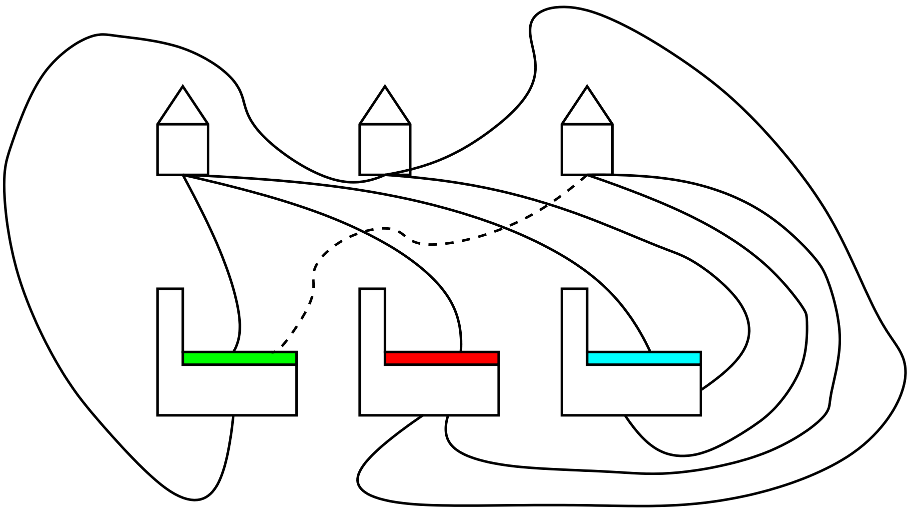
Jahrgang 32 Heft 111 September 2012

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler/innen**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.11.2012.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer/innen, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Kunz, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Elze, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Mathematische Katalysatoren

von Hartwig Fuchs

Eine Geschichte von Pfauen

Venedig war im Mittelalter ein bedeutender Seehandelsplatz – Waren aus vieler Herren Länder wurden in die Lagunenstadt gebracht und von dort weiterverkauft. Das Geschäft war keineswegs risikolos. Der Warentransport übers Meer war immer stark gefährdet: Durch Stürme, Schiffbrüche und Piratenüberfälle gingen oft Schiffe verloren und das konnte dann leicht den Bankrott für den Schiffseigner bedeuten.

Um das Risiko für die Handelshäuser zu mindern, fanden die Venezianer einen klugen Ausweg: Mehrere Kaufleute beteiligten sich vorweg mit bestimmten Anteilen an den Kosten einer Handelsreise; und war das Unternehmen erfolgreich, dann wurde der Gewinn ihren jeweiligen Kostenbeiträgen entsprechend unter ihnen aufgeteilt.

Einmal nun sollte ein Schiff nach Persien segeln, um dort neben anderen Waren auch Pfauen einzukaufen, die an allen europäischen Fürstenhofen als Statussymbol hoch begehrt waren und die deshalb auch teuer bezahlt wurden.
An den Kosten der Seereise beteiligten sich sechs Kaufleute; ihre Anteile betrugen $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{12}, \frac{2}{15}, \frac{1}{30}, \frac{1}{80}$.
Als das Schiff später erfolgreich nach Venedig zurückkehrte, hatte es 239 Pfauen an Bord. Und damit hatten die Kaufleute ein Problem: Wie konnten sie die Vögel gerecht unter sich aufteilen?
Sie wandten sich an den Dogen – den Regierungschef des Staates. Und der wusste Rat. Er nahm einen Pfau aus seinem Palastgarten, stellte ihn zu den anderen 239 Tieren und verteilte die nun 240 Pfauen so:

Gewinnanteile der Kaufleute	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{80}$
zugehörige Anzahl von Pfauen	80	96	20	32	8	3

Wegen $240 - (80 + 96 + 20 + 32 + 8 + 3) = 1$ blieb nach dem Aufteilen ein Pfau übrig – es war der des Dogen.

Die Methode des Gebens und Nehmens

Die Pfauengeschichte ist nicht nur ein hübsches Rätsel, dessen Lösung wir zunächst den Lesern überlassen. Sie ist auch eine gute Veranschaulichung einer in der Mathematik vielfach verwendeten Technik, deren Wirkungsweise der eines chemischen Katalysators vergleichbar ist: Man gibt etwas in eine Argumentationskette hinein und nimmt es später wieder heraus – mit dem positiven Effekt, dass dadurch ein Herleitungsprozess vereinfacht oder gar erst möglich wird.

Diese Technik findet Anwendung in allen Teilgebieten der Mathematik. Besonders häufig wird sie allerdings in Arithmetik und Algebra benutzt und dort lässt sie sich auch in ihren verschiedenen Erscheinungsformen meist unmittelbar identifizieren – weshalb wir ihre Verwendungsmöglichkeiten überwiegend an arithmetischen/algebraischen Beispielen aufzeigen. Da diese Technik in der Mathematik keinen besonderen Namen hat, nennen wir sie hier die Methode des Gebens und Nehmens. Bei ihrer Anwendung in den nachfolgenden Beispielen deuten wir die Stellen, wo sie eingesetzt wird, mit dem Symbol $(*)$ an.

Die Methode des Gebens und Nehmens in Aktion

Die Technik des Gebens und Nehmens wird in Arithmetik und Algebra typischer Weise so verwendet: Terme werden abgeändert – etwa vergrößert oder sie werden nur umgeformt und später macht man die Abänderung bzw. die Umformung wieder rückgängig.

Addition und Subtraktion

(1) Für reelle Zahlen a, b, c, d gilt: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$.
Nachweis:
Es sei T der Term $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.
Zunächst ist $T = (a^2c^2+b^2d^2)+(a^2d^2+b^2c^2)$.

$(*)$ Nun wird T um $2abcd$ vergrößert und zugleich um $2abcd$ verkleinert: $T = (a^2c^2+b^2d^2)+2abcd+(a^2d^2+b^2c^2)-2abcd$. Jetzt können wir T so schreiben: $T=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$; und daher ist $T \geqslant (ac+bd)^2$ wegen $(ad-bc)^2 \geqslant 0$.

Multiplikation und Division

(2) Berechne $S(n) = 1+11+111+\ldots+\underbrace{(111\cdots1)}_{n \text{ Ziffern } 1}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Lösung:

$(*)$ Zunächst multipliziert man $S(n)$ mit 9. Dann ist:

$$\begin{aligned} 9\cdot S(n) &= 9+99+999+\ldots+999\ldots9 \\ &= (10^1-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots+(10^n-1) \\ &= 10\cdot(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})-n. \end{aligned}$$

Wegen $1+10+10^2+\ldots+10^{n-1} = \frac{10^n-1}{10-1} = \frac{1}{9}(10^n-1)$ folgt:
$9\cdot S(n) = \frac{10}{9}(10^n-1)-n = \frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$.

$(*)$ Nun macht man die Multiplikation von $S(n)$ mit 9 rückgängig und erhält:

$$S(n) = \frac{10^{n+1}-10-9n}{81}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Quadrieren und Radizieren

(3) Man zeige, dass $\sqrt{10}$ keine rationale Zahl ist.
Nachweis:

Vorweg: Jede Quadratzahl n^2, wobei n eine natürliche Zahl ist, enthält in ihrer Zifferndarstellung entweder keine Endnull, falls n kein Vielfaches von 10 oder geradzahlig viele Endnullen, falls n ein Vielfaches von 10 ist.
Annahme: $\sqrt{10}$ ist eine rationale Zahl.
Aus der Annahme folgt: $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$ mit natürlichen Zahlen a und b, die wir als teilerfremd voraussetzen dürfen.

($*$) Diese Gleichung wird durch Quadrieren umgeformt: $10 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Danach ist $10b^2 = a^2$.
Nun hat a^2 keine oder aber geradzahlig viele Endnullen; dagegen hat $10b^2$ ungeradzahlig viele Endnullen – ein Widerspruch. Von der widersprüchlichen Gleichung $10b^2 = a^2$ müssen wir zurück zur Behauptung (3).

($*$) Dazu schreiben wir zunächst $10 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ und ziehen die Wurzel. So erhalten wir die Gleichung $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$, von der wir jetzt wissen, dass sie für keine natürlichen Zahlen a, b zutrifft. Daraus folgt: $\sqrt{10}$ ist keine rationale Zahl.

Transformation und Rücktransformation

(4) Bestimme die Lösungen der Gleichung $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.
Lösung:
Man dividiert die gegebene Gleichung durch x^2, ordnet um und fasst geschickt zusammen. So erhält man:

($*$) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 - 2 = 0$ $\Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 + (x + \frac{1}{x}) - 6 = 0$.

($*$) Transformation: Ersetze $x + \frac{1}{x}$ durch y in der letzten Gleichung. Damit erhält man die Gleichung $y^2 + y - 6 = 0$ mit den Lösungen $y = 2$ und $y = -3$.

($*$) Rücktransformation: Ersetze in den beiden letzten Gleichungen y durch $x + \frac{1}{x}$. Dann ergibt sich:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

Im folgenden Beispiel aus der Zahlentheorie kommt die Methode des Gebens und Nehmens in zwei verschiedenen Formen zur Anwendung.

Änderung und Wiederherstellung

(5) Für jede Primzahl $p > 7$ gilt: Die Zahl 40320 ist ein Teiler des Produkts $P = (p^2 - 9)(p^2 - 4)(p^2 - 1)$ – dafür schreiben wir kurz: $40320 \mid P$.
Nachweis:

($*$) P wird zunächst mit der binomischen Formel $p^2 - i^2 = (p - i)(p + i)$ für

($*$) $i = 1, 2, 3$ umgeformt und dann durch Hinzufügen des Faktors p abgeändert in $P' = (p-3)(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$ mit sieben aufeinander folgenden Faktoren. Wegen $p > 7$ gilt für die von p verschiedenen Faktoren von P':

Ein Faktor ist ein Vielfaches von 7, mindestens ein Faktor ist ein Vielfaches von 5 und zwei Faktoren sind Vielfache von 3. Daraus folgt: $7 \cdot 5 \cdot 3^2 \mid P'$. Die vier Faktoren $p \pm 3$, $p \pm 1$ von P' sind gerade wegen $P \neq 2$. Daher ist ein Faktor ein Vielfaches von 8, ein Faktor ist Vielfaches von 4 aber nicht von 8 und zwei Faktoren sind gerade aber keine Vielfachen von 4. Somit gilt: $2^2 \cdot 4 \cdot 8 \mid P'$. Insgesamt hat man also mit $7 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^7 = 40320$ gefunden: $40320 \mid P'$.

(∗) Entfernt man nun den Faktor p aus P' und macht die oben vorgenommen Änderung von P in P' rückgängig, dann gelangt man zu der jetzt bewiesenen Aussage: $40320 \mid P$.

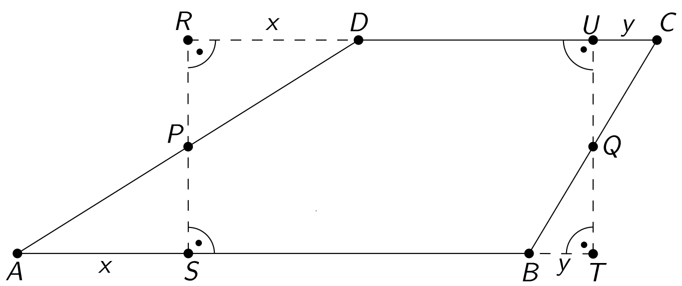
Da eine auch nur annähernd erschöpfende Darstellung der Erscheinungsformen und Anwendungsgebiete der Methode des Gebens und Nehmens hier nicht möglich ist, schließen wir mit einem Beispiel aus der Geometrie.

In der Geometrie ist die Anwendung des Prinzips Geben und Nehmen meist etwas ganz Anschauliches: Eine geometrische Figur wird um Punkte, Strecken, Dreiecke und so weiter erweitert und später wird diese Erweiterung wieder rückgängig gemacht.

Hinzufügung und Wegnahme

(6) Im Trapez $ABCD$ mit $AB \| CD$ sei h der Abstand von AB und CD. Dann hat das Trapez die Fläche $|ABCD| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot h$.

Nachweis:



Es seien P und Q die Mittelpunkte der Seiten AD und BC.

(∗) An das Trapez fügt man die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle DRP$ und $\triangle BTQ$ so an, dass DR in der Verlängerung von CD und BT in der Verlängerung von AB liegt.

Wenn man nun RP bis zum Schnittpunkt S mit AB und TQ bis zum Schnittpunkt U mit CD verlängert, dann erhält man zwei Dreiecke, für die gilt: $\triangle ASP$ ist kongruent $\triangle DRP$ und $\triangle CUQ$ ist kongruent $\triangle BTQ$.

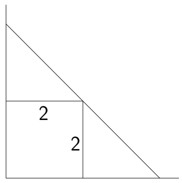
(∗) Wenn man jetzt vom Trapez $ABCD$ die Dreiecke $\triangle ASP$ und $\triangle CUQ$ wegnimmt, dann folgt: Das Trapez $ABCD$ hat die gleiche Fläche wie das Rechteck $RSTU$. Nun ist $|RSTU| = |ST| \cdot |RS| = |ST| \cdot h$. Mit den Bezeichnungen der Figur gilt wegen $|ST| = |RU|$: Einerseits ist $|ST| = |AB| - x + y$, andererseits ist $|ST| = |CD| - y + x$, sodass $|ST| + |ST| = |AB| + |BC|$ ist. Damit hat man gefunden: $|ABCD| = |RSTU| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC|) \cdot h$.

Und nun versuche es selbst

(a) Für welche reelle Zahlen x hat der Term $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, den kleinsten Wert?

(b) Wie oft kommt der Faktor 2 im Produkt $P(n) = (n+1)(n+2)...(2n)$ vor?

(c) Bestimme die positive(n) Lösung(en) der Gleichung $x^{ax} = 10^x$, $a > 0$ reell.

(d) 

Eine 8m lange Leiter lehnt an einer Wand, wobei sie die Kante eines Würfels der Kantenlänge 2m berührt, der gegen die Wand gestellt ist. Wie lang ist das Leiterstück oberhalb der Würfelkante?

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 38.

Hättest Du es gewusst?
Was ist die Brute-Force-Methode?
von Hartwig Fuchs

Im Laufe ihrer mehrtausendjährigen Geschichte hat die Mathematik ein umfangreiches und vielseitiges Arsenal an Arbeitsmethoden entwickelt. Am Anfang waren es ganz einfache Techniken, zu denen dann aber nach und nach immer ausgeklügeltere und effiziente Verfahren hinzu kamen. Die neueren Methoden haben jedoch nicht alle frühen Techniken verdrängen können.

Eine der uralten Arbeitsweisen ist die *vollständige Durchmusterung* einer Menge: Man überprüft der Reihe nach die Elemente der Menge – des sogenannten *Lösungsraumes* – darauf hin, ob sie eine Lösung eines gegebenen Problems sind oder nicht.
Diese Methode ist so einsichtig, dabei so einfach in der Anwendung und so vielfältig einsetzbar, dass sie noch heute nicht nur in der Mathematik sondern auch in alltäglichen Situationen eine Rolle spielt.

- Im Märchen vom Aschenbrödel will die böse Stiefmutter verhindern, dass ihre Stieftochter sie zu einem Fest im Schloss des Königs begleitet. Deshalb schüttet sie eine große Schüssel voll Linsen in die Küche und befiehlt Aschenbrödel, die guten Linsen aufzusammeln; erst danach dürfe sie mit zum Fest. Aber allerlei Vögel – allesamt Aschenbrödel zugetan – erledigen die zeitraubende Arbeit schnell nach der Methode: „Die Guten ins Töpfchen, die Schlechten ins Kröpfchen." Wie die Geschichte weitergeht, mag man im Märchenbuch nachlesen.

Zwar verhalten sich Vögel so nur im Märchen – tatsächlich würden sie alle Linsen verspeisen –, diese Episode zeigt aber: Der Märchenerzähler und seine Leser kennen das Prinzip der vollständigen Durchmusterung.

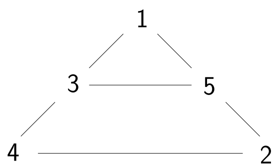
Zwei Aspekte der Technik der vollständigen Durchmusterung – der *brute force method** (Methode der rohen Gewalt), wie man sie in der englischsprachigen Literatur nennt – sind für die Mathematik wichtig. Wenn man entscheiden soll, welche Elemente einer endlichen Menge $\mathbb{L}$ eine bestimmte Eigenschaft besitzen oder eine gegebene Bedingung erfüllen, dann führt die vollständige Durchmusterung von $\mathbb{L}$ im Prinzip stets zum Ziel.
Und bei Problemen mit einem endlichen Lösungsraum $\mathbb{L}$, für die kein anderer Lösungsweg gefunden wird, ist die Brute-Force-Methode oft die letzte Rettung.

Kleine endliche Lösungsräume

- Für welche Kugeln mit ganzzahligen Radien r sind die Oberflächen und Volumina dreiziffrige ganzzahlige Vielfache von π?

Dieses Problem ist so speziell, dass es wohl nur mit der Brute-Force-Technik lösbar ist. Dazu benötigt man einen Lösungsraum $\mathbb{L}(r)$ aus ganzen Zahlen r, die als Kandidaten für eine Lösung in Frage kommen.
Aus den Formeln $O = 4\pi r^2$ für die Kugeloberfläche und $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ für das Kugelvolumen lassen sich Bedingungen herleiten, welche die Radien r erfüllen müssen: $100 \leq 4r^2 \leq 999$, also $r \in \{5, 6, ..., 15\}$ und $100 \leq \frac{4}{3}r^3 \leq 999$, also $r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Folglich ist $\mathbb{L}(r) = \{5, 6, ...15\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
Aus $\mathbb{L}(r)$ sucht man nun diejenigen r heraus, für die $4r^2$ und $\frac{4}{3}r^3$ ganzzahlig sind – man findet $r = 6$ und $r = 9$ als Lösungen der Aufgabe.

Manche Probleme sind so strukturiert, dass man den Weg zu ihren Lösungen dadurch verkürzen kann, dass man die brute force Methode mehrfach anwendet.



- Zwei Zahlen in der Figur heißen benachbart, wenn sie durch genau eine Strecke verbunden sind. In der Figur sind die Zahlen 1 und 3, nicht aber 1 und 4 verbunden.

Man bilde nun fünfziffrige Zahlen, indem man benachbarte Zahlen nebeneinander schreibt, wobei jede Zahl aus der Figur genau ein Mal benutzt wird – also etwa so: 13524; nicht aber so: 13513. Welche der auf diese Weise gebildeten Zahlen ist durch 7 teilbar?

Es sei $\mathbb{L}(z)$ die Menge aller fünfziffrigen Zahlen z mit beliebigen Ziffern aus $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. $\mathbb{L}(z)$ enthält dann $5^5 = 3125$ Zahlen. Aus $\mathbb{L}(z)$ filtert man nun alle Zahlen s heraus – brute force! –, die keine zwei gleichen Ziffern besitzen und

* Brute force method wohl deshalb, weil diese Methode ohne technische Raffinessen und ohne Rücksicht auf Effizienz und Eleganz direkt auf's Ziel losgeht. In der Umgangsprache nennt man das die „Holzhammer-Methode".

deren Ziffern in der Figur benachbart sind. Die Menge der so gefundenen Zahlen s sei $\mathbb{L}(s)$ genannt.

Die vollständige Durchmusterung von $\mathbb{L}(z)$ zur Bestimmung der Menge $\mathbb{L}(s)$ lässt sich übersichtlich durch Baumdiagramme darstellen.
Mit der Startzahl 5 sieht das so aus:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \diagup & 1 & — & 3 & — & 4 & — & 2 \\
5 & — & 2 & — & 4 & — & 3 & — & 1 \\
 & \diagdown & 3 & — & 4 & — & 2 & & \\
 & & & \diagdown & 1 & & & &
\end{array}$$

Man sieht: $51342 \in \mathbb{L}(s)$ und $52431 \in \mathbb{L}(s)$.
Führt man die Durchmusterung von $\mathbb{L}(z)$ vollständig durch, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(s) = \{&13425, 13524, 15243, 15342, 24315, 24351, 25134,\\ &31524, 34251, 42513, 42531, 43152, 51342, 52431\}.\end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{L}(s)$ ist nun der Lösungsraum, in dem sich die gesuchten durch 7 teilbaren Zahlen verbergen. Eine vollständige Durchmusterung von $\mathbb{L}(s)$ liefert dann die Lösungszahlen: $s = 13524$ und $s = 34251$.

Große endliche Lösungsräume

Die Brute-Force-Methode führt bei endlichen Mengen stets zum Ziel – aber nur in der Theorie. In der Praxis jedoch haben manche Probleme so große endliche Lösungsräume, dass deren vollstänige Durchmusterung für einen, der nur mit dem Kopf, mit Bleistift und Papier arbeitet, nicht mehr mit einem angemessenen Zeitaufwand durchführbar ist.

- Die 24–ziffrige Zahl $N = 357\,686\,312\,646\,216\,567\,629\,137$ ist eine Primzahl. Wenn man nun von links nach rechts nacheinander alle Ziffern in N bis auf die letzte Ziffer 7 wegstreicht, dann erhält man eine Folge von 24 Primzahlen.

Trifft diese Behauptung zu?

Diese Frage hätte man auch vor dem Zeitalter der Computer für die kleinen Zahlen der Folge $7, 37, 137, 9137, \ldots, N$ beantworten können, nicht aber für große Zahlen wie $N - 3 \cdot 10^{23}$ oder N.
Denn um etwa die Primalität von N nachzuweisen, muss man alle Primzahlen $p \le \sqrt{N}$ mit $\sqrt{N} \approx 5,98 \cdot 10^{11}$ kennen** und zeigen, dass keine von ihnen ein Teiler von N ist.

** Jede nicht prime Zahl $n > 1$ hat mindestens einen Primteiler $< n$. Wir zeigen: n hat einen Primteiler $\le \sqrt{n}$. Ist n nicht prim, also $n = r \cdot s$ mit $1 < r, s < n$, dann können nicht r und s beide $> \sqrt{n}$ sein, sonst wäre $r \cdot s > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Ist r eine Primzahl, so gilt die Behauptung. Ist r nicht prim, so hat r einen Primteiler $< r \le \sqrt{n}$ und auch jetzt gilt die Behauptung.

Die Primzahlmenge $\mathbb{L}(p) = \{2, 3, 5, ..., p \mid p$ größte Primzahl $\leq \sqrt{N}\}$ konnte man praktisch nur mit der Brute-Force-Methode aus der Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, ..., n \mid n$ größte natürliche Zahl $\leq \sqrt{N}\}$ aussondern. Die Primzahlmenge $\mathbb{L}(p)$ hat ungefähr $2{,}21 \cdot 10^{10}$ Elemente.***
Wenn man nun annimmt, dass man für die Berechnung einer Primzahl aus $\mathbb{L}(p)$ und der Division von N durch diese Primzahl durchschnittlich 10 Minuten brauchte (eine überaus optimistische Annahme!), dann hätte man damals für die Herleitung der Primalität von N etwa $2{,}21 \cdot 10^{10} : (6 \cdot 24 \cdot 365) \approx 420\,000$ Jahre benötigt.

Ein moderner leistungsfähiger Computer löst das Problem in wenigen Tagen, obgleich auch er im Wesentlichen mit der Brute-Force-Technik arbeitet.

Zwar sind die Lösungsmengen vieler Probleme, die man vor dem Aufkommen der Computer als zu groß für eine erfolgreiche Anwendung der Brute-Force-Methode betrachtete, heute für einen Computer nur noch klein. Aber es bleiben auch Lösungsmengen, die selbst für den schnellsten Computer zu umfangreich sind.

- Die bis heute nicht vollständig bewiesene Vermutung von Christian Goldbach (1690–1764) für ungerade natürliche Zahlen lautet: Jede ungerade natürliche Zahl $u \geq 7$ ist eine Summe aus drei Primzahlen.

Nachdem man beweisen konnte, dass diese Vermutung für jedes $u > 3^{3^{15}}$ gilt, braucht man „nur" noch zu überprüfen, ob sie auch für jede Zahl u aus der Menge $\mathbb{L}(u) = \{7, 9, 11, ..., 3^{3^{15}}\}$ zutrifft. Aber hier ist für die Anwendung der Brute-Force-Methode selbst für Computer eine Grenze überschritten: die Menge $\mathbb{L}(u)$ kann nicht vollständig durchmustert werden, reicht doch $\mathbb{L}(u)$ hinauf bis zur 6 846 169–ziffrigen Zahl $3^{3^{15}}$.

Unendliche Lösungräume

Das Prinzip der vollständigen Durchmusterung muss bei Lösungsräumen $\mathbb{L}$ mit unendlich vielen Elementen notwendiger Weise versagen. Aber eine *unvollständige Durchmusterung* von $\mathbb{L}$ – darunter sei die vollständige Durchmusterung einer endlichen Teilmenge von $\mathbb{L}$ verstanden, stellt mitunter eine nützliche Arbeitstechnik des Mathematikers dar. Denn mit dieser Technik lassen sich Einsichten gewinnen, die zu Vermutungen über die Lösungen von Problemen führen können, deren Lösungsraum durchaus auch unendlich sein mag oder aber sie gibt die Möglichkeit, vorgegebene Vermutungen zu widerlegen.

- Joseph Bertrand (1822–1900) gelangte durch die vollständige Durchmusterung eines Anfangsstückes der unendlichen Menge $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ zu der Vermutung: Für $n = 2, 3, 4, ...$ gilt: Zwischen den Zahlen n und $2n$ befindet sich stets mindestens eine Primzahl.

*** Nach dem berühmten Primzahlsatz von Gauß ist die Anzahl der Primzahlen $\leq n$ angenähert $\frac{n}{\ln(n)}$.

Pafnuti L. Chebychew (1821–1894) hat Bertrands Vermutung bewiesen und verallgemeinert.

- Es sei $\mathbb{L}(x^n - 1)$ die Menge der Binome $x^n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Jedes Binom $x^n - 1$ lässt sich in zwei Polynome aufspalten:

  $$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1).$$

  Manchmal ist das zweite Polynom ebenfalls zerlegbar, wie die folgende Liste zeigt:

  $$\begin{aligned} x^1 - 1 &= \ x - 1 \\ x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\ x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \\ x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \\ x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \\ x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1). \end{aligned}$$

  Bei der Fortsetzung dieser kurzen Liste bis hin zum Binom $x^{100} - 1$ zeigte sich eine Eigenschaft der Zerlegungspolynome, die bereits in den Fällen $x^n - 1$, $n = 1, 2, \ldots, 6$ zu sehen ist und die zu der Vermutung führte:

  Bei der Aufspaltung eines jeden Binoms aus $\mathbb{L}(x^n - 1)$ haben die dabei auftretenden Zerlegungspolynome nur Koeffizienten $+1$ und -1.

Walentin Iwanow (1908–1992) konnte nun aber zeigen, dass die unvollständige Durchmusterung von $\mathbb{L}(x^n - 1)$, auf der die Vermutung gründete, zu früh abgebrochen wurde: Das Binom $x^{105} - 1$ hat das Zerlegungspolynom

$$x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} \pm 27 \text{ weitere Summanden.}$$

Daher ist die Vermutung mit der Brute-Force-Methode als falsch erwiesen.

Es gibt viele Vermutungen – insbesondere in der Zahlentheorie –, auf die man durch unvollständige Durchmusterung gestoßen ist und die man heutzutage mit der gleichen Technik widerlegen kann, indem man mit Computern weitaus umfangreichere Durchmusterungen durchführt. Dazu nur ein weiteres Beispiel.

- George Pólya (1887–1985) ist durch die Überprüfung eines großen Anfangsstücks der Menge der natürlichen Zahlen zu der Überzeugung gelangt:

  Bezeichnet man mit $G(n)$ bzw. $U(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq n$, die geradzahlig viele bzw. ungeradzahlig viele Primteiler besitzen, dann gilt für jedes $n \geq 1$: $G(n) \leq U(n)$.

Im Jahre 1980 konnte nun Minoru Tanaka mit seinen Computer-Berechnungen zeigen, dass die bereits 1919 von Pólya aufgestellte Vermutung für jedes $n < N$ mit $N = 906\,316\,517$ zutrifft – ein Ergebnis, das für Pólya praktisch unerreichbar war –, dass jedoch $G(N) > U(N)$ ist, womit Pólyas Vermutung widerlegt ist.

Die besondere Aufgabe
Eine Gleichung in zwei Unbekannten
von Robin Fritsch

Aufgabe 1

Man bestimme alle Paare (a, b) nichtnegativer ganzer Zahlen, welche die Gleichung $a^2 \cdot 2^b + b^2 \cdot 2^a = 4ab$ erfüllen

Lösung

Wir nehmen an, dass eine der beiden Zahlen gleich Null ist. Ohne Einschränkung sei dies a. Damit vereinfacht sich die Gleichung zu $b^2 = 0$ und dies gilt offensichtlich nur, wenn auch $b = 0$ ist.

Im Folgenden können wir also annehmen, dass a und b verschieden 0, also ≥ 1 sind. Mit der AM-GM-Ungleichung* folgt:

$$4ab = a^2 \cdot 2^b + b^2 \cdot 2^a \geq 2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot 2^b \cdot b^2 \cdot 2^a} = 2ab \cdot \sqrt{2^{a+b}}.$$

Da a und b ungleich 0 sind, können wir durch $2ab$ teilen und erhalten $2 \geq \sqrt{2^{a+b}}$ beziehungsweise $2^2 \geq 2^{a+b}$. Da die Funktion 2^x streng monoton steigend ist, folgt daraus $2 \geq a + b$. Wegen $a, b \geq 1$ kommt damit nur noch das Paar $(1, 1)$ in Frage. Eine Probe bestätigt, dass das Paar eine Lösung ist.

Somit sind $(0, 0)$ und $(1, 1)$ die einzigen Lösungen.

Man kann diese Aufgabe auch analog zur folgenden Aufgabe 2 lösen, welche eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe ist.

Aufgabe 2

Man bestimme alle Paare (a, b) nichtnegativer ganzer Zahlen in Abhängigkeit der positiven ganzen Zahl k, welche die Gleichung $a^2 \cdot 2^b + b^2 \cdot 2^a = 2^k \cdot ab$ erfüllen.

Lösung

Wenn a oder b gleich Null sind – ohne Einschränkung sei dies a –, wird die Ausgangsgleichung erneut zu $b^2 = 0$ und damit ist auch $b = 0$.

Im Folgenden können wir also annehmen, dass a und b verschieden 0, also ≥ 1, sind. Nun sei $a = m \cdot e \cdot 2^x$ und $b = m \cdot f \cdot 2^y$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0$ und $m, e, f \in \mathbb{N}$, wobei m, e und f ungerade und e und f teilerfremd sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (m \cdot e \cdot 2^x)^2 \cdot 2^b + (m \cdot f \cdot 2^y)^2 \cdot 2^a = 2^k \cdot (m \cdot e \cdot 2^x) \cdot (m \cdot f \cdot 2^y) \\ \iff \quad & e^2 \cdot 2^{2x+b} + f^2 \cdot 2^{2y+a} = e \cdot f \cdot 2^{x+y+k} \qquad (1) \end{aligned}$$

Deswegen muss $f^2 \cdot 2^{2y+a}$ offensichtlich durch e teilbar sein und da e ungerade ist, folgt daraus $e \mid f^2$. Da e und f aber teilerfremd sind, kann dies nur erfüllt sein,

* Die Arithmetisches-Mittel-Geometrisches-Mittel-Ungleichung besagt, dass das arithmetische Mittel stets größer ist als das geometrische Mittel.

wenn $e = 1$ ist. Analog muss auch $f \mid e^2$ gelten und so ergibt sich auch $f = 1$. Also gilt $a = m \cdot 2^x$ und $b = m \cdot 2^y$ und mit (1) folgt:

$$2^{(2x+m2^y)} + 2^{(2y+m2^x)} = 2^{x+y+k} \tag{2}$$

Nun beweisen wir zunächst das folgende Lemma:

> Es seien u, v und w nichtnegative ganze Zahlen mit $2^u + 2^v = 2^w$. Dann folgt $u = v = w - 1$.

Beweis des Lemmas:
Offensichtlich gelten $w > u$ und $w > v$ und ohne Einschränkung sei $u \leq v$. Indem wir die Gleichung durch 2^u dividieren, erhalten wir $1 + 2^{v-u} = 2^{w-u}$. Nun sind 2^{v-u} und 2^{w-u} offensichtlich ganze Zahlen. Wegen $w > u$ ist $w - u \geq 1$ und damit ist 2^{w-u} gerade. Das heißt aber, dass 2^{v-u} ungerade und deswegen $v - u = 0$ sein muss. Somit ist $u = v$ und es gilt $2^w = 2^u + 2^u = 2^{u+1}$, also $w = u + 1$.

Wenden wir dieses Lemma nun auf die Gleichung (2) an, so ergeben sich die Gleichungen:

$$2x + m \cdot 2^y = 2y + m \cdot 2^x, \tag{3}$$
$$2x + m \cdot 2^y = x + y + k - 1. \tag{4}$$

Ohne Einschränkung nehmen wir $a \geq b$, also $x \geq y$, an und definieren $d := x - y$. Dann folgt aus (3):

$$2d = 2(x-y) = m\left(2^x - 2^y\right) = m \cdot 2^y\left(2^{x-y} - 1\right) = m \cdot 2^y\left(2^d - 1\right). \tag{5}$$

Wegen $m \cdot 2^y = b \geq 1$ folgt daraus $2d \geq 2^d - 1$. Wie man leicht per Induktion beweist, gilt für $d \geq 3$ aber $2^d - 1 \geq 2d$. Also muss $d \leq 2$ sein. Wegen $x \geq y$ ist auch $d \geq 0$.

1. Fall: $d = 0$. Dann gilt $x = y$, also $a = b$ und mit (4) folgt $2x + m \cdot 2^x = x + x + k - 1$, also $m \cdot 2^x = k - 1$. Damit haben wir $a = b = k - 1$. Eine Probe bestätigt, dass das Paar $(k-1, k-1)$ stets die Gleichung löst.
2. Fall: $d = 1$. Mit (5) folgt $b = m \cdot 2^y = \frac{2d}{2^d-1} = 2$. Da m ungerade ist, ergibt sich $m = 1$ und $y = 1$. Weiter folgt $x = y + d = 2$ und somit $a = m \cdot 2^x = 4$. Wegen (4) muss dann aber $2 \cdot 2 + 1 \cdot 2^1 = 2 + 1 + k - 1$, also $k = 4$ gelten. Das Paar $(4, 2)$ kann also nur im Fall $k = 4$ eine Lösung sein. Eine Probe bestätigt, dass $(4, 2)$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung ist – aus Symmetriegründen ist das Paar $(2, 4)$ dann ebenfalls eine Lösung.
3. Fall: $d = 2$. Mit (5) folgt $b = m \cdot 2^y = \frac{2d}{2^d-1} = \frac{4}{3}$. Ein Widerpruch zur Voraussetzung, dass b eine ganze Zahl ist.

Also sind für alle k die Paare $(0, 0)$ und $(k-1, k-1)$ Lösungen. Für $k = 4$ lösen $(4, 2)$ und $(2, 4)$ ebenfalls die Gleichung. Weitere Lösungen existieren nicht.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

George G. Szpiro: „Die Keplersche Vermutung“

Die Aussage der Keplerschen Vermutung ist auch für den mathematischen Laien leicht zu verstehen: Die dichteste Packung gleichgroßer Kugeln erreicht man, indem man diese so stapelt wie ein Obsthändler seine Orangen. Seit der Astronom Johannes Kepler im Jahre 1611 die Vermutung aufgestellt hatte, versuchen Mathematiker, diese allgemeingültig zu beweisen. Erst 1998 schaffte der Mathematiker Thomas Hales von der Universität Michigan den Durchbruch mit einem computergestützten Beweis. Beim Lesen des Buches „Die Keplersche Vermutung“ von George G. Szpiro denkt man unwillkürlich an Simon Singhs „Fermats letzter Satz“. Ähnlich wie Singh stellt Szpiro die verschiedenen seit Aufstellung der Vermutung angestellten Bemühungen um einen mathematischen Beweis dar und ordnet diese geschickt in die mathematikhistorische Gesamtentwicklung ein. Der Autor, Mathematiker und Wissenschaftsjournalist bei der Neuen Zürcher Zeitung, schafft es dabei, die Schwierigkeit zu meistern, sein Buch für drei unterschiedliche Niveaus von Lesern gleichermaßen interessant zu gestalten. Im normalen Textablauf gibt es Passagen, die durch eine andere Schriftart hervorgehoben sind. Diese führen einen im Normaltext angesprochenen mathematischen Inhalt weiter aus. Szpiro ist dabei das Kunststück gelungen, dass der eigentliche Text fast nichts von seiner Faszination verliert, wenn man diese Teile überblättert. Für alle diejenigen, welche über die genannten Ausführungen hinaus noch weitere mathematische Anregungen wollen, gibt es zu jedem Kapitel noch einen entsprechenden Anhang, der die aufgeworfenen Fragestellungen weiter fasst.

Fazit: Auch wenn die von Szpiro erzählte Geschichte nicht ganz an Simon Singhs „Fermats letzter Satz“ heranreicht, ist ihm doch – anhand der titelgebenden und jedem Laien verständlich zu machenden Vermutung – ein schöner Einblick in die Geschichte der Mathematik gelungen.

Gesamtbeurteilung: gut ☺☺

Angaben zum Buch:
Szpiro, George G.: Die Keplersche Vermutung. Wie Mathematiker ein 400 Jahre altes Rätsel lösten; Springer 2011, ISBN 978-3-642-12740-3, geb. 326 Seiten, 29,95 €.

Art des Buches:	Mathematikhistorisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 16 Jahren

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Zahlen als Summe aus zwei abundanten Zahlen

Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen (perfekt), wenn sie gleich der Summe $\sigma'(n)$ ihrer echten Teiler ist, sie heißt abundant, wenn $\sigma'(n) > n$ ist, und defizient, falls $\sigma'(n) < n$ gilt.

Die beiden kleinsten vollkommenen Zahlen sind 6 und 28. Alle Zahlen von 1 bis 11, ausgenommen 6, sind defizient (dabei wird $\sigma'(1) = 0$ gesetzt). Die kleinste abundante Zahl ist 12, denn $\sigma'(12) = 16 > 12$.

Im Jahre 1962 wurde von Charles Stanley Ogilvy ein merkwürdiger Satz veröffentlicht:

> Fast alle natürlichen Zahlen (das heißt alle mit Ausnahme von endlich vielen Zahlen) können als eine Summe von zwei abundanten Zahlen geschrieben werden; die endlich vielen Ausnahmezahlen, für die es eine solche Darstellung also nicht gibt, sind alle ≤ 83160. Diese Schranke konnte wenig später auf 28123 und sogar noch weiter erniedrigt werden.

Nun die Frage an die Computer-Fans:

> Welches ist die größte Ausnahmezahl und wie viele Ausnahmezahlen gibt es?

(H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2012 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 109

Immer symmetrisch?

Die Buchstaben a, b, c, d bezeichnen im Folgenden die Ziffern natürlicher Zahlen. Der Quotient $\frac{ab}{ba}$ mit $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq b \leq 9$ ist genau dann eine ganze Zahl, wenn $a = b$ ist; er hat dann den Wert 1. Analog ist der Quotient $\frac{abc}{cba}$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $1 \leq c \leq 9$ genau dann eine ganze Zahl, nämlich wieder gleich 1, wenn $a = c$ ist. Überprüfe diese beiden Aussagen mit Deinem Computer und untersuche, ob für vierziffrige Zahlen $abcd$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, $1 \leq d \leq 9$ Ähnliches gilt, nämlich dass der Quotient $\frac{abcd}{dcba}$ genau dann eine ganze Zahl ist, wenn $abcd$ symmetrisch ist, also $a = d$ und $b = c$ gilt. (E.K.)

Ergebnisse

Die Überprüfung, für welche Ziffernwerte von a und b zwischen 1 und 9 der Quotient $\frac{ab}{ba}$ ganzzahlig ist, liefert tatsächlich unter den 81 Fällen nur für $a = b$ eine ganze Zahl, nämlich 1.

Ganz entsprechend liefert der Computer unter den 810 Quotienten $\frac{abc}{cba}$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $1 \leq c \leq 9$ nur dann eine ganze Zahl, nämlich 1, wenn $a = c$ ist. EIne solche Computerabfrage, zum Beispiel mit dem Algebrasystem *Derive*, ist leicht zu erstellen und sieht so aus:

`VECTOR(VECTOR(VECTOR(IF(INTEGER?`
$\left(\frac{100\cdot a+10\cdot b+c}{100\cdot c+10\cdot b+a}\right)$, $[\frac{100\cdot a+10\cdot b+c}{100\cdot c+10\cdot b+a}, 100 \cdot a + 10 \cdot b + c]$, "“), $a, 1, 9), b, 0, 9), c, 1, 9)$

Überraschender Weise liefert die entsprechende Ganzheitsabfrage bei den 8100 Quotienten $\frac{abcd}{dcba}$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, $1 \leq d \leq 9$ außer den trivialen 81 Fällen mit $a = d$ und $b = c$ und dem Quotientenwert 1 noch genau zwei weitere Ergebnisse, nämlich $\frac{8712}{2178} = 4$ und $\frac{9801}{1089} = 9$.

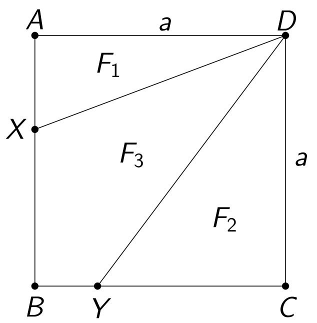
Auf den Ausnahmefall $\frac{8712}{2178} = 4$ ist auch Niklas Bockius vom Otto-Schott-Gymnasium in Mainz mit seinem Python-Programm gestoßen. Im Falle fünf- und mehrziffriger Zähler und Nenner hat er die Quotienten $\frac{87912}{21978}$, $\frac{879912}{219978}$ und $\frac{8799912}{2199978}$, die alle den Wert 4 haben, entdeckt.

In der Tat treten auch bei den 81000 Quotienten $\frac{abcde}{edcba}$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$, $1 \leq e \leq 9$ außer den trivialen Fällen genau zwei weitere Ganzheitsfälle auf, nämlich $\frac{87912}{21978} = 4$ und $\frac{98901}{10989} = 9$.

Wer errät, wie es weitergeht? (E.K.)

Leserzuschrift
Lösung der Aufgabe IV aus Monoid 109
von Jens Carstensen

In Monoid 109 stellten wir Euch die folgende Mathespielerei mit dem Titel „Zerlegung eines Quadrats“:



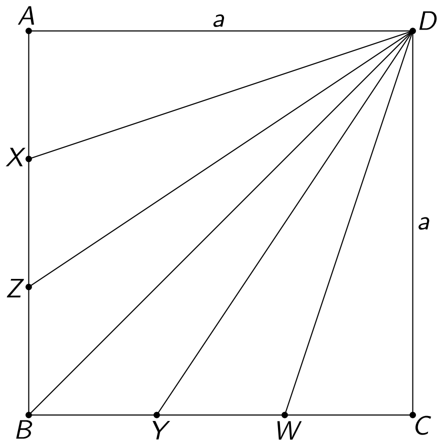
Im Quadrat $ABCD$ sind der Punkt X auf der Strecke AB und der Punkt Y auf der Strecke BC so zu bestimmen, dass für die Flächen F_1, F_2 und F_3 der Dreiecke $\triangle AXD$ und $\triangle YCD$ und des Vierecks $XBYD$ gilt: $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$. (H.F.)

In Monoid 110 ist eine sehr rechenintensive Lösung der Aufgabe angegeben. Dies hat unseren Leser Jens Carstensen dazu veranlasst, die folgende rein geometrische Lösung zu finden:

Die Punkte X, Y, Z und W teilen die Seiten AB und BC des Quadrats in drei gleichlange Strecken, das heißt:

$AX = XZ = ZB = BY = YW = WC = \frac{1}{3}a.$

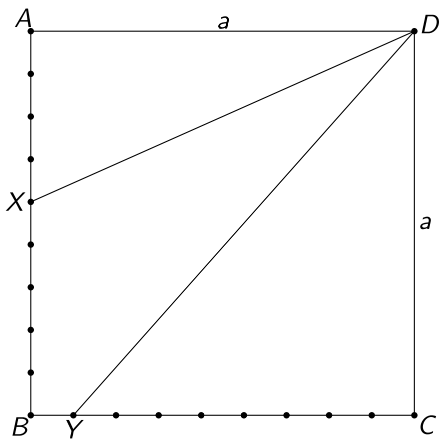
Nun verbindet man D mit X, Z, B, Y und W. Die Dreiecke $\triangle DAX$, $\triangle DXZ$ und $\triangle DZB$ haben dieselbe Fläche, denn ihre Basen AX, XZ und ZB sind gleichlang und sie haben dieselbe Höhe DA von D. Analog haben die Dreiecke $\triangle DBY$, $\triangle DYW$ und $\triangle DWC$ dieselbe Fläche, und alle sechs Dreiecke sind gleich groß. Damit stehen die Flächen des Dreiecks $\triangle DAX$, des Vierecks $DXBY$ und des Dreiecks $\triangle DYC$ im Verhältnis (in dieser Reihenfolge) 1 : 3 : 2.



Man könnte auch sagen, dass $\triangle DAX$, $\triangle DXB$ und $\triangle DBC$ das Flächenverhältnis 1 : 2 : 3 haben.

Eine Verallgemeinerung

Wir haben oben die Seiten AB und BC in insgesamt sechs Strecken geteilt, weil $1+2+3 = 6$ ist. Wenn wir ein anderes Verhältnis zwischen Flächen betrachten möchten, zum Beispiel 2 : 3 : 4, müssten wir die beiden Quadratseiten in insgesamt $2 + 3 + 4 = 9$ gleiche Strecken einteilen. Da aber 9 eine ungerade Zahl ist, können wir sie jedoch in 18 Teile teilen, neun Teile auf AB und neun Teile auf BC, das heißt wir betrachten das Verhältnis 4 : 6 : 8 (siehe Figur oben).



Danach können wir einfach die Teile aufzählen: AX enthält vier Strecken, $XB+BY$ enthält sechs Strecken und YC acht Strecken. Das Flächenverhältnis zwischen $\triangle DAX$, $DXBY$ und $\triangle DYC$ ist nun 4 : 6 : 8 oder 2 : 3 : 4.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 110

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Lösung gesucht

Wie lauten die ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $x^2 - y^2 = 2012$ (falls es solche Lösungen überhaupt gibt)? (H.F.)

Lösung:

Es ist $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 2012$. Falls nun x und y ganzzahlig sind, dann sind es auch $x-y$ und $x+y$. Die ganzzahligen Werte von $x \pm y$ sind die Teiler von $2012 = 4 \cdot 503$. In der nachfolgenden Tabelle sind diese Teiler und die aus ihnen folgenden Lösungen (x, y) angegeben.

$x-y$	± 1	± 2	± 4	± 503	± 1006	± 2012
$x+y$	± 2012	± 1006	± 503	± 4	± 2	± 1
x	–	± 504	–	–	± 504	–
y	–	± 502	–	–	∓ 502	–

Die Gleichung hat also nur die vier ganzzahligen Lösungen: $(x, y) = (504, 502)$, $(504, -502)$, $(-504, 502)$, $(-504, -502)$.

II. Primzahl-Summen

Es sei p eine Summe aus Primzahlen, mit $p = 100$. Was ist die Summe mit

a) der kleinst möglichen Anzahl an Summanden?
b) der größt möglichen Anzahl ungerader Summanden?
c) der größten Anzahl verschiedener Summanden? (H.F.)

Lösung:

a) Beispielsweise $3 + 97 = 100$ oder $41 + 59 = 100$.
b) Für 31 Summanden 3 gilt: $31 \cdot 3 + 7 = 100$.
c) $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100$.

III. Faulige Äpfel

Herr K. will eine Kiste mit 80 Äpfeln kaufen. Auf seine Frage, ob vielleicht einige der Äpfel faulig sein könnten, erhält er die Antwort: „Wenn Sie aus der Kiste 9 Äpfel nehmen, können Sie sich darauf verlassen, dass 6 davon gut sind.“ Wie viele faulige Äpfel enthält die Kiste? (WJB)

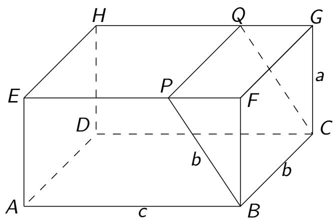
Lösung:

Höchstens 3. Gäbe es mehr als 3 faulige Äpfel, so könnte man beim Entnehmen von 9 Äpfeln auch mehr als 3 faulige erwischen, also weniger als 6 gute.

IV. Quadratische Schnittfigur

Ein Quader mit den Kantenlänge a, b, c und $a < b < c$ sei gegeben. Finde eine Ebene, die den Quader so schneidet, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist! (H.F.)

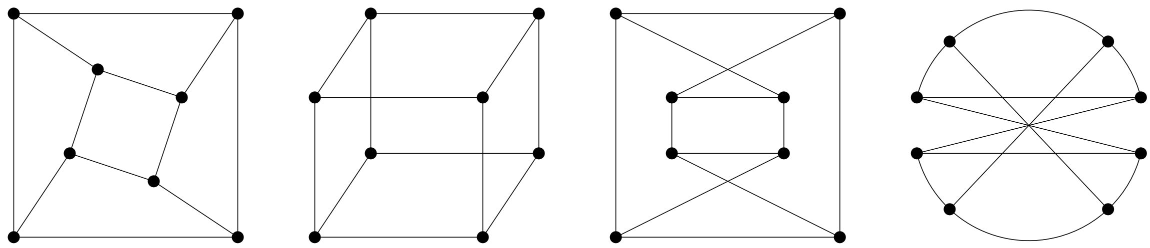
Lösung:



Mit den Bezeichnungen der Figur seien $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CG} = a$. Der Kreis um B mit Radius b in der Quaderfläche $ABFE$ schneidet wegen $\overline{BF} = a < b < c = \overline{EF}$ die Strecke $\overline{FE}$ in einem inneren Punkt P. Ganz ebenso erhält man den Punkt Q in der Strecke $\overline{GH}$. Im Viereck $BCQP$ haben dann alle vier Seiten die Länge b. Da $BC \perp ABFE$ und $BC \perp CGHD$, ist auch $BC \perp BP$ und $BC \perp CQ$. Deshalb ist $BCQP$ eine quadratische Schnittfigur der Ebene, in der $BCQP$ liegt, mit dem gegebenen Quader.

V. Nummerierung gesucht

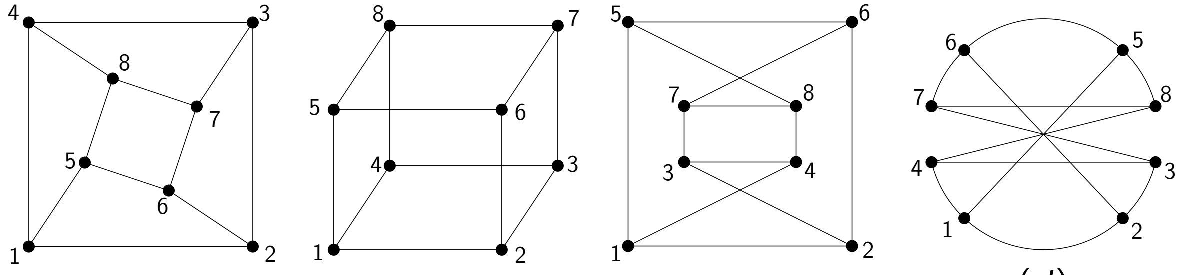
Betrachtet die folgenden vier Figuren, bestehend aus acht Punkten und zwölf Linien. Nummeriere in jeder Figur die Punkte mit den Zahlen 1 bis 8 so, dass in jeder der vier Figuren nur Zahlenpaare miteinander verbunden sind, die es auch in jeder anderen Figur sind. (H.F.)



(a) (b) (c) (d)

Lösung:

Es gibt viele Lösungen, eine davon wird hier als Beispiel angegeben:



(a) (b) (c) (d)

VI. Drei Sammler

Von den drei Freunden Paul (P), Quintus (Q) und Robin (R) sammelt genau einer Briefmarken (B), einer sammelt nur Münzen (M) und der dritte sammelt ausschließlich Asterix-Hefte (A).
Finde heraus, was jeder der Freunde sammelt, wenn von den folgenden drei Aussagen zwei falsch und eine wahr sind:

(a) Paul sammelt keine Briefmarken und Robin sammelt keine Münzen;

(b) Paul sammelt Münzen oder Quintus sammelt Asterix-Hefte;

(c) Quintus sammelt keine Briefmarken. (H.F.)

Lösung:

1. Fall: Annahme: (a) ist wahr und (b) sowie (c) sind falsch.
Da (c) falsch ist, folgt: Q sammelt B.
Aus der Wahrheit von (a) folgt dann, da (R sammelt nicht M) wahr sein muss und R etwas anderes als Q sammelt, dass gilt: R sammelt A; und daher: P sammelt M. Aus der Falschheit von (b) folgt dann: (P sammelt M) muss falsch sein – ein Widerspruch. Der 1. Fall tritt somit nicht ein.

2. Fall: Annahme: (b) ist wahr und (a) sowie (c) sind falsch.
Da (c) falsch ist, gilt: Q sammelt B.
Aus der Falschheit von (a) folgt, dass wenigstens eine der Aussagen in (a) falsch ist.
Wäre (P sammelt nicht B) falsch, dann sammelten P und Q beide B. Also ist (R sammelt nicht M) falsch und es gilt: R sammelt M, woraus folgt: P sammelt A.
Aus der letzten Aussage aber folgt ein Widerspruch: Da (b) wahr ist und die Aussage (Q sammelt A) in (b) falsch ist, muss (P sammelt M) in (b) wahr sein – was nicht zutrifft, denn R sammelt doch M.

3. Fall: Annahme: (c) ist wahr und (a) sowie (b) sind falsch.
Aus (c) folgt: Q sammelt A oder Q sammelt M.
Da beide Aussagen in (b) falsch sind, gilt: Q sammelt M. Dann ist die Aussage (R sammelt nicht M) in (a) wahr. Folglich ist die Aussage (P sammelt nicht B) in (a) falsch. Also gilt: P sammelt B und daher auch: R sammelt A.

Zusammenfassung:
Paul sammelt Briefmarken, Quintus sammelt Münzen und Robin sammelt Asterix-Hefte.

VII. Ein vielziffriges Produkt

Es sei $n = 333\dots337$, bestehend aus 2012 Ziffern 3 sowie einer Ziffer 7. Welchen Wert hat n^2? (H.F.)

Lösung:

Erste Lösung (experimentell):

$$\begin{aligned} 37^2 &= 1369 \\ 337^2 &= 113569 \\ 3337^2 &= 11135569 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Im Vertrauen, darauf, dass für die weiteren Quadratzahlen die aus der Zahlenpyramide erkennbare Gesetzmäßigkeit gilt – der Mathematiker rechtfertigt Dein Vertrauen durch vollständige Induktion – ergibt sich:

$$\underbrace{333\ldots\ldots33}_{\text{2012 Ziffern 3}}7^2 = \underbrace{111\ldots\ldots11}_{\text{2012 Ziffern 1}}3\underbrace{555\ldots\ldots55}_{\text{2011 Ziffern 5}}69.$$

Alternative Lösung (numerisch):

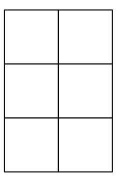
$$\begin{array}{r}
33\ldots33337 \cdot 333\ldots3337 \\ \hline
2333\ldots3359 \\
1000\ldots.011 \\
1000\ldots011 \\
\ldots\ldots\ldots. \\
100\ldots.011 \\
100\ldots.011 \\
100\ldots.011 \\ \hline
\underbrace{111\ldots.1}_{\text{2012 Ziffern 1}}3\underbrace{5\ldots..5}_{\text{2011 Ziffern 5}}69
\end{array}$$

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I: Mathis Kaninchen

Mathis hat seine fünf Kaninchen Allo (A), Bull (B), Cato (C), Dull (D) und Ella (E) so in den sechs Abteilen seines dreistöckigen Hasenstalls (vergleiche Skizze) untergebracht, dass gilt:



(1) A rechts neben E

(2) A unmittelbar über C

(3) B links neben D

(4) D ein Stockwerk tiefer als C

Welches Abteil bleibt leer? (H.F.)

II: Helga und Hildegard nehmen ab

Helga will 3% ihres Körpergewichts abnehmen. Hildegard wiegt 5% mehr als Helga. Sie beschließt 8% ihres Gewichts zu verlieren. Darauf Helga: „Dann sind wir anschließend gleich schwer!"

a) Zeige, dass Helga nicht recht hat!

b) Beide erreichen ihr jeweiliges Ziel. Eine Kontrolle zeigt, dass Hildegard jetzt 240g leichter als Helga ist. Wieviel wog Helga am Anfang? (WJB)

III: Dreieckszerlegung

a) Jedes rechtwinklige, nicht gleichschenklige Dreieck kann man in ein gleichschenkliges und ein rechtwinkliges Dreieck zerlegen. Begründe oder widerlege diese Behauptung!

b) Welche Zerlegungsaussage gilt für ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck? (H.F.)

IV: Walters Wanduhr

Walter besitzt eine alte Wanduhr. Diese schlägt zur Viertelstunde einmal, zur halben Stunde zweimal, zur Dreiviertelstunde dreimal und zur vollen Stunde viermal und anschließend die Stundenzahl, also z.B. um 7 Uhr $7 + 4 = 11$ Mal und um 16 Uhr, also 4 Uhr nachmittags $4 + 4 = 8$ Mal. Die Uhr geht pro Tag eine Stunde zu schnell. Walter stellt um 8:37 Uhr die genaue Zeit ein. Wie viele Schläge macht die Uhr innerhalb der nächsten zehn Stunden? (WJB)

V: Viergliedrige Summendarstellung

Stelle

a) die Zahl 2010

b) die Zahl 2011

c) die Zahl 2012

als eine Summe aus vier unmittelbar aufeinander folgender, positiver, ganzer Zahlen dar! (H.F.)

VI: Vielfaches von 9

Eine fünfziffrige natürliche Zahl n habe die Zifferndarstellung: $n = yy3x3$ mit Ziffern x und y, $x \neq y$, $y \neq 0$. Bestimme x und y so, dass n ein Vielfaches von 9 ist; bestimme dann auch die Zahlen n. (H.F.)

VII: Teilbare Zahlen

Mathis behauptet: „Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen, mit der Eigenschaft: Teilt die natürliche Zahl t die natürliche Zahl n, so teilt auch die Zahl $t - 1$ die Zahl $n - 1$." Hat Mathis Recht? (H.F.)

Hinweis: Mathis denkt dabei auch an Quadratzahlen.

Neue Aufgaben

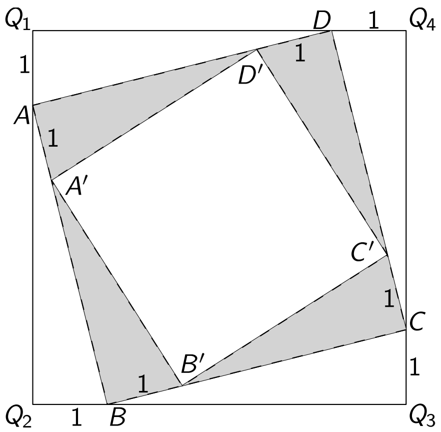
Klassen 9–13

Aufgabe 1050: Celsius und Fahrenheit

Im Physikunterricht werden die Temperatureinheiten Celsius und Fahrenheit durchgenommen. „In Amerika misst man die Temperatur in Fahrenheit. Um eine Celsiustemperatur in Fahrenheit umzurechnen, muss man den Celsiuswert mit $\frac{9}{5}$ multiplizieren und zu dem Produkt 32 addieren", erklärt der Lehrer. „Rechnet bitte die folgenden Werte um!" Nach einiger Zeit meldet sich Anton: „Aber die Umrechnung ist doch ganz einfach", meint er, „man hat eine Temperatur in Fahrenheit, beispielsweise diese", Anton schreibt eine positive dreistellige Zahl an die Tafel, „dann streicht man nur die erste Ziffer und hängt sie wieder an das Ende der Zahl, und schon hat man die Temperatur in Celsius." „Du Scherzbold", antwortet der Lehrer, „ich fürchte, das ist die einzige dreistellige Zahl, bei der deine Methode funktioniert."

Welche Zahl schrieb Anton an die Tafel? Gibt es weitere positive dreistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft oder hat der Lehrer Recht? (Christoph Sievert)

Aufgabe 1051: Viereck im Viereck im Viereck



Das Viereck $Q_1Q_2Q_3Q_4$ sei ein Quadrat Q der Seitenlänge $n+1$, mit n eine natürliche Zahl ≥ 2. Die Punkte A, B, C und D liegen so auf den Seiten von Q, dass ihr Abstand 1 von der jeweiligen nächstgelegenen Ecke von Q beträgt. Auf den Seiten des Vierecks $V = ABCD$ seien Punkte A', B', C' und D' so festgelegt, dass ihr Abstand 1 von der nächstgelegenen Ecke von V ist. Welche Fläche hat die schraffierte Figur? (H.F.)

Aufgabe 1052: Ein Vieleck mit gerader Eckenanzahl

Ein n-Eck, dessen Eckpunkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ auf einem Kreis liegen, habe lauter gleich große Innenwinkel δ, jedoch sei das n-Eck nicht regelmäßig. Begründe, dass das n-Eck geradzahlig viele Ecken hat. (H.F.)

Aufgabe 1053: Punkt gesucht

Auf einem von S ausgehenden Strahl seien in dieser Reihenfolge (von S aus) zwei Punkte A und B gegeben. Auf einem weiteren Strahl, der ebenfalls von S ausgeht, befindet sich ein beliebiger Punkt P, wobei $\sphericalangle ASP < 180°$ ist. Nun berechne man für den Punkt P, für den der Winkel $\sphericalangle APB$ maximal ist, die Strecke $|SP|$ in Abhängigkeit von $|SA|$ und $|SB|$. (Robin Fritsch)

Hinweis: Betrachte den Kreis durch P, A und B.

Aufgabe 1054: Eine etwas harte Nuss

393	399	407	401	398
406	392	395	397	385
394	387	396	384	400
405	386	383	390	404
388	402	389	403	391

Die 25 Zahlen 383, 384, 385, ..., 407 seien in einem quadratischen Schema (Matrix) so wie nebenstehend angeordnet. Es sollen nun fünf dieser Zahlen, von denen keine zwei in einer Zeile oder in einer Spalte vorkommen und deren Summe ≤ 2012 ist, so ausgewählt werden, dass die kleinste von ihnen möglichst groß ist. Wie heißt die kleinste dieser Zahlen? (H.F.)

Aufgabe 1055: Erbkrankheit

Eine bestimmte Erbkrankheit kommt durch die Mutation eines Gens zustande, das jeder Mensch in doppelter Ausführung trägt. Die Krankheit tritt genau dann auf, wenn beide Kopien des Gens mutiert sind. Kinder erben von jedem Elternteil zufällig eines der beiden Gene.

In einer gewissen Population hat ein Anteil von x zwei gesunde Gene, ein Anteil von y ein gesundes und ein mutiertes Gen und ein Anteil von $z = 1 - x - y$ zwei mutierte Gene. Wie entwickelt sich unter der Annahme, dass Ehepartner zufällig ausgesucht werden und die Kinderanzahl konstant ist, die Erbkrankheit in der Population?

Wie entwickelt sich die Erbkrankheit in der Population, wenn von der Krankheit befallene Personen keine Nachkommen haben können? (WJB)

Aufgabe 1056: Niemals eine Primzahl

Zeige, dass $1 + 4p^4$ niemals eine Primzahl ist, wenn p eine ganze Zahl > 1 ist. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 110

Klassen 9–13

Aufgabe 1043: Rund um 2012

a) Zeige: Für jedes n, $n = 1, 2, 3, ...$ ist jede der Zahlen $2013^n - 1^n$, $2014^n - 2^n$, $2015^n - 3^n$, ... durch 2012 teilbar.

b) $\sqrt{(2011 + 2011) + (2011 - 2011) + 2011 \cdot 2011 + 2011 : 2011} = 2012$. Trifft diese Behauptung zu? Wenn ja, was steckt dahinter?

c) Es sei $x = \frac{2011}{2012}$ und P sei das unendliche Produkt $P = (1 + x + x^2 + ... + x^9)(1 + x^{10} + x^{20} + ... + x^{90})(1 + x^{100} + x^{200} + ... + x^{900} ...)$. Zeige, dass P einen endlichen Wert besitzt und bestimme diesen Wert. (H.F.)

Lösung:

a) Jeder der Differenzen ist darstellbar in der Form $(2012+m)^n - m^n$, $m = 1, 2, 3, ...$. Dann gilt:

$(2012+m)^n - m^n = ((2012+m)-m)((2012+m)^{n-1} + (2012+m)^{n-2}m + ... + m^{n-1})$.

Wegen $2012 + m - m = 2012$ gilt die Behauptung.

b) Für jedes reelle $x \neq 0$ ist:

$$(x+x) + (x-x) + x \cdot x + x : x = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

c) Es sei $P_1 = 1 + x + x^2 + ... + x^9 = 1 + x + ... + x^{10^1-1}$. Dann sei $P_2 = P_1(1+x^{10}+x^{20}+...+x^{90})$. Für P_2 gilt dann: $P_2 = P_1+P_1x^{10}+...+P_1x^{10^1 \cdot 9} = 1+x+x^2+...x^{10^2-1}$. Fahre so induktiv fort! Dann ist mit $P_n = P_{n-1}(1+x+x^2+...+x^{10^{n-1}\cdot 9})$ und es sei bewiesen, dass $P_n = 1 + x + x^2 + ... + x^{10^n-1}$. Dann ist mit $P_{n+1} = P_n(1+x+x^2+...+x^{10^n \dot{9}})$:

(1) $P_{n+1} = P_n + P_n x + P_n x^2 + ... + P_n x^{10^n \cdot 9} = 1 + x + x^2 + ... + x^{10^{n+1}-1}$.

Die Gleichung (1) gilt für jedes n, $n = 1, 2, 3, ...$ Daraus folgt: Das unendliche Produkt P lässt sich als eine unendliche Summe S schreiben, wobei: $S = 1 + x + x^2 + ...$ Nun ist $1 + x + ... x^n = (1 - x^{n+1}) : (1-x)$ für $x \neq 1$ und $n = 1, 2, 3, ...$ Wenn daher $|x| < 1$ ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Daraus folgt $S = \frac{1}{1-x}$ und somit auch $P = \frac{1}{1-x}$. Also hat P einen endlichen Wert und für $x = \frac{2011}{2012}$ ist dieser Wert $P = 2012$.

Aufgabe 1044: Görans Geburtstagsgäste

Görans Mutter fragt ihn, wie viele Gäste er zu seinem Geburtstag einladen möchte. Er antwortet: „Wir werden lauter Paare sein. Wenn wir uns um unseren runden Tisch setzen, abwechselnd Mädchen und Junge, dann gibt es drei Möglichkeiten: Entweder sitzt kein Junge links von seiner Freundin oder genau ein Junge oder alle." Wie viele Gäste erwartet Göran? (WJB)

Lösung:

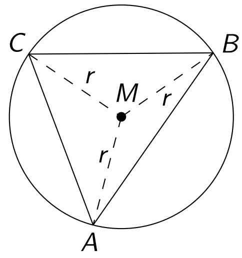
Bei zwei Paaren kann nicht eines richtig sitzen, ohne dass auch das andere richtig sitzt. Bei drei Paaren sind offenbar alle drei Fälle möglich. Bei vier oder mehr Paaren könnten beispielsweise zwei Paare passend sitzen, und alle anderen nicht. Also müssen es ingesamt drei Paare sein und somit (Göran nicht mitgezählt) fünf Gäste.

Aufgabe 1045: Dreiecks-Zerlegung

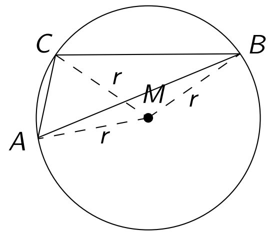
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Innenwinkel allesamt $< 90°$ seien. Gib eine Bedingung dafür an, dass das Dreieck $\triangle ABC$ in drei gleichschenklige Dreiecke so zerlegt werden kann, dass alle Teildreiecke in der Länge zweier Schenkel übereinstimmen. (H.F.)

Hinweis: Betrachte den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$.

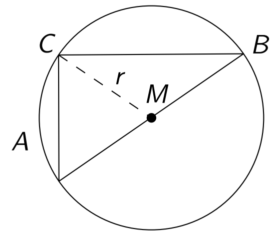
Lösung:



Figur 1



Figur 2



Figur 3

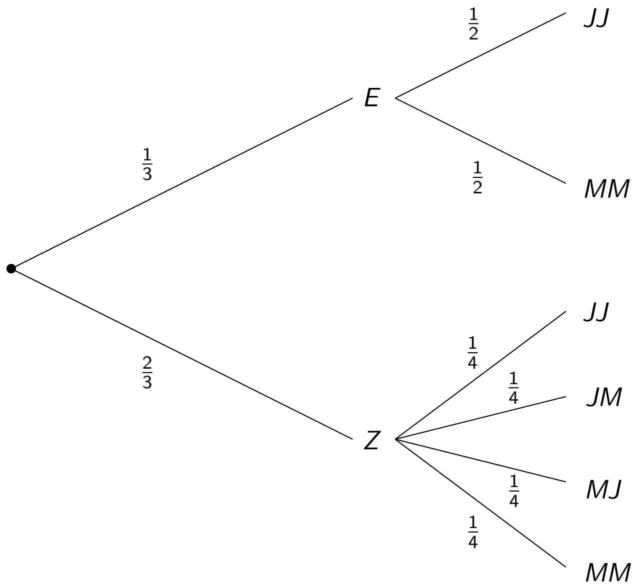
Aus Figur 1 erkennt man: Wenn der Umkreismittelpunkt M von $\triangle ABC$ im Innengebiet von $\triangle ABC$ liegt, dann ist $\triangle ABC$ in die verlangten drei Dreiecke zerlegbar. Liegt M im Außengebiet von $\triangle ABC$, dann kann es im Innengebiet von $\triangle ABC$ keinen Punkt M^* geben, der von den Punkten A, B und C gleichweit entfernt ist. Daher ist in diesem Fall das Dreieck $\triangle ABC$ nicht wie verlangt zerlegbar (Figur 2). Liegt aber M auf dem Rand des Dreiecks ABC (Figur 3), dann ist ABC in nur zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegbar, die in der Länge zweier Schenkel übereinstimmen. Nach dem Satz von Thales ist dann das Dreieck ABC bei C rechtwinklig, der Fall kann also nicht auftreten.

Aufgabe 1046: Zwillinge

Jens und Lydia erwarten Zwillinge. Das Ultraschallbild zeigt, dass es zwei Jungen sind. Sie befragen einen befreundeten Statistiker nach den Chancen, dass die Zwillinge eineiig sind. Dieser antwortet: „Ein Drittel aller Zwillinge sind eineiig.“ Darauf bietet Jens seiner Frau an: „Wenn sie eineiig sind, gebe ich Dir 20 Euro, sonst gibst du mir 10 Euro.“ Ist diese Wette fair? (WJB)

Lösung:

Jens hat vermutlich so gerechnet: $G = P(E) \cdot 20 + P(Z) \cdot (-10) = \frac{1}{3} \cdot 20 - \frac{2}{3} \cdot 10 = 0$. Die richtige Lösung finden wir so:



Deshalb gilt:

$$P(E|JJ) = P(E \cap JJ) : P(JJ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} : (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{6} : \frac{2}{6} = \frac{1}{2}.$$

Lydias erwarteter Gewinn ist demnach:

$$G = \frac{1}{2} \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

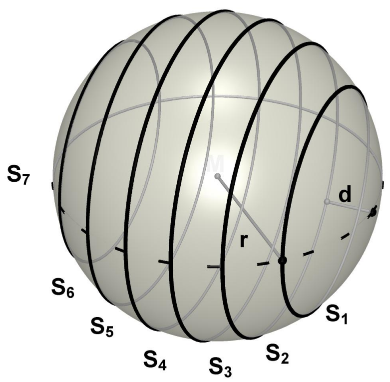
Lydia sollte die Wette also sofort annehmen.

Aufgabe 1047: Welche Scheibe ist am leckersten?

Ein kugelförmiges Brötchen wird in sieben gleich dicke Scheiben geteilt. Ein Krustenliebhaber wünscht sich die Scheibe mit der (absolut) meisten Kruste. Soll er eines der beiden Enden nehmen oder doch lieber eine der mittleren Scheiben, oder ist dies egal? (Peter van Dongen, Universität Mainz)

Lösung:

Es bezeichne r den Radius des kugelförmigen Brötchens, das wir in sieben Scheiben S_1, S_2, ..., S_7 gleicher Dicke d zerschneiden. Die Oberflächen der Scheiben bezeichnen wir mit F_i, $i = 1, 2, \dots, 7$.



Für die Oberflächen der beiden Kugelkappen S_1 und S_7 gilt: $F_1 = F_7 = 2\pi r \cdot d$ mit $d = \frac{2r}{7}$, also

$$F_1 = F_7 = 2\pi r \cdot \frac{2r}{7} = \frac{4}{7}\pi r^2.$$

Nun können wir die Mantelflächen der inneren Scheiben durch Differenzbildung der Oberflächen entsprechender Kugelkappen berechnen:

$$F_2 = F_6 = 2\pi r \cdot 2d - 2\pi r \cdot d = 2\pi \cdot d = \frac{4}{7}\pi r^2$$

$$F_3 = F_5 = 2\pi r \cdot 3d - 2\pi r \cdot 2d = 2\pi \cdot d = \frac{4}{7}\pi r^2$$

$$F_4 = 2\pi r \cdot 4d - 2\pi r \cdot 3d = 2\pi \cdot d = \frac{4}{7}\pi r^2.$$

Also haben alle Stücke (absolut) gleichgroße Oberflächen und somit gleich viel Kruste. (MG)

Aufgabe 1048: Quadratzahlen?

Gibt es in der Folge der Zahlen 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... Quadratzahlen? (H.F.)

Lösung:

„Jagd nach dem kleinsten Verbrecher“

Die Elemente der Folge sind von der Form $3n - 1$, $n = 1, 2, 3 \dots$.

Annahme: Unter den Zahlen $3n - 1$ gibt es Quadratzahlen. Nun sei $3k - 1 = m^2$ das kleinste der quadratischen Folgenelemente. Dann ist aber $(m-3)^2 = m^2 - 6m + 9 = 3k - 1 - 6m + 9 = 3(k - 2m + 3) - 1$ ebenfalls eine Quadratzahl von dieser Form, die kleiner als m^2 ist. So hätten wir einen Widerspruch zur Definition von m^2. In der Folge $3n - 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ gibt es also keine Quadratzahlen.

Aufgabe 1049: Bauernregel

Ein Landwirt möchte den Ertrag beim Anbau von Kohlköpfen möglichst groß haben. Dazu nimmt er an, ein Kohlkopf werde mit dem Gewicht g gepflanzt und danach entwickle sich sein Gewicht wie $G(t) = g(1 + \sqrt{t})$. Für Düngemittel und Erntemaschinen veranschlagt er Kosten der Form $K(t) = k + Ft$. Beim Verkauf erhält er den Betrag D pro Gewichtseinheit. Zu welchem Zeitpunkt v sollte er verkaufen, damit der Ertrag R maximal ist? Wie groß ist dann der Ertrag? (WJB)

Lösung:

Es ergibt sich $R(t) = -Ft + b\sqrt{t} + c$ mit $b = Dg$ und $c = D \cdot g - k$. Damit ist $R'(t) = -F + \frac{b}{2\sqrt{t}}$, also gilt: $R'(v) = 0 \Leftrightarrow -F + \frac{b}{2\sqrt{v}} = 0 \Leftrightarrow v = \frac{b^2}{4F^2}$. Außerdem ist $R''(t) = \frac{b}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3}$ und somit $R''(v) = -\frac{b}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}^3} < 0$. Daher ist der maximale Ertrag: $R(v) = -Fv + b\sqrt{v} + c = -F\frac{b^2}{4F^2} + b\frac{b}{2F} + c = \frac{b^2}{4F} + c = \frac{(Dg)^2}{4F} + D \cdot g - k$.

Der Beweis von Fermats Zweiquadratesatz nach Don Zagier

von Matthias Kreck

Einführung

Um große natürliche Zahlen zu bekommen, ist die Multiplikation der Addition weit überlegen. Deshalb ist es so interessant, natürliche Zahlen in ihre multiplikativen Bestandteile, die Primzahlen, zu zerlegen. Dabei sind die Primzahlen die natürlichen Zahlen größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Da man Primzahlen nicht in kleinere Zahlen zerlegen kann, stellt sich die Frage nach anderen Darstellungen von Primzahlen. Ein effektiver Weg, aus einer Zahl durch Multiplizieren eine größere zu erhalten, ist das Quadrieren. Also liegt die Frage nahe, welche Primzahl (und allgemeiner, welche Zahl) man als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben kann. Ein erster Test zeigt:

$$\begin{aligned} 2 &= 1^2 + 1^2, \\ 5 &= 1^2 + 2^2, \\ 13 &= 2^2 + 3^2, \\ 17 &= 1^2 + 4^2, \\ 29 &= 2^2 + 5^2. \end{aligned}$$

Die anderen Primzahlen bis 30 lassen sich nicht als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben.

Wenn man diese Tabelle weiterführt, fällt eine Regelmäßigkeit auf:

Die Primzahlen $p > 2$, die sich als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben lassen, haben die Eigenschaft: $p - 1$ ist durch 4 teilbar; während das für die Primzahlen, die nicht Summe von zwei Quadraten sind, nicht gilt.

Wahrscheinlich hat der französische Mathematiker Fermat[1] (und vorher schon Albert Girard[2]) solche Tabellen erstellt und daraus geschlossen, dass das ein Satz ist:

Satz (Fermat 1640)
Eine Primzahl p größer als 2 ist genau dann eine Summe von zwei Quadraten, wenn $p - 1$ durch 4 teilbar ist.

Von Fermat selbst ist kein Beweis dieses tollen Satzes überliefert. Ob er einen hatte, ist zweifelhaft. Gut 100 Jahre später hat der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler[3] den ersten Beweis publiziert. Danach haben verschiedene Mathematiker andere Beweise gegeben, darunter Lagrange[4], Gauß[5] und Dedekind[6]. All diese Beweise erfordern eine gewisse Vorkenntnis und sind nicht ganz kurz. Vor ein paar Jahren hat der Bonner Mathematiker Don Zagier[7] einen Beweis in einem Satz angegeben[8]. Dieser soll hier reproduziert werden, wobei aus dem einen Satz ein paar mehr werden, weil wir uns auch an Laien richten.

Bevor wir uns diesem Beweis zuwenden, bemerken wir, dass, wenn eine ungerade Primzahl p (alle Primzahlen $p > 2$ sind natürlich ungerade) Summe von zwei Quadraten ist, d.h. $p = x^2 + y^2$, dann $p - 1$ durch 4 teilbar ist. Denn da p ungerade ist, muss entweder x gerade und y ungerade sein oder umgekehrt. Sei also beispielsweise $x = 2n + 1$ und $y = 2m$ für natürliche Zahlen m und n, dann gilt $p = x^2 + y^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2$, also ist $p - 1$ durch 4 teilbar.

Zagiers Beweis

Zur Situation: Sei p eine Primzahl, sodass $p-1$ durch 4 teilbar ist. Das bedeutet, dass wir p schreiben können als $p = 4k + 1$ für eine geeignete natürliche Zahl k. Dann ist Fermats Behauptung:

(1) Es gibt natürliche Zahlen x und y, sodass $p = x^2 + y^2$ ist. Mit anderen Worten, die Gleichung $p = x^2 + y^2$ mit den Unbekannten x und y hat eine ganzzahlige Lösung.

---

1 Pierre de Fermat (geb. 20.8.1601, gest. 12.1.1665), Jurist, Mathematiker
2 Albert Girard (geb. 1595, gest. 8.12.1632), Ingenieur
3 Leonhard Euler (geb. 15.4.1707 in Basel, gest. 18.9.1783 in St. Petersburg), Mathematiker.
4 Joseph Louis Lagrange (geb. 25.1.1736 in Turin, gest. 10.4.1813 in Paris), Mathematiker, Physiker, Astronom
5 Carl Friedrich Gauß (geb. 30.4.1777 in Braunschweig, gest. 23.2.1855 in Göttingen), Mathematiker, Astronom, Geodät, Physiker
6 Richard Dedekind (geb. 6.10.1831 in Braunschweig, gest. 12.2.1916 ebenda), Mathematiker
7 Don Zagier (geb. 29.6.1951 in Heidelberg), Mathematiker
8 Don Zagier: A one-sentence proof that every prime $p = 1 \mod 4$ is a sum of two squares, Amer. Math. Monthly 97 (1990), no. 2, 144, doi:10.2307/2323918

1. Schritt von Zagiers Beweis:
Er betrachtet eine andere Gleichung in drei Unbekannten x, y und z, nämlich:

(2) $p = x^2 + 4yz$.

Dies erscheint auf den ersten Blick verwunderlich, aber die Behauptung (1) folgt, falls die Gleichung (2) eine Lösung mit $y = z$ besitzt. Denn dann ist $p = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2$. Genau das ist das Ziel von Zagier, zu zeigen, dass die Gleichung (2) eine Lösung mit $y = z$ hat.

2. Schritt:
Die Gleichung (2) besitzt eine Lösung, nämlich, $x = 1$, $y = k$ und $z = 1$, da $p = 4k + 1$ ist. Wir bemerken noch, dass es nur endlich viele Lösungen geben kann, da alle natürlichen Zahlen größer Null sind (so unsere Konvention) und wir multiplizieren und addieren, was die Zahlen größer macht.

3. Schritt:
Nun kommt ein entscheidender Hilfssatz, den wir am Schluss beweisen werden:

> **Hilfssatz**
> Sei $p = 4k + 1$ eine Primzahl. Die Anzahl der Lösungen von $p = x^2 + 4yz$ ist eine ungerade Zahl.

4. Schritt:
Nun beobachten wir, dass, wenn x, y, z eine Lösung von (2) ist, dann auch x, z, y. Mit anderen Worten, wir können zu jeder Lösung eine zweite finden, indem wir y und z vertauschen. Dies teilt alle Lösungen in Paare auf, außer diejenigen, bei denen $y = z$ ist. Wenn es nun keine Lösung mit $y = z$ gäbe, so würde folgen, dass alle Lösungen in Paaren auftreten, es gäbe also geradzahlig-viele Lösungen, was dem obigen Hilfssatz widerspricht. Also muss es eine Lösung mit $y = z$ geben und der Satz von Fermat ist somit bewiesen.

Beweis des Hilfssatzes

Wir haben im letzten Schritt benutzt, dass wir zu jeder Lösung x, y, z durch Vertauschen von y und z eine zweite Lösung finden, es sei denn $y = z$. Daraus haben wir geschlossen, dass es eine Lösung mit $y = z$ geben muss, da sonst die Anzahl der Lösungen gerade wäre. Dies deutet eine Methode an, mit der man entscheiden kann, ob die Anzahl der Lösungen gerade oder ungerade ist. Man versucht, die Lösungen in Paare aufzuteilen. Ist dies möglich, ist die Anzahl gerade, ist dies nicht möglich, so bleibt am Schluss eine Lösung übrig, zu der man keinen Partner mehr finden kann, und dann ist die Anzahl der Lösungen ungerade. Diese Methode setzt voraus, dass es wenigstens eine Lösung gibt, zu der man dann den Partner sucht. Wenn es gar keine Lösung gibt, kann man damit gar nichts zeigen. Deshalb wurde im ersten Schritt eine Lösung angegeben.

Zagier benutzt eine Formel, mit der er versucht, die Lösungen in Paare aufzuteilen. Diese Formel liefert (ganz wie oben die Vertauschung von y und z) zu jeder Lösung

x, y, z eine zweite Lösung x', y', z', einen Partner. Hier ist die Formel, bei der man drei Fälle unterscheiden muss:

1. Fall: $x < y - z$.

Partnerlösung: $x' := x + 2z, \quad y' := z, \quad z' := y - x - z.$

2. Fall: $y - z < x < 2y$.

Partnerlösung: $x' := 2y - x, \quad y' := y, \quad z' := x - y + z.$

3. Fall: $x > 2y$.

Partnerlösung: $x' := x - 2y, \quad y' := x - y + z, \quad z' := y.$

Die vorangehende Fallunterscheidung ist vollständig; denn $x = y - z$ kann ebenso wenig auftreten wie $x = 2y$, weil sonst p nichttriviale Teiler hätte, also keine Primzahl wäre.

Nun bitten wir den Leser, so er oder sie das noch nicht gemacht hat, Papier und Stift zu nehmen, und das Folgende selbst nachzurechnen (reine Schulmathematik):

Ist x, y, z eine Lösung, so auch x', y', z' (einfach in die Gleichung einsetzen).

Und als zweites:

Die Partnerlösung zu x', y', z' ist wieder x, y, z.
(Dazu muss man einfach die obigen Formeln einsetzen, allerdings die drei Fälle sorgfältig beachten.)

Man nennt eine solche Partnerkonstruktion, die zweimal angewendet die ursprüngliche Situation ergibt, eine Involution.

Nun kommt die letzte Aufgabe. Wir haben die Lösungen wieder in Paare aufgeteilt, der Partner zu x, y, z ist x', y', z'. Allerdings könnte es sein, dass die Partnerlösung gleich der ursprünglichen ist, also dass $x' = x, y' = y, z' = z$ ist. Und Zagier behauptet, dass dies tatsächlich passieren kann, aber genau einmal. Damit sind wir fertig, denn das bedeutet, dass alle Lösungen bis auf eine in Paaren auftreten, somit die Anzahl der Lösungen eine ungerade Zahl ist.
Das rechnen wir gleich nach, natürlich nacheinander in den drei Fällen.

1. Fall: Wenn $x = x + 2z$ ist, so ist $z = 0$. Wenn weiter $y = z$ ist, so ist auch $y = 0$. Wenn ferner $z = y - x - z$ ist, so ist auch $x = 0$. Aber dann haben wir keine Lösung der Gleichung (2). Also ist im ersten Fall die Partnerlösung immer verschieden von der ursprünglichen.

2. Fall: Wenn $x = 2y - x$ ist, so ist $2x = 2y$ und somit $x = y$. Damit folgt, wie man leicht sieht, auch $y' = y$ und $z' = z$. Partner und ursprüngliche Lösung stimmen also überein. Wie häufig kann das passieren? Dazu betrachten wir Gleichung (2) und setzen $x = y$ ein:

$$p = x^2 + 4xz = x(x + 4z).$$

Da p eine Primzahl ist, muss einer der Faktoren gleich 1 sein. Das kann nur der erste sein, also ist $x = 1$ und somit auch $y = 1$ und ferner ist $z = \frac{p-1}{4} = k$.

Also kommt der Effekt „Partnerlösung gleich ursprünglicher Lösung“ im zweiten Fall genau einmal vor.

3. Fall: Ist $x = x - 2y$, so folgt wieder $y = 0$ und damit wegen $y = z$ auch $z = 0$. Das geht – wie im ersten Fall – nicht.

Also haben wir gezeigt, dass es genau einmal passiert, dass die Partnerlösung gleich der ursprünglichen ist. Das beendet den Beweis von Zagier.

Informationen zum Artikel

Dr. Matthias Kreck ist Professor für Mathematik an der Universität Bonn. Er hat am 3. Februar 2012 im gut besuchten Frankfurter Hof in Mainz unter dem Logo $\mathrm{m}^3 = \mathrm{Musik} \times \mathrm{Mathematik} \times$ Malerei diese zunächst völlig verschieden erscheinenden Gebiete in gelungener Weise unter der Assistenz einer Musikerin und einer Malerin intellektuell zueinander in Verbindung gebracht. Die mathematische Methode verdeutlichte er dabei anhand des Beweises von Fermats Satz nach Zagier.

Ein schöner Satz von Erdös

von Hartwig Fuchs

Im Anschluss an den Artikel von Herrn Kreck über Fermats Zweiquadratesatz liegt es nahe, Varianten dieses Satzes zu untersuchen, indem man etwa Quadratsummen- oder auch Quadratdifferenzendarstellungen von nicht notwendig primen Zahlen mit zwei oder mehr als zwei Quadraten betrachtet.

Pál Erdös (1913–1996), einer der produktivsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, hat um 1960 eine erstaunliche Möglichkeit entdeckt, wie man jede natürliche Zahl aus einer Mischung von Summen und Differenzen mehrerer Quadratzahlen darstellen kann.

Der Satz von Erdös

Jede nichtnegative ganze Zahl n kann in der Form

(1) $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm m^2$ mit einem $m \geq 1$

geschrieben werden, wobei von dem Paar $\pm$ entweder nur $+$ oder nur $-$ benutzt wird.

Beweis durch 4-fache vollständige Induktion:
Zunächst liefern wir einige Beispiele für (1), die unten als Induktionsanfänge verwendet werden:

$$1 = 1^1, \quad 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2, \quad 3 = -1^2 + 2^2, \quad 4 = -1^2 - 2^2 + 3^2.$$

Induktionsbeweis für die Behauptung:

(2) Jede natürliche Zahl n der Form $n = 4k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, hat eine Erdös-Darstellung (1).

Für $k = 1$, also $n = 4$ trifft (2) zu.
Annahme: (2) sei bewiesen für ein $k \geq 1$, also $n = 4k$, und es sei $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm m^2$.
Aus dieser Annahme leiten wir ab, dass (2) auch für $k+1$, also $n+4 = 4(k+1)$ gilt.

Die entscheidende Formel für den Beweis von (2) – und ebenso für die Beweise der übrigen Fälle $n = 4k + i$, $i = 1, 2, 3$ (siehe unten) ist:

(3) $4 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$ für jedes $m \geq 0$.

Damit folgt aus der Induktionsannahme die Gültigkeit von (2) für $k+1$, also $n+4 = 4(k+1)$, so:

$$n+4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2.$$

Somit ist gezeigt, dass (2) für jedes n der Form $n = 4k$, $k = 1, 2, 3, ...$ gilt.

Es sei nun n von der Form $4k + i$, $k = 0, 1, 2, ...$ und i eine der Zahlen $1, 2, 3$. Dann hat jedes $n = 4k + i$ eine Erdös-Darstellung (1).
Die drei Induktionsbeweise für $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ und $n = 4k+3$ verlaufen ganz so wie oben im Fall $n = 4k$.

Damit ist (1) für jedes $n \geq 1$ induktiv bewiesen.

Mach es nun selbst!
Welche Erdös-Darstellungen haben die Zahlen 0 und 2012?

Die Lösungen zu den Aufgaben findet Ihr in diesem Heft auf Seite 39.

Mainzer Mathe Akademie 2012

Vom 29. August bis 2. September fand die dritte Mainzer Mathe Akademie statt. Ein Bericht folgt im nächsten Heft.

Ein Blick hinter die Kulissen
Der letzte Mohikaner
von Hartwig Fuchs

Der Mathematiker Prof. Slyfox ist bei seinen Studenten bekannt dafür, dass er seine Vorlesungen oft mit skurillen Einfällen bereichert. So hat er kürzlich gegen Ende einer Vorlesung einen Wettbewerb vorgeschlagen, den er „Der letzte Mohikaner"* nannte. Die dabei zu lösende Aufgabe beschrieb er so:

(T) Wenn man einer Zahlenmenge M die Zahl $xy+x+y$ mit $x, y \in M$ hinzufügt und zugleich x sowie y aus M entfernt, so wollen wir das eine Kontraktion T von M nennen.
Die Studenten wählen nun eine n-elementige Menge M_n, $n \geq 2$, aus beliebigen reellen Zahlen.
M_n soll dann mit T in eine $(n-1)$-elementige Menge M_{n-1} umgeformt werden – wobei man Prof. Slyfox erst nach beendigter Transformation die Transformationszahlen mitteilt. Ebenso wird M_{n-1} in eine Menge M_{n-2} umgeformt. So transformiert man weiter, bis man schließlich eine Menge M_1 aus nur noch einem Element, dem letzten Mohikaner, erhält.
Gewonnen hat, wer als Erster den letzten Mohikaner benennt (die Studenten dürfen Taschenrechner benutzen, Dr. Slyfox aber nicht!).

Im ersten Wettbewerbsdurchgang wählten die Studenten $M_7 = \{-3, -2, -1, 1, 10, 100\}$ als Startmenge. Als Erster hob Dr. Slyfox die Hand mit einem Zettel, auf dem er den letzten Mohikaner -1 notiert hatte.
Auch in einem zweiten Durchgang mit der Menge $M_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ hatte der Professor vor den Studenten den letzten Mohikaner 40319 richtig gefunden.

Danach war den Studenten schnell klar, wieso Dr. Slyfox die Aufgabe stets vor allen anderen lösen konnte: er musste im Besitz einer Formel sein, mit der sich der letzte Mohikaner unmittelbar – also ohne Mengenkontraktionen – allein aus der Kenntnis der Zahlen der Startmenge berechnen ließ.
Eine solche Formel galt es somit zu finden, um gegen den Professor gewinnen zu können.

Zu Beginn der nächsten slyfoxischen Vorlesung verkündete dann auch ein Student, der nicht unbegabte Talentino, er habe das Erfolgsrezept des Professors entdeckt. Zum Beweis ließ er sich eine vierelementige Menge M rationaler Zahlen vorgeben; die Studenten wählten $M_4 = \{0{,}76; 1{,}23; 17{,}54; 19\}$. Talentino war der Erste, der verkündete: „Der letzte Mohikaner ist 1454,31584."

* „Der letzte Mohikaner" ist der Titel einer berühmten Indianergeschichte des im 19. Jahrhundert meistgelesenen amerikanischen Schriftstellers James Fenimore Cooper (1789–1851).

Talentino ließ sich nach seinem Erfolg nicht lange bitten, seine Mohikaner-Formel und deren Herleitung zu verraten.

Das Erfolgsrezept:

(1) Bei den sukzessiven Kontraktionen einer endlichen Menge $M_n = \{r_1, r_2, \dots r_n\}$, $n \geq 2$, aus beliebigen reellen Zahlen durch die Operationen T in eine einelementige Menge $M_1 = \{r\}$ ist $r = (r_1+1)(r_2+1)\dots(r_n+1)-1$ der eindeutig bestimmte letzte Mohikaner.

Zur Herleitung von (1) geht Talentino so vor:
Er bezeichnet mit M^+ die Menge aller Zahlen, die um 1 größer sind als die Zahlen einer Menge M. Für die Menge M^+ definiert er dann eine Kontraktion S:

(S) Wenn man einer Zahlenmenge M die Zahl $xy + x + y$ mit $x, y \in M$ hinzufügt und zugleich x sowie y aus M werden, dann sei S die zu T gehörige Kontraktion von M^+, durch welche die Zahlen $(x + 1)$ und $(y + 1)$ aus M^+ entfernt werden und zugleich $(x + 1)(y + 1)$ zu M^+ hinzugefügt wird.

Aus $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$ folgt nun eine für den Beweis von (1) entscheidende Beziehung zwischen den durch Kontraktion der Mengen $M_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ und $M_n^+ = \{r_1+1, r_2+1, \dots, r_n+1\}$ entstandenen neuen Mengen: Wird M_n von T zu der Menge $M_{n-1} = \{r_1, r_2, \dots, [r_i], \dots, [r_j], \dots, r_n, r_ir_j + r_i + r_j\}$ kontrahiert, dann wird M_n^+ durch S in die Menge $M_{n-1}^+ = \{r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, [r_i + 1], \dots, [r_j + 1], \dots, r_n + 1, r_ir_j + r_i + r_j + 1\}$ umgeformt – wobei $[r_i]$ usw. bedeutet, dass die zugehörige Menge das Element r_i nicht mehr enthält.
Ganz entsprechend werden M_{n-1} von T und M_{n-1}^+ von S in M_{n-2} und M_{n-2}^+ kontrahiert – und so fortfahrend gelangt man schließlich zu den einelementigen Mengen M_1 und M_1^+.
Es sei nun $M_1 = \{r\}$; folglich ist $M_1^+ = \{r + 1\}$.
Kennt man daher $r + 1$, so kennt man natürlich auch den letzten Mohikaner r.
Die Zahl $r + 1$ kann man nun durch vollständige Induktion leicht bestimmen:

(2) Bei den sukzessiven S-Kontraktionen einer beliebigen Menge $M_n^+ = \{r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_n + 1\}$, $n > 1$, aus reellen Zahlen in die Menge $M_1^+ = \{r + 1\}$ gilt: $r + 1 = (r_1 + 1)(r_2 + 1)\dots(r_n + 1)$

Nachweis:
Es sei $n = 2$. Eine Menge $M_2^+ = \{r_1 + 1, r_2 + 1\}$ mit beliebigen reellen r_1, r_2 wird durch S in die Menge $M_1^+ = \{(r_1+1)(r_2+1)\}$ transformiert. Somit ist der letzte Mohikaner $r + 1$ eindeutig bestimmt – er ist $r + 1 = (r_1 + 1)(r_2 + 1)$. Also gilt (2) für $n = 2$.
Es sei nun (2) bewiesen für jede beliebige Menge M_{n-1}^+ aus $n - 1$ reellen Zahlen. Dann gilt für n:
Wenn man aus einer beliebigen Menge $M_n^+ = \{r_1+1, r_2+1, \dots, r_n+1\}$ zwei beliebige Zahlen r_i+1 und r_j+1 entfernt und der Restmenge das Produkt $(r_i+1)(r_j+1)$ hinzufügt, dann entsteht die Menge $M_{n-1}^+ = \{r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, [r_i + 1], \dots,$

$[r_j + 1], \ldots, r_n + 1, (r_i + 1)(r_j + 1)\}$.
Der nach Induktionsannahme eindeutig bestimmte zu M_{n-1}^+ gehörige letzte Mohikaner ist $(r_1 + 1)(r_2 + 1) \ldots (r_i + 1) \ldots (r_j + 1) \ldots (r_n + 1)$ und diese Zahl ist dann auch der eindeutig bestimmte letzte Mohikaner für die Menge M_n^+ – und damit ist (2) bewiesen für n.

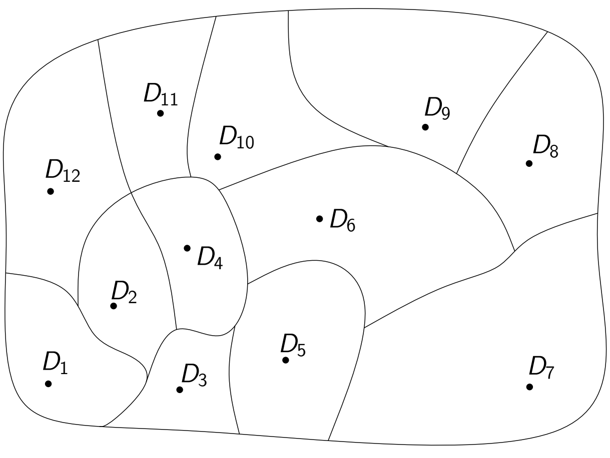
Aus (2) folgt unmittelbar (1) – und damit hat Talentino des Professors Erfolgsgeheimnis vollständig gelüftet.
Inbesondere konnte Talentino mit (1) begründen, wieso Dr. Slyfox bei der Menge M_7 (siehe oben) als Erster den letzten Mohikaner benannte – eigentlich kannte er ja den letzten Mohikaner bereits von Anfang an!
Sobald nämlich die Menge M_n eine Zahl $r_i = -1$ enthält, ist das Produkt $(r_1 + 1)(r_2 + 1) \ldots (r_i + 1) \ldots (r_j + 1) \ldots (r_n + 1) = 0$ und mithin $r = -1$.

Dr. Slyfox sparte nicht mit Lob für Talentinos schönes Ergebnis. Doch fügte er lächelnd hinzu, dass die Studenten auch mit weniger Aufwand zumindest einen Erfolg hätten erringen können – dazu brauchten sie nur eine Menge $\{0, 0, \ldots, 0\}$ zu wählen, deren zugehöriger letzter Mohikaner offensichtlich 0 ist.

Mathematische Entdeckungen

Straßennetz im Königreich der n Dörfer

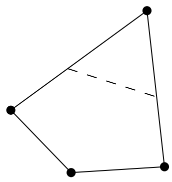
In einer fernen Weltgegend liegt das rückständige „Königreich der n Dörfer“. Als Beispiel ist hier eine Landkarte mit $n = 12$ Dörfern abgebildet. Darin sind die Dörfer $D_1, \ldots, D_{12}$ durch Punkte („Hauptstädte“) und die Grenzen der Dorfgebiete $G_1, \ldots, G_{12}$ durch Linien dargestellt.



Weil bisher die Dörfer nur durch Eselspfade verbunden sind, beschließt der König den Bau eines modernen Wegenetzes in seinem kleinen Reich nach den folgenden Vorgaben: Zwischen je zwei Dörfern D_i, D_j soll eine Straße D_iD_j dann – aber auch nur dann! – gebaut werden, wenn die beiden Dorfgebiete G_i und G_j eine gemeinsame Grenze besitzen; die Straße D_iD_j soll vollständig in den Gebieten G_i und G_j verlaufen und deren gemeinsame Grenze schneiden.

Einige Zeit, nachdem die Straßen gebaut sind, beklagen sich die Dörfler, dass es nun Gebiete gibt, die zwar von Straßen umschlossen sind, durch die aber keine Straße hindurchführt.

Der König fragt darauf seinen Verkehrsminister: „Wenn ich durch jedes dieser Gebiete genau eine Straße bauen lasse, wie viele neue Straßen gibt es dann?“



Beispiel:
4 alte Straßen
1 neue Straße

Versuche, eine Formel zu finden, mit der der König für n Dörfer, $n = 3, 4, 5, \dots$ die Anzahl der neuen Straßen berechnen kann.

Hinweis: Ziehe für die Aufstellung einer solchen Formel eine mögliche Beziehung zwischen den Anzahlen der Dörfer, der alten und der neuen Straßen zunächst für $n = 3$, dann für $n = 4$ usw. in Betracht. (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2012 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 109

In Heft 109 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Teilerreiche Zahlen

Man nennt eine natürliche Zahl $n > 1$ teilerreich, wenn die Anzahl ihrer Teiler größer ist als die Anzahl der Teiler einer jeden natürlichen Zahl m, $m = 1, 2, 3, \dots, n-1$.
Beispiel:

Zahl n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
Anzahl der Teiler von n	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	...

Also sind 2, 4, 6 und 12 teilerreich.
Erweitere die Liste und untersuche beispielsweise: Gibt es Sorten von Zahlen, die nicht als teilerreich in Frage kommen beziehungsweise die Kandidaten für teilerreiche Zahlen sind?
Hinweis: Die Darstellung von n als Primzahl-Produkt sei $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ mit Primzahlen p_1, p_2, ..., p_r. Dann hat n genau $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_r + 1)$ Teiler. (H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe hat Marcel Wittmann, 8. Klasse des Karolinen-Gymnasiums in Frankenthal sich beschäftigt:.
Es sei x eine teilerreiche Zahl mit der Primfaktorzerlegung $x = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$. Nach der in der Aufgabenstellung genannten Formel für die Berechnung der Teileranzahl hat x dann $(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_n + 1)$ Teiler und zwar unabhängig von der Wahl der Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$. So hat beispielsweise $2^3 \cdot 7^2 \cdot 13^1 \cdot 17^5$ genauso

viele Teiler wie $2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^1 \cdot 7^5$. In einer Menge von Zahlen mit gleicher Teileranzahl ist nur die kleinste Zahl ein Kandidat für eine teilerreiche Zahl.
Daraus folgt: Man muss $p_1, p_2, \dots, p_n$ so wählen, dass $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_n^{e_n}$ minimal wird. Das erreicht man, indem man für die Primzahl mit dem größten Exponenten 2 wählt (also die kleinste Primzahl), für die Primzahl mit dem zweitgrößten Exponenten 3 (also die zweitkleinste Primzahl), usw. Es gilt also:

> Die Primfaktorzerlegung einer teilerreichen Zahl ist immer von der Form $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_n^{e_n}$, wobei $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_n$ und $p_1, p_2, \dots, , p_n$ die ersten n Primzahlen, also $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_4 = 11, \dots$, sind.

Durch Betrachtung der kleinstmöglichen Einer-, Zweier-, Dreier-, Viererprodukte natürlicher Zahlen erhält man die folgende Tabelle teilerreicher Zahlen $1 < n < 1000$:

Anzahl der Teiler von n in der Form $(e_1+1)\dots(e_n+1)$	2	3	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 2$	$4 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	$5 \cdot 2$	$3 \cdot 2 \cdot 2$	$4 \cdot 2 \cdot 2$
n als Primzahlprodukt	2	2^2	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$
n	2	4	6	12	24	36	48	60	120

Anzahl der Teiler von n in der Form $(e_1+1)\dots(e_n+1)$	$3 \cdot 3 \cdot 2$	$5 \cdot 2 \cdot 2$	$4 \cdot 3 \cdot 2$	$5 \cdot 3 \cdot 2$	$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
n als Primzahlprodukt	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
n	180	240	360	720	840

Lösungen zu den Aufgaben von Seite 7

(a) Addition und Subtraktion

$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a^2} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}$, $a > 0$.
Der Term $c - \frac{b^2}{4a^2}$ ist eine Konstante und $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geqslant 0$.
Daher hat y seinen kleinsten Wert für $x + \frac{b}{2a} = 0$, also für $x = -\frac{b}{2a}$.

(b) Multiplikation und Division

Man multipliziert $P(n)$ mit $n!$ und erhält so:

$$\begin{aligned} n!\,P(n) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) \\ &= (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)) \\ &= 2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)) \\ &= 2^n n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1). \end{aligned}$$

Nun dividiert man den letzten Term durch $n!$; es ergibt sich dann:

$$P(n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

Im Produkt $P(n)$ kommt der Faktor 2 genau n mal vor.

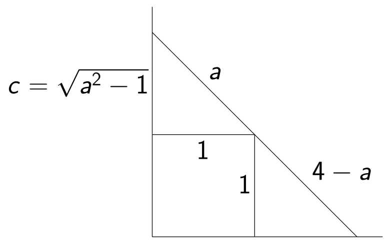
(c) Logarithmieren und Exponentieren

Aus $x^{ax} = 10^x$ mit $x > 0$ und $a > 0$ folgt durch Logarithmieren:

$$\log x^{ax} = \log(x^a)^x = x \log x^a = x \log 10.$$

Wegen $x > 0$ folgt aus der letzten Gleichung: $\log x^a = \log 10$ und deshalb nach Exponentieren: $x^a = 10$. Also ist $x = \sqrt[a]{10}$ die gesuchte Lösung.

(d) Transformation, Substitution und Rücksubstitution, Rücktransformation



Wir betrachten zunächst den Fall einer Leiter der Länge 4 und einen Würfel der Kantenlänge 1 (Transformation) Es sei a die Länge des Leiterstücks oberhalb der Würfelkante.
Die beiden kleinen Dreiecke sind ähnlich, sodass gilt:

$\frac{4-a}{1} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \Rightarrow (a^2 - 1)(4 - a)^2 = a^2.$*

Mit der Substitution $a = 2 - b$ erhalten wir: $(3 - 4b + b^2)(2 + b)^2 = (2 - b)^2$. Durch Ausrechnen ergibt sich $b^4 - 10b^2 + 8 = 0$ und daher ist $b^2 = 5 \pm \sqrt{17}$. Mit Rücksubstitution $b = 2 - a$ folgt $a = 2 \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{17}}$.
Es gilt: $a = 2 - \sqrt{5 + \sqrt{17}} < 0$ und $a = 2 + \sqrt{5 + \sqrt{17}} > 4$. Somit bleiben die zwei (vorläufigen) Lösungen: $a = 2 \pm \sqrt{5 - \sqrt{17}}$.
Falls nun die Länge der Leiter 8 und die Würfelkante 2 ist (Rücktransformation), dann sind in der Figur sämtliche Strecken zu verdoppeln (Ähnlichkeitsabbildung!), sodass es für die Länge des Leiterstücks oberhalb der Würfelkante zwei Möglichkeiten gibt: $2a = 4 \pm 2\sqrt{5 - \sqrt{17}}$.

Lösungen zu den Aufgaben von Seite 33

$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + (4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2)$, da $0 = -4 + 4$, gemäß der Formel (3).
$2012 = -1^2 - 2^2 + 3^2 + (4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2) + (8^2 - 9^2 - 10^2 + 11^2) + ... + (2008^2 - 2009^2 - 2010^2 + 2011^2)$, da $2012 = 4 + 502 \cdot 4$ – vergleiche Formel (3).
Unter der Verwendung der Erdös-Darstellung der 0 ist wegen $2012 = 0 + 503 \cdot 4$:
$2012 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 + (8^2 - 9^2 - 10^2 + 11^2) + ... + (2016^2 - 2017^2 - 2018^2 + 2019^2)$.
Man erkennt am Beispiel 2012: Erdös-Darstellungen müssen nicht eindeutig sein.

* Man könnte diese Gleichung mit einer ziemlich komplizierten Formel von Lodovico Ferrari (1522–1565) und Girolamo Cardano (1501–1576) exakt oder mit einem Computer näherungsweise lösen – dann entfallen die nachfolgende Substitution und Rücksubstitution.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 109

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 5: Luca Bühler 26.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen
Kl. 6: Hanaa El Sammak 10, Malak Hasham 12;

Kl. 7: Zalwa Alaa 5, Salma Amr 3, Alaa Elfawal 3, Virginia Mandouh 3;

Kl. 9: Marianne Michel 19.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Kunz)**:**
Kl. 7: Niclas Mayer 13;

Kl. 8: Sebastian Maak 2, Jann Ole Neitzel 13, Katharina Rößler 28;

Kl. 10: Marc de Zoeten 2, Lena Ehrenhard-Dickescheid 4, Sebastian Ludwig 45, Benedikt Maurer 14, Alexander Rupertus 11;

Kl. 11: Andreas Pitsch 22.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler)**:**
Kl. 5: Lena-Marie Senft 10, Carla Vo 5.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 11: Frank Schindler 61.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 9: Jamico Schade 15.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 6: Iolanthe Köcher 56.

Edenkoben, Gymnasium:
Kl. 7: Amelie Knecht 15, Theresa Paulus 18.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 8: Anne Vogel 6.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium: Kl. 8: Kai Wilezkowiak 3.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 6: Lea Storzum 16;

Kl. 7: Tillmann Ballweber 4, Christoph Hemmer 16, Marion Misiewicz 15, Maximilian Münch 7, Sam Washington 7, Sonja Zimmermann 8;

Kl. 8: Adriana Stenger 5, Marcel Wittmann 76;

Kl. 11: Henning Ballweber 35;

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 2: Philipp Kraus 1, Ella Zwermann 9;
Kl. 3: Martha Friederich 14, Bent Gerstenberger 1, Vrishab Vittagondana 3;
Kl. 4: Natascha Albrecht 4, Sophie Brandenburg 9, Naima Gerlach 9, Lara Kern 18, Maya Most 10, Marc Ohlemacher 2, Franziska Schlüter 14, Vincent van't Hof 9;
Kl. 5: Justus Binnewies 3, Emma Braulke 1, Patrick Coles 2, Laura Häger 4, Maximilian Kolrep 1, Sebastian Schneider 11, Felix Schröder 1;
Kl. 7: Nicolas Gladiator 1, Ludwik Huth 4.

Gießen, Landgraf-Ludwigs-Gymnasium:
Kl. 5: Laura Kristin Kettner 3, Felix Köhler 9.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 5: Luca Kloft 6, Lisa Metternich 2, Leonie Stahl 4,Melanie Schuy 12;
Kl. 6: Kim Bruder 6, Matthias Hannappel 7, Julia Holzhüter 5, Emma Mais 18, Nils Prepens 30, Max Schneider 12, Simeon Schneider 10, David Storzer 56, Konrad Uecker 5;
Kl. 7: Robin Dobischok 7, Sven Gobbitza 7, Steffi Langer 12, Lea Stiehl 8, Marvin Weisbender 14, Emily Zollmann 15,
Kl. 8: Moritz Schäfer 8.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 8: Mariam Baher 15;
Kl. 11: Shaima'a Ahmed Doma 38.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Andreas Benz 10;
Kl. 6: Patrick Piesch 4, Max Rosenberg 6;
Kl. 8: Björn Stanischewski 48;
Kl. 9: Maike Stanischewski 62.

Köln, Ursulinengymnasium: Kl. 9: Elisabeth Böttger 17.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 11: Robin Fritsch 17.

Limburg, Tilemannschule:
Kl. 6: Helena Rist;
Kl. 7: Virginia Beck 10, Lena Daum 12, Anna Ebenig 11, Marie Harling 9, Ina Helfenstein 9, Emilie Orgler 10, Greta Schlinke 13, Sarah Urban 9;
Kl. 8: Chantall Klemm 11.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 6: Jason Beck 8, Jana Eichhorn 5,Angela Hahn 3, Marc Hoffmann 15, Sebastian Hospice 6, Lukas Koenen 8, Tim Morsbach 8, Annalena Silz 4, Chiara

Stork 4, Sebastian Trapp 7;

Kl. 7: Melanie Weibrich 7, Marina Witte 16;

Kl. 12: Ann-Kathrin Hientzsch 10, Giang Phi 21.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 12: Niklas Bockius 62.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Wittekindt):

Kl. 7: Lukas Krader 14;

Kl. 8: Leo Lutz 52;

Kl. 9: Léonard Wagner 3;

Kl. 12: Tim Lutz 28.

München, Max-Planck-Gymnasium: Kl. 9: Greta Sandor 7.

München, Michaeli-Gymnasium: Kl. 10: Axel Krafft 17.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:
Kl. 10: Bettina Diller 22.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Jelena Arambasic 11, Chantal Cornely 3 Kevin Cornely 8, Karolina Mengert 14, Victoria Mogwitz 22, Ellen Wagner 13;

Kl. 6: Jonas Ahlfeld 4, Darleen Baum 19, Liana Bergen 14, Stefanie Giesbrecht 17, Rabea Klesing 26, Runa Ruttert 16, Clemens Schlosser 5, Joshua Thron 6, Anja Wingender 18, Ege Yilmazer 5;

Kl. 7: Jasmin Hallyburton 58, Verena Rüssing 10, David Thiessen 14;

Kl. 9: Mirjam Bourgett 8, Naemi Dörksen 8, Elena Hummel 6, Markus Schlosser 11, Sandra Wingender 13;

Kl. 10: Janina Vogl 6.

Niddatal, Geschwister-Scholl-Schule: Kl. 4: Leonie Rößler 40.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Roberto Becciu 7, Manuel Blumenschein 8, Hannah Bock 12, Lara Braun 29, Franziska Burkard 4, Debora Gampfer 8, Laurin Gerber 12, Tobias Heinze 41, Florian Kuhn 5, Fabian Liepach 42, Simon Lutz 9, Jara Müller-Kästner 35, Krystof Navratil 9, Leon Sobotta 9, Leoni Steinweden 8, Mareike Vestner 25, Dominik Vogel 9;

Kl. 6: Ricardo Bode 56;

Kl. 9: Heiko Kötzsche 80, Thomas Fischer 17.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 10: Luis Ressel 5.

Templin, Egelpfuhlschule: Kl. 5: Ronja Gantzke 6.

Weißkirchen, Grundschule: Kl. 4: Jonas Glückmann 28.

Wiesbaden, Leibnitzschule:
Kl. 6: Andreas Dernier 38;
Kl. 7: Elisa Dernier 46.

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2012

mit der Preisvergabe
an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2011/2012
am Samstag, dem 24. November 2012, Beginn 10 Uhr,
am Gymnasium Oberursel,

Den Festvortrag wird Herr Prof. Dr. Matthias Brinkmann, Hochschule Darmstadt, halten.
Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.
Weitere Informationen findet Ihr demnächst auf der MONOID-Internetseite
www.mathematik.uni-mainz.de/monoid.

Mitteilungen

- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Schuljahr 2012 auf das MONOID-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00), Stichwort „MONOID", zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).
- Wir bitten alle betreuenden Lehrer uns die Punktzahlen der Schüler für die Aufgaben aus MONOID 110 bis zum 24. Oktober 2012 mitzuteilen, sodass wir rechtzeitig zur MONOID-Feier am 24. November 2012 die Preisträger bestimmen können.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe
Versand: Katherine Pillau

Jahrgang 32 Heft 111 September 2012

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid