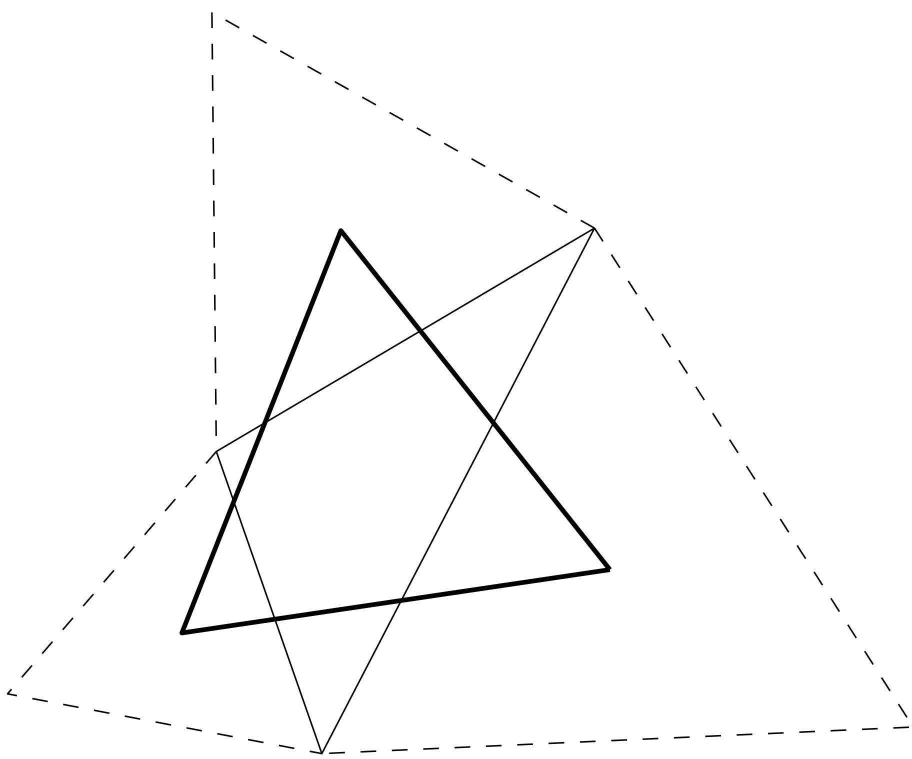
Jahrgang 32 | Heft 110 | Juni 2012

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **31.08.2012.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Kunz, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Gutzler, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Elze, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Mainzer Mathe Akademie
29. August – 2. September 2012

Bei der Mainzer Mathe Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren sich die Gruppen dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathe Akademie anzumelden, die vom 29.08–02.09 an der Universität Mainz stattfindet.

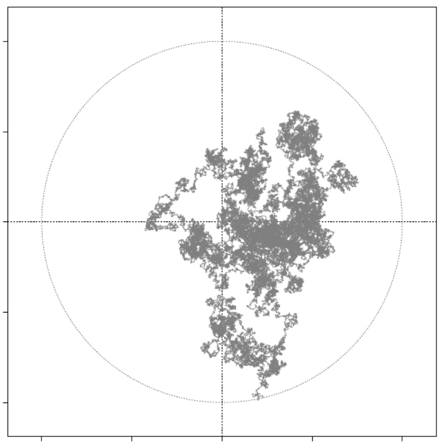
Ablauf der Akademie

Mi., 29.08.	Anreise (bis 18 Uhr) und Kennenlernabend
Do.-Sa., 30.08.-01.09.	Kurse in Arbeitsgruppen; Rahmenprogramm, betreut von Studierenden (zum Beispiel: Stadtführung)
So., 02.09.	Präsentation und Abreise (ab 14 Uhr)

Ein genauerer Terminplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben.

Kurse

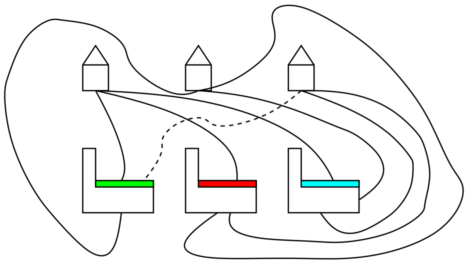
- Vom Münzwurf zur Brownschen Bewegung (Prof. Dr. Reinhard Höpfner)
  In dieser Arbeitsgruppe wollen wir die Brownsche Bewegung und einige ihrer schönen und überraschenden Eigenschaften kennenlernen. Wir beginnen mit einfachen Dingen: Normalverteilung (Gausssche Glockenkurve), n-fach wiederholte Münzwürfe, und Konvergenz von Binomialverteilungen gegen die Normalverteilung. Durch Skalieren von Münzwurffolgen in Raum und Zeit kommen wir auf intuitive Weise zur Brownschen Bewegung und ihren Eigenschaften.

  Wir simulieren Brownsche Pfade auf dem Rechner, in Dimension 1 oder 2 (und können so nacherleben, was der Biologe Robert Brown 1828 unter seinem Mikroskop sah ...), werden darüber hinaus aber auch einige wichtige Eigenschaften der Brownschen Bewegung diskutieren, die kein Computer zeigen kann.

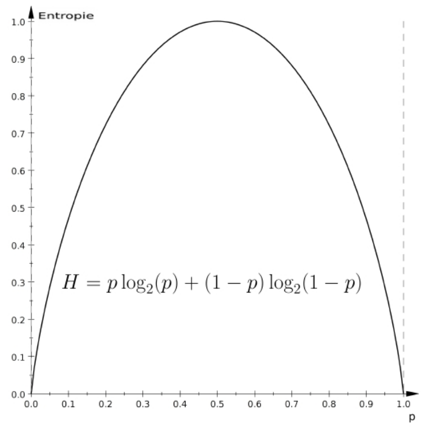
- Graphentheorie (Dr. Cynthia Hog-Angeloni)
  Seit der Antike haben Mathematiker Graphen – also Mengen von Punkten, die eventuell durch Kanten miteinander verbunden sind – untersucht und Fragen der Gestalt gestellt: „Lassen sich fünf Punkte in der Ebene so verbinden (jeder

mit jedem), dass sich keine Linien überkreuzen?" „Wie viele Platonische Körper (Tetraeder, Würfel, etc.) gibt es?" „Kann man drei Häuser mit Gas, Wasser und Strom versorgen, ohne dass sich die Leitungen kreuzen?"



Im zwanzigsten Jahrhundert begegnen uns Probleme wie das des Handlungsreisenden (travelling salesman problem) oder das Briefträgerproblem (Chinese postman problem), die sich als nahe verwandt zu den oben genannten Problemen erweisen, aber ganz konkrete und weiterhin aktuelle Alltagsprobleme wie Planung von Touren eines Kunden- oder Pannendienstes, Herstellung von Leiterplatinen oder auch Genom-Sequenzierung angehen.

- Information und Codierung (Prof. Dr. Manfred Lehn)
  In dieser Arbeitsgruppe wollen wir uns in die Themen Information und Codierung einarbeiten. In der Codierungstheorie geht es im Gegensatz zur Kryptographie nicht darum, wie man die Übertragung von Nachrichten durch Verschlüsselung gegen unbefugtes Mitlesen schützen kann, sondern darum, Nachrichten durch geeignete Verfahren bei der Übertragung durch verrauschte Kanäle robust gegen Übertragungsfehler zu machen.



  Nach Vorüberlegungen zur Informationstheorie (Wie kann man Information messen? Wie codiert man optimal von einem Alphabet, etwa mit den Zeichen a, b, c, ... in ein anderes, etwa Binärzahlen 0, 1, oder das Morsealphabet?) beschäftigen wir uns mit Modellen der Informationsübertragung, Kanalkapazitäten und linearen Blockcodes.

Unterbringung

Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 40€. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:

`www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie`

Das Problem des Brahmagupta

von Hartwig Fuchs

Brahmagupta (598 – um 665), indischer Astronom und Mathematiker, veröffentlichte 628 eine astronomische Schrift mit dem Titel „Brahma-sphuta-siddhânta“ (verbessertes System des Brahma), in der die Kapitel 12 und 18 dem mathematischen Wissen seiner Zeit und den von Brahmagupta selbst erzielten Fortschritten in Geometrie, Arithmetik und Algebra gewidmet sind. So gibt er im Kapitel 18 die erste systematische Darstellung des Rechnens mit der Null und den negativen Zahlen in den vier Grundrechenarten.[1] Daneben beschreibt er auch erstmals lineare und quadratische Gleichungen samt Lösungen in symbolischen Termen.[2]
Und er hinterlässt seiner mathematischen Nachwelt ein Problem, das in der Zahlentheorie und auch sonst wo in der Mathematik auftaucht, zu dessen Lösung er aber nur einige grundlegende Hinweise geben konnte.

Die Aufgabe

Das Problem des Brahmagupta verlangt die Bestimmung aller ganzzahligen x, y mit $x > 1$ von quadratischen Gleichungen des Typs

(1) $x^2 - Dy^2 = 1$ für ganzzahlige $D > 0$, D keine Quadratzahl.

Die Beschränkung der Lösungen x, y auf solche mit $x > 1$ ist naheliegend: Jede Gleichung (1) besitzt die Triviallösung $x = 1$, $y = 0$, die man also nicht suchen muss; und wenn man eine ganzzahlige Lösung x, y kennt, dann sind auch stets die Paare $x, -y$ und $-x, y$ sowie $-x, -y$ als Lösungen von (1) gegeben, sodass es genügt, nach Lösungen x, y mit $x > 1$, $y > 0$ zu fahnden.[3]
Brahmagupta hat in diesem Problem eine große Herausforderung gesehen. Das mag eine Geschichte belegen, die sich so zugetragen haben soll: Als er einmal gefragt wurde, wen er für einen Mathematiker halte, habe er geantwortet:

(2) Für mich ist nur derjenige ein Mathematiker, dem es gelingt, innerhalb eines Jahres eine Lösung x, y mit $x > 1$ der Gleichung $x^2 - 92y^2 = 1$ zu berechnen.

Den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben (1) und (2) erkennt man unmittelbar am Beispiel der Gleichung $x^2 - 61y^2 = 1$, deren kleinste Lösung $x_1 = 1766319049$, $y_1 = 266153980$ Brahmagupta selbst berechnet haben soll.
Es ist nicht bekannt, ob ein Zeitgenosse Brahmaguptas der Aufgabe (2) gewachsen war. Möchtest nicht Du, lieber L(o)eser, versuchen, Dich nach Brahmaguptas Kriterium als Mathematiker zu qualifizieren?

---

1 Zum Vergleich: In Europa rechnet erstmals Leonardo von Pisa (ca. 1170 – ca. 1250), Fibonacci genannt, in seinem Buch „Liber abaci“ (Buch vom Abakus) von 1202 mit Null und mit negativen Zahlen.

2 Die in den Schulen benutzte Auflösungsformel $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ für quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ wurde früher „Brahmaguptas Regel“ genannt, da sie im Wesentlichen auf Brahmagupta zurückgeht.

3 Der Ausdruck „Lösung x, y“ bedeutet daher im Folgenden stets „ganzzahlige Lösung x, y mit $x > 1$, $y > 0$“.

Erste Lösungen

Etwa 1000 Jahre nach Brahmagupta stieß Fermat[4], einer der größten Jäger im Reich der ganzen Zahlen, erneut auf Gleichungen vom Typ (1) und sein untrügliches Gespür für Zahlbeziehungen sagte ihm, dass es sich hierbei um ein lohnendes Jagdobjekt handelt. Tatsächlich hat sich gezeigt, dass die Gleichungen (1) mindestens in zweierlei Hinsicht bemerkenswert sind:

- Lösungen einer Gleichung (1) können erstaunlich weit auseinander liegen.
  Beispiel: Die drei kleinsten Lösungen $x_i > 0$, $y_i > 0$ mit $i = 1, 2, 3$ der Gleichung $x^2 - 13y^2 = 1$ sind:
  $$\begin{array}{lll} x_1 = 649 & x_2 = 842401 & x_3 = 1093435849 \\ y_1 = 180 & y_2 = 233640 & y_3 = 303246540 \end{array}$$
- Bereits die minimalen Abänderungen von D zu $D \pm 1$ können überraschende Größenunterschiede bei den Lösungen der zugehörigen Gleichungen vom Typ (1) zu Tage fördern.
  Beispiel: Die jeweils kleinsten Lösungen $x_1 >$, $y_1 > 0$ von Gleichungen (1) mit $D = 60, 61, 62$ und mit $D = 1620, 1621$ unterscheiden sich beträchtlich:

D	60	61	62	...	1620	1621
x_1	31	1766319049	63	...	161	$\approx 6,3 \cdot 10^{75}$
y_1	4	266153980	8	...	4	$\approx 1,5 \cdot 10^{74}$

  Für das letzte Beispiel gilt sicher die Behauptung: Kleine Ursache – große Wirkung!

Fermat, der mit vielen Mathematikern seiner Zeit in einem regen Informationsaustausch stand, machte in Briefen an Frénicle, Wallis und Lord Brouncker[5] auf die damals neuen Gleichungen (1) in der Form einer Aufgabe wie (2) aufmerksam.
Frénicle konnte von den schwierigen Gleichungen (1) „nur" in den Fällen $D = 61$ (siehe oben), 109 und 127 die jeweils kleinste positive Lösung bestimmen. Wallis und Lord Brouncker erreichten gemeinsam viel mehr: Sie konnten ein Lösungsverfahren entwickeln, das mit Kettenbrüchen arbeitet. Ihre Methode setzt allerdings voraus, dass jede Gleichung (1) eine Lösung mit $x > 1$ besitzt. Dass dies tatsächlich der Fall ist, hat erst Lagrange[6] 1770 bewiesen.
Als Euler[7] das Lösungsverfahren von Wallis und Brouncker studierte, hat er dabei vermutlich das 1668 erschienene Buch „An Introduction to Algebra" benutzt. Dieses Buch ist eine Übersetzung der „Einführung in die Algebra" von J. H. Rahn (1622 – 1676), in der erstmals eine Untersuchung der Gleichungen (1) veröffentlicht ist. Der Herausgeber der „Introduction" und zugleich Übersetzer des Teils der

[4] Pierre de Fermat (1601 – 1665), Jurist und genialer Amateurmathematiker
[5] Bernard Frénicle (um 1605 – 1675), Mathematiker, Physiker und Astronom; John Wallis (1616 – 1703), Geistlicher, der als Autodidakt zur Mathematik kam; William Lord Brouncker (1620 – 1684), hochrangiger Politiker im Dienst der englischen Krone und Mathematiker
[6] Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), einer der bedeutendsten Mathematiker der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts
[7] Leonhard Euler (1707 – 1783), der innovativste und produktivste Mathematiker seiner Zeit

„Einführung“, der von den Gleichungen (1) handelt, war Pell[8]. Euler nahm deshalb wohl an, Pell sei der Entdecker der Gleichungen (1) und so nannte er sie hinfort irrtümlich „Pell'sche Gleichungen“, und dank Eulers mathematischer Autorität heißen sie noch heute so.

Vollständige Lösung

Nach der Bemerkung zu (1) und (3) sollten wir zu einer vollständigen Lösung von Brahmaguptas Problem nur die Lösungen x, y mit $x > 1$ der Pell'schen Gleichungen $x^2 - Dy^2 = 1$ bestimmen. Das gelingt bereits, wenn wir auch nur eine einzige Lösung kennen – nämlich die kleinste Lösung x_1, y_1, bei der x_1 den kleinstmöglichen Wert > 1 besitzt. Dann gilt der Satz:

(3) Ist x_1, y_1 die kleinste Lösung einer Pell'schen Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$, so ergeben sich *alle* anderen Lösungen x_n, y_n mit $n = 2, 3, 4, \ldots$ aus $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$.

Zwischenspiel

Mit etwas Geduld und systematischem Probieren lässt sich die kleinste Lösung x_1, y_1 von Brahmaguptas Aufgabe (2) bestimmen: Es gilt $x_1 = 1151, y_1 = 120$. Damit kann man mit (3) jede weitere Lösung von (2) berechnen, z. B.

$$x_2 + y_2\sqrt{92} = (1151 + 120\sqrt{92})^2 = 2649601 + 276240\sqrt{92}$$
$$\Longrightarrow x_2 = 2649601, y_2 = 276240;$$
$$x_3 + y_3\sqrt{92} = (1151 + 129\sqrt{92})^3 = 6099380351 + 635904360\sqrt{92}$$
$$\Longrightarrow x_3 = 6099380351, y_3 = 635904360; \text{ usw.}$$

An dieser Stelle wollen wir einmal auf die analytische Potenz der Mathematik hinweisen, der es gelingt, selbst noch die Gesetzmäßigkeit zu erkennen, welche dem willkürlich erscheinenden Anwachsen der Lösungen x_i, y_i von (2) zu Grunde liegt.

Zurück zu (3)

Da wir hier den Beweis nicht führen können, dass mit (3) sämtliche Lösungen von (1) außer der kleinsten Lösungen gegeben sind, wollen wir wenigstens zeigen, dass jedes Zahlenpaar, x_n, y_n aus (3) tatsächlich eine Lösung von (1) ist. Mit der binomischen Formel gilt für $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}(x_1 \pm y_1\sqrt{D})^n = {}& [x_1^n + \tbinom{n}{2}x_1^{n-2}(\sqrt{D}y_1)^2 + \tbinom{n}{4}x_1^{n-4}(\sqrt{D}y_1)^4 + \ldots] \\ & \pm[\tbinom{n}{1}x_1^{n-1}y_1 + \tbinom{n}{3}x_1^{n-3}y_1^3(\sqrt{D})^2 + \ldots]\sqrt{D}\end{aligned}$$

Setzt man $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$, so ist $x_n - y_n\sqrt{D} = (x_1 - y_1\sqrt{D})^n$ und es folgt damit:

[8] John Pell (1611 – 1685), ein Mann mit einem bemerkenswerten – man könnte auch sagen merkwürdigen – beruflichen Lebensweg: Zunächst war er Mathematiklehrer in der englischen Provinz, dann Professor der Mathematik an holländischen Universitäten, darauf Diplomat in der Schweiz und schließlich Bischof von London; nach Verlust dieser Position verbrachte er den Rest seines Lebens in tiefster Armut.

$$
\begin{aligned}
x_n^2 - Dy_n^2 &= (x_n + y_n\sqrt{D})(x_n - y_n\sqrt{D}) \\
&= (x_1 + y_1\sqrt{D})^n(x_1 - y_1\sqrt{D})^n \\
&= [(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})]^n \\
&= (x_1^2 - Dy_1^2)^n
\end{aligned}
$$

Weil nun x_1, y_1 als eine Lösung von (1) vorausgesetzt ist, gilt $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$, also $x_n^2 - Dy_n^2 = (x_1^2 - Dy_1^2)^n = 1$ und damit ist x_n, y_n eine Lösung von (1).
Seit Lagrange weiß man, dass jede Pell'sche Gleichung (1) eine Lösung besitzt und (3) zeigt: Kennen wir die kleinste Lösung x_1, y_1, dann können wir – im Prinzip – auch jede andere der unendlich vielen Lösungen angeben: Kleine Ursache – große Wirkung!
Das Problem der vollständigen Lösung einer Gleichung (1) reduziert sich also mit (3) auf die Bestimmung ihrer kleinsten Lösung x_1, y_1. Aber das ist auch im Zeitalter der Computer keine einfache Angelegenheit. Beispiel: Für die Gleichung $x^2 - 1000009y^2 = 1$ ist $x_1 \approx 10^{1117}, y_1 \approx 10^{1114}$ die kleinste (!) Lösung.

Das Vertauschungsproblem

von Ingmar Rubin

Problemstellung

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit einem klassischen Problem aus der Kombinatorik. Das Vertauschungsproblem begegnet uns in verschiedenen Formulierungen in der Mathematikliteratur [1] und im Internet [2]. Zur Einleitung werden vier Probleme aufgezeigt. Die Aufgaben gestatten verschiedene Lösungsansätze und der Leser sollte sich bemühen zunächst eigene Lösungsgedanken zu finden. Im Kern eint die vier Aufgaben ein gemeinsamer Lösungsweg.

Das Problem mit den vertauschten Briefumschlägen

Zum Weihnachtsfest hat Herr K. an seine 30 besten Kunden je einen persönlichen Brief geschrieben. Er gibt die Briefe seiner Sekretärin und bittet diese die Briefumschläge zu adressieren und die Briefe dann zur Post zu bringen. Herr K. verabschiedet sich und wünscht seiner Sekretärin einen schönen Feierabend. Die Briefe hat Herr K. am Computer geschrieben und ausgedruckt. Die Anrede und der Abschiedsgruß sind jedoch in seiner gänzlich unleserlichen Handschrift geschrieben. Nun kann die Sekretärin die Briefe nur zufällig in die Umschläge verteilen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der 30 Adressaten seinen für ihn bestimmten Brief erhält?

---

1 z.B. in Herbert Kütting, Martin J.Sauer: Elementare Stochastik – Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte, Spektrum Akademischer Verlag, 3.Auflage 2011

2 z.B. in G. Roolfs: Fixpunktfreie Permutationen, http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/ Permutation.pdf

Zwei Kartenspiele

Vorgelegt seien zwei normale Kartenspiele mit je 52 Spielkarten (Rommee-Blatt). Jedes der Spiele wird gut durchmischt und dann als Stapel auf den Tisch gelegt (Rückseite zeigt nach oben). Nun wird von jedem Stapel die oberste Karte genommen und als Paar aufgedeckt. Dies wird bis zur letzten Karte wiederholt, sodass schließlich 52 Spielkartenpaare auf dem Tisch liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der gezogenen Paare gleiche Spielkarten aufweist?

Fünf zerstreute Professoren

Nach einem gemeinsamen Abendessen gehen fünf zerstreute Professoren zur Garderobe. In Gedanken versunken, greift jeder zufällig nach irgendeinem Mantel. Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Professor einen falschen Mantel anzieht?

Juleklapp

Eine Schulklasse mit 32 Schülern veranstaltet zur Weihnachtsfeier einen Juleklapp (=Wichteln). Jeder Schüler bringt ein kleines Geschenk mit, dass in einer großen Weihnachtstüte vor Beginn der Feier gesteckt wird. Während der Feier darf nun jedes Kind einmal aus der Tüte ein Geschenk greifen. Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass keines der Kinder sein eigenes Geschenk erhält?

Lösungsfindung mittels Computersimulation

Bei komplexen Fragestellungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann zu Beginn eine Computersimulation hilfreich sein. Wir wollen das Beispiel Briefumschläge behandeln. Die anderen Aufgaben sind äquivalent nur mit anderen n. Wir stellen uns die Briefumschläge von $1 \ldots 30$ in einer Liste zusammengestellt vor. Es gibt dann genau 30! mögliche Reihenfolgen (Permutationen) die Briefumschläge in einer Reihe hinzulegen, z.B.

$$L_1 = (20, 2, 11, 27, 10, 1, 6, \ldots 7, 21, 23, 25, 16, 4, 19, 5, 29).$$

Ebenso gibt es bei den 30 Briefen genau 30! Reihenfolgen diese in einer zweiten Reihe anzuordnen, z.B.

$$L_2 = (18, 6, 11, 27, 3, 5, 8, \ldots 21, 7, 15, 14, 12, 22, 28, 23).$$

Wir suchen nun die Anzahl an Listenpaaren (L_1, L_2) bei denen es an keiner Position zu einer Übereinstimmung kommt, d.h. jeder Brief steckt in einem falschen Umschlag. Das obige Beispiel wäre kein solches Paar, da an dritter Stelle die 11 und an vierter Stelle die 27 in beiden Listen steht. Die folgende Sequenz in *Mathematica* erzeugt aus einer geordneten Liste `L0 = Range[n]` mit n Einträgen je zwei zufällig angeordnete Listen: `L1 = RandomSample[L0]` und `L2 = RandomSample[L0]`. Diese werden anschließend Position für Position verglichen (Variable m). Wenn es an keiner Stelle zur Übereinstimmung kommt ($m = 0$), wird der Zähler t um eins erhöht. Das Ganze wird in einer Schleife $i_{max} = 100000$ durchlaufen. Am Ende wird der Quotient $t \div i_{max}$ berechnet, der ein Maß für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist.

```
In[1]:= imax = 100000;
In[2]:= n = 30; m = 0; t = 0;
In[3]:= L0 = Range[n];
In[4]:= For[i = 0, i < imax, i++,
L1 = RandomSample[L0];
L2 = RandomSample[L0];
m = 0;
For[k = 1, k < n + 1, k++, If[L1[[k]] == L2[[k]], m++ ]];
If[m == 0, t++];
]
In[5]:= N[t/imax, 10]
Out[5]= 0.3649000000
```

Die Wahrscheinlichkeit beträgt bei den 30 Briefumschlägen 36.5%. Mit anderen Werten für n erhalten wir:

n	2	3	4	5	6
$W(n)$	0.5010000	0.3309500	0.3742400	0.3662800	0.3654600
n	12	20	32	52	...
$W(n)$	0.3672400	0.3652200	0.3649000	0.3669100	...

Die Wahrscheinlichkeit konvergiert mit wachsenden n rasch gegen den Wert 0.3678794412. Bemerkenswert ist, dass in all unseren Beispielaufgaben die gesuchte Wahrscheinlichkeit fast gleich ist $(36.5\%, \dots, 36.7\%)$ obwohl der Wert n in einem Bereich von $5 \leq n \leq 52$ liegt.

Lösungsansatz: Binomialverteilung

Eine erste Näherungslösung können wir uns mit Hilfe der Binomialverteilung verschaffen. Diesmal sei das Beispiel mit den beiden Kartenspielen betrachtet. Zunächst überlegen wir uns die Gesamtzahl aller möglichen Kartenpaare. Bei $2n$ Spielkarten gibt es

$$n^2 = 52^2 = 2704 \text{ Paare.}$$

Von dieser Gesamtzahl gibt es genau $n = 52$ Trefferpaare, d.h. Paare mit gleichen Karten (Kreuz Ass + Kreuz Ass, Kreuz König + Kreuz König usw.). Wir denken uns nun einen Behälter in dem alle 2704 Kartenpaare liegen. Je zwei Karten seien dabei mit einer Büroklammer zu einem Paar verbunden. Wir entnehmen dem Behälter nun nacheinander (ohne zurücklegen) 52 Paare. Genau das passiert beim Aufstellen der zwei gemischten Stapel. Die beiden Spielkartenstapel repräsentieren also nur eine Stichprobe vom Umfang $n = 52$ aus der Gesamtzahl aller 2704 möglichen Paarungen. Bei großen Werten für n können wir näherungsweise die

Binomial-verteilung (Ziehung mit Zurücklegen) benutzen. Die Trefferwahrscheinlichkeit p beträgt:

$$p = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{52} \approx 0.01923.$$

Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer in einer Stichprobe vom Umfang n beträgt bei der Binomialverteilung:

$$w(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad p = \frac{1}{n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit in einer Stichprobe vom Umfang $n = 52$ keinen Treffer zu haben beträgt dann:

$$w(k=0) = (1-p)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{51}{52}\right)^{52} \approx 0.3643135196.$$

Für steigendes n konvergiert die Wahrscheinlichkeit gegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.3678794412.$$

Fixpunktfreie Permutationen

Eine exakte Lösung des Problems gelingt uns mit Hilfe der Kombinatorik. Wir benötigen dazu einen kleinen Einschub über Permutationen, also Vertauschungen. Permutationen können Fixpunkte besitzen. Das sind Elemente, die auf sich selbst abgebildet werden.

Definition 1: Sei π eine Permutation einer Menge M. Ein Element i von M heißt Fixpunkt von π, wenn gilt:

$$\pi(i) = i.$$

Beispiel: Die Permutation

$$\pi = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,1\,3\,2\,5}$$

hat die Fixpunkte 3 und 5.

Definition 2: Eine Permutation π der Menge M heißt fixpunktfrei, wenn sie keinen Fixpunkt besitzt, d.h. wenn für alle Elemente i aus M gilt:

$$\pi(i) \neq i.$$

Beispiel: Die folgende Permutation ist fixpunktfrei:

$$\pi = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,1\,2\,5\,3}.$$

Die Frage lautet: Wie viele fixpunktfreie Permutationen einer n-elementigen Menge gibt es? Sei A die Menge aller Permutationen von $M = \{1, 2, ..., n\}$. Dann ist $|A| = n!$. Sei A_i die Menge aller Permutationen von M, die den Fixpunkt i haben. Dann kann man die Anzahl $a(n)$ aller fixpunktfreien Permutationen wie folgt berechnen:

$$a(n) = \text{Anzahl aller Perm. minus Anzahl der Perm. mit irgendeinem Fixpunkt.}$$

Es gilt die folgende Formel[3]:

[3] Eine Herleitung findet ihr in A. Beutelspacher: Vorlesungsskript 2. Kapitel an der UNI Giessen, http://www.uni-giessen.de/wgms/WGMS3/ und in G. Roolfs: Fixpunktfreie Permutationen, http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/Permutation.pdf

$$a(n) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} \cdots \pm \ldots \frac{n!}{n!} = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Kartenpaaren jedes Paar aus verschiedenen Karten besteht (genau die oben geschilderten fixpunktfreien Permutationen), beträgt dann:

$$w(n) = \frac{a(n)}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, \qquad \lim_{n \to \infty} w(n) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Bei 52 Spielkarten erhalten wir:

$$w(52) = \sum_{i=1}^{52} \frac{(-1)^i}{i!} \approx 0.36787944117144232160.$$

Die Wahrscheinlichkeit kein Kartenpaar mit gleichen Karten zu ziehen beträgt 36.79%.

Historischer Rückblick - *Rencontre-Problem*

Eine sehr verständliche Einführung in das Gebiet *Kombinatorisches Zählen* findet sich in Küttings und Sauers Elementare Stochastik – Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. Hier wird auch ein historischer Rückblick zur Aufgabenstellung gegeben. Erstmals erwähnt wurde 1708 von Pierre de Montmort (1678–1719) das Treize Spiel:

Gegeben sind 13 Karten, die mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots 13$ durchnummeriert sind. Die Karten werden gut gemischt, und ein Spieler hebt eine Karte nach der anderen ab. Stimmt keine Kartenzahl mit den Ziehungsnummer überein, so gewinnt der Spieler, andernfalls die Bank. Ist das Spiel fair?

Das Spiel gehört zu den *problemes des rencontres* (zufälliges Zusammentreffen) die seit dem 18. Jh. in verschiedenen Versionen bekannt sind:

- Problem der vertauschten Briefe (nach Johann Lambert, 1728–1777),
- Problem der vertauschten Jockeys,
- Problem der vertauschten Hüte,
- Paradoxa der Geschenke usw.

Leonard Euler (1707-1783) gab zur Bestimmung der Folge $a[n]$ (Anzahl der fixpunktfreien Permutationen) die folgende Rekursionsgleichung an:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= (n-1) \cdot (a_{n-1} + a_{n-2}), \quad n \geq 3, \end{aligned}$$

mit der expliziten Lösung:

$$a_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} \cdots \pm \ldots \frac{n!}{n!}.$$

Die besondere Aufgabe

von Robin Fritsch

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Außerdem sei D auf $\overline{BC}$, sodass AD die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ ist.

a) Berechne die Seitenverhältnisse $\overline{BC} : \overline{AB}$ und $\overline{CD} : \overline{AD}$.

b) Diese Verhältnisse sind, wie man leicht sieht, gleich $\sin \frac{90^\circ}{2}$ und $\sin \frac{90^\circ}{4}$.
Beweise allgemein für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Gleichung:

$$\sin \frac{90^\circ}{2^n} = \frac{\overbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}^{n \text{ Wurzeln}}}{2}.$$

c) Finde einen ähnlichen Term auch für $\cos \frac{90^\circ}{2^n}$.

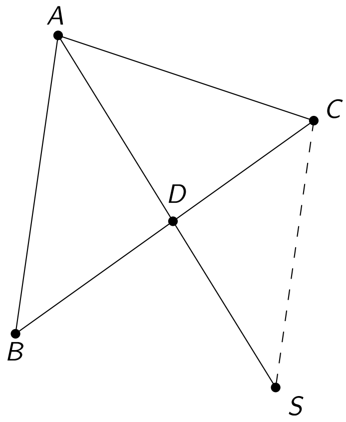
Lösung

a) Wir verwenden den folgenden Hilfssatz:

Im Dreieck $\triangle ABC$ schneide die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ die Seite $\overline{BC}$ im Punkt D. Dann gilt: $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$.

Beweis des Hilfssatzes:
Es sei S der Schnittpunkt der Geraden AD mit der Parallelen durch C zu AB. Dann gilt:

$$\sphericalangle CSA = \sphericalangle BAD = \sphericalangle SAC.$$



Deshalb ist das Dreieck $\triangle ASC$ gleichschenklig und es folgt $\overline{AC} = \overline{CS}$. Da die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle SCD$ aber ähnlich sind, gilt auch $\overline{AB} : \overline{CS} = \overline{BD} : \overline{CD}$, woraus mit $\overline{AC} = \overline{CS}$ unmittelbar die Behauptung folgt.

Wenden wir uns nun der eigentlichen Aufgabe zu:
Da das Verhältnis zweier Strecken gesucht ist, können wir $\overline{AB} = 1$ setzen. Dann folgt aber aus dem Satz des Pythagoras, da $\triangle ABC$ gleichschenklig ist, dass

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{BC}^2 = \frac{1}{\overline{AB}^2} = 1^2, \text{ also } \overline{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und damit für das gesuchte Seitenverhältnis

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aus dem Hilfssatz folgt $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AB} : \overline{BC} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, also $\overline{BD} = \sqrt{2} \cdot \overline{CD}$. Zusammen mit $\overline{BD} + \overline{CD} = \overline{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \overline{BD} + \overline{CD} = \sqrt{2} \cdot \overline{CD} + \overline{CD} = (\sqrt{2}+1) \cdot \overline{CD},$$
$$\overline{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Damit folgt aus dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{6-4\sqrt{2}}{4} =$$
$$2 - \sqrt{2} \quad \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Schließlich gilt:

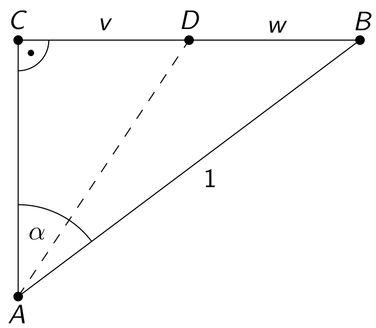
$$\overline{CD} : \overline{AD} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

b) Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion. Da das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig rechtwinklig ist, gilt $\sphericalangle BAC = \frac{90°}{2}$ und $\sphericalangle DAC = \frac{90°}{4}$. Mit (a) haben wir also gezeigt:

$$\sin\frac{90°}{2} = \overline{BC} : \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\frac{90°}{4} = \overline{CD} : \overline{AD} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Die Behauptung gilt daher für $n = 1$ und $n = 2$. Nun folgt der Induktionsschritt:

Dazu betrachten wir erneut ein Dreieck $\triangle ABC$, das erneut rechtwinklig bei C, aber nicht notwendigerweise gleichschenklig sei. Mit den Bezeichnungen in der nebenstehenden Skizze und $\overline{AB} = 1$ folgt $\overline{BC} = \sin\alpha$ und $\overline{AC} = \cos\alpha$. Somit gilt $v + w = \sin\alpha$ und nach dem Hilfssatz aus (a) ist $\frac{w}{v} = \frac{1}{\cos\alpha}$. Damit ergibt sich:



$$\sin\alpha = v + w = v + \frac{1}{\cos\alpha} \cdot v = \left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) \cdot v,$$
$$v = \sin\alpha \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{\cos\alpha}} = \sin\alpha \cdot \frac{1}{\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha+1}. \qquad (1)$$

Nun folgt mit dem Satz des Pythagoras und unter Benutzung von $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= \overline{AC}^2 + v^2 = (\cos\alpha)^2 + \left(\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha+1}\right)^2\\ &= \frac{(\cos\alpha)^2\cdot(\cos\alpha+1)^2 + (\sin\alpha)^2\cdot(\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha+1)^2}\\ &= (\cos\alpha)^2 \cdot \frac{(\cos\alpha)^2 + 2\cos\alpha + 1 + (\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+1)^2}\\ &= (\cos\alpha)^2 \cdot \frac{2\cos\alpha+1+1}{(\cos\alpha+1)^2} = (\cos\alpha)^2 \cdot \frac{2}{\cos\alpha+1}.\end{aligned}$$

Also ist $\overline{AD} = \cos\alpha\sqrt{\frac{2}{\cos\alpha+1}}$ und mit (1) gilt dann:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha+1}}{\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{2}{\cos\alpha+1}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+1}\cdot\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sin(\alpha)^2}{(\cos\alpha+1)\cdot 2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\cdot 2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (2)$$
$$= \sqrt{\frac{1-1\sqrt{1-\sin(\alpha)^2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-2\sin(\alpha)^2}}{2}}.$$

Wir definieren nun für $n = 1, 2, 3, \ldots$ den Ausdruck

$$w_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}_{n \text{ Wurzeln}}.$$

Bemerke, dass $w_n \leq 2$ für alle natürlichen Zahlen n ist, denn: $w_1 = \sqrt{2} \leq 2$ und ist $w_n \leq 2$ für ein n, so gilt $w_{n+1} = \sqrt{2+w_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$. Also lässt sich die zu zeigende Behauptung als $\sin\frac{90^\circ}{2^n} = \frac{\sqrt{2-w_{n-1}}}{2}$ schreiben.
Ist diese Behauptung nun für ein n erfüllt, so folgt mit (2):

$$\sin\frac{90^\circ}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2\cdot\sin\frac{90^\circ}{2^n}\right)^2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2\cdot\frac{\sqrt{2-w_{n-1}}}{2}\right)^2}}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{4-(2-w_{n-1})}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+w_{n-1}}}}{2} = \frac{\sqrt{2-w_n}}{2}.$$

Also gilt die Behauptung auch für $n+1$ und damit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

c) Aus der in (b) bewiesenen Behauptung folgt offensichtlich:

$$\cos\frac{90^\circ}{2^n} = \sqrt{1-\sin\left(\frac{90^\circ}{2^n}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2-w_{n-1}}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4-(2-w_{n-1})}{4}} = \frac{\sqrt{2+w_{n-1}}}{2}$$
$$= \frac{w_n}{2} = \frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}^{n \text{ Wurzeln}}}{2}.$$

Die Ecke für den Computer-Fan

Folge mit Primzahlen

Wenn man die Primzahlen nacheinander multipliziert und 1 dazu addiert, also

$$2 + 1 = 3,$$
$$2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311,$$

erhält man zunächst wieder Primzahlen. Aber ab

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$$

scheint es mit der Primzahlerzeugung vorbei zu sein. Stimmt das?
Versuche herauszufinden, ob es natürliche Zahlen $5 < n \leq 100$ gibt, sodass

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

eine Primzahl ist (p_i bezeichne hierbei die i-te Primzahl, $1 \leq i \leq n$).

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2012 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 108

Eine unbewiesene Primzahl-Vermutung

Es seien m und n zwei natürliche Zahlen mit $m \geq 2$ und geradem $n \geq 2$; ferner sei $s = m^0 + m^1 + m^2 + \ldots + m^n$ mit (wie üblich) $m^0 = 1$. Wir stellen die folgende bisher unbewiesene Behauptung auf:

Für jedes m lässt sich eine gerade Zahl n finden, sodass s eine Primzahl ist.

Untersuche diese Vermutung für ein möglichst großes Anfangsstück der Folge $m = 2, 3, 4, 5, \ldots$. (H.F.)

Ergebnisse

Zunächst sei angemerkt, dass die Voraussetzung, dass bei gegebenem $m \geq 2$ das gesuchte n gerade und ≥ 2 sein soll, keine Verschärfung der Problemstellung darstellt; denn $n = 1$ kommt genau dann vor, wenn m vor einer Primzahl steht

(Beispiele: $m = 2, 4, 6, 10, ...$), was die Aufgabenstellung für diese m auf triviale Weise löst. Ist aber nun $n > 1$ ungerade, also $n = 2k + 1$ mit $k \geq 1$, so gilt:

$$\begin{aligned} s &= 1 + m + m^2 + m^3 + ... + m^{2k} + m^{2k+1} \\ &= (1 + m) + m^2 \cdot (1 + m) + ... + m^{2k} \cdot (1 + m) \\ &= (1 + m) \cdot (1 + m^2 + ... + m^{2k}), \end{aligned}$$

sodass s von $1 + m$ geteilt wird und daher keine Primzahl sein kann. Also kann die Aufgabenstellung im nicht-trivialen Fall höchstens von geradem $n \geq 2$ gelöst werden, was aber nicht für alle m gelingt, wie Niklas Bockius vom Otto-Schott-Gymnasium in Mainz und Bettina Diller von der Imma-Mack-Realschule in Eching festgestellt haben. Beide haben für m den Bereich von 2 bis 100 untersucht und mit ihren Programmen für zahlreiche m ein passendes n gefunden; so gilt beispielsweise:

$2^0 + 2^1 + 2^2 = 7$; $3^0 + 3^1 + 3^2 = 13$; $5^0 + 5^1 + 5^2 = 31$; $6^0 + 6^1 + 6^2 = 43$; $7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2801$; $8^0 + 8^1 + 8^2 = 73$; $10^0 + 10^1 + 10^2 + ... + 10^{18} = 1 ... 1$, eine Zahl mit 19 Einsen – vergleiche Monoid 107, Seite 37.

Für eine Reihe von Zahlen m lieferten die Programme aber auch kein passendes m beziehungsweise musste die Berechnung wegen zu großer Zahlen abgebrochen werden; bei Niklas Bockius waren dies die Zahlen 4, 9, 16, 18, 25, 32, 36, 39, 42, 49, 51, 64, 81, 91, 92, 96, 100.

Dabei fiel Niklas auf, dass man für keine Quadratzahl ein passendes n finden konnte. Diese Vermutung lässt sich auch beweisen:
Aus der Schule ist die Gleichung $m^0 + m^1 + ... + m^n = \frac{m^{n+1}-1}{m-1}$ bekannt (Beweis durch vollständige Induktion). Da m quadratisch sein soll, setzen wir $m = q^2$ mit $q \geq 2$. Also gilt in diesem Falle:

$$s = m^0 + m^1 + m^2 + ... + m^n = \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} = \frac{(q^{n+1})^2-1}{q^2-1} = \frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}+1)}{(q-1)(q+1)}.$$

Weiter gilt:

$q^{n+1} - 1 = (q - 1) \cdot (q^n + q^{n-1} + ... + 1)$ und
$q^{n+1} + 1 = (q + 1) \cdot (q^n - q^{n-1} \pm ... + 1)$,

wobei in der zweiten Zerlegung die Tatsache, dass n gerade ist, für das Pluszeichen vor der 1 im Faktor $q^n - q^{n-1} \pm ... + 1$ verantwortlich ist. Somit ergibt sich für s die nicht-triviale Zerlegung

$$s = (q^n + q^{n-1} + ... + 1) \cdot (q^n - q^{n-1} \pm ... + 1)$$

und s kann für ein quadratisches m nie eine Primzahl sein. Damit ist nachgewiesen, dass die Behauptung, wonach sich für *jedes* m eine Zahl n finden lässt, sodass s eine Primzahl ist, in dieser Allgemeinheit *falsch* ist. (E.K.)

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 109

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Ein Kurort mit drei Quellen

In einem Kurort gibt es drei heiße Quellen. Das Schwimmbad dort kann aus der ersten Quelle in 30 Minuten, aus der zweiten in 20 Minuten und aus der dritten in 12 Minuten gefüllt werden. Eines Tages beschließt der Kurleiter, alle drei Quellen gleichzeitig zu benutzen. Nach welcher Zeit ist das Bad voll? (WJB)

Lösung:

Pro Minute fließen aus der ersten Quelle $\frac{1}{30}$ Badfüllung, aus der zweiten $\frac{1}{20}$ und aus der dritten $\frac{1}{12}$. In einer Minute wird also der Anteil $\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{2+3+5}{60} = \frac{1}{6}$ der Badfüllung einfließen, also wird das Bad nach 6 Minuten gefüllt sein.

II. Teiler einer großen Zahl

Wie heißt die kleinste natürliche Zahl, die durch jede Zahl t mit $t = 1, \dots, 100$ teilbar ist? Wie viele Teiler hat sie? (H.F.)

Lösung:

Es sei Z die gesuchte Zahl. $t \mid Z$ bedeutet, dass t ein Teiler von Z ist, während $t \nmid Z$ bedeutet, dass dies nicht der Fall ist.

Da für Z gelten soll: $2 \mid Z$, $4 \mid Z$, $8 \mid Z \dots$, $64 \mid Z$ ist zu fordern $2^6 \mid Z$; weil aber Z kleinstmöglich sein soll, muss man $2^7 \nmid Z$ verlangen. Ganz entsprechend ist zu fordern:

$3^4 \mid Z$ und $3^5 \nmid Z$, $5^2 \mid Z$ und $5^3 \nmid Z$, sowie $7^2 \mid Z$ und $7^3 \nmid Z$. Also muss für Z gelten:

(1) $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \mid Z$.

Jede der 21 Primzahlen $11, 13, 17, \dots, 89, 97$ muss ein Teiler von Z sein, nicht aber $11^2, 13^2, \dots, 97^2$, so dass für Z gelten muss

(2) $11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 97 \mid Z$.

Aus (1) und (2) erhält man $Z = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 97$, also

$$Z = 69\,720\,375\,229\,712\,477\,164\,533\,808\,935\,312\,303\,556\,800.$$

Da jede Zahl $t \leq 100$ eine Primzahl < 100, eine Potenz 2^i, $i \leq 6$; 3^j, $j \leq 4$; 5^k, $k \leq 2$; 7^k, $k \leq 2$ oder ein Produkt aus Primzahlen < 100 und den genannten Primzahlpotenzen ist, gilt: $t \mid Z$ und Z ist kleinstmöglich.

Die Anzahl der Primzahlen $11, 13, \dots, 97$ ist 21. Die Zahl hat dann $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2^{21} = 6\,606\,022\,880$ Teiler! Es gilt nämlich der Satz: Die Zahl $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_n^{e_n}$, p_i Primzahlen, $e_i \geq 1$ hat $(e_1 + 1) \cdot \dots \cdot (e_n + 1)$ Teiler.

III. Teilbarkeit durch Neun

Die Summe dreier unmittelbar aufeinander folgenden positiven ganzen Kubikzahlen ist stets durch neun teilbar. Stimmt das? (H.F.)

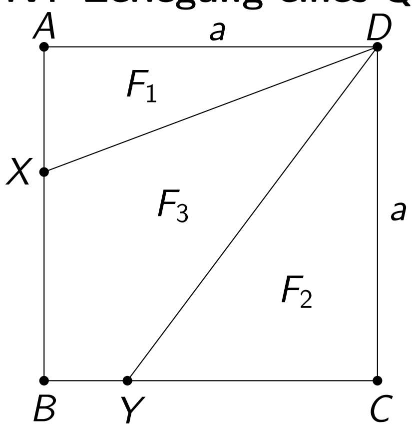
Lösung:

Es seien n^3, $(n+1)^3$ und $(n+2)^3$ drei positive ganze Kubikzahlen. Für ihre Summe S gilt:

$$\begin{aligned} S &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \\ &= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= (3n(n-1)(n+1) + 3n) + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3n(n-1)(n+1) + 9n^2 + 2 \cdot 9n + 9 \end{aligned}$$

Von den drei Zahlen $(n-1)$, n und $n+1$ ist eine ein Vielfaches von 3. Somit ist das Produkt $3n(n-1)(n+1)$ ein Vielfaches von 9. Daraus folgt: S ist ein Vielfaches von 9.

IV. Zerlegung eines Quadrats



Im Quadrat $ABCD$ sind der Punkt X auf der Strecke AB und der Punkt Y auf der Strecke BC so zu bestimmen, dass für die Flächen F_1, F_2 und F_3 der Dreiecke $\triangle AXD$ und $\triangle YCD$ und des Vierecks $XBYD$ gilt: $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$. (H.F.)

Lösung:

Die Seitenlänge des Quadrats sei a; ferner $|AX| = \alpha \cdot a$ mit $0 < \alpha < 1$ und $|YC| = \beta \cdot a$ mit $0 < \beta < 1$. Damit ist $F_1 = \frac{1}{2}\alpha a^2$ und $F_2 = \frac{1}{2}\beta a^2$. Daraus folgt wegen $F_1 : F_2 = 1 : 2$, also $F_2 = 2 \cdot F_1$, dass $F_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha a^2$ ist und ebenso aus $F_1 : F_3 = 1 : 3$, also $F_3 = 3 \cdot F_1$, dass $F_3 = 3 \cdot \frac{1}{2}\alpha a^2$ ist. Nun gilt: $F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2}\alpha a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha a^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}\alpha a^2 = 3\alpha a^2$ und $F_1 + F_2 + F_3 = a^2$. Also ist $\alpha = \frac{1}{3}$. Wegen $F_2 = 2F_1$ ist $\frac{1}{2}\beta a^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2$, sodass $\beta = \frac{2}{3}$ ist. Daher sind die Punkte X und Y so zu wählen, dass $|AX| = \frac{1}{3}a$ und $|YC| = \frac{2}{3}a$ gelten. Probe: $F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$, $F_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a^2 = \frac{2}{6}a^2 = 2 \cdot F_1$ und $F_3 = a^2 - F_1 - F_2 = a^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{2}{6}a^2 = \frac{3}{6}a^2$. Also gilt $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$.

V. Die Abschlussprüfung

Es war keine gute Idee, das Fest auf den Vorabend der Jahrgangsklausur zu legen! 105 unausgeschlafene Schüler brüten über den 50 Fragen, und es zeichnet sich ab, dass die durchschnittliche Erfolgsquote wohl eher unter 50% liegen wird. In diesem Fall gibt es aber immerhin eine Sonderregel, dass schon bestanden hat, wer die durchschnittliche Anzahl richtiger Antworten um nicht mehr als 15% unterschreitet.

Rachel hat bisher 22 Fragen korrekt beantwortet und weiß zu einer weiteren die richtige Antwort. Wenn der bisherige Durchschnitt 49,98% an richtigen Antworten beträgt, wäre es dann besser für sie, die dreiundzwanzigste Frage zu beantworten oder nicht? (C. H.-A.)

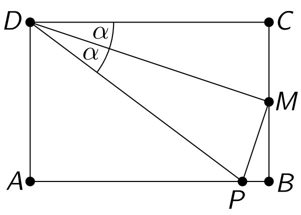
Lösung:

Falls Rachel die dreiundzwanzigste Frage korrekt beantwortet, steigt der Durchschnitt richtig beantworteter Fragen auf 50% und Rachel wäre mit 23 von 50 möglichen richtigen Antworten durchgefallen.

Falls sie die Frage nicht beantwortet, greift die 15%-Klausel: Dann liegt der Durchschnitt bei 24,99 richtigen Antworten, minus 15%, das sind 3,75 Antworten, ergibt 21,24 richtige Antworten, d.h. Rachel hätte mit 22 richtig beantworteten Fragen bestanden.

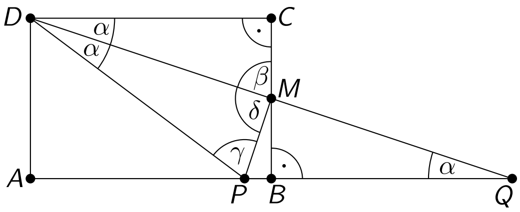
Es ist also günstiger für sie, eine Frage nicht zu beantworten, obwohl sie die richtige Lösung sicher weiß!

VI. Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks



Konstruiere im Rechteck $ABCD$ den Mittelpunkt M der Seite BC sowie einen Punkt P auf der Seite AB so, dass die Winkel $\sphericalangle MDC$ und $\sphericalangle PDM$ gleich groß sind. Dann ist das Dreieck $\triangle DPM$ rechtwinklig. Du siehst es – kannst Du es auch begründen? (H.F.)

Lösung:

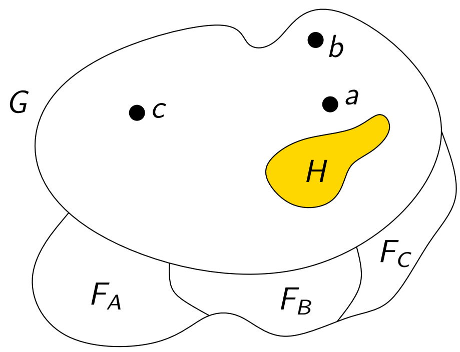


Mit den Bezeichnungen der Figur gilt: $\alpha + \beta = 90°$ (denn in einem Dreieck haben alle Winkel zusammen eine Größe von 180° und der dritte Winkel ist 90° groß). Nun ist $\sphericalangle BMQ = \beta$, sodass $\sphericalangle MQB = \alpha$ ist. Daher sind die Dreiecke MCD und MBQ kongruent (d. h. übereinstimmend in Winkeln und Längen), denn $|CM| = |MB|$. Also gilt $|DP| = |PQ|$ im gleichschenkligen Dreieck $\triangle DPQ$. Daraus folgt: Die Dreiecke $\triangle DPM$ und $\triangle PQM$ sind kongruent mit $\sphericalangle MPD = \sphericalangle QPM = \gamma$. Im Dreieck $\triangle DPQ$ gilt also $2\alpha + 2\gamma = 180°$ und daraus folgt $\alpha + \gamma = 90°$, sodass $\delta = 90°$ ist.

VII. Ein Planungsproblem

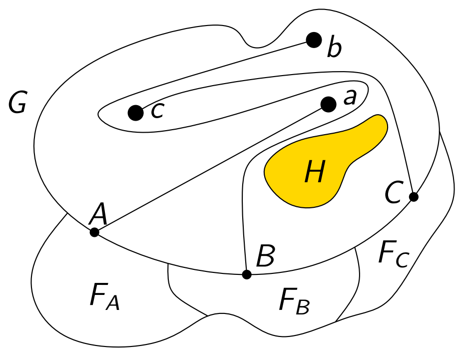
In einer Ebene besitzen Ali, Bab und Cham in dieser Reihenfolge jeweils eines der Felder F_A, F_B und F_C, sowie jeweils einen Brunnen a, b und c – die Situation gibt die nebenstehende Landkarte wieder.

Zur Bewässerung der Felder sollen nun Kanäle aA, bB und cC von den Brunnen zu den Punkten A, B und C mit A auf der Grenze von F_A (und so weiter) gegraben werden. Wie sollten diese Kanäle gebaut werden, damit kein Kanal außerhalb der Gebietsgrenze G, über den Hügel H, durch ein fremdes Feld oder durch einen anderen Kanal verläuft, wobei genau einer der Kanäle geradlinig sein soll?



(H.F.)

Lösung:



Ein Kanal cC kann nicht geradlinig sein, denn sonst müsste cC über den Hügel oder das Feld F_B verlaufen. Wenn aber die Kanäle aA oder bB geradlinig geplant werden, dann können die drei Kanäle gebaut werden – zum Beispiel so wie in der nebenstehenden Landkarte eingezeichnet wurde.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Lösung gesucht

Wie lauten die ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $x^2 - y^2 = 2012$ (falls es solche Lösungen überhaupt gibt)? (H.F.)

II. Primzahl-Summen

Es sei p eine Summe aus Primzahlen, mit $p = 100$. Was ist die Summe mit

a) der kleinst möglichen Anzahl an Summanden?

b) der größt möglichen Anzahl ungerader Summanden?

c) der größten Anzahl verschiedener Summanden? (H.F.)

III. Faulige Äpfel

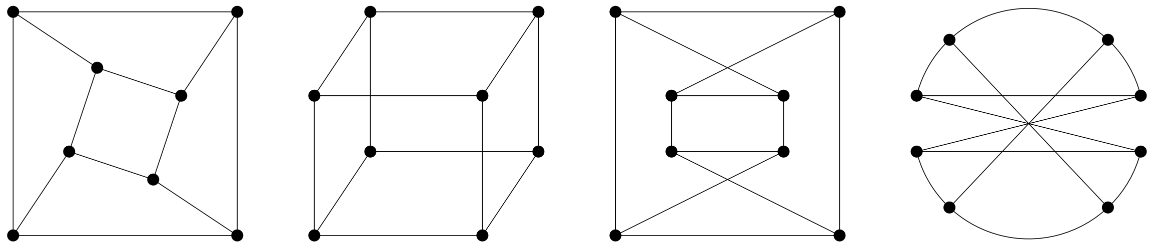
Herr K. will eine Kiste mit 80 Äpfeln kaufen. Auf seine Frage, ob vielleicht einige der Äpfel faulig sein könnten, erhält er die Antwort: „Wenn Sie aus der Kiste 9 Äpfel nehmen, können Sie sich darauf verlassen, dass 6 davon gut sind.“ Wie viele faulige Äpfel enthält die Kiste? (WJB)

IV. Quadratische Schnittfigur

Ein Quader mit den Kantenlänge a, b, c und $a < b < c$ sei gegeben. Finde eine Ebene, die den Quader so schneidet, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist! (H.F.)

V. Nummerierung gesucht

Betrachtet die folgenden vier Figuren, bestehend aus acht Punkten und zwölf Linien. Nummeriere in jeder Figur die Punkte mit den Zahlen 1 bis 8 so, dass in jeder der vier Figuren nur Zahlenpaare miteinander verbunden sind, die es auch in jeder anderen Figur sind. (H.F.)



(a) (b) (c) (d)

VI. Drei Sammler

Von den drei Freunden Paul (P), Quintus (Q) und Robin (R) sammelt genau einer Briefmarken (B), einer sammelt nur Münzen (M) und der dritte sammelt ausschließlich Asterix-Hefte (A).

Finde heraus, was jeder der Freunde sammelt, wenn von den folgenden drei Aussagen zwei falsch und eine wahr sind:

(a) Paul sammelt keine Briefmarken und Robin sammelt keine Münzen;

(b) Paul sammelt Münzen oder Quintus sammelt Asterix-Hefte;

(c) Quintus sammelt keine Briefmarken. (H.F.)

VII. Ein vielziffriges Produkt

Es sei $n = 333\dots337$, bestehend aus 2012 Ziffern 3 sowie einer Ziffer 7. Welchen Wert hat n^2? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1043: Rund um 2012

a) Zeige: Für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist jede der Zahlen $2013^n - 1^n$, $2014^n - 2^n$, $2015^n - 3^n$, ... durch 2012 teilbar.

b) $\sqrt{(2011 + 2011) + (2011 - 2011) + 2011 \cdot 2011 + 2011 : 2011} = 2012$. Trifft diese Behauptung zu? Wenn ja, was steckt dahinter?

c) Es sei $x = \frac{2011}{2012}$ und P sei das unendliche Produkt $P = (1 + x + x^2 + \ldots + x^9)(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{90})(1 + x^{100} + x^{200} + \ldots + x^{900} \ldots)$. Zeige, dass P einen endlichen Wert besitzt und bestimme diesen Wert. (H.F.)

Aufgabe 1044: Görans Geburtstagsgäste

Görans Mutter fragt ihn, wie viele Gäste er zu seinem Geburtstag einladen möchte. Er antwortet: „Wir werden lauter Paare sein. Wenn wir uns um unseren runden Tisch setzen, abwechselnd Mädchen und Junge, dann gibt es drei Möglichkeiten: Entweder sitzt kein Junge links von seiner Freundin oder genau ein Junge oder alle.“ Wie viele Gäste erwartet Göran? (WJB)

Aufgabe 1045: Dreiecks-Zerlegung

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Innenwinkel allesamt $< 90°$ seien. Gib eine Bedingung dafür an, dass das Dreieck $\triangle ABC$ in drei gleichschenklige Dreiecke so zerlegt werden kann, dass alle Teildreiecke in der Länge zweier Schenkel übereinstimmen. (H.F.)

Hinweis: Betrachte den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$.

Aufgabe 1046: Zwillinge

Jens und Lydia erwarten Zwillinge. Das Ultraschallbild zeigt, dass es zwei Jungen sind. Sie befragen einen befreundeten Statistiker nach den Chancen, dass die Zwillinge eineiig sind. Dieser antwortet: „Ein Drittel aller Zwillinge sind eineiig.“ Darauf bietet Jens seiner Frau an: „Wenn sie eineiig sind, gebe ich Dir 20 Euro, sonst gibst Du mir 10 Euro.“ Ist diese Wette fair? (WJB)

Aufgabe 1047: Welche Scheibe ist am leckersten?

Ein kugelförmiges Brötchen wird in sieben gleich dicke Scheiben geteilt. Ein Krustenliebhaber wünscht sich die Scheibe mit der (absolut) meisten Kruste. Soll er eines der beiden Enden nehmen oder doch lieber eine der mittleren Scheiben, oder ist dies egal? (Peter van Dongen, Universität Mainz)

Aufgabe 1048: Quadratzahlen?

Gibt es in der Folge der Zahlen 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... Quadratzahlen? (H.F.)

Aufgabe 1049: Bauernregel

Ein Landwirt möchte den Ertrag beim Anbau von Kohlköpfen möglichst groß haben. Dazu nimmt er an, ein Kohlkopf werde mit dem Gewicht g gepflanzt und danach entwickle sich sein Gewicht wie $G(t) = g(1 + \sqrt{t})$. Für Düngemittel und Erntemaschinen veranschlagt er Kosten der Form $K(t) = k + Ft$. Beim Verkauf erhält er den Betrag D pro Gewichtseinheit. Zu welchem Zeitpunkt v sollte er verkaufen, damit der Ertrag R maximal ist? Wie groß ist dann der Ertrag? (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 109

Klassen 9–13

Aufgabe 1036: Sprachen-Umfrage

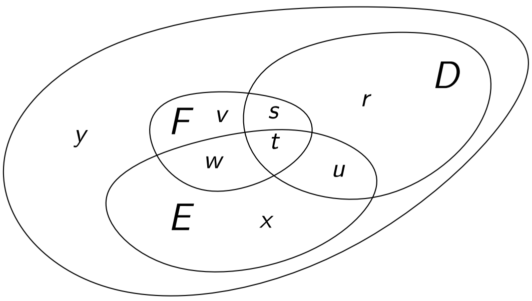
Bei einer Umfrage auf einem Flughafen werden n Personen danach befragt, welche Sprache(n) sie sprechen: Deutsch (D), Englisch (E), Französisch(F) und/oder mindestens eine andere Sprache.

Das Ergebnis der Umfrage lautete:

> 48 Personen sprachen ausschließlich Deutsch oder Deutsch sowie mindestens eine der Sprachen Englisch und Französisch;
> 63 sprachen kein Französisch;
> 11 sprachen kein Englisch;
> 74 sprachen zwei oder drei der Sprachen Deutsch, Englisch, Französisch.

Wie viele Personen wurden nach diesem Umfrageergebnis höchstens und wie viele Personen wurden mindestens befragt? (H.F.)

Lösung:



In nebenstehendem Diagramm sind die möglichen Sprachenkombinationen dargestellt. Die folgenden Gleichungen beschreiben das Umfrageergebnis:

(1) $r + s + t + u = 48$

(2) $r + u + x + y = 63$

(3) $r + s + v + y = 11$

(4) $s + t + u + w = 74$

Zur Bestimmung der Höchstzahl:

Es sei n die Anzahl der Befragten. Dann ist

(5) $n = r + s + t + u + v + w + x + y$.

Wegen (4) gilt sogar: $n = r+v+x+y+74$. Aus (3) folgt $r+v+y = 11-s \leq 11$; daher ist mit $x \leq 63$ aus (2): $n = (11-s)+x+74 \leq 11+63+74 = 148$. Somit ist $n \leq 148$. Für $x = 63$, $v = 11$, $w = 26$, $t = 48$, und $r = s = u = y = 0$ wird tatsächlich $n = 148$ erreicht und stellt damit die gesuchte Höchstzahl dar.

Zur Bestimmung der Mindestzahl:
Nach (1) ist $u \leq 48$. Aus (2) folgt damit: $r + x + y = 63 - u \geq 63 - 48 = 15$. Dann gilt: $n = (r + x + y) + v + (s + t + u + w) \geq 15 + 0 + 74 = 89$; also ist $n \geq 89$. Tatsächlich ist $n = 89$ die gesuchte Mindestzahl, wie die Zahlen $r = s = t = v = 0$, $u = 48$, $w = 26$, $x = 4$ und $y = 11$ zeigen, welche die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen und deren Summe 89 ist.

Aufgabe 1037: Die bemerkenswerte Hausnummer

Mathis wohnt in einer Straße, bei der die Häuser von 1 ab fortlaufend nummeriert sind. Die Nummer M von Mathis Haus ist mindestens 30 sowie kleiner als 40 und die Summe aller Hausnummern vor M und nach M stimmen überein.

a) In welchem Haus wohnt Mathis?

b) Wie viele Häuser hat die Straße? (H.F.)

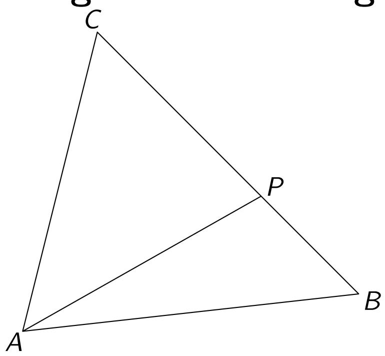
Lösung:

Die Anzahl der Häuser in der Straße sei L. Dann gilt für die Hausnummern in der Straße: $1+2+3+...+(M-1) = (M+1)+(M+2)+...+L$. Mit der Formel $1+2+3+... \, n = \frac{1}{2}(n+1)n$ folgt dann: $\frac{1}{2}(M-1)M = \frac{1}{2}L(L+1) - \frac{1}{2}M(M+1)$, also $2M^2 = L^2 + L$ oder $L^2 + L - 2M^2 = 0$ und damit $L_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+8M^2}$. $L_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+8M^2}$ scheidet wegen $L > 0$ als Lösung aus. $L_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+8M^2}$ ist nur dann eine Lösung, wenn $1 + 8M^2$ eine ungerade Quadratzahl ist. Das aber ist für $30 \leq M < 40$ nur für $M = 35$ der Fall.

a) Mathis Haus hat die Hausnummer 35.

b) Die Straße hat 49 Häuser.

Aufgabe 1038: Länge einer Transversalen



Es sei P ein beliebiger Punkt der Seite BC eines Dreiecks $\triangle ABC$. Dann gilt für die Länge $|AP|$ der Transversalen AP:

$$|AP| < |AB| + |AC|.$$

Du siehst es – kannst Du es auch beweisen? (H.F.)

Lösung:

Mit der Dreiecksungleichung gilt:

(1) $|AP| < |AB| + |BP|$;

(2) $|AP| < |AC| + |PC|$;

(3) $|BP| + |PC| = |BC| < |AB| + |AC|$.

Addiert man die Ungleichungen (1) und (2), dann erhält man mit (3):

$$\begin{aligned} 2|AP| &< |AB| + |AC| + |BP| + |PC| \\ &< |AB| + |AC| + |AB| + |AC| = 2(|AB| + |AC|) \end{aligned}$$

Aus $2|AP| < 2(|AB| + |AC|)$ folgt nun die Behauptung.

Bemerkung: Es gilt sogar $|AP| \leq \max\{|AB|, |AC|\}$.

Aufgabe 1039: Ein (Tisch-)Tennis-Turnier

Dein Freund Alexander fordert dich zu einem Turnier heraus, bei dem abwechselnd Tennis und Tischtennis gespielt wird. Er lässt dir die Wahl, mit welcher Sportart du beginnen willst. Du weißt, dass die Wahrscheinlichkeit p, beim Tischtennis gegen ihn zu gewinnnen, größer ist als die Wahrscheinlichkeit r beim Tennis.

a) Das Turnier besteht aus drei Spielen. Du bist Turniersieger, wenn du zwei aufeinanderfolgende Spiele gewinnst. Mit welcher Sportart solltest du beginnen?

b) Wie solltest du beginnen, wenn das Turnier aus fünf Spielen besteht?

c) Für welchen Beginn stehen deine Chancen besser, wenn du von insgesamt fünf Spielen drei aufeinanderfolgende gewinnen musst, um Turniersieger zu sein? (WJB)

Lösung:

a) Du bist Turniersieger, wenn du die ersten beiden Spiele gewinnst oder zwar das erste verlierst, aber die beiden letzten gewinnst. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist bei Beginn mit
Tischtennis $P_1 = pr + (1-p)rp = rp(2-p)$
Tennis $P_2 = rp + (1-r)pr = rp(2-r)$
Da $r < p$ ist, ist also $P_1 < P_2$. Du solltest also mit Tennis beginnen.

b) Bezeichnen wir mit $+$ ein gewonnenes und mit $-$ ein verlorenes Spiel, so bist du in den Fällen $++$, $-++$, $*-++$ und (nicht$++$)$-++$ Tuniersieger mit den Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P_1 &= pr + (1-p)rp + (1-r)pr + (1-pr)(1-p)rp \\ P_2 &= rp + (1-r)pr + (1-p)rp + (1-rp)(1-r)pr \end{aligned}$$

Auch hierbei ergibt sich: $P_2 - P_1 = pr(1-pr)(p-r) > 0$.

c) Den Turniersieg bescheren dir die Fälle $+++$, $-+++$ und $*-+++$ mit den Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P_1 &= prp + (1-p)rpr + (1-r)prp = p^2r(2-r) + pr^2(1-p) \\ P_2 &= rpr + (1-r)prp + (1-p)rpr = p^2r(1-r) + pr^2(2-p) \end{aligned}$$

Somit ist also $P_2 - P_1 = pr^2 - p^2r = rp(r-p) < 0$ und es ist also besser mit Tischtennis zu beginnen.

Aufgabe 1040: Zirkel und Lineal

Gegeben sei eine Strecke der Länge 1.

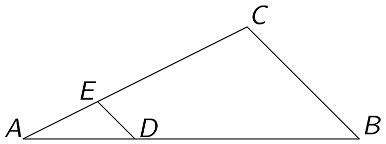
a) Lässt sich daraus für jede natürliche Zahl n eine Strecke der Länge $\sqrt{n}$ konstruieren?

b) Lässt sich sogar für jede positive rationale Zahl r eine Strecke der Länge $\sqrt{r}$ konstruieren? (WJB)

Lösung:

a) Die ursprüngliche Strecke hat die Länge $\sqrt{1}$. Hat man für $n \geq 2$ bereits eine Strecke der Länge $\sqrt{n-1}$, so konstruiere man ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge $\sqrt{n-1}$ und 1. Die Hypotenuse hat dann die Länge $\sqrt{\sqrt{n-1}^2 + 1^2} = \sqrt{n}$.

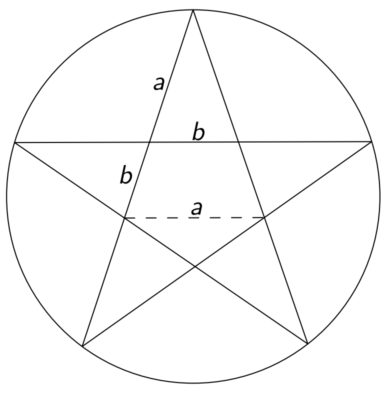
b) Ist $r = \frac{m}{n}$, so zeichne man folgende Figur und verwende die Relation $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, welche aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle DAE$ und $\triangle BAC$ folgt,



mit $\overline{AB} = \sqrt{m}$, $\overline{AC} = \sqrt{n}$ und $\overline{AE} = 1$. Dann ist $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \overline{AD}$ und es gilt $\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{r}$.

Aufgabe 1041: Wo liegt der Fehler?

Teilt man die Kreislinie in fünf gleich lange Bogenstücke und verbindet dann die Teilungspunkte wie in der Figur, so erhält man ein reguläres Pentagramm. Man kann nun zeigen, dass die mit a beziehungsweise mit b bezeichneten Strecken jeweils gleichlang sind. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.



Daraus folgt:

(1) $a^2 - b^2 = ab$.

Nun kennst Du die dritte binomische Formel, nach der gilt:

(2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Setzt man (1) und (2) gleich, gilt also: $(a+b)(a-b) = ab$.

Wie Du Dir an Zahlenbeispielen leicht klar machst, ist aber meistens $(a+b)(a-b) \neq ab$.

Etwa: $(5+2)(5-2) = 21$, während $5 \cdot 2 = 10$ ist.

Wo liegt also der Denkfehler in dieser Überlegung?

(H.F.)

Lösung:

Die Formel (2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist allgemeingültig, das heißt, sie gilt stets, wie auch immer die Zahlen a und b gewählt werden. Dagegen gilt die Gleichung (1) $a^2 - b^2 = ab$ hier nur für Zahlen a, b, die als Längen von ganz bestimmten Strecken im Pentagramm vorkommen – (1) gilt also keineswegs für jede Wahl der Zahlen a und b.

Mithin sind (1) und (2) verschiedene mathematische Objekte – und jeder weiß: Man sollte nicht Äpfel mit Birnen vergleichen.

Aufgabe 1042: Eine Eigenschaft der Fermat-Zahlen

Die Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$ mit $n \geq 1$ heißen Fermat-Zahlen. Beweise die folgende Behauptung: Eine Fermat-Zahl F_n ist niemals eine Kubikzahl. (H.F.)

Lösung:

Annahme: Es sei $2^{2^n} + 1 = m^3$ für ein $m > 1$.
Dann ist m ungerade. Aus $2^{2^n} = m^3 - 1 = (m-1)(m^2 + m + 1)$ folgt: $m - 1$ ist ein Teiler der Zweierpotenz 2^{2^n} und somit selbst eine Zweierpotenz, sodass $m - 1 = 2^a$ mit $a \geq 1$ gilt.
Ferner ist $m^2 + m + 1 = 2^b$ mit $b \geq 1$, weil auch $m^2 + m + 1$ ein Teiler von 2^{2^n} ist. Aus $2^b - 2^a = (m^2 + m + 1) - (m - 1) = m^2 + 2$ folgt: m ist gerade - ein Widerspruch! Somit gilt die Behauptung.

Eine bemerkenswerte Anomalie der Teilerfunktion

von Valentin Blomer

Eine arithmetische Funktion ist einfach eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen sind. Viele interessante arithmetische Funktionen haben auch als Bildbereich die natürlichen Zahlen, z.B.

- die Teilerfunktion $d(n)$ = Anzahl der Teiler von n;
- die Primteilerfunktion $\omega(n)$ = Anzahl der Primteiler von n;
- die Primteiler-mit-Vielfachheit-Funktion $\Omega(n)$ = Anzahl der Primteiler von n mit Vielfachheit gezählt;
- die Teilersummenfunktion $\sigma(n)$ = Summe der Teiler von n.

Oft verhalten sich solche Funktionen sehr unkontrolliert. Zum Beispiel hat die Teilerfunktion unendlich oft den Wert 2 (nämlich für alle Primzahlen), sie kann aber auch sehr groß werden. Man kann z.B. zeigen, dass $d(n!) \geq e^{\frac{n}{\ln n}}$ für $n \geq 2$ gilt. Dazu später mehr.

Um dieses Verhalten besser zu verstehen, kann man versuchen, arithmetische Funktionen statistisch zu untersuchen und zum Beispiel ihren Mittelwert zu bestimmen, in folgendem Sinne: Für große reelle Zahlen x betrachten wir

$$D(x) = \frac{1}{x}\sum_{m\leq x} d(m).$$

Es stellt sich heraus, dass sich die Teilerfunktion im Mittel recht regelmäßig verhält. Wie kann man $D(x)$ berechnen oder abschätzen? Die Zahl $d(m)$ zählt alle Paare (a, b) mit $ab = m$. Aufsummiert bis x müssen wir also alle Paare (a, b) zählen mit $ab \leq x$. Halten wir a fest, so gibt es $[\frac{x}{a}]$* Möglichkeiten für b. Wir haben also

$$D(x) = \frac{1}{x}\sum_{a\leq x}\left[\frac{x}{a}\right].$$

Es ist schwer, mit diesem Term weiterzumachen, deshalb vereinfachen wir ihn, indem wir die Gauß-Klammer weglassen. Dabei machen wir in jedem Summanden einen Fehler, der höchstens 1 ist, also machen wir in der Summe einen Fehler, der höchstens x ist. Das liefert

$$D(x) = \sum_{a\leq x}\frac{1}{a} + E_1(x), \quad |E_1(x)| \leq 1.$$

Jetzt schätzen wir die Summe durch das Integral ab. Es gilt

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \sum_{a\leq x}\frac{1}{a} \leq 1 + \int_1^x \frac{1}{t}dt = 1 + \ln(x),$$

also

$$D(x) = \ln x + E_2(x), \quad |E_2(x)| \leq 2,$$

und damit $D(x) \sim \ln x$.

Im Mittel hat eine Zahl zwischen 1 und x also etwa $\ln x$ Teiler.

Aber jetzt passiert etwas Erstaunliches: Hartwig Fuchs hat auf Seite 31 des Monoid-Heftes 109 erwähnt, dass eine Zahl n im Mittel etwa $\ln\ln n$ Primteiler hat. Man kann das noch etwas genauer beschreiben: Die „meisten" Zahlen haben etwa $\ln\ln n$ Primteiler, und dabei kommt es nicht darauf an, ob man die Primteiler mit oder ohne Vielfachheit zählt. Mit anderen Worten: Mit „wenigen" Ausnahmen gilt $\omega(n) \sim \Omega(n) \sim \ln\ln n$. Es ist nicht übermäßig schwer, das zu präzisieren und zu beweisen, wir wollen hier aber darauf verzichten. Nun gilt

$$2^{\omega(n)} \leq d(n) \leq 2^{\Omega(n)}.$$

Warum ist das so? Wenn $n = p_1^{e_{p_1}} \cdot \ldots \cdot p_1^{e_{p_r}}$ die kanonische Primfaktorzerlegung von n mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ ist, so ist

$$d(n) = (1 + e_1) \cdot \ldots \cdot (1 + e_r),$$

und das ist mindestens 2^r und höchstens $2^{e_1+\ldots+e_r}$. Da aber sowohl $\omega(n)$ als auch $\Omega(n)$ meistens von der Größenordnung $\ln\ln n$ sind, ist $d(n)$ meistens von der

* $[q]$ bezeichnet hierbei die Abrundung einer rationalen Zahl q, also die größte ganze Zahl k mit $k \leq q$.

Größenordnung

$$2^{\ln\ln n} = (\ln n)^{\ln 2}.$$

Wie geht das? Eben haben wir doch noch gesagt, dass $d(n)$ im Mittel etwa $\ln n$ ist, und jetzt sagen wir, dass es meistens nur etwa so groß wie $(\ln n)^{0{,}693\ldots}$ ist. Die einzige (und richtige) Erklärung für diese Anomalie der Teilerfunktion ist, dass tatsächlich „meistens" $d(n) \sim (\ln n)^{\ln 2}$ gilt, dass es aber ein paar wenige Ausnahmen gibt, für die $d(n)$ so groß wird, dass dadurch der Mittelwert nach oben korrigiert wird. Mit anderen Worten, der Mittelwert $D(x) \sim \ln x$ sagt nichts über das „typische" Verhalten von $d(n)$ aus, da ein paar Ausreißer den Mittelwert nach oben verzerren. Das erinnert ganz allgemein daran, wie vorsichtig man bei der Interpretation statistischer Ergebnisse sein muss.

Wer war's?

von Wolfgang J. Bühler

Diesmal sind wir auf der Suche nach drei Persönlichkeiten. Alle drei haben sich intensiv mit Mathematik, insbesondere mit Geometrie, befasst, sind aber nicht für ihre mathematischen Leistungen, sondern als Heerführer und Staatsmänner bekannt geworden.

Der erste ist jedem aus dem Geschichtsunterricht bekannt. Er wurde populär als militärischer Führer in Revolutionskriegen, was ihm ermöglichte, zunächst einer von drei, später alleiniger Herrscher seines Landes zu werden. In dieser Position überzog er einen ganzen Kontinent mit Kriegen. Sechs Jahre nach seiner letzten entscheidenden Niederlage starb er in der Verbannung an Magenkrebs. Seine Leidenschaft für Mathematik und eine nach ihm benannte Dreieckskonstruktion sind wohl nur Mathematikern bekannt.

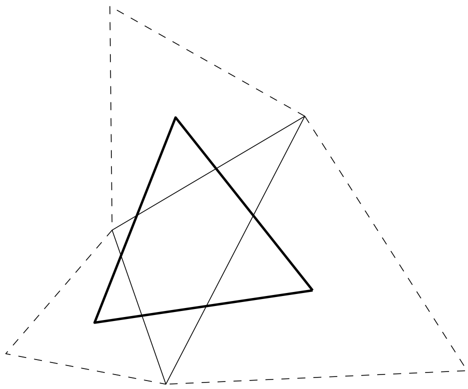
Der zweite ergänzte seine juristischen Studien durch ein genaues Studium der Euklidischen Elemente, da er lernen wollte, was ein strenger Beweis ist (im Gegensatz zu dem juristischen „proof beyond a reasonable doubt"). Bei Ritten über das Land hatte er deshalb stets einen Band Euklid in der Satteltasche. Auch er führte sein Land in einer kriegerischen Zeit. Nachdem er in diesem Krieg, den er in erster Linie für die Einheit seines Landes geführt hatte, eine wesentliche Reform für das Land durchgesetzt hatte, wurde er von einem politischen Fanatiker ermordet.

Die dritte Person war nach ihrem Studium zunächst Prediger und unterrichtete Mathematik (Quelle: Wikipedia deutsch) oder klassische Sprachen (Quelle: Wikipedia englisch). In dem unter dem zweiten Gesuchten geführten Krieg war er ein erfolgreicher General, der wesentlich zum Sieg beitrug. Schon vor diesem Krieg hatte er beschlossen, keine wissenschaftliche Karriere anzustreben. Er studierte dann privat Jura und ging in die Politik. Nach Jahren in einflussreichen politischen Ämtern wurde er wie der zweite Gesuchte vor ihm in das höchste politische Amt seines Landes gewählt. Auch auf ihn wurde ein Attentat verübt, an dessen Folgen er elf Wochen später starb. In die Zeit seiner politischen Tätigkeit fällt auch seine mathematische Leistung, eine von vielen Beweisen für einen wichtigen Satz über Dreiecke.

Wer waren sie?

Des Rätsels Lösung

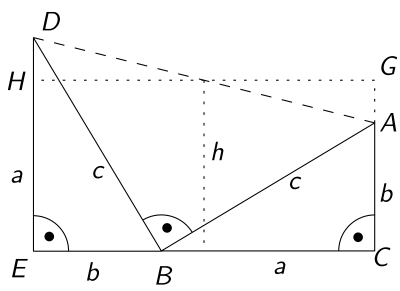
Der erste Gesuchte ist Napoleone Buonaparte (1769 - 1821), der als Kaiser der Franzosen ganz Europa in Kriege stürzte – und in der Mathematik für das Napoleonische Dreieck bekannt ist. Dieses Dreieck entsteht so: Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks zeichne man gleichseitige Dreiecke. Deren Mittelpunkte bilden dann wieder ein gleichseitiges Dreieck, das Napoleonische Dreieck. Diese Konstruktion wurde in Monoid 79 beschrieben.



Der zweite Gesuchte ist Abraham Lincoln (1809 – 1865), der 16. Präsident der Vereingten Staaten von Amerika. Seine Wahl zum Präsidenten war letztlich Auslöser für den Sezessionskrieg, den er trotz anfänglicher Rückschläge und politischer Widerstände schließlich siegreich beendete. Ein wichtiger Streitpunkt in diesem Krieg war die Sklaverei. Die von ihm am 1.1.1863 proklamierte Emanzipation der Sklaven wurde erst nach seinem Tod 1865 geltendes Recht durch den 13. Zusatz zur US-Verfassung.

Der dritte Gesuchte ist James Abram Garfield (1831 – 1881), der 20. Präsident der USA, der zweite Präsident, der einem Attentat zum Opfer fiel und der erste Linkshänder in diesem Amt. 1861, in einer Zeit, als er Abgeordneter im Repräsentantenhaus war, fand er folgenden schönen Beweis für den Satz des Pythagoras:

Legt man die beiden (gleichen) rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BDE$ so wie in der Abbildung und verbindet A mit D, so lässt sich die Fläche des Trapezes $ECAD$ auf zwei Arten berechnen:



a) als Summe der drei Dreiecksflächen:
$F = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$;

b) als Fläche des Rechtecks $ECGH$:
$F = (a + b) \cdot h = (a + b)\frac{a+b}{2}$.

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert $2F = 2ab + c^2 = (a + b)^2$, daraus folgt $c^2 = (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$.

Dezimalzahlen mit geometrischen Ziffernmustern

von Hartwig Fuchs

Ein scheinbarer Rechentrick

Bei einem Treffen von Nummerologen verkündet Mathis den Anwesenden: „Es ist bekannt, dass es meist recht mühsam ist, eine Bruchzahl $\frac{1}{n}$ ohne Rechenhilfsmittel in eine Dezimalzahl umzuwandeln – abgesehen natürlich von den Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ mit einem Nenner $n = 10^t$, $t = 1, 2, 3, \dots$ und einigen wenigen anderen wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ usw. Ich habe nun entdeckt, wie ich für Bruchzahlen $\frac{1}{n}$ mit einem Nenner $n > 10$ und n um x kleiner als 10^t, $t = 2, 3, 4, \dots$, $x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ohne lange Rechnungen manchmal 15 oder 20 oder sogar noch mehr Stellen von den zugehörigen Dezimalzahlen angeben kann.“

Die Numerologen fordern Mathis auf, seine Behauptung für die Brüche $\frac{1}{n}$, mit $n = 9997$, 9996 und 9995 zu beweisen. Ohne zu zögern beginnt Matthis, die drei folgenden Ziffernkomplexe hinzuschreiben:

(1) $\frac{1}{9997} = 0{,}0001\ 0003\ 0009\ 0027\ 0081\ 0243\ 0729\ \dots$ (28 Ziffern)

$\frac{1}{9996} = 0{,}0001\ 0004\ 0016\ 0064\ 0256\ \dots$ (20 Ziffern)

$\frac{1}{9995} = 0{,}0001\ 0005\ 0025\ 0125\ 0625\ \dots$ (20 Ziffern)

Diese Ergebnisse können die Nummerologen erst nach einer Weile Rechnerei mit ihren Taschenrechnern bestätigen. Sie wissen, dass jeder Bruch $\frac{1}{n}$ durch Ausführung der Division $1 : n$ in eine – endliche oder periodische – Dezimalzahl umwandelbar ist. Aber sie sind sich sicher, dass Mathis die Dezimalstellen in (1) nicht so erhalten haben kann. Mathis gibt ihnen Recht: Sein Trick stellt nur einen Sonderfall eines mathematischen Satzes dar.

Dieser Satz soll nun im Folgenden hergeleitet und damit nicht nur Mathis' scheinbares Rechenkunststück, sondern zugleich auch das Auftreten der bemerkenswerten geometrischen Muster der Ziffernfolgen in (1) erklärt werden.

Stammbrüche und geometrische Reihen

Zwischen Brüchen $\frac{1}{n}$ und gewissen geometrischen Reihen lässt sich ein enger Zusammenhang herstellen, den wir jetzt beschreiben wollen: Eine Summe $1 + x^1 + x^2 + \dots + x^m$, x eine reelle und m eine natürliche Zahl, heißt eine (endliche) geometrische Reihe; ihr Wert ist gegeben durch die Formel

(2) $1 + x^1 + x^2 + \dots + x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$, $x \neq 1$.

Dies folgt aus der Gleichung $(1-x)\cdot(1+x^1+x^2+\dots+x^m) = 1-x^{m+1}$, von deren Richtigkeit man sich durch Ausmultiplizieren der Klammern überzeugen kann.

Was passiert, wenn man in (2) die Zahl m immer größer werden lässt (man sagt:

wenn m gegen ∞ geht)? Dann stellt die linke Seite von (2) eine unendliche geometrische Reihe dar, die wir mit $1 + x^1 + x^2 + x^3 + ...$ bezeichnen. Und für die unendliche geometrische Folge $1, x^1, x^2, x^3, \ldots$ beweist die Mathematik, dass mit positiven Zahlen x gilt:

- Ist $x > 1$, dann geht $1, x^1, x^2, x^3, \ldots$ gegen ∞; z. B. $1, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots \to \infty$;
- Ist $0 < x < 1$, dann geht $1, x^1, x^2, x^3, \ldots$ gegen 0; z. B. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \to 0$.

Setzen wir daher in (2) voraus, dass $0 < x < 1$ ist und dass m gegen ∞ geht. So dürfen wir in (2) x^{m+1} durch 0 ersetzen. Also gilt

(3) $1 + x^1 + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$, $0 < x < 1$.

Beispiel 1

In (3) sei $x = 0{,}13$. Dann hat die geometrische Reihe $1+0{,}13^1+0{,}13^2+0{,}13^3+...$ den Wert $\frac{1}{1-0{,}13} = \frac{1}{0{,}87}$.

Aus (3) leiten wir nun ab: Jeder Bruch $\frac{1}{n}$, n eine natürliche Zahl > 1, ist als geometrische Reihe darstellbar. Schreiben wir nämlich n als eine beliebige Differenz $n = c - x$ mit natürlichen Zahlen c und x, $0 < x < c$, dann ist $\frac{1}{n} = \frac{1}{c-x} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{c}}$ und wegen $0 < x < c$ ist $0 < \frac{x}{c} < 1$. Deshalb gilt (3) auch für $\frac{x}{c}$ an Stelle von x. Also ist $\frac{1}{1-\frac{x}{c}} = 1 + (\frac{x}{c})^1 + (\frac{x}{c})^2 + (\frac{x}{c})^3 + ...$ Damit haben wir herausgefunden:

(4) Wenn man den Nenner n eines Stambruchs $\frac{1}{n}$ als eine Differenz $n = c - x$, $0 < x < c$ schreibt, dann gilt $\frac{1}{n} = \frac{1}{c-x} = \frac{1}{c} \cdot (1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{x^3}{c^3} + ...) = \frac{1}{c} + \frac{x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3} + \frac{x^3}{c^4} + ...$

Da c in (4) beliebig $> n$ gewählt werden darf, gibt es auch beliebig viele verschiedene zu $\frac{1}{n}$ gehörige geometrische Reihen.

Beispiel 2

Zwei verschiedene geometrische Reihen für $\frac{1}{89}$ erhält man aus $89 = 94 - 5$ und $89 = 90 - 1$:

$$\frac{1}{89} = \frac{1}{94-5} = \frac{1}{94} + \frac{5^1}{94^2} + \frac{5^2}{94^3} + \frac{5^3}{94^4} + ... \text{ und}$$
$$\frac{1}{89} = \frac{1}{90-1} = \frac{1}{90^1} + \frac{1}{90^2} + \frac{1}{90^3} + \frac{1}{90^4} + ...$$

Geometrische Reihen und Dezimalzahlen

Der Satz (4) bildet die Grundlage für Mathis' Umwandlungstrick. Das erscheint fast paradox – wenn man sich das Beispiel 2 anschaut, dann ist klar, dass die dort angegebenen Reihen viel komplizierter sind als die Anfangszahl $\frac{1}{89}$ selbst. Aber hierbei handelt es sich um eine leicht umgehbare Schwierigkeit. Man braucht dazu nur in (4) c als eine geeignete Potenz der Form $10^t > n$ zu wählen und man erhält:

(5) Wenn man den Nenner n des Stammbruchs $\frac{1}{n}$ als eine Differenz $n = 10^t - x$ mit $0 < x < 10^t$ schreibt dann gilt für $\frac{1}{n}$:
$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^t - x} = \frac{1}{10^t} + \frac{x^1}{10^{2t}} + \frac{x^2}{10^{3t}} + \frac{x^3}{10^{4t}} + \dots$

Mit einer geometrischen Reihe wie in (5) können wir nun von der zur Bruchzahl $\frac{1}{n}$ gehörigen Dezimalzahl problemlos jede vorgegebene Anzahl von Stellen angeben, da jeder in der Reihe vorkommende Dezimalbruch (mit einer Zehnerpotenz als Nenner) unmittelbar in eine Dezimalzahl umwandelbar ist. Die darauf folgende Addition ist dann bei denjenigen Dezimalsummanden besonders einfach, die nicht durch Additionsüberträge vergrößert werden: Ihre Addition läuft dann nämlich formal darauf hinaus, dass man nur jeweils ihre letzten t Ziffern nebeneinander schreibt. Auf diese Weise entsteht das geometrische Muster der ersten Ziffern nach dem Komma der zu $\frac{1}{n}$ gehörigen Dezimalzahl.

Beispiel 3

Man berechne das geometrische Ziffernmuster der zu $\frac{1}{99993}$ gehörigen Dezimalzahl. Dazu setze man $99993 = 10^5 - 7$; aus (5) ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccc|c} \frac{1}{99993} = \frac{1}{10^5 - 7} = & \frac{1}{10^5} & + \frac{7}{10^{10}} & + \frac{7^2}{10^{15}} & + \frac{7^3}{10^{20}} & + \frac{7^4}{10^{25}} & & + \frac{7^5}{10^{30}} + \frac{7^6}{10^{35}} + \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ = 0, & 00001 & 00007 & 00049 & 00343 & 02401 & & \dots \end{array}$$

Vermutung: Das geometrische Ziffernmuster erstreckt sich genau über 25 Stellen.

1. Wegen $\frac{7^5}{10^{30}} + \frac{7^6}{10^{35}} = \frac{16807}{10^{30}} + \frac{117649}{10^{35}} = \frac{16807}{10^{30}} + \frac{1}{10^{30}} + \frac{17649}{10^{35}}$ findet ein Additionsübertrag 1 auf die 30. Stelle nach dem Komma statt. Die auf die ersten 25 Stellen folgenden fünf Ziffern sind also nicht 16807, sondern 16808. Das geometrische Ziffernmuster endet also spätestens mit der 25. Stelle.
2. Es gibt keine Additionsüberträge auf die 25. oder davorliegende Stellen. Das ergibt sich so: Für den Restteil der Reihe, der bei der obigen Bestimmung der ersten 25 Stellen unberücksichtigt blieb, gilt:
$$\frac{7^5}{10^{30}} + \frac{7^6}{10^{35}} + \frac{7^7}{10^{40}} + \dots = \frac{7^5}{10^{25}} \cdot \left(\frac{1}{10^5} + \frac{7}{10^{10}} + \frac{7^2}{10^{15}} + \dots\right) = \frac{1}{10^{25}} \cdot \frac{7^5}{99993} < \frac{1}{10^{25}}.$$

Aus 1. und 2. folgt, dass die Vermutung zutrifft.

Dezimalzahlen mit geometrischem Ziffernmuster

(6) Jeder Stammbruch $\frac{1}{n}$ mit dem Nenner $n = 10^t - x$, $t = 2, 3, 4, \dots$, und $1 \leq x \leq 9$ hat eine Ziffernfolge mit geometrischem Muster, das sich über mindestens t^2 Stellen erstreckt.

Beispiel 4

Nenner von $\frac{1}{n}$	91	92	93	94	95	96	97	98
Ziffernfolge	0109	0108	0107	0106	01 05 25	01 04 16	01 03 09 27	01 02 04 08 16 32

Die Muster für $n = 91, \dots 94$ wollen wir auch geometrisch nennen. Das Ziffernmuster von $\frac{1}{99} = 0,010101\dots$ betrachten wir ebenfalls als geometrisch.

Zum Nachweis von (6) zeigen wir: $\frac{1}{n}$ sei in eine geometrische Reihe gemäß (5) entwickelt. Dann findet bei der sukzessiven Addition der in Dezimalzahlen umgewandelten Reihenglieder auf keines der ersten t^2 Reihenglieder ein Additonsübertrag statt. Tatsächlich ist ja für jedes k mit $1 \leq k \leq t-1$:

$$\frac{x^k}{10^{(k+1)t}} + \frac{x^{k+1}}{10^{(k+2)t}} + \dots = \frac{x^k}{10^{kt}} \cdot \left(\frac{1}{10^t} + \frac{x^1}{10^{2t}} + \frac{x^2}{10^{3t}} + \dots\right) = \frac{x^k}{10^{kt}} \cdot \frac{1}{10^t - x}$$

$$= \frac{1}{10^{kt}} \cdot \frac{x^k}{10^t - x} > \frac{1}{10^{kt}},$$ solange nur $x \leq 9$ und $k \leq t$ ist.

Die Länge des geometrischen ZIffernmusters wird in (6) durch t^2 Stellen abgeschätzt. In manchen Fällen ist das recht grob. Begründe selbst: Die zu $\frac{1}{9998} = \frac{1}{10^4 - 2}$ gehörige Dezimalzahl hat ein 80 Stellen langes geometrisches Muster.

Erklärung von Mathis' Rechenkunststück

Mathis verspricht das Gelingen seines Umwandlungstricks für Stammbrüche $\frac{1}{n}$ in Dezimalzahlen ohne Rechenhilfsmittel, falls der Nenner n jeweils die in (6) genannten Voraussetzungen erfüllt, nämlich $n = 10^t - x$, $t \geq 2$ und $1 \leq x \leq 9$. Daher stellt Mathis Trick nur eine Anwendung des Satzes (6) auf einen konkret gegebenen Stammbruch dar. Und nach (6) braucht Mathis deshalb auch nur die t Potenzen x^1, x^2, ..., x^t auswendig zu wissen, um ohne Verzögerung t^2 Stellen von der zu $\frac{1}{n}$ gehörigen Dezimalzahl aufzuschreiben. Weiß er aber weniger als t Potenzen – zum Beispiel s Potenzen x^1, x^2, ..., x^s mit $s < t$ – auswendig, kann er nur entsprechend weniger, nämlich nur $s \cdot t$ Stellen unmittelbar angeben.

Ein Blick hinter die Kulissen
Warum gewinnt immer er?
von Hartwig Fuchs

Dr. Why ist weithin bekannt als Erfinder intelligenter Spiele. Als er mit Freunden seine Ernennung zum Professor in einer Weinstube feiert, fragt ihn natürlich einer aus der fröhlichen Runde: „Hast du in letzter Zeit wieder mal ein neues Spiel entwickelt?“ „Gewiss, und zwar eines, das ihr nicht gewinnen könnt“, antwortet Dr. Why. Er nimmt ein Blatt Papier, malt darauf einen großen Kreis (er kann das perfekt) und erklärt sein neues Zwei-Personen-Spiel.

Regel 1: Mein Mitspieler markiert eine von ihm gewählte nicht zu kleine Anzahl von n Punkten beliebig auf dem Kreis und verbindet sie durch Strecken zu einem n-Eck. Ist n ungerade, beginnt er das Spiel; ist n gerade, so fange ich an.

Regel 2: Die Spieler zeichnen im Wechsel eine Verbindungsstrecke (Diagonale) zwischen zwei noch unverbundenen Eckpunkten des n-Ecks und zwar so, dass diese Strecke keine der bereits vorhandenen Diagonalen im Innengebiet des n-Ecks schneidet.

Regel 3: Gewonnen hat, wer die letzte Diagonale zeichnen kann.

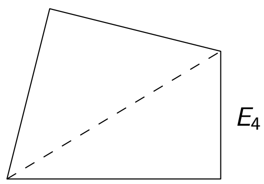
Die Freunde bezweifeln, dass Dr. Why dieses Spiel stets für sich entscheiden kann. Daraufhin schlägt dieser vor: „Spielen wir. Wer gewinnt, erhält 10 Euro vom Verlierer. Wir spielen so lange, bis ich von meinem Gewinn die Zeche des heutigen Abends für alle bezahlen kann.“ Dr. Why ist offensichtlich siegessicher. Und tatsächlich verliert er nicht ein einziges Spiel. Gibt es dafür eine Erklärung?

Des Rätsels Lösung

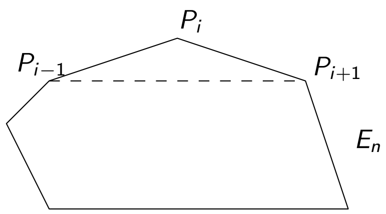
Ein n-Eck E_n ist konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt. In E_n bezeichnet man die Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte als Diagonale; diese heißt schnittpunktfrei, wenn sie keine andere Diagonale im Innengebiet von E_n schneidet. Für konvexe n-Ecke gilt:

(1) Jedes konvexe n-Eck E_n, $n \geq 4$, besitzt genau $n - 3$ schnittpunktfreie Diagonalen und diese zerlegen das Innengebiet von E_n vollständig in Dreiecke.

Die Behauptung (1) gilt für jedes konvexe Viereck E_4 (vergleiche Figur 1). (1) sei nun für jedes konvexe m-Eck, $m = 4, 5, 6, \ldots, n - 1$ bewiesen. Dann gilt (1) auch für jedes konvexe n-Eck E_n, wie wir zeigen werden.
Von einem beliebigen konvexen n-Eck E_n mit den Eckpunkten P_1, P_2, ..., P_n – kurz $E_n = P_1P_2 \ldots P_n$ – sei der Streckenzug $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ ein Teilstück (vergleiche Figur 2).



Figur 1



Figur 2

Weil das $(n - 1)$-Eck $E_{n-1} = P_1P_2 \ldots P_{i-1}P_{i+1} \ldots P_n$ konvex ist, dürfen wir es uns nach Voraussetzung durch $n - 4$ schnittpunktfreie Diagonalen vollständig in Dreiecke zerlegt denken. Nun ist die Strecke $P_{i-1}P_{i+1}$ eine Seite von E_{n-1} und daher eine schnittpuntfreie Diagonale in $E_n = P_1P_2 \ldots P_{i-1}P_iP_{i+1} \ldots P_n$ (vergleiche Figur 2). Somit besitzt E_n genau $n - 3$ schnittpunktfreie Diagonalen, die E_n vollständig in Dreiecke zerlegen. Insgesamt gilt also (1) für jedes $n \geq 4$.
Was bedeutet der Satz (1) für Dr. Whys Spiel? Das Spiel ist beendet, wenn das nach der Regel 1 gegebene n-Eck durch schnittpunktfreie Diagonalen vollständig in Dreiecke zerlegt ist. Dazu sind wegen (1) genau $n-3$ solcher Diagonalen erforderlich. Das Spiel gewinnt nun derjenige, der die letzte und mithin die $(n - 3)$-te Diagonale zeichnen kann. Wenn n gerade ist dann zeichnet Dr. Why die erste, dritte, fünfte ... und daher auch die $(n - 3)$-te Diagonale; ist n aber ungerade, dann zeichnet er die zweite, vierte, sechste, ... und schließlich auch die $(n - 3)$-te Diagonale. Dr. Why wird also stets gewinnen – ganz gleich, welche Anzahl von Punkten sein Gegenspieler wählt, wie er sie auf dem Kreis verteilt und welche Diagonalen er zeichnet – ein unfaires Spiel!

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Die Aufgabe des Apollonius

Apollonius von Perge (um 260 – 190 v.Chr.) war nach Archimedes und Euklid der bedeutendste Mathematiker der griechisch-römischen Epoche. Er lehrte vermutlich an der „Bibliothek" von Alexandria, dem Wissenschaftszentrum der Antike. Der Herr Professor stellte damals seinen Studenten eine berühmt gewordene geometrische Aufgabe, die alle Wirren der Zeit überstanden hat und die heute noch – mehr als 2000 Jahre später – nicht vergessen ist:

Es seien drei geometrische Objekte in der Ebene gegeben, von denen jedes ein Punkt, eine Gerade oder ein Kreis sein kann. Man konstruiere einen Kreis – falls das möglich ist –, der durch jeden gegebenen Punkt läuft und der jede der gegebenen Gerade sowie jeden der gegebenen Kreise berührt. Man nennt einen solchen Kreis den Kreis des Apollonius.

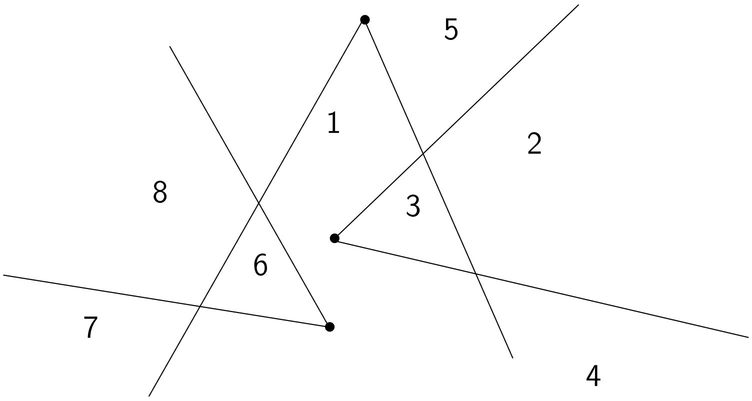
Hinweis: Es gibt zehn verschiedene Dreierkombinationen aus den Objekten Punkt, Gerade und Kreis, sodass man das Problem des Apollonius in entsprechend viele Teilaufgaben zerlegen und diese dann der Reihe nach lösen kann. (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 31. August 2012 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 108

In Heft 108 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Winkel in der Ebene



Zwei von einem Punkt in der Ebene ausgehende Halbgerade bilden einen Winkel. Durch einen oder mehrere solcher Winkel sind in der Ebene Gebiete festgelegt – beispielsweise bestimmen die drei Winkel in der Abbildung acht mit 1, 2, 3, ... , 8 nummerierte Gebiete.

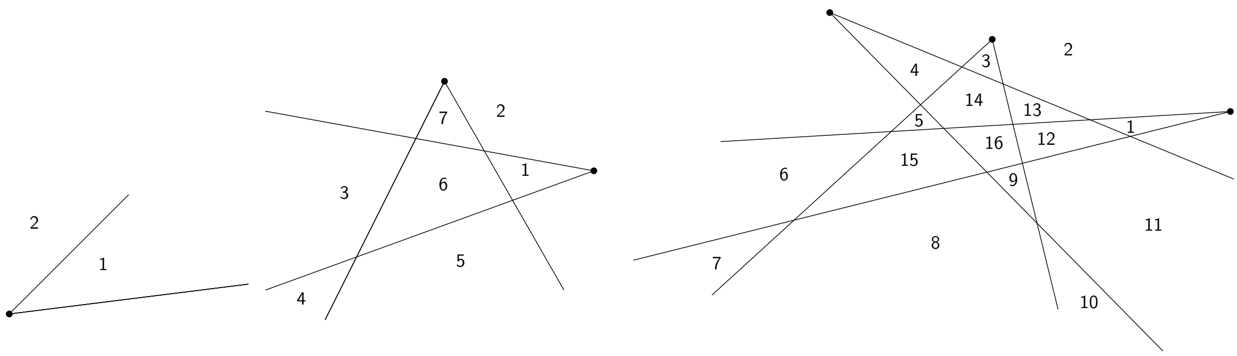
Finde nun für möglichst viele Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Antwort auf die Frage: Welches ist die Maximalzahl $M(n)$ von Gebieten, die n Winkel festlegen können?

Kannst Du auch eine Formel angeben – und sie vielleicht sogar beweisen –, aus der sich die Zahl $M(n)$ für jedes $n \geq 1$ direkt berechnen lässt? (H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe hat sich beschäftigt: Bettina Diller, 10. Klasse der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik in München.

Mit etwas Probieren findet man:



$M(1) = 2$ $\quad$ $M(2) = 7$ $\quad$ $M(3) = 16$

Bereits bei $n = 4$ deuten sich mit $M(4) = 29$ die Schwierigkeiten an, die eine zeichnerische Bestimmung von $M(n)$, $n \geq 4$, machen wird – für größere n wird man daher nur noch durch Überlegungen weiterkommen. Dazu geben wir zwei Möglichkeiten an.

Zunächst bestimmt man, um wieviel die Zahl $M(n-1)$ beim Übergang von $n-1$ Winkeln zu n Winkeln höchstens anwächst. Der Schenkel eines Winkels W schneidet $n-1$ Winkel in höchstens $2(n-1)$ Punkten; der Winkel W schneidet daher diese $n-1$ Winkel in höchstens $4(n-1)$ Punkten. Durch die $4(n-1)$ Punkte wird W in $4(n-1)+1$ Segmente zerlegt und jedes dieser Segmente zerlegt ein schon vorhandenes Gebiet in zwei neue Gebiete – wobei die jeweils alten Gebiete verschwinden. Damit gilt:

> Zu den bereits existierenden $M(n-1)$ Gebieten kommen $4(n-1)+1$ weitere Gebiete hinzu.

Hieraus ergibt sich als Rekursionsformel für $M(n)$:

$(*)$ $\quad M(n) = M(n-1) + 4(n-1) + 1$, also:

$$M(2) = 2 + (n-1) \cdot 4 + 1,$$
$$M(3) = 2 + (n-2) \cdot 4 + 1 + (n-1) \cdot 4 + 1,$$
$$M(4) = 2 + (n-3) \cdot 4 + 1 + (n-2) \cdot 4 + 1 + (n-1) \cdot 4 + 1,$$
$$M(5) = 2 + (n-4) \cdot 4 + 1 + (n-3) \cdot 4 + 1 + (n-2) \cdot 4 + 1 + (n-1) \cdot 4 + 1.$$

Man erhält $M(n) = 2 + (n-1) + (n-1) \cdot 4n - 4(1 + 2 + \dots + (n-1))$ und unter der Benutzung von $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$:

$$\begin{aligned} M(n) &= 2 + (n-1) + (n-1) \cdot 4n - 4 \cdot \tfrac{1}{2}n(n-1) \\ &= 2 + n - 1 + 4n^2 - 4n - 2n^2 + 2n \\ &= 2n^2 - n + 1. \end{aligned}$$

Damit können alle Maximalzahlen berechnet werden:

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	23	...
$M(n)$	92	121	154	191	232	277	326	379	436	497	...	1036	...

Alternative Lösung

Man macht einen Ansatz vom Typ $M(n) = a_o n^t + a_1 n^{t-1} + ... + a_{t-1} n + a_t$. Natürlich probiert man es zunächst mit $t = 2$, also: Es sei $M(n) = an^2 + bn + c$. Mit Hilfe der bekannten Werte von $M(1)$, $M(2)$ und $M(3)$ bestimmt man nun a, b und c:

(1) Für $n = 1$ ist $M(1) = 2$, also ist $a + b + c = 2$.

(2) Für $n = 2$ ist $M(2) = 7$, also ist $4a + 2b + c = 7$.

(3) Für $n = 3$ ist $M(3) = 16$, also ist $9a + 3b + c = 16$.

(4) Aus $(2) - (1)$ folgt $3a + b = 5$.

(5) Aus $(3) - (2)$ folgt $5a + b = 9$.

Aus $(5) - (4)$ folgt $2a = 4$ und damit $a = 2$, $b = -1$ und $c = 1$.
Die Gleichung $M(n) = 2n^2 - n + 1$ gilt also für $n = 1$, 2 und 3.
Wir nehmen an, sie gilt für $n-1$, also $M(n-1) = 2(n-1)^2 - (n-1) + 1$. Mit dem Ergebnis $(*)$ – siehe oben – ist dann $M(n) = 2(n-1)^2 - (n-1) + 1 + 4(n-1) + 1 = 2n^2 - n + 1$. Damit ist die Gleichung $M(n) = 2n^2 - n + 1$ für alle $n \geq 1$ induktiv bewiesen.

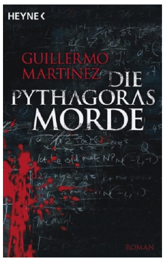
Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Guillermo Martinez: „Die Pythagoras-Morde“

Ein Serienmörder hält die englische Universitätsstadt Oxford in Atem. Bei den Opfern, deren Morde er ankündigt, hinterlässt er merkwürdige Symbole. Dadurch fühlt sich der berühmte Mathematiker und Logiker Arthur Seldom herausgefordert, welcher der Polizei immer um eine Nasenlänge voraus zu sein scheint. Unterstützung erhält er von dem argentinischen Austauschstudenten Guillermo Martinez, der, dadurch dass seine Vermieterin das erste Mordopfer ist, mit hineingezogen wird. Martinez, der den Kriminalroman aus der Ich-Perspektive geschrieben hat, verwebt geschickt verschiedene Handlungsstränge. So erfährt man etwas über die Arbeitsweise von Mathematikern, die englische Mentalität, eine Liebesgeschichte und ganz nebenbei auch etwas über die Lösung der Fermatschen Vermutung durch Andrew Wiles. Wie bei jedem guten Kriminalroman bleibt die Hauptsache jedoch die Suche nach dem Täter, an der Seldom den jungen Argentinier – und damit auch den Leser – teilhaben lässt. Auch wenn man denkt, dass man der Auflösung der Mordserie immer näher kommt, so gibt es immer wieder überraschende Wendungen, an denen der Leser sich durch das lyrische Ich hautnah beteiligt fühlt.

Fazit: Guillermo Martinez ist ein spannender und flüssig zu lesender Kriminalroman gelungen, in dessen Hintergrund man einen guten Einblick in das Wirken von Mathematikern gewinnen kann. Wer Miss Marple mag, wird auch hier voll auf seine Kosten kommen, also unbedingt mit in die Sommerferien nehmen und dann im Liegestuhl als Ferienlektüre genießen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Martinez, Guillermo: Die Pythagoras-Morde, Heyne, 2008, ISBN 978-3453503755, Taschenbuch, 208 Seiten, 7,95 €.

Art des Buches:	Kriminalroman
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 108

Aachen, Inda-Gymnasium:
Kl. 5: Luca Bühler 24.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen
Kl. 6: Hanaa El Sammak 10, Malak Hasham 12;
Kl. 7: Zalwa Alaa 5, Salma Amr 3, Alaa Elfawal 3, Virginia Mandouh 3;
Kl. 9: Marianne Michel 15.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Kunz)**:**
Kl. 7: Niclas Mayer 13;
Kl. 8: Sebastian Maak 2, Jann Ole Neitzel 13, Katharina Rößler 22;
Kl. 10: Marc de Zoeten 2, Lena Ehrenhard-Dickescheid 4, Sebastian Ludwig 29, Benedikt Maurer 14, Alexander Rupertus 5;
Kl. 11: Andreas Pitsch 12.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler)**:**
Kl. 5: Lena-Marie Senft 10, Carla Vo 5.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 11: Frank Schindler 40.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 6: Iolanthe Köcher 35.

Edenkopen, Gymnasium:
Kl. 7: Amelie Knecht 15, Theresa Paulus 18.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 8: Anne Vogel 6.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 6: Lea Storzum 16;
Kl. 7: Tillmann Ballweber 4, Christoph Hemmer 16, Marion Misiewicz 15, Maximilian Münch 7, Sam Washington 7, Sonja Zimmermann 8;
Kl. 8: Adriana Stenger 5, Marcel Wittmann 77;
Kl. 11: Henning Ballweber 35;

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 2: Philipp Kraus 1, Ella Zwermann 5;
Kl. 3: Martha Friederich 3, Bent Gerstenberger 3, Vrishab Vittagondana 1;
Kl. 4: Natascha Albrecht 2, Sophie Brandenburg 5, Naima Gerlach 5, Lara Kern 14, Maya Most 6, Marc Ohlemacher 2, Franziska Schlüter 10, Vincent van't Hof 7;
Kl. 5: Justus Binnewies 3, Emma Braulke 1, Patrick Coles 2, Laura Häger 4, Maximilian Kolrep 1, Sebastian Schneider 5, Felix Schröder 1.

Gießen, Landgraf-Ludwigs-Gymnasium:
Kl. 5: Laura Kristin Kettner 3, Felix Köhler 9.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 5: Lisa Metternich 2, Melanie Schuy 8;
Kl. 6: Kim Bruder 6, Matthias Hannappel 7, Julia Holzhüter 5, Emma Mais 18, Nils Prepens 21, Max Schneider 12, David Storzer 37, Konrad Uecker 5;
Kl. 7: Robin Dobischok 7, Sven Gobbitza 7, Steffi Langer 12, Lea Stiehl 8, Marvin Weisbender 14, Emily Zollmann 5.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 8: Mariam Baher 15;
Kl. 11: Shaima'a Ahmed Doma 31.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Andreas Benz 6;
Kl. 6: Patrick Piesch 4, Max Rosenberg 6;
Kl. 8: Björn Stanischewski 32;
Kl. 9: Maike Stanischewski 47.

Köln, Ursulinengymnasium:
Kl. 9: Elisabeth Böttger 8.

Lehrte, Gymnasium Lehrte:
Kl. 11: Robin Fritsch 17.

Limburg, Tilemannschule:
Kl. 6: Helena Rist;
Kl. 7: Virginia Beck 10, Lena Daum 12, Anna Ebenig 11, Marie Harling 9, Ina Helfenstein 9, Emilie Orgler 10, Greta Schlinke 13, Sarah Urban 9;
Kl. 8: Chantall Klemm 11.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 6: Jason Beck 8, Jana Eichhorn 6, Angela Hahn 3, Sebastian Hospice 6, Marc Hoffmann 11, Lukas Koenen 8, Tim Morsbach 8, Sebastian Trapp 7, Chiara Stork 4, Annalena Silz 4;
Kl. 7: Melanie Weibrich 7, Marina Witte 16;
Kl. 12: Giang Phi 21, Ann-Kathrin Hientzsch 10.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim:
Kl. 12: Niklas Bockius 42.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Wittekindt):
Kl. 7: Lukas Krader 14;
Kl. 8: Leo Lutz 35;
Kl. 9: Léonard Wagner 3;
Kl. 12: Tim Lutz 22.

München, Max-Planck-Gymnasium:
Kl. 9: Greta Sandor 7.

München, Michaeli-Gymnasium:
Kl. 10: Axel Krafft 17.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:
Kl. 10: Bettina Diller 19.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Jelena Arambasic 11, Chantal Cornely 3 Kevin Cornely 6, Karolina Mengert 14, Victoria Mogwitz 17, Ellen Wagner 13;
Kl. 6: Jonas Ahlfeld 4, Darleen Baum 19, Liana Bergen 14, Stefanie Giesbrecht 17, Rabea Klesing 22, Runa Ruttert 15, Clemens Schlosser 5, Joshua Thron 5, Anja Wingender 18, Ege Yilmazer 4;
Kl. 7: Jasmin Hallyburton 34, David Thiessen 14 Verena Rüssing 8;
Kl. 9: Mirjam Bourgett 8, Naemi Dörksen 8, Elena Hummel 4, Sandra Wingender 4;
Kl. 10: Janina Vogl 6.

Niddatal, Geschwister-Scholl-Schule:
Kl. 4: Leonie Rößler 27.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Roberto Becciu 7, Manuel Blumenschein 8, Hannah Bock 7, Lara Braun 20, Franziska Burkard 4, Debora Gampfer 8, Laurin Gerber 9, Tobias Heinze 27, Florian Kuhn 5, Fabian Liepach 9, Simon Lutz 8, Jara Müller-Kästner 27, Krystof Navratil 8, Leon Sobotta 8, Leoni Steinweden 8, Mareike Vestner 17, Dominik Vogel 8;
Kl. 6: Ricardo Bode 38;
Kl. 9: Heiko Kötzsche 52, Thomas Fischer 17.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium:
Kl. 10: Luis Ressel 5.

Templin, Egelpfuhlschule:
Kl. 5: Ronja Gantzke 6.

Wiesbaden, Leibnitzschule:
Kl. 6: Andreas Dernier 28;
Kl. 7: Elisa Dernier 29.

Mitteilungen

- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Schuljahr 2012/2013 auf das MONOID-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des/der Abonnenten/in nicht vergessen!).
- Die MONOID-Feier 2012 findet am 24. November in Oberursel statt. Genauere Informationen sowie die Einladung an alle MONOID-Freunde findet Ihr im nächsten Heft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe
Versand: Katherine Pillau

Jahrgang 32 Heft 110 Juni 2012

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid