{A}{U} = \frac{r}{2}$$

folgt. Besitzt nun der Kreis K allein diese Eigenschaft, oder ist sie ihm von jedem einzelnen n-Eck P_n „vererbt“ worden – das heißt: Gilt diese Gleichung auch für jedes P_n, $n = 3, 4, \dots$, wenn A die Fläche und U der Umfang von P_n ist? (H.F.)

Lösung:



In der nebenstehenden Figur sei die Strecke AB die Seite eines n-Ecks P_n; ihre Länge sei s_n. Dann gilt für $n = 3, 4, 5, \dots$ $U = n \cdot s_n$ ist der Umfang eines n-Ecks P_n und $A = n \cdot \frac{1}{2} r s_n$ ist seine Fläche.
Folglich gilt

$$\frac{A_n}{U_n} = \frac{r}{2}$$

für jedes P_n, $n = 3, 4, 5, \dots$ und deshalb hat K diese Eigenschaft von den n-Ecken P_n „geerbt“.

Die 1000-ziffrigen Zahlen haben durchschnittlich nur acht Primteiler

von Hartwig Fuchs

Es ist unproblematisch, das Produkt vieler Primzahlen zu berechnen. Dagegen erweist sich die umgekehrte Aufgabe, für eine nicht prime Zahl* $n > 1$ eine Darstellung als Primzahlprodukt zu finden, häufig dann als numerisch enorm aufwändig, wenn n eine große Zahl ist.
Diese Schwierigkeit lässt sich mit der in der Überschrift angedeuteten sehr viel weitergehenden Aussage (1) erklären:

(1) Die meisten Zahlen haben nur wenige verschiedene Primteiler**.

Falls nämlich (1) zutrifft, dann werden die wenigen Primteiler einer sehr großen Zahl selbst groß und deshalb nicht leicht zu berechnen sein.
Bevor wir nun auf die Aussage in der Überschrift und ihre mögliche Verallgemeinerung (1) eingehen können, sind einige Vorbereitungen erforderlich.

* Mit „Zahl“ ist stets eine natürliche Zahl gemeint.

** Statt „verschiedene Primteiler“ schreiben wir nun „Primteiler“

Ein grundlegender Satz

Nach dem Fundamentalsatz der Zahlentheorie ist eine natürlich Zahl entweder 1 oder eine Primzahl oder ein Produkt aus eindeutig bestimmten Primzahlpotenzen. Daraus folgt, dass jede nicht prime Zahl $n > 1$ eine Darstellung folgender Form besitzt:

(2) $n = t_1^{e_1} t_2^{e_2} \dots t_r^{e_r}$ mit paarweise verschiedenen Primteilern t_i, $t_1 < t_2 < \dots < t_r$, und ganzzahligen Exponenten $e_i \geq 1$ mit $i = 1, 2, 3, \dots, r$ und $r \geq 1$, wobei e_1 und r nicht beide 1 sind.

Die Zahlen t_i heißen die Primteiler von n; und r gibt an, wie viele Primteiler n besitzt.

Wie viele Zahlen haben genau r Primteiler?

(3) Zu jedem $r \geq 1$ gibt es unendlich viele Zahlen n, die genau r Primteiler besitzen.

Es sei $r = 1$. Dann haben die unendlich vielen Zahlen $n = t_1^{e_1}$, t_1 eine beliebige Primzahl und $e_1 = 1, 2, 3, \dots$, genau einen Primteiler.
Es sei $r > 1$ und $t_1, t_2, \dots, t_r$ seien paarweise verschiedene Primzahlen. Dann erhält man aus (1) für $e_i = 1, 2, 3, \dots$ unendlich viele Zahlen n mit genau r verschiedenen Primteilern.
Beispiel: Die unendlich viele Zahlen 2011^{e_1} mit $e_1 = 1,2,3,\dots$ haben nur den einen Primteiler 2011 und die unendlich vielen Zahlen $2^{e_1}11^{e_2}$ haben mit $e_1, e_2 = 1, 2, 3, \dots$ haben nur die beiden Primteiler 2 und 11.

Welches ist die kleinste Zahl mit genau r Primteilern?

Mit $p_1, p_2, p_3, \dots$ sei die Folge der nach wachsender Größe geordneten Primzahlen bezeichnet – also ist beispielsweise $p_1 = 2$ und $p_{305} = 2011$.
Für jede Primzahl p_r definiert man die Primfakultät $p_r\#$ so:

$$p_1\# = 2 \text{ und } p_r\# = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \text{ für } r \geq 2.$$

Nach dieser Definition hat $p_r\#$ genau r Primteiler. Und für jede nicht prime Zahl $n > 1$ in der Darstellung (2) gilt wegen $t_i \geq p_i$:

$$n = t_1^{e_1} t_2^{e_2} \dots t_r^{e_r} \geq p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r} \geq \#p_r.$$ Daraus folgt:

(4) Die kleinste Zahl mit genau r verschiedenen Primteilern, $r \geq 2$, ist $p_r\#$.

Mit einem Taschenrechner findet man für kleine r schnell die jeweils kleinsten Zahlen mit genau r verschiedenen Primteilern:

r	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$p_r\#$	6	30	210	2310	30030	510510	9699690	223092870	...

Aus der Tabelle – insbesondere aus ihrer nicht hingeschriebenen Fortsetzung über $r = 9$ hinaus – erhält man Aussagen, die zwar kleine abder dennoch konkrete

Schritte in die von der Behauptung (1) vorgegebene Richtung darstellen.
So ergibt sich: Jede Zahl $\leq 10^8$ hat höchstens acht verschiedene Primteiler wegen $p_9\# > 10^8$; und für $p_{1849}\# = 15877$ gilt $10^{6844} < p_{1849}\# < 10^{6845}$, sodass jede Zahl $\leq 10^{6844}$ höchstens 1849 Primteiler besitzt.

Durchschnittliche Anzahl von Primteilern einer Zahl

Die Primfakultät $p_r\#$ wächst mit wachsendem r schnell zu gigantischer Größe an. das lehrt ein Vergleich mit der Fakultät $r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot r$, die ja bekanntlich rasant größer wird. Es gilt nämlich:

Für jedes $r \geq 1$ ist $p_r\# > r!$.

Dies und (4) zeigen, dass man weit in das Zahlenuniversum $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ vordringen muss, um auf Zahlen mit vielen Primteilern zu stoßen. Damit ist aber keineswegs sicher, dass solche Zahlen auch eher selten in $\mathbb{N}$ vorkommen – wie es (1) vermutet.
Wie also kann man sich der Behauptung (1) nähern? Eine Möglichkeit dazu könnte das arithmetische Mittel sein.
Mit $a(i)$ bezeichnen wir die Anzahl der Primteiler einer Zahl $i \geq 1$, wobei $a(1) = 0$ gesetzt sei. Ferner sei $\mathcal{I}(1, n)$ der Abschnitt $\{1, 2, 3, ... , n\}$ von $\mathbb{N}$. Dann sei $d(n)$ das arithmetische Mittel der Anzahlen $a(i)$, $i = 1, 2, 3, ... , n$:

(5) $d(n) = \frac{a(1)+a(2)+a(3)+...+a(n)}{n}$, $n \geq 1$.

Die Zahlen des Intervalls $\mathcal{I}(1, n)$ haben also durchschnittlich $d(n)$ Primteiler.
Beispiel: Wie groß ist $d(50)$? Es ist $a(1) = 0$.
Ist k eine der 15 Primzahlen $2, 3, 5, ... , 47$ oder eine der acht Primzahlpotenzen 2^i, $i = 2, 3, 4, 5$, sowie 3^2, 3^3, 5^2,7^2, dann gilt $a(k) = 1$.
Weiter ist $a(k) = 3$ für $k = 30$ und $k = 42$.
Für die restlichen 24 Zahlen $k = 6, 10, 12, ... 50$ ist $a(k) = 2$.
Somit ist $d(50) = \frac{1}{50}(1 \cdot 0 + 23 \cdot 1 + 24 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 1{,}54$.
Die Zahlen des Intervall $\mathcal{I}(1, n)$ haben also durchschnittlich nur einen oder zwei Primteiler.
Die nachfolgende Tabelle (6) vermittelt einen Eindruck von der Größenordnung der Mittelwerte $d(n)$ auf einigen Intervallen $\mathcal{I}(1, n)$ – man beachte insbesondere $d(10^{1000})$; zum Vergleich sind jeweils die Werte von $\frac{1}{2} + \ln(\ln(n))$ angegeben:

(6)

n	10	10^2	10^3	...	10^{10}	10^{100}	10^{1000}	...
$d(n)$	1,10	1,71	2,13	...	3,40	5,70	8,00	...
$\frac{1}{2} + \ln(\ln(n))$	1,33	2,03	2,43	...	3,64	5,94	8,24	...

In der Tabelle fällt auf, dass für große n die $d(n)$-Werte überraschend klein im Vergleich zu n sind.
Wenn nun $d(n)$ auf einem großen Intervall $\mathcal{I}(1, n)$ sehr klein ist, dann darf man davon ausgehen, dass es in $\mathcal{I}(1, n)$ weitaus mehr Zahlen mit wenigen als mit vielen

Primteilern gibt. In einem solchen Fall sagen wir: Die meisten Zahlen aus $\mathcal{I}(1, n)$ haben nur wenig verschiedene Primteiler – vergleiche (1).
Wir wollen nun ein Kriterium dafür angeben, wann wir $d(n)$ als sehr klein im Vergleich zu n betrachten werden.
Es gibt Funktionen f, deren Werte $f(n)$ von Mathematikern allgemein als sehr klein im Vergleich zu n angesehen werden. Eine solche Funktion ist $\ln \ln$. Diese Funktion dient uns nun unter Berücksichtigung der Tabelle (6) zu der folgenden Festlegung:

(7) Das in (5) definierte arithmetische Mittel $d(n)$ ist sehr klein im Vergleich zu n, falls gilt: $d(n) < \frac{1}{2} + \ln \ln(n)$, $n > 1$.

Wie groß ist d(n) auf einem Intervall $\mathcal{I}(1, n)$?

In der Tabelle (6) bleibt $d(n)$ stets unterhalb von $\frac{1}{2} + \ln \ln(n)$. Das könnte aber trotzdem nicht für alle $n > 1$ zutreffen. Und deshalb durfte man zunächst nicht sicher sein, ob denn tatsächlich $d(n)$ für alle $n > 1$ sehr klein im Sinn von (7) ist. Dieses Problem wurde gelöst – und damit auch die Behauptung (1) – als man bewies:

(8) Für jedes $n > 1$ gilt: $d(n) = c + \ln \ln(n) + t(n)$ mit $c \approx 0,262$; vom Term $t(n)$ weiß man nur, dass er positiv ist und dass er mit $n \to \infty$ gegen Null geht.

Der Primteilersatz (8) liefert für große n gute Näherungswerte für $d(n)$, weil man für große n den Termn $t(n)$ vernachlässigen darf.
Beispiel: Die Zahlen n mit höchstens 1000 Ziffern haben durchschnittlich acht Primteiler. Es ist nämlich $d(10^{1000} - 1) \approx 0{,}262 + \ln \ln(10^{1000}) \approx 8{,}0038$.
Da der Termn $t(n)$ in (8) gegen Null konvergiert für $n \to \infty$, gibt es eine Zahl n_0, sodass $t(n) < 0{,}238$ ist für jedes $n \geq n_0$ und deshalb folgt aus (8):

$$d(n) < \tfrac{1}{2} + \ln \ln(n) \text{ für jedes } n \geq n_0.$$

Somit kann die Ungleichung $d(n) \geq \frac{1}{2} + \ln \ln(n)$ auch nur eintreten, wenn $n < n_0$ ist. Also gibt es nur endlich viele Intervalle $I(1, n)$, $n < n_0$, auf denen $d(n)$ nicht sehr klein ist.
Diesen Sachverhalt beschreiben wir so:

> $d(n)$ ist sehr klein auf den meisten (auf fast allen) Intervallen $\mathcal{I}(1, n)$, $n > 1$;

oder auch so:

> die meisten Zahlen aus den meisten Intervallen von $\mathbb{N}$ haben nur wenige Primteiler – und das ist mit der Aussage (1) gemeint.

Der Primteiler-Satz und die 1000-ziffrigen Zahlen

Könnte es sein, dass die Werte von $d(n)$ auf den meisten Intervallen $\mathcal{I}(1, n)$ nur deshalb sehr klein sind, weil diese jeweils sämtliche Zahlen von 1 bis n enthalten,

wodurch viele kleine Zahlen mit dann meist auch wenigen Primteilern – vergleich (6) – in die Bildung von $d(n)$ eingehen?
Für ein Intervall $\mathcal{I}(m+1, n) = \{m+1, m+2, \dots, n\}$ sei so wie in (5) das arithmetische Mittel $d(m+1, n)$ der Anzahlen $a(i)$ von Primteilern der Zahlen i mit $m+1 \leq i \leq n$ definiert:

$$d(m+1, n) = \frac{a(m+1)+a(m+2)+\dots+a(n)}{n-m},\ m > 1, n \geq m+1.$$

Mit (5) erhält man aus (7):

$$(9)\quad d(m+1, n) = \frac{a(1)+a(2)+\dots+a(n)-(a(1)+a(2)+\dots+a(m))}{n-m} = \frac{nd(n)-md(m)}{n-m}.$$

Wir berechnen nun daraus mit der Formel (8) – in der wir $t(n)$ weglassen – einen Näherungswert für die durchschnittliche Anzahl von Primteilern der 1000-ziffrigen Zahlen des Intervalls $\mathcal{I}(10^{999}, 10^{1000}-1)$:

$$d(10^{1000}-1) \approx d(10^{1000}) \approx 8{,}0038 \text{ (siehe oben)};$$
$$d(10^{999}-1) \approx d(10^{999}) \approx 0,262 + \ln\ln(10^{999}) \approx 8{,}0028.$$

Mit $10^{1000} - 1 - (10^{999} - 1) = 9 \cdot 10^{999}$ erhält man dann aus (9):

$$d(10^{999}, 10^{1000}-1) \approx \frac{10^{1000} \cdot 8{,}0038 - 10^{999} \cdot 8{,}0028}{9 \cdot 10^{999}} \approx 8{,}0039.$$

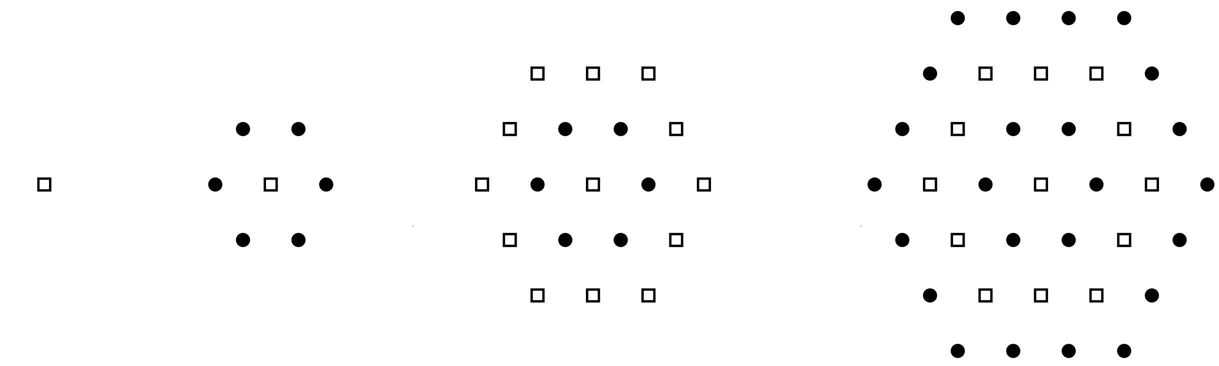
Ein bemerkenswertes Ergebnis:
Die 1000-ziffrigen Zahlen haben durchschnittlich nur acht verschiedene Primteiler!

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.“

Bertrand Russell
1872–1970
britischer Philosoph, Mathematiker und Logiker

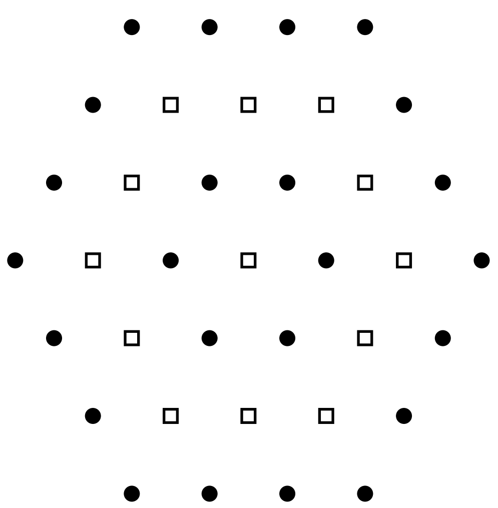
Die besondere Aufgabe
Lösung einer Aufgabe ohne Worte
von Hartwig Fuchs



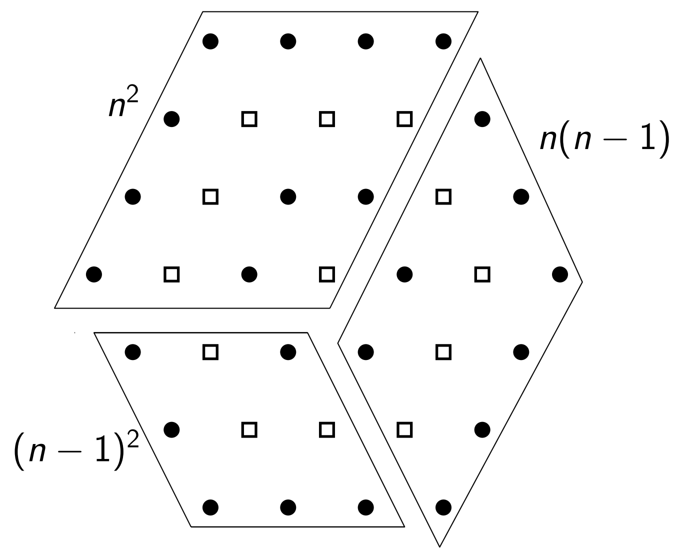
$H_1 = 1$ $H_2 = 7$ $H_3 = 19$ $H_4 = 37$

In obiger Abbildung sieht man Figuren aus Punkten (mit $\square$ und $\bullet$ dargestellt), die in ineinander geschachtelten regelmäßigen Sechseck-Ringen angeordnet sind.
Die Anzahlen der Punkte solcher Ringkomplexe werden Hexagonalzahlen genannt und mit H_1, H_2, H_3, ... bezeichnet. Es sind $H_1 = 1$, $H_2 = 7$, $H_3 = 19$, $H_4 = 37$.
Nun sei die Reihe der Hexagonal-Figuren nach dem aus der Abbildung erkennbaren Konstruktionsmuster beliebig weit fortgesetzt. Finde dann eine anschaulich-geometrisch begründete Formel, mit der man die n-te Hexagonalzahl H_n berechnen kann.

Lösung ohne Worte:



$H_n = ?$

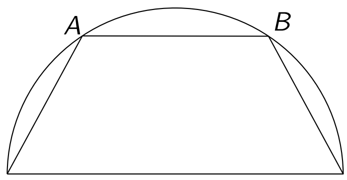


$H_n = n^2 + n(n-1) + (n-1)^2$

Leserzuschrift
Verallgemeinerung der Aufgabe 1033 aus Monoid 107

In Monoid 107 haben wir Euch die folgende Aufgabe gestellt:

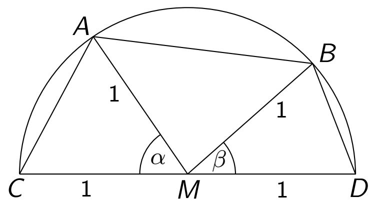
Auf dem Kreis mit Radius 1 wähle A und B symmetrisch so, dass die Fläche des Trapezes maximal wird. (WJB)



Ein interessierter Leser hat sich nun gefragt, wie A und B zu wählen sind, wenn die verlangte Symmetrie der beiden Punkte aufgegeben wird.
Beachte: Das dann enstehende Viereck ist jedoch a priori kein Trapez.

Lösung

Mit den Bezeichnungen in der Skizze gilt für die Fläche F des Vierecks $ACDB$:



$$F = \tfrac{1}{2}\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin\beta + \tfrac{1}{2}\sin(\pi - \alpha - \beta).$$

Da der Sinus im Intervall $(0, \pi)$ streng konkav ist, gilt (nach der Jensenschen Ungleichung):

$$2F = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\pi-\alpha-\beta) \le 3\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta+(\pi-\alpha-\beta)}{3}\right) = 3\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Dabei gilt wegen der strengen Konkavität genau dann Gleichheit, wenn $\alpha = \beta = \pi - \alpha - \beta$, also $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ ist.
Das entstehende Viereck ist also auch in diesem Fall ein Trapez.

Alternative Lösung ohne Jensensche Ungleichung, aber etwas trickreich:
Wegen $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le 1$ ist für $\alpha, \beta \in (0, \pi)$

(1) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$,

wobei Gleichheit genau für $\alpha = \beta$ auftritt.
Es seien nun $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ mit $\gamma = \sphericalangle BMA$, also $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Nach (1) gilt dann:

$$\tfrac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta) + \tfrac{1}{2}(\sin\gamma + \sin\frac{\pi}{3}) \le \sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} + \sin\tfrac{\gamma+\frac{\pi}{3}}{2}.$$

Und ebenfalls nach (1) ist nun:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\gamma+\frac{\pi}{3}}{2} \le 2\sin\frac{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma+\frac{\pi}{3}}{2}}{2} = 2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{4} + \tfrac{\pi}{12}\right)$$
$$= 2\sin\tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Damit ist $2F = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3}{2}\sqrt{3}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ ist.

Bundeswettbewerb Mathematik 2012

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Alex schreibt die Ziffern 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9 in beliebiger Reihenfolge nebeneinander und setzt dann irgendwo zwischen zwei Ziffern einen Doppelpunkt, so dass eine Divisionsaufgabe entsteht.
Kann das Ergebnis dieser Rechnung 2 sein?

Lösung: Nein, das Ergebnis kann in keinem Fall 2 sein.

1. Beweis (durch Widerspruch)**:** Es existiere eine Reihenfolge der sechzehn Ziffern aus der Aufgabenstellung sowie eine Setzung des Doppelpunkts, so dass das Ergebnis der Divisionsaufgabe tatsächlich 2 ist. Wir bezeichnen die positiven ganzen Zahlen, die Divisor beziehungsweise Dividend dieser Divisionsaufgaben sind, als a beziehungsweise b; es ist demnach $b : a = 2$ und, gleichwertig, $b = 2a$. Wenn k für ein $k \geq 1$ die Anzahl der Stellen von a bezeichnet, dann entspricht die hier betrachtete Reihenfolge der sechzehn Ziffern (ohne Doppelpunkt) also der 16-stelligen positiven ganzen Zahl R mit

$$R = 2a \cdot 10^k + a = a(\underbrace{2 \cdot 10^k + 1}_{=:Q}). \tag{1.1}$$

Eine ganze Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Die $(k+1)$-stellige positive ganze Zahl Q aus (1.1) ist durch 3 teilbar, weil ihre Quersumme $2+(k-1)\cdot 0+1 = 3$ beträgt. Damit ist auch die 16-stellige positive ganze Zahl $R = aQ$ durch 3 teilbar. Die Quersumme von R lässt sich aus den Angaben der Aufgabenstellung ermitteln. Sie beträgt:

$$2 \cdot (2+3+4+5+6+7+8+9) = 88 = 3 \cdot 29 + 1,$$

ist also nicht durch 3 teilbar — Widerspruch zur Teilbarkeit von R durch 3 gemäß (1.1). $\square$

2. Beweis (durch Widerspruch)**:** Es existiere wiederum eine Reihenfolge der sechszehn Ziffern aus der Aufgabenstellung sowie eine Setzung des Doppelpunkts, so dass das Ergebnis der Divisionsaufgabe tatsächlich 2 ist. Wir bezeichnen die positiven ganzen Zahlen, die Divisor bzw. Dividend dieser Divisionsaufgabe sind, als a bzw. b, es ist demnach $b : a = 2$ und, gleichwertig, $b = 2a$. Aus Beobachtungen beim schriftlichen Multiplizieren leiten wir einige Bedingungen über das

Vorkommen der Ziffern in a und b her und zeigen, dass nicht alle diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein können. Um dies zu beschreiben, benützen wir die Variablen a_i, $2 \leq i \leq 9$; sie sollen die Häufigkeit der Ziffer i in der Dezimaldarstellung der Zahl a beschreiben. Da jede Ziffer genau zweimal verwendet wird, kann jedes der a_i nur einen der Werte 0,1 oder 2 annehmen; in der Dezimaldarstellung von b kommt jede Ziffer i genau $2 - a_i$ Mal vor.
Die Zahl a kann keine Ziffer 5 enthalten, weil beim Verdoppeln von a die entstehende Zahl b an der entsprechenden Stelle eine 0 oder 1 hätte und diese nach Voraussetzung nicht vorkommt. Es ist also $a_5 = 0$. Jede der Ziffern 3 und 8 in a erzeugt in b an den entsprechenden Stellen eine der beiden Ziffern 6 oder 7. Umgekehrt können die Ziffern 6 und 7 in b auch nur von Ziffern 3 und 8 in a erzeugt werden. Also sind die Anzahlen der Ziffern 3 und 8 in a und die Anzahlen der Ziffern 6 und 7 in b gleich, das heißt, es gilt $a_3 + a_8 = (2 - a_6) + (2 - a_7)$ oder äquivalent $a_3 + a_6 + a_7 + a_8 = 4$.
Entsprechendes gilt für die Ziffernpaare $\{1, 6\}$ in a und $\{2, 3\}$ in b, ebenso für $\{2, 7\}$ in a und $\{4, 5\}$ in b, ebenso auch für $\{4, 9\}$ in a und $\{8, 9\}$ in b. Dies führt durch analoge Rechnungen unter Berücksichtigung von $a_5 = 0$ und der Tatsache, dass die Ziffer 1 überhaupt nicht vorkommt, zu den folgenden Gleichungen:

$$a_2 + a_3 + a_6 = a_2 + a_4 + a_7 = a_4 + a_8 + 2a_9 = 4. \tag{1.2}$$

Schließlich kann eine ungerade Ziffer in b nur durch einen Übertrag entstehen, das heißt, wenn in a an der entsprechenden Stelle eine Ziffer steht, die größer als 5 ist. Damit sind die Anzahlen der ungeraden Ziffern in b und die Anzahl der Ziffern in a, die größer als 5 sind, gleich. Hieraus erhalten wir unter Beachtung von $a_5 = 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned} (2 - a_3) + 2 + (2 - a_7) + (2 - a_9) &= a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ \Leftrightarrow 8 &= a_3 + a_6 + 2a_7 + a_8 + 2a_9. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Aus der ersten Gleichung in (1.2) folgt $a_3 - a_4 + a_6 - a_7 = 0$, addiert man dies zur letzten Gleichung in (1.2), so ergibt sich:

$$a_3 + a_6 - a_7 + a_8 + 2a_9 = 4. \tag{1.4}$$

Der Vergleich der unteren Gleichung in (1.3) mit (1.4) führt dann zu $4 = 3a_7$, was im Widerspruch zu $a_7 \in \{0, 1, 2\}$ steht. □

Aufgabe 2

Gibt es positive ganze Zahlen a und b derart, dass sowohl $a^2 + 4b$ als auch $b^2 + 4a$ Quadratzahlen sind?

Lösung: Nein, es gibt keine solchen Zahlen a und b.

Beweis (durch Widerspruch)**:** Wir nehmen an, für zwei bestimmte positive ganze Zahlen a und b seien $q_{ab} = a^2 + 4b$ und $q_{ba} = b^2 + 4a$ Quadratzahlen. Weil q_{ab}

und q_{ba} durch Vertauschen von a und b ineinander übergehen und nach Annahme beide Zahlen Quadratzahlen sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a \geq b > 0$ ist. Daraus folgt

$$a^2 < a^2 + 4b = q_{ab} \leq a^2 + 4a < a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2;$$

die Quadratzahl q_{ab} liegt also strikt zwischen den Quadratzahlen a^2 und $(a+2)^2$, muss also gleich der Quadratzahl $(a+1)^2$ sein. Aus der mittleren Gleichung in

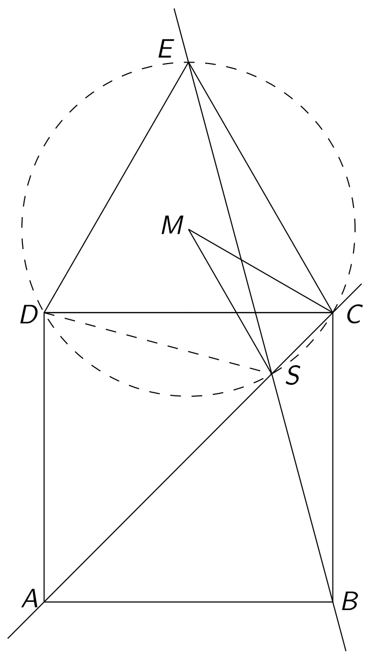
$$q_{ab} = a^2 + 4b = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

folgt $2(2b - a) = 1$ — ein Widerspruch, weil die ganze Zahl auf der linken Seite dieser Gleichung gerade ist und somit ungleich 1 sein muss. □

Aufgabe 3

Einem Quadrat $\square ABCD$ wird ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DCE$ aufgesetzt. Der Mittelpunkt dieses Dreiecks wird mit M bezeichnet und der Schnittpunkt der Gerade AC und BE mit S.
Beweise, dass das Dreieck $\triangle CMS$ gleichschenklig ist.

1. Beweis: Die Spiegelung an der Diagonalen AC des Quadrats überführt bekanntlich das Quadrat in sich, und da S auf dieser Diagonalen liegt, auch den Punkt S auf sich. Also ist $\sphericalangle SDC = \sphericalangle CBS$.
Nach Konstruktion haben die Strecken BC und CE die gleiche Länge, also ist das Dreieck $\triangle EBC$ gleichschenklig mit Basis EB, somit $\sphericalangle BEC = \sphericalangle CBE$, und weil S im Inneren der Strecke BE liegt, können wir dies in der Form $\sphericalangle SEC = \sphericalangle CBS$ schreiben.
Also ist $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SEC$, und mit dem Satz vom Umfangswinkel folgt hieraus sofort, dass E und D auf den gleichen Kreisbogen über der Sehne CS liegen. Dieser Kreisbogen ist also Teil des Umkreises vom $\triangle DCE$, der den Mittelpunkt M hat. Hieraus folgt sofort, dass MS und MC beides Umkreisradien sind, also gleiche Länge haben, was zu beweisen war. □

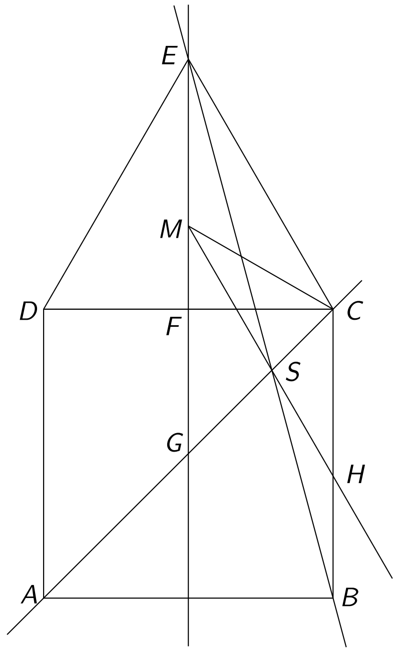


2. Beweis: Die Aufgabe ist bewiesen, wenn wir für das Dreieck $\triangle CMS$ nachweisen, dass

$$\sphericalangle SMC = 30^\circ \text{ und } \sphericalangle MCS = 75^\circ \text{ gilt,} \tag{3.1}$$

weil dann auf Grund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\sphericalangle CSM = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ = \sphericalangle MCS$ folgt, das Dreieck demnach zwei gleich große Basiswinkel besitzt und somit gleichschenklig ist.
Wir führen zunächst wie in der folgenden Skizze über die Bezeichnungen in der Aufgabenstellung hinaus drei weitere Schnittpunkte ein:

Die Gerade EM schneidet die Seite DC bzw. die Strecke AC in deren Inneren. Mit F bzw. G seien die jeweiligen Schnittpunke bezeichnet; mit H bezeichnen wir den Schnittpunkt der Gerade MS und BC, der im Inneren der Seite BC liegt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\overline{AB} = 6$ und damit alle Seiten des Quadrats $\square ABCD$ und des gleichseitigen Dreiecks $\triangle DCE$ die Länge 6 haben.



Wir fassen in einem weiteren Schritt die (bekannten) Verhältnisse im gleichseitigen Dreieck $\triangle DCE$ zusammen: Weil sein Mittelpunkt M mit dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (also dem Mittelpunkt des Umkreises) und dem Schnittpunkt der Höhen zusammenfällt, steht die Gerade EM in F senkrecht auf DC mit

$$\overline{FC} = \tfrac{\overline{DC}}{2} = 3; \tag{3.2}$$

weil M auch der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (also Schwerpunkt) ist, gilt auch

$$2 \cdot \overline{MF} = \overline{EM}; \tag{3.3}$$

weil M auch Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist, gilt zudem

$$\sphericalangle MCD = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle ECD = 30^\circ. \tag{3.4}$$

Zusammen mit $\overline{CE} = 6$ und dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CEF$ folgt aus den Formeln (3.2) und (3.3)

$$\overline{EF} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3},\ \ \overline{EM} = 2\sqrt{3},\ \ \overline{MF} = \sqrt{3}. \tag{3.5}$$

Das Dreieck $\triangle GCF$ ist wegen $\sphericalangle GFC = 90^\circ$, $\sphericalangle FCG = \sphericalangle DCS = \sphericalangle DCA = 45^\circ$ und $\sphericalangle CGF = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ein gleichschenkliges Dreieck mit

$$\overline{FG} = \overline{FC} = 3. \tag{3.6}$$

Die zweite Gleichung in (3.1) folgt nun schnell aus unserer Kenntnis der Winkel $\sphericalangle MCD = 30^\circ$ gemäß (3.4) und $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DCS = 45^\circ$. Die erste Gleichung in (3.1) ergibt sich aus der Betrachtung des Dreiecks $\triangle MHC$, das sich wegen

$$\overline{CM} = \overline{HC} \tag{3.7}$$

auch als gleichschenklig erweisen wird — siehe (3.8). Für die Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle MHC$ folgt aus $\sphericalangle MCH = \sphericalangle MCD + \sphericalangle DCH = 120^\circ$, dass $\sphericalangle HMC = \sphericalangle SMC = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$ ist, also die Aussage der ersten Gleichung in (3.1).

Wir nutzen zum Beweis von (3.7) den *dritten Strahlensatz* und betrachten die drei vom Punkt S ausgehenden Strahlen BE, HM und CA; sie werden von den Geraden EM und BC geschnitten, die beide nicht durch S verlaufen. Weil die

Gerade EM senkrecht auf DC steht, ist sie parallel zur Geraden BC. Der dritte Strahlensatz besagt in dieser Situation, dass $\overline{HC} : \overline{BC} = \overline{MG} : \overline{EG}$, also wegen (3.5) und (3.6)

$$\overline{HC} = \tfrac{\overline{MG}}{\overline{EG}} \cdot \overline{BC} = \tfrac{\overline{FG}+\overline{MF}}{\overline{EF}+\overline{FG}} \cdot \overline{BC} = \tfrac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+3} \cdot 6 = 2\sqrt{3} = \overline{EM} = \overline{CM}, \qquad (3.8)$$

dabei folgt die letzte Gleichung in (3.8), weil $\overline{CM}$ wie $\overline{EM}$ Unkreisradius im gleichseitigen Dreieck $\triangle DCE$ ist. $\square$

Bemerkung: Die Aussage der Aufgabe gilt übrigens auch, wenn das gleichseitige Dreieck $\triangle DCE$ dem Quadrat $\square ABCD$ so „aufgesetzt“ wird, dass der Punkt E im Inneren des Quadrats liegt und ein Punkt S weiterhin als Schnittpunkt der Geraden AC und BE konstruiert wird.

Aufgabe 4

Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 27-Ecks werden sieben beliebig ausgewählt. Beweise, dass es unter diesen sieben Punkten drei Punkte gibt, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden, oder vier Punkte, die ein gleichschenkliges Trapez bilden.

Beweis: Sei M der Umkreismittelpunkt des regelmäßigen 27-Ecks. Dann gilt für alle Eckpunkte A und B des 27-Ecks, die (in dieser Reihenfolge) direkt aufeinander folgen, wenn man den Umkreis gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, dass

$$\sphericalangle AMB = \tfrac{360°}{27} =: \alpha. \qquad (4.1)$$

Wir bezeichnen einen beliebigen, im Folgenden festen der sieben ausgewählten Eckpunkte mit A_1; in der Reihenfolge, in der wir, ausgehend von A_1, die anderen ausgewählten Eckpunkte erreichen, wenn wir den Umkreis gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, seien sie mit A_2, ..., A_7 bezeichnet. Entsprechend bezeichnen wir für i mit $1 \leq i \leq 7$ die Winkel $\sphericalangle A_iMA_{i+1} =: \alpha_i$, wobei $A_8 = A_1$. Im regelmäßigen 27-Eck ist somit für jedes i, $1 \leq i \leq 7$,

$$\sphericalangle A_iMA_{i+1} = \alpha_i =: n_i \cdot \alpha \qquad (4.2)$$

mit einer positiven ganzen Zahl n_i; zudem gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7 = (n_1 + n_2 + \cdots + n_7) \cdot \alpha = 360°. \qquad (4.3)$$

Aus (4.3) und (4.1) folgt

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_7 = 27. \qquad (4.4)$$

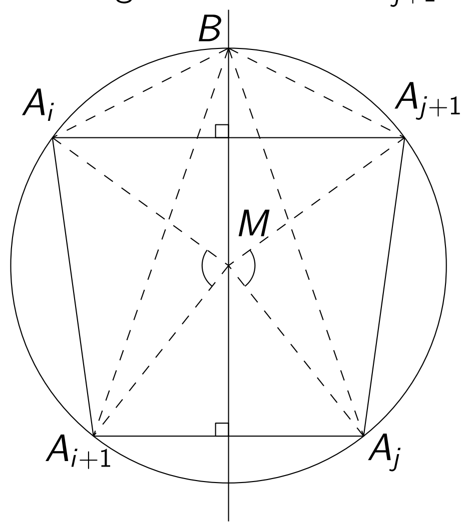
Es gibt daher mindestens zwei Indices i,j mit $i < j$, für die $n_i = n_j =: n$. Denn wären die positiven ganzen Zahlen n_i, $1 \leq i \leq 7$, paarweise verschieden, so folgte $n_1+n_2+\cdots+n_7 \geq 1+2+\cdots+7 = 28$, im Widerspruch zu (4.4). Nach Definition (4.2) ist $n_i = n_j$ gleichbedeutend mit $\alpha_i = \alpha_j$, und die Dreiecke $\triangle A_iA_{i+1}M$ und $\triangle A_jA_{j+1}M$, deren Schenkel die Umkreisradien sind, sind damit kongruent mit

$$\overline{A_iA_{i+1}} = \overline{A_jA_{j+1}}. \qquad (4.5)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Gilt $A_{i+1} = A_j$ oder $A_{j+1} = A_i$, das heißt, die Kanten A_iA_{i+1} und A_jA_{j+1} stoßen in einem Eckpunkt aufeinander, so sind die Kanten nach (4.5) die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

2. Sind A_i, A_{i+1}, A_j und A_{j+1} alle paarweise verschieden, so befinden sich die $27-(n_i+1)-(n_j+1) = 25-2n$ weiteren Eckpunkte des 27-Ecks entweder in dem Segment zwischen A_{i+1} und A_j oder in dem Segment zwischen A_{j+1} und A_i. Weil $25-2n$ eine ungerade Zahl ist, enthält damit genau eines der Segmente ungerade viele der weiteren Eckpunkte. Dies sei das Segment zwischen A_{j+1} und A_i (im anderen Fall verläuft das Argument analog). Weil das 27-Eck regelmäßig ist, kann dann ein Eckpunkt B zwischen A_{j+1} und A_i so gewählt werden, dass $\sphericalangle A_{j+1}MB = \sphericalangle BMA_i$ und, wegen $\alpha_j = \alpha_i$, $\sphericalangle A_jMB = \sphericalangle BMA_{i+1}$, also auch $\overline{A_{j+1}B} = \overline{BA_i}$ und $\overline{A_jB} = \overline{BA_{i+1}}$ — vergleiche nebenstehende Skizze.



Die Dreiecke $\triangle A_iA_{j+1}B$ und $\triangle A_{i+1}A_jB$ sind also gleichschenklig mit Umkreismittelpunkt M. Die Gerade BM steht in diesen gleichschenkligen Dreiecken als Mittelsenkrecht senkrecht auf den Seiten A_iA_{j+1} und $A_{i+1}A_j$, die damit parallel sind. Das (Sehnen-)Viereck $\square A_{i+1}A_jA_{j+1}A_i$ ist also ein gleichschenkliges Trapez. $\square$

Bemerkung: Die Aufgabenstellung lässt sich auf verschiedene Weisen verschärfen: So ist zum Beispiel die Behauptung der Aufgabe bereits erfüllt, wenn nur sechs Eckpunkte ausgewählt wurden.

Wir danken Herrn Prof. Quaisser und Herrn StD Fegert für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Mitteilung

Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft. Allerdings haben einige Abonnenten vergessen, ab dem Jahrgang 2011 den Beitrag von 8 Euro auf **10 Euro** zu erhöhen (eigentlich wurde der Beitrag bereits ab dem Schuljahr 2010/2011, also ab Heft 103, erhöht). Die Redaktion bittet darum, das Versäumte nachzuholen.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 107

Aachen, Inda-Gymnasium:
Kl. 5: Luca Bühler 8.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Kunz)**:**
Kl. 7: Niclas Mayer 13;
Kl. 8: Sebastian Maak 2, Jann Ole Neitzel 13, Katharina Rößler 13;
Kl. 10: Marc de Zoeten 2, Lena Ehrenhard-Dickescheid 4, Sebastian Ludwig 9, Benedikt Maurer 5;
Kl. 11: Andreas Pitsch 4.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler)**:**
Kl. 5: Carla Vo 5;

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 11: Frank Schindler 18.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 6: Iolanthe Köcher 16;

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 8: Anne Vogel 6.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 5: Justus Binnewies 3, Emma Braulke 1, Patrick Coles 2, Laura Häger 4, Maximilian Kolrep 1, Sebastian Schneider 5, Felix Schröder 1.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 6: Kim Bruder 6, Matthias Hannappel 7, Julia Holzhüter 5, Emma Mais 6, Nils Prepens 9, David Storzer 19, Konrad Uecker 5;
Kl. 7: Robin Dobischok 7, Sven Gobbitza 7, Emily Zollmann 5.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 8: Mariam Baher 3;
Kl. 11: Shaima'a Ahmed Doma 15.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 8: Björn Stanischewski 16;
Kl. 9: Maike Stanischewski 19.

Köln, Ursulinengymnasium:
Kl. 9: Elisabeth Böttger 8.

Lehrte, Gymnasium Lehrte:
Kl. 11: Robin Fritsch 17.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 6: Marc Hoffmann 5;
Kl. 7: Melanie Weibrich 7, Marina Witte 16;
Kl. 12: Giang Phi 7, Ann-Kathrin Hientzsch 10.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim:
Kl. 12: Niklas Bockius 22.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Wittekindt):
Kl. 7: Lukas Krader 14;
Kl. 8: Leo Lutz 15;
Kl. 9: Léonard Wagner 3;
Kl. 12: Tim Lutz 12.

München, Max-Planck-Gymnasium:
Kl. 9: Greta Sandor 7.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 7: Jasmin Hallyburton 15, Verena Rüssing 5;
Kl. 9: Mirjam Bourgett 8, Naemi Dörksen 8, Elena Hummel 4, Sandra Wingender 4;
Kl. 10: Janina Vogl 6.

Niddatal, Geschwister-Scholl-Schule:
Kl. 4: Leonie Rößler 17.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Roberto Becciu 7, Manuel Blumenschein 8, Hannah Bock 7, Lara Braun 9, Debora Gampfer 8, Laurin Gerber 9, Tobias Heinze 7, Florian Kuhn 5, Fabian Liepach 9, Simon Lutz 8, Jara Müller-Kästner 10, Krystof Navratil 8, Leon Sobotta 8, Leoni Steinweden 8, Mareike Vestner 8, Dominik Vogel 8;
Kl. 6: Ricardo Bode 12;
Kl. 9: Heiko Kötzsche 22, Thomas Fischer 17.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium:
Kl. 10: Luis Ressel 5.

Wiesbaden, Leibnitzschule:
Kl. 6: Andreas Dernier 2;
Kl. 7: Elisa Dernier 10.

Mainzer Mathematik-Akademie
29. August – 2. September 2012

Das Institut für Mathematik der Universität Mainz veranstaltet vom 29. August bis zum 2. September 2012 die dritte Mainzer Mathematik-Akademie für alle Mathematik-Begeisterte ab 15 Jahren.

In Fachvorträgen, Gruppen- und Projektarbeit mit anschließender Präsentation werden Themen aus (wahlweise) drei Bereichen mit Professoren und wissenschaftlichen Mitarbeitern der Universität Mainz bearbeitet.

Der Workshop findet im Institut für Mathematik statt; wohnen werden wir im Haus Don Bosco, mittags essen wir in der Mensa. Für die Unterbringung (Übernachtung, Frühstück, Abendessen) wird eine Eigenleistung von 40 Euro erhoben, den Restbetrag trägt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz. Anreise ist am Mittwochabend, Abreise am Sonntagmittag.

Falls zur Beurlaubung vom Unterricht eine persönliche Einladung benötigt wird, können wir eine solche gerne zusenden. Für Informationen zur Mainzer Mathematik-Akademie der vergangenen Jahre (zum Beispiel Kursthemen) siehe

`www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie`

Im nächsten Heft gibt es genauere Informationen zur dritten *Mainzer Mathematik-Akademie* und den Link zum Anmeldeformular; Rückfragen unter:
`freunde@mathematik.uni-mainz.de`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr, Bettina Wiebe
Versand: Katherine Pillau

Jahrgang 32 Heft 109 März 2012

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid