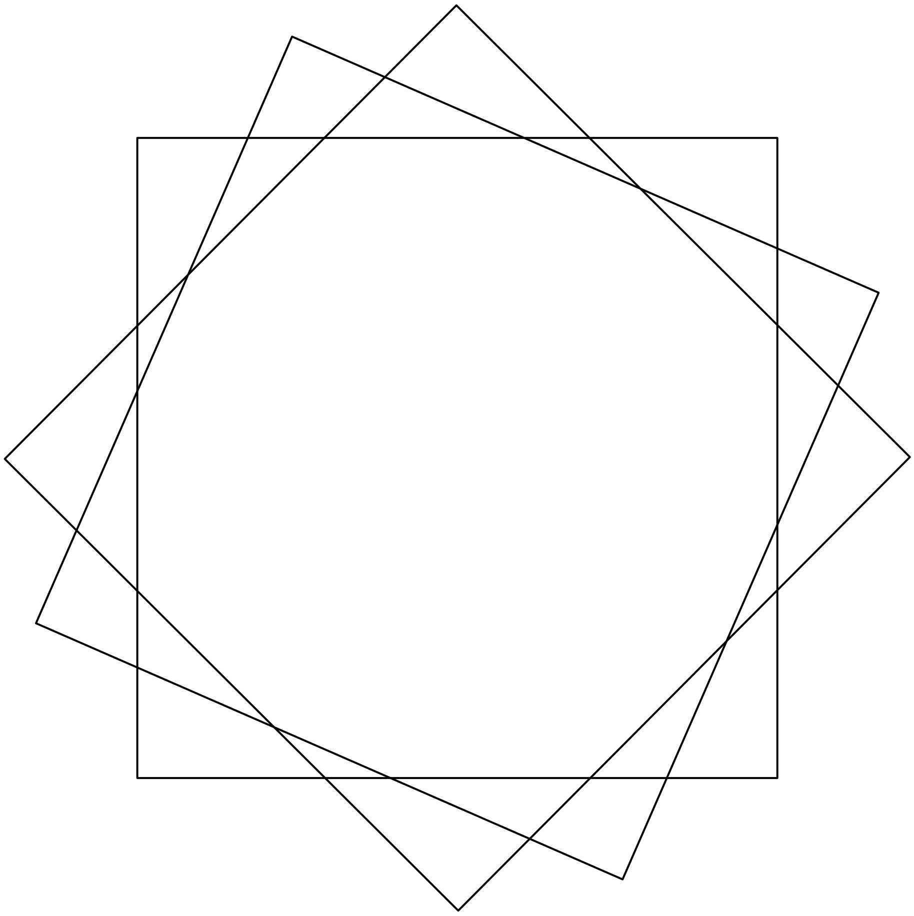
Jahrgang 32 Heft 112 Dezember 2012

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.02.2013.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Kunz, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Das Zahlenrätsel des Michael Stifel

von Hartwig Fuchs

Das Rätsel

Professor Qu* pflegt seine Vorlesungsreihe „Zahlentheorie“ mit einem historischen Problem oder Rätsel einzuleiten. Im letzten Semester war es ein Verfahren, mit dem man eine gedachte Zahl** angeblich erraten, tatsächlich aber berechnen kann:

> Die Studenten wählen eine vor Prof. Qu geheim zu haltende Zahl x mit $1 \leq x < 5402$. Dann berechnen sie die Divisionsreste r_{73} und r_{74} der Divisionen $x : 73$ und $x : 74$. Aus den Zahlen r_{73} und r_{74} – so behauptet Prof. Qu – kann er die Zahl x bestimmen.

Die Studenten bezweifelten, dass Prof. Qu mit seiner Behauptung Recht habe. Sie wählten also eine Zahl x und nannten die Divisionsreste $r_{73} = 14$ und $r_{74} = 4$. Danach rechnete Prof Qu. nicht einmal eine Minute mit seinem Taschenrecher und verkündete dann zum allgemeinen Erstaunen die richtige gedachte Zahl $x = 744$. Dazu bemerkte er:

„Das Rätsel und seine zahlentheoretische Begründung stammen leider nicht von mir. Ich habe es bei dem ersten deutschen Zahlentheoretiker Michael Stifel (1487? - 1567) im sechsten Kapitel des ersten Buches seiner 1544 gedruckten für die Mathematik seiner Zeit sehr wichtigen und einflussreichen Schrift „Arithmetica integra“ (Die vollständige Arithmetik) gefunden – heute könnte man es so formulieren:

> Ein Erster wähle eine Zahl der Form $m(m+1)$. Ein Anderer denke sich eine Zahl x mit $1 \leq x \leq m(m+1)$, berechne für die Divisionen $x : m$ und $x : (m+1)$ die Reste r_m und r_{m+1} und teile sie dem Ersten mit. Dieser berechne den Rest r der Division $((m+1)r_m + m^2 r_{m+1}) : m(m+1)$. Dann ist r die gedachte Zahl x.“

Des Rätsels Lösung

Als Erstes zeigte Prof Qu, dass er im Beispiel oben zur Berechnung der von den Studenten gewählten Zahl $x = 744$ nach dem Verfahren von Stifel vorgegangen war.

Er hatte $m = 73$ genommen, sodass $m(m+1) = 5402$ ist. Deshalb sollten die Studenten eine Zahl $x < 5402$ wählen. Mit den ihm genannten Resten $r_{73} = 14$ und $r_{74} = 4$ der Divisionen $x : 73$ und $x : 74$ berechnete er den Rest r bei der Division $(74 \cdot 14 + 73^2 \cdot 4) : (73 \cdot 74)$ – er ist $r = 744$ und siehe da: $r = x$. Das Verfahren von Stifel lieferte also in diesem Fall das richtige Ergebnis.

---

* Es wird vermutet, dass sich hinter der Abkürzung Qu der Mathematiker Quaoar verbirgt

** Das Wort „Zahl“ bedeutet im Folgenden stets positive ganze Zahl

Kann man damit aber auch jede beliebige Zahl x mit $1 \leq x \leq m(m+1)$ „erraten“? Die Antwort lautet nach einer etwas längeren Begründung: ja!

Die Zahl $m \geq 1$ sei gegeben und x sei eine beliebige Zahl mit $1 \leq x < m(m+1)$. Dann gibt es Zahlen a und b, sodass gilt:

(1) $x = am + r_m$ mit $0 \leq r_m < m$

(2) $x = b(m+1) + r_{m+1}$ mit $0 \leq r_{m+1} < m+1$

Konstruktion der Stifel-Zahl S

Multipliziert man (1) mit $m+1$ und (2) mit m^2, und addiert man dann die beiden neuen Gleichungen, so ergibt sich $(m+1)x + m^2x = m(m+1)a + (m+1)r_m + m^2(m+1)b + m^2r_{m+1}$, also $m(m+1)x + x = m(m+1)(a+mb) + S$, wobei

(3) $S = (m+1)r_m + m^2r_{m+1}$ einerseits und

(4) $S = m(m+1)(x-a-mb) + x$ andererseits gilt.

Eine Eigenschaft der Stifel-Zahl S

Für die Stifel-Zahl gilt $S \geq x$:
1. Fall: Es sei $r_m \geq 1$. Ist $r_{m+1} \geq 1$, so gilt nach (3): $S \geq m+1+m^2 > m(m+1) > x$. Ist $r_{m+1} = 0$, dann folgt aus (2), dass $x = b(m+1)$ gilt. Nach Voraussetzung ist dann $b < m$ und daher folgt aus (1) wegen $x = bm + b$, dass $b = r_m$ ist.
Dann gilt mit (2): $S = (m+1)r_m = (m+1)b = x$.
2. Fall: Es sei $r_m = 0$. Ist $r_{m+1} \geq 2$, dann gilt $S = m^2r_{m+1} \geq 2m^2 \geq m(m+1) > x$. Ist $r_{m+1} = 1$, dann ist $S = m^2$.
Aus (1) folgt $x = am$ mit $a < m+1$ und daher $a \leq m$ und dann ist $x = am \leq m^2 = S$. Ist $r_{m+1} = 0$, dann gilt mit (1) und (2): $x = am = b(m+1)$. Daher sind m und $m+1$ und auch $m(m+1)$ Teiler von x, sodass $x \geq m(m+1)$ ist – ein Widerspruch. Der Fall $r_{m+1} = 0$ tritt also nicht ein.

Begründung für das Stifel-Verfahren

Aus $S \geq x$ folgt mit (4): Der Faktor $(x-a-mb)$ ist ≥ 0. Setzt man $x-a-mb = c$, so ist $c \geq 0$ und (4) lautet damit: $S = c \cdot m(m+1) + x$ mit $c \geq 0$ und $x < m(m+1)$. Bei Division der Summe auf der rechten Seite der Gleichung durch $m(m+1)$ ist dann wegen (4) der Divisionsrest r die Zahl x. Daher gilt nach Gleichung von (3) und (4):
Der Rest bei der Division $((m+1)r_m + m^2r_{m+1}) : m(m+1)$ ist die Zahl x.
Das Verfahren von Stifel führt also stets auf die gedachte Zahl x, wenn $1 \leq x \leq m(m+1)$ für ein vorgegebenes m ist.

Prof. Qu schloss seine Ausführungen mit einer knappen Bemerkung zur Geschichte des Rätsels:
Bei Nikomachos von Gerasa (um 100 n.Chr.), der die erste rein zahlentheoretische Schrift verfasst hat, finden sich die frühesten Spuren des Rätsels. Es war der

chinesische Mathematiker Sun Tzu, der im 3. Jahrhundert lebte und der erstmals eine Aufgabe behandelte, in der aus drei von ihm konkret vorgegebenen Divisionsresten eine unbekannte Zahl bestimmt werden sollte – weshalb man das Rätsel manchmal auch das „chinesische Restproblem" nennt.
Auch in der etwas späteren indischen und arabischen Mathematik löste man das Rätsel mit konkret vorgegebenen kleinen Zahlen. Als es dann wohl im Mittelalter ins Abendland gelangte, erhielt es von Stifel seine schon recht allgemeine Fassung. Aber erst Leonhard Euler und Carl Friedrich Gauß haben es in voller Allgemeinheit und vollständig gelöst.

Kopfrechnen – so schnell wie ein Inder

von Bettina Diller

234 mal 247 – diese Aufgabe soll man in Sekundenschnelle kinderleicht im Kopf berechnen können? In Indien kann man das und zwar mit Hilfe der Vedischen Mathematik, die es vermutlich schon seit mehr als 1000 Jahren gibt. Diese Rechenmethoden ermöglichen es, Aufgaben kompliziertester Art im Kopf zu lösen, wenn man die Methoden richtig anwendet. Das kleine Einmaleins wird nur noch bis fünf mal fünf gebraucht und die Methoden selbst basieren auf knappen, einfachen Wortformeln, den 16 Sutren und 13 Sub-Sutren.

Beginnen wir mit der Subtraktion. Subtrahiert man eine Zahl von einer 10er-Potenz, gilt folgende Sutra: Alle von 9 und die letzte von 10. Wie wird das umgesetzt?

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ein Beispiel:} & 1000 - 386 & = & ? \\ & 3 \text{ von } 9 & = & 6 \\ & 8 \text{ von } 9 & = & 1 \\ & 6 \text{ von } 10 & = & 4 \\ \text{Die Lösung:} & 1000 - 386 & = & 614 \end{array}$$

Wie hätten wir das berechnet?

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & {}_1 & 3_1 & 8_1 & 6 \\ \hline & & 6 & 1 & 4 \end{array}$$

Anstatt von 9 zu subtrahieren, machen wir aus der 0 eine 10 und subrahieren davon. Den Zehner, den wir nun zu viel haben, rechnen wir zum Zehner des Subtrahenten dazu, damit ein Zehner mehr wieder vom Minuenden abgezogen wird usw.
In der Grundschule haben wir eine Subtraktionsmethode gelernt, die dem indischen Prinzip entspricht. Wenden wir sie auf das Zahlenbeispiel 631 − 287 an:

$$\begin{array}{cccc} & & 12 & \\ & 5 & \cancel{2} & 11 \\ & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ - & 2 & 8 & 7 \\ \hline & 3 & 4 & 4 \end{array} \quad \text{zum Vergleich:} \quad \begin{array}{cccc} & 6 & 3 & 1 \\ - & 2_1 & 8_1 & 7 \\ \hline & 3 & 4 & 4 \end{array}$$

Der Minuend wird um 10 erhöht, der Zehner, den wird wir damit zu viel haben, wird vom Zehner der Minuenden abgezogen – so gleicht sich beides wieder aus usw.

Nun ist es fragwürdig, ob bei diesen Zahlen nicht doch eine einfache Kopfrechnung mit weniger Aufwand sinnvoller ist. Sicherlich muss man in den indischen Methoden geübt sein, um seinen Nutzen aus ihnen zu ziehen, und doch: Hat uns die Einfachheit der Vedischen Mathematik nicht schon jetzt in Staunen versetzt? Schauen wir uns ihre Anwendung in der Multiplikation an. Zur Einführung soll mit kleinen Zahlen gerechnet werden. Grundsätzlich gilt hier folgende Sutra: Vertikal und kreuzweise.

Ein Beispiel: $7 \cdot 8 = ?$

Zunächst sucht man sich eine Bezugszahl z, sie bestimmt die Einfachheit und ist meistens eine 10er-Potenz. Sei $7 = a$ und $8 = b$, es wird auf z hochgerechnet. Die Differenz von $b - (z - a)$ (oder $a - (z - b) = b - (z - a)$) wird mit z multipliziert und zu dem Produkt $(z - a) \cdot (z - b)$ addiert. Das sieht dann so für $z = 10$ so aus:

$$\begin{array}{ll} 7 & 3 \\ \quad \overset{-}{\swarrow} & \cdot \downarrow \\ 8 & 2 \\ \hline 5 \cdot 10 + 6 & = 56 \end{array}$$

Bei manchen Zahlen eignet sich eine andere Bezugszahl besser, hier zum Beispiel $z = 5$:

$$\begin{array}{ll} 4 & 1 \\ \quad \overset{-}{\swarrow} & \cdot \downarrow \\ 3 & 2 \\ \hline 5 \cdot 5 + 2 & = 12 \end{array}$$

Um mit einer komplizierten Bezugszahl trotzdem noch im Kopf rechnen zu können, kann man ein bisschen tricksen, so hier für $z = 250 = 1000 : 4$:

$$\begin{array}{ll} 234 & 16 \\ \qquad \overset{-}{\swarrow} & \cdot \downarrow \\ 247 & 3 \\ \hline 231 \cdot 1000 : 4 + 48 & = 57798 \end{array}$$

Aber stimmt das Ergebnis eigentlich? Wie funktioniert diese Methode? Der Term soll die Rechnung noch einmal darstellen:

$$\begin{aligned} & (b - (z - a)) \cdot z + (z - a)(z - b) \\ =& (b - z + a) \cdot z + (z - a)(z - b) \\ =& bz - z^2 + az + z^2 - bz + az + ab \\ =& ab \end{aligned}$$

Die Richtigkeit ist damit bewiesen. Um damit nun auch die Kopfrechenleistung der Inder zu erreichen, bedarf es aber viel Übung.

Darüber hinaus gibt es in der Vedischen Mathematik noch viel anderes zu entdecken. Hier ein kurzes Beispiel: Die Multiplikation von zwei- oder dreistelligen Zahlen mit 11:

$$\begin{aligned} 27 \cdot 11 &= ? \\ 2+7 &= 9 \\ \text{Lösung: } & 297 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 435 \cdot 11 &= ? \\ 4+3 &= 7 \\ 3+5 &= 8 \\ \text{Lösung: } & 4785 \end{aligned}$$

Die aufgezeigten Methoden sind längst noch nicht alles, um die Kunst des Kopfrechnens mit allen Zahlen und Rechenarten anzuwenden. Versuche man sich doch nur an $87265 \cdot 32117$. Doch wofür gibt es denn noch die anderen Sutren?

Als Quellen dienten die folgenden Internetseiten. Dort findet Ihr auch weitere Informationen:

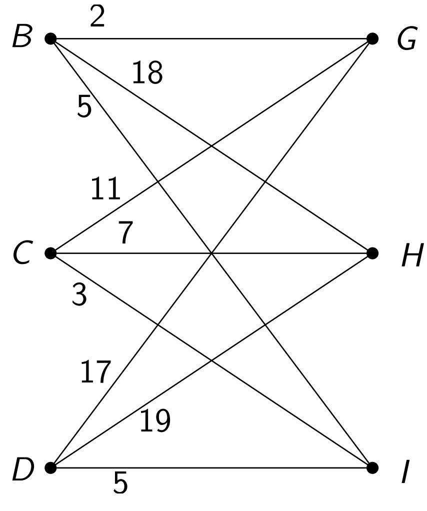
`www.matheknueller.de/indien-magazin.pdf`
`http://pagewizz.com/indisches-kopfrechnen`

Hättest Du es gewusst?
Was sind gierige Algorithmen?
von Hartwig Fuchs

Ein Heiratsproblem

Ein germanischer Häuptling aus längst vergangener Zeit ließ verkünden, er wolle seine Töchter Gudrun (G), Hilda (H) und Inga (I) verheiraten – aber er stelle eine Bedingung: Jeder Bewerber solle ihm für jede seiner drei Töchter jeweils einen Brautpreis – zahlbar in Pferden – anbieten; und er würde danach entscheiden, wer welches seiner Kinder heiraten dürfe.

Bald traten drei Bewerber auf: Bert (B), Chlodwig (C) und Dietrich (D).



Ihre Angebote sind in der nebenstehenden Skizze angegeben; zum Beispiel bietet Chlodwig für Gudrun, Hilda und Inga in dieser Reihenfolge elf, sieben und drei Pferde.

Wie entschied der Häuptling?

Aus Habgier (?) nahm er zunächst das höchste Angebot an – nämlich das von Dietrich für Hilda – und sodann das zweithöchste, welches Chlodwig für Gudrun machte; danach hatte er keine Wahlmöglichkeiten mehr: Er musste Bert seine Tochter Inga zusprechen. Seine Vorgehensweise erbrachte ihm daher $19 + 11 + 5 = 35$ Pferde.

Das Heiratsproblem hat sechs verschiedene Lösungen: Einige sind für den Häuptling recht ungünstig, einige sind akzeptabel und eine ist die beste (optimale) Lösung – wie man aus der Tabelle abliest:

Gebot von B für	$G \to 2$	$G \to 2$	$H \to 18$	$H \to 18$	$I \to 5$	$I \to 5$
Gebot von C für	$H \to 7$	$I \to 3$	$G \to 11$	$I \to 3$	$G \to 11$	$H \to 7$
Gebot von D für	$I \to 5$	$H \to 19$	$I \to 5$	$G \to 17$	$H \to 19$	$G \to 17$
Der Häuptling erhält	14	24	34	38	35	29

Der Häuptling hat durch seine Entscheidungen zwar nicht das optimale, aber immerhin das zweitbeste Ergebnis erzielt. Zufall oder Taktik?

Um die optimale oder zumindest eine annähernd optimale Lösung bei Aufgaben vom Typ des Heiratsproblems zu finden, braucht man eine Strategie. Naheliegend: Man probiert (rechnet) alle überhaupt möglichen Fälle durch. Diese Methode verbietet sich aber, wenn deren Anzahl sehr groß ist.

Ein Rundreiseproblem (Travelling-Salesman-Problem)

Ein Geschäftsmann plant, von seinem Wohnort W aus seine Kunden, die in zwanzig verschiedenen Städten $S_1, S_2, \dots, S_{20}$ wohnen, mit seinem Auto zu besuchen. Die Reihenfolge, in der er zu den zwanzig Städten fährt, will er so festlegen, dass seine Rundreise möglichst kurz ist und er nicht zweimal zu einer Stadt $\neq W$ fährt – zwischen je zwei Städten gibt es stets eine direkte Verbindung, deren Länge bekannt ist.

Die Bestimmung der kürzesten Route durch Berechnung aller möglichen Rundreise wird dem Geschäftsmann nicht gelingen, denn von W aus zu einer ersten Stadt gibt es zwanzig direkte Wege, von der ersten zu einer zweiten Stadt $\neq W$ gibt es noch 19 Wege, usw.

Insgesamt muss der Geschäftsmann also $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \approx 2{,}4 \cdot 10^{18}$ Rundreisen in Betracht ziehen. Falls nun ein Computer pro Sekunde 10 Millionen Rundreisen bestimmen und ihre Längen miteinander vergleichen kann, dann benötigt er etwa $2{,}4 \cdot 10^{11}$ Sekunden ≈ 7600 Jahre – oder die Hälfte dieser Zeit, wenn er die paarweise auftretenden entgegengesetzt orientierten Routen nicht unterscheidet –, um die kürzeste aus $2{,}4 \cdot 10^{18}$ Rundtouren herauszufinden. Ein *gieriger Algorithmus* dagegen liefert in Bruchteilen von Sekunden eine – allerdings nicht immer die beste – Lösung.

Gierige Algorithmen

Für Optimierungsprobleme, deren Bewältigung einen unvertretbar hohen Rechenaufwand erfordert – und derartige Probleme sind heute in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft nicht selten (zum Beispiel bei der Planung von Netzwerken für Verkehr, Kommunikation oder bei der Organisation von Produktionsabläufen) – hat die Mathematik Rechenverfahren (Algorithmen) entwickelt, deren Strategie darin besteht, dass sie nicht mehr nach optimalen, sondern nur noch nach annähernd optimalen Lösungen suchen. So lässt sich der Rechenaufwand im Allgemeinen beträchtlich verringern.

Eine besonders wichtige Klasse von solchen effizienten Rechenverfahren sind die gierigen Algorithmen (greedy algorithms). Die Vorgehensweise des Häuptlings im Heiratsproblem beschreibt anschaulich den charakteristischen Ablauf eines solchen Algorithmus: Der Häuptling entschied sich in drei Schritten, wobei er bei jedem Schritt das dann jeweils noch vorhandene günstigste Angebot auswählte.
Das strategische Muster eines beliebigen gierigen Algorithmus sieht ganz ähnlich aus:

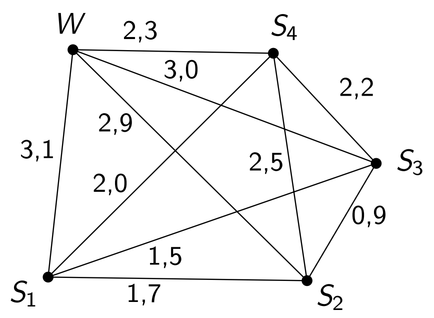
(1) Ein gieriger Algorithmus ist ein in Schritten ablaufendes Rechenverfahren, das bei jedem Schritt nach einem vorgegebenen Kriterium die jeweils günstigste Teillösung bestimmt und aus diesen Teillösungen eine Gesamtlösung zusammensetzt.

Es hat sich gezeigt, dass gierige Algorithmen umfassend anwendbar sind. Aber das hat seinen Preis: Sie sind im Allgemeinen zu unspezifisch, um stets die beste Lösung für ein Optimierungsproblem zu finden – doch hat man bewiesen, dass die von ihnen berechneten Lösungen immer um weniger als 50% von den optimalen Lösungen abweichen. Beim Heiratsproblem etwa liegt die „gierige" Lösung (35 Pferde) um $7{,}9\%$ unter dem bestmöglichen Ergebnis (38 Pferde).
Wir geben nun zwei weitere Beispiele von gierigen Algorithmen – es gibt davon natürlich noch weitaus mehr.

Der gierige *Algorithmus des nächsten Nachbarn (AnN)* bestimmt Lösungen von Rundreiseproblemen und damit verwandter Aufgaben mit dem Kriterium:

(2) Wähle bei jedem Schritt die nächst erreichbare noch nicht besuchte Stadt.

Eine Rundreise durch fünf Städte, die mit dem gierigen Algorithmus AnN geplant wird



Ein Geschäftsmann möchte vom Ort W aus seine in den Städten S_1, S_2, S_3, S_4 wohnenden Kunden am liebsten in möglichst kurzer Zeit besuchen, ohne mehrfach durch eine Stadt zu fahren. Wie sollte er seinen Weg wählen? Die Fahrtzeiten in Stunden (h) sind in der nebenstehenden Skizze angegeben.
Lösung mit Hilfe des Algorithmus AnN gemäß (2):

$$W \xrightarrow{2{,}3} S_4 \xrightarrow{2{,}0} S_1 \xrightarrow{1{,}5} S_3 \xrightarrow{0{,}9} S_2 \xrightarrow{2{,}9} W.$$

Für den Weg $WS_4S_1S_3S_2W$ benötigt man $9{,}6\mathrm{h}$.
Mit etwas Geduld wird man durch Überprüfung aller 24 möglichen Reiserouten feststellen, dass der gierige Algorithmus AnN eine optimale Lösung, das heißt einen der beiden Wege mit kürzester Reisezeit gefunden hat.

Der gierige *Algorithmus der vorsortierten Strecken (AvS)* bestimmt Lösungen von Rundreiseproblemen und damit verwandten Aufgaben so:

(3) Ordne zunächst die Längen der direkten Städteverbindungen der Größe nach. Wähle dann bei jedem Schritt eine noch nicht benutzte kürzeste Strecke, sodass die Bedingungen erfüllt sind:

  a) Keine drei gewählte Strecken treffen in einer Stadt zusammen.

  b) Es darf keine geschlossene Teilroute innerhalb der Gesamtroute entstehen.

(Bei Nichtbeachten von a) und b) wird eine Stadt eventuell zweimal besucht, was man im Allgemeinen vermeiden will.)

Ein Kabelnetz, das mit den Algorithmen AnN und AvS geplant wird

Zwischen den fünf Städten $W, S_1, \dots, S_4$ der obigen Skizze soll ein Fernsehkabel so verlegt werden, dass man ein lokales Programm in jeder Stadt in das Kabelnetz einspeisen und es in allen fünf Städten empfangen kann. Die Baukosten für jede direkte Städteverbindung in Millionen Euro sind in der Skizze angegeben. Bei welcher Kaberlverlegung sind die Kosten (möglichst) gering?
Lösung mit Hilfe des Algorithmus AnN gemäß (2):
Die erste Stadt ist nicht festgelegt – wir wählen S_3. Damit ergeben sich wegen $S_3 \xrightarrow{0,9} S_2 \xrightarrow{1,7} S_1 \xrightarrow{2,0} S_4 \xrightarrow{2,3} W$ für die Kabelführung $S_3S_2S_1S_4W$ Kosten von 6,9 Millionen Euro.
Startet man mit S_4, dann ergeben sich mit AnN 7,3 Millionen Euro Kosten für das Netz, usw.
Lösung mit Hilfe des Algorithmus AvS gemäß (2):

1. Vorsortierung der Streckenkosten: $|S_2S_3| < |S_1S_3| < |S_1S_2| < |S_1S_4| < ....$
2. Wegen $S_2 \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_4 \longrightarrow W$ ($S_2 \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2$ ist nach (b) ausgeschlossen) kostet die Kabelführung $S_2S_3S_1S_4W$ 6,7 Millionen Euro.

Tatsächlich hat AvS mit 6,7 Millionen Euro die optimale Lösung des Kostenproblems gefunden. Der von AnN gelieferte Werte weicht davon nur um 3% ab.

Die gierigen Algorithmen AnN und AvS können auch bei anderen als Rundreiseproblemen eingesetzt werden. Man formuliert dazu (2) und (3) geeignet um.

Aufgaben zum neuen Jahr

von Hartwig Fuchs

Teilbarkeit durch 2013

Für eine natürliche Zahl n sei definiert: $!n!$ ist das Produkt $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot n$, falls n ungerade, und das Produkt $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot n$, falls n gerade ist.
Zeige nun: $!2012! - !2011!$ ist ohne Rest durch 2013 teilbar.

Summenwert

Es sei $S = 1 - \frac{2}{2012} + \frac{3}{2012^2} - \frac{4}{2012^3} \pm \ldots + \frac{2011}{2012^{2010}} - \frac{2012}{2012^{2011}}$.
Berechne den Wert von S.

Ein Polynom

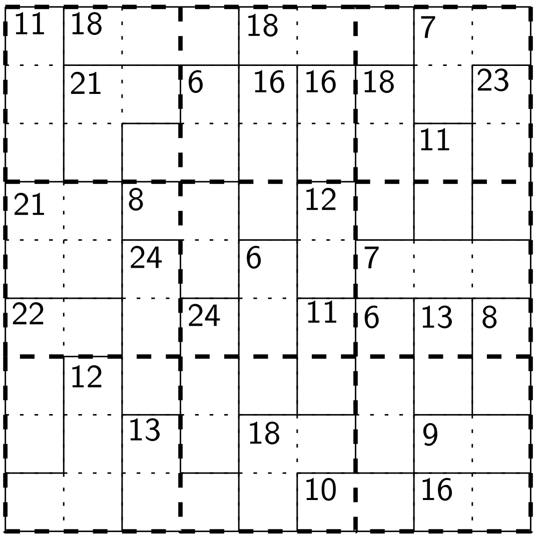
Ein Polynom $p(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten habe den Wert 2 für die vier x-Werte 2, 0, 1, 3.
Zeige, dass es keine ganzzahlige Zahl g gibt, sodass $p(g) = 2013$ ist.

Funktionswert gesucht

Es seien a, b und c rationale Zahlen und f sei eine Funktion, für die gelte: $f(a, b) + f(b, c) = (a + b + c) - f(a, c)$. Bestimme dann $f(20, 13)$.
Beachte: $20, 13$ ist keine Dezimalzahl, sondern das Zahlenpaar 20 und 13.

Ein Wunsch der Redaktion

Setze in jedes der 81 kleinen Quadrate eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... 9 so, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jedem gestrichelten 3×3-Quadrat genau eine der neun Zahlen steht und die Summe der Zahlen in jedem Gebiet, in dem mehrere Kästchen verbunden sind, der jeweils angegebenen Zahl entspricht. Ersetze dann jede der 81 Zahlen durch Buchstaben nach der folgenden Vorschrift:



	Zahl								
Zeile	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	N	D	D	I	E	M	I	O	O
2	O	R	A	D	K	N	I	E	T
3	E	N	T	S	H	W	C	A	U
4	N	E	L	H	L	R	I	E	N
5	N	I	R	E	E	E	L	N	S
6	L	K	I	G	H	L	C	Ü	C
7	D	R	O	S	E	F	U	N	E
8	H	G	C	S	E	R	E	L	I
9	N	J	U	E	E	S	R	A	H

Dann erhält man, wenn man zeilenweise liest, einen Wunsch der Monoid-Redaktion.

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 33.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Eine Vermutung über Primzahlzwillinge

Sind p und $p+2$ Primzahlen, so heißt das Paar $(p, p+2)$ ein Primzahlzwilling. Beispiele sind: $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31)$, ...
Es wird vermutet, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, was jedoch bis heute noch nicht bewiesen ist. Darum reizt es auch Amateure nach Serien von Primzahlzwillingen zu fahnden, die möglicherweise unendlich viele Elemente umfassen. So erhielt die MONOID-Redaktion von einem solchen Amateur namens René Peer folgende Vermutung per E-Mail:

> Für alle ungeraden natürlichen Zahlen N ist das Zahlenpaar $6 \cdot \frac{2^N-1}{G} - 1$ und $6 \cdot \frac{2^N-1}{G} + 1$ ein Primzahlzwilling. Hierbei bezeichne G den größten Primfaktor von $2^N - 1$ (im Falle $2^N - 1 = 1$ sei $G = 1$).

Was halten unsere Computer-Fans von dieser Vermutung?

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. März 2013 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 110

Folge mit Primzahlen

Wenn man die Primzahlen nacheinander multipliziert und 1 dazu addiert, also

$$2 + 1 = 3,$$
$$2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311,$$

erhält man zunächst wieder Primzahlen. Aber ab

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$$

scheint es mit der Primzahlerzeugung vorbei zu sein. Stimmt das?
Versuche herauszufinden, ob es natürliche Zahlen $5 < n \leq 100$ gibt, sodass

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

eine Primzahl ist (p_i bezeichne hierbei die i-te Primzahl, $1 \leq i \leq n$).(nach H.F.)

Ergebnisse

Tatsächlich lassen sich genau zwei solche natürliche Zahlen n finden, nämlich $n = 11$ und $n = 75$. Geht das Primzahlenprodukt bis $p_{11} = 31$, erhält man die Primzahl 200 560 490 131 und im Falle $n = 75$ mit $p_{75} = 379$ besteht die sich ergebende Primzahl aus 154 Ziffern.

Auf die erfolgreiche Suche nach solchen n haben sich begeben: Niklas Bockius vom Otto-Schott-Gymnasium in Mainz mit seinem selbsterstellten Programm in der CAS-Software TI-Nspire und Luis Ressel vom Friedrich-List-Gymnasium in Reutlingen mit einem in *Haskell* geschriebenen Programm. Bettina Diller von der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik in München schaffte mit ihrem Programm den Bereich bis $n = 15$, sodass sie zwar den Primzahlfall $n = 11$, nicht aber $n = 75$ entdecken konnte.

Tatsächlich gibt es in der Fachliteratur Arbeiten, die sich mit obiger Fragestellung noch intensiver beschäftigt haben. Darauf hat uns Herr Dr. Wolfgang Modenhauer aus Erfurt hingewiesen. Er schreibt: „In der Arbeit von C. Caldwell und Y. Gallot in der Zeitschrift Math.Comp. 71 (2002), 441–448, mit dem Titel ‚On the primality of $n! \pm 1$ and $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p \pm 1$' wurden die Primzahlen bis $p < 120\,000$ getestet. Dabei wurde festgestellt, dass sich genau für $p = 2$, 3, 5, 7, 11, 31, 379, 1 019, 1 021, 2 657, 3 229, 4 547, 4 787, 11 549, 13 649, 18 523, 23 801, 24 029, 42 209 Primzahlen für $2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p + 1$ ergeben.

Im genannten Artikel wird auch $2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p - 1$ für $p < 120\,000$ untersucht. Es ergeben sich nur für $p = 3$, 5, 11, 13, 41, 89, 317, 337, 991, 1 873, 2 053, 2 377, 4 093, 4 297, 4 583, 6 569, 13 033, 15 877 Primzahlen.“ (E.K.)

Ein Blick hinter die Kulissen
Ein kaum durchschaubarer Rechentrick
von Hartwig Fuchs

Bei einer Monoid-Veranstaltung möchte Doctora CHACHA, oder kurz CHA^2 (so ihr leicht durchschaubares Pseudonym) den Anwesenden mit einigen Rechentricks zeigen, dass Mathematik nicht immer nur ernsthaft sein muss. Einer ihrer Tricks läuft so ab:

	Der Trick	**Zahlenbeispiel**
(1)	Doctora CHA^2 bittet einen Schüler auf die Bühne und steckt ihm einen gefalteten Zettel in die Hemdtasche, auf dessen Innenseite sie vorher eine Zahl x mit $100 < x < 200$ geschrieben hat.	$x = 117$
(2)	Der Schüler soll dann – für die Doctora nicht sichtbar – ebenfalls eine Zahl y mit $200 < y < 1000$ auf einem Zettel notieren.	$y = 669$

(3) Doctora CHA² nennt danach eine Zahl z, die der Schüler zu der von ihm gewählten Zahl y addieren soll.	$z = 882$ $y + z = 1551$
(4) Der Schüler soll nun von seinem Ergebnis $y + z$ die erste Ziffer von links streichen. Zu dieser neuen Zahl u ist dann die gestrichene Zahl zu addieren, er erhält $u + 1$.	$u = 551$ $u + 1 = 552$
(5) Nun soll er das letzte Ergebnis $u + 1$ von seiner anfangs gewählten Zahl y subtrahieren und die so gefundene Zahl mit der Zahl x auf Doctora CHA²s Zettel vergleichen.	$y - (u + 1) = 117$ $y - (u + 1) = x$

Und siehe da: Die letzte Zahl des Schülers und die Zahl von Doctora CHA² stimmen überein! Wie ist das zu erklären?

Die Lösung des Rätsels

Es sei $x = 100 + a \cdot 10 + b$ mit $100 < x < 200$ und $y = c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$ mit $200 < y \leq 999$. Entscheidend für die Erklärung des Tricks ist, dass man weiß, wie die Zahl z festgelegt wird: Es ist $z = 999 - x$.
Also gilt $z = 999 - x = 999 - (100 + a \cdot 10 + b) = 800 + (9 - a) \cdot 10 + (9 - b)$.
Daraus folgt: $y + z = (c + 8) \cdot 100 + (d + 9 - a) \cdot 10 + (e + 9 - b)$.
Die erste Ziffer von $y + z$ ist 1 wegen $c + 8 \geq 10$, sodass $u + 1 = (c + 8 - 10) \cdot 100 + (d + 9 - a) \cdot 10 + (e + 9 - b)$ ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} & y - (u + 1) \\ = \; & (c - c - 8 + 10) \cdot 100 + (d - d - 9 + a) \cdot 10 + (e - e - 9 + b - 1) \\ = \; & 200 + (a - 9) \cdot 10 + (b - 10) = 200 + a \cdot 10 - 90 + b - 10 \\ = \; & 100 + a \cdot 10 + b = x. \end{aligned}$$

Der Kreis des Apollonios

von Ingmar Rubin

Die Menge aller Punkt C, für die das Verhältnis der Entfernungen zu zwei vorgebenen Punkten A und B einen festen Wert hat, bildet einen Kreis, den man als den Kreis des Apollonios* bezeichnet. In der Abbildung ist das Verhältnis der Streckenlängen $|AC|$ und $|BC|$, nämlich $|AC| : |BC| = \frac{a}{b}$, für alle Punkte C auf dem Kreis k konstant.
Konstruiere nun bei gegebenem Abstand $c = |AB|$ und Verhältniszahl $v = \frac{a}{b}$ den Apollonios-Kreis und bestimme den Radius r und den Mittelpunkt M.

* Apollonios von Perge (um 260 v. Chr. – 190 n. Chr.): Berühmter Astronom und Mathematiker der griechischen Antike. Er hat den nach ihm benannten geometrischen Ort bestimmt.

Geometrische Konstruktion des Apollonios-Kreises

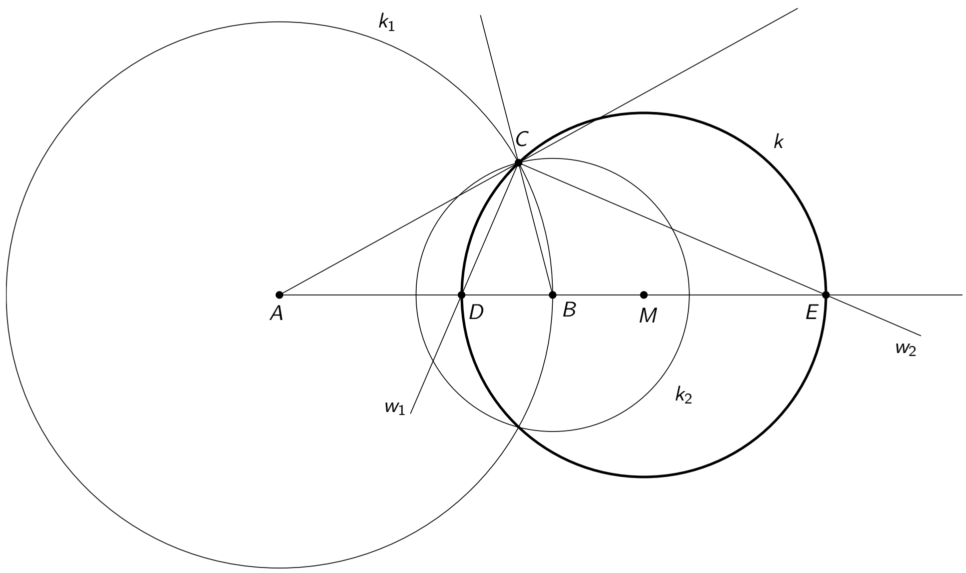


Abbildung 1: geometrische Konstruktion mit Hilfe der Winkelhalbierenden für $v = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

In dieser Konstruktion nutzen wir die Eigenschaft der Winkelhalbierenden:

- Zeichne die Punkte A und B.
- Zeichne einen Strahl durch A und B.
- Zeichne den Kreis k_1 mit Radius $r_1 = |AB|$ um den Punkt A.
- Zeichne den Kreis k_2 mit Radius $r_2 = \frac{a}{b} \cdot |AB|$ um B.
- Bestimme den oberen Schnittpunkt C von k_1 und k_2.
- Zeichne die Strahlen durch die Punkte A und C sowie durch B und C.
- Konstruiere die Winkelhalbierende w_1 des Winkels $\sphericalangle ACB$.
- Bezeichne den Schnittpunkt von w_1 und AB mit D.
- Konstruiere die Winkelhalbierende w_2 des Außenwinkels von $\sphericalangle ACB$ bei C.
- Die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 bilden einen rechten Winkel.
- Bezeichne den Schnittpunkt zwischen w_2 und dem Strahl duch AB mit E.
- Konstruiere den Mittelpunkt M von DE.
- Zeichne den Apollonios-Kreis k mit Radius EM und Mittelpunkt M.

Bestimmung von Radius und Mittelpunkt des Apollonios-Kreises

Wir suchen uns zur Berechnung von Radius und Mittelpunkt den Spezialfall, bei dem der Winkel $\sphericalangle CBA = 90°$ beträgt – siehe Abbildung 2. Es gilt dann:

(1) $a^2 = b^2 - c^2$.

Das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist bekannt:

$$v = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{v}.$$

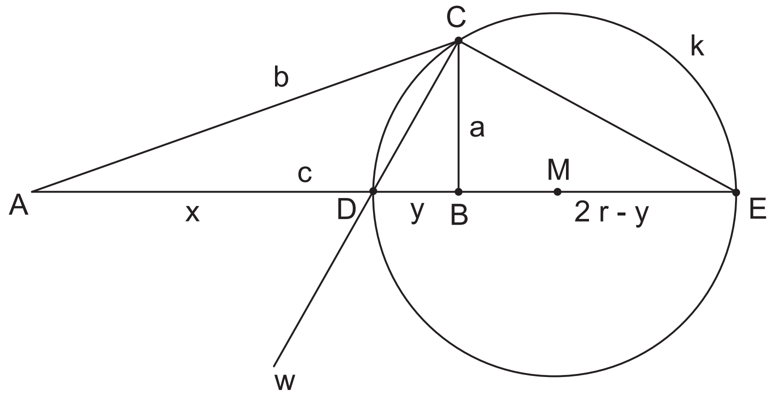


Abbildung 2: Skizze zur Aufgabenstellung

Das Ergebnis setzen wir in (1) ein:

(2) $a^2 = \frac{a^2}{v^2} - c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 \cdot \frac{v^2}{1-v^2}$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle DCE$ gilt der Höhensatz. Mit dem Ergebnis aus (2) erhalten wir:

(3) $a^2 = y \cdot (2\,r - y) = c^2 \cdot \frac{v^2}{1-v^2}$.

Die Winkelhalbierende w von $\sphericalangle ACB$ teilt die Strecke $c = |AB|$ im Verhältnis der anliegenden Seiten:

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{v}.$$

Für die Summe $x + y$ gilt:

$$c = x + y = \frac{y}{v} + y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c \cdot v}{1+v}.$$

Den Wert von y setzen wir in (3) ein und lösen die Gleichung nach r auf:

$$\frac{c \cdot v}{1 + v} \cdot \left(2\,r - \frac{c \cdot v}{1 + v}\right) = c^2 \cdot \frac{v^2}{1 - v^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\,r \cdot \frac{c \cdot v}{1 + v} = \frac{c^2 \cdot v^2}{1 - v^2} + \frac{c^2 \cdot v^2}{(1 + v)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{c \cdot v}{1 - v^2}.$$

Wenn die Punkte A und B auf der x-Achse liegen (A sei dabei der Punkt $(0|0)$), so liegt auch der Mittelpunkt M des Apollonios-Kreises k auf der x-Achse, das heißt $y_M = 0$. Der Apollonios-Kreis geht immer durch den Punkt D auf der Strecke AB, dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$. Die x-Koordinate von M erhalten wir aus:

$$x_M = c - y + r = c - \frac{c \cdot v}{1+v} + \frac{c \cdot v}{1-v^2} = \frac{c}{1-v^2}.$$

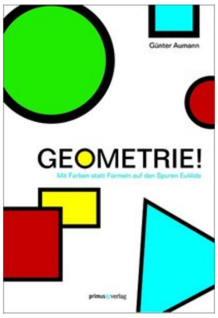
Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Günter Aumann: „Geometrie! Mit Farben statt Formeln auf den Spuren Euklids"

Anknüpfend am berühmtesten Mathematikbuch der Menschheitsgeschichte, den 300 vor Christus geschriebenen Elementen des Euklid, möchte Günter Aumann den Leserinnen und Lesern „die Grundlagen der euklidischen Geometrie allgemein verständlich und trotzdem mathematisch präzise" näherbringen. Um auch eine nichtmathematische Leserschaft anzusprechen verzichtet er dabei vollständig auf Formeln und deren Manipulation und hält auch die Verwendung mathematischer Symbole möglichst gering. Stattdessen vereinfachen die durchgängig in bunt gehaltenen Zeichnungen das Verständnis ungemein: gleich große Winkel werden z.B. in der gleichen Farbe markiert, so dass man nicht lange suchen muss, was übereinstimmt. Auch wenn von Leserinnen und Lesern keine mathematischen Vorkenntnisse erwarten werden, die über den Lehrstoff der Mittelstufengeometrie hinausgehen, wird das Buch vor allem diejenigen Menschen ansprechen, die mathematischen Gedankengängen und logischem Schließen gegenüber nicht abgeneigt sind.

Fazit: Begeistert werden vor allem diejenigen sein, die – wie der Autor auch – bedauern, dass die Schulmathematik sich immer mehr in Richtung der Anwendung algebraischer Kalküle und weg von logischem geometrischem Schlussfolgern entwickelt.

Gesamtbeurteilung: gut ☺☺



Angaben zum Buch:
Aumann, Günter: Geometrie! Mit Farben statt Formeln auf den Spuren Euklids, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 2011, ISBN 978-3-89678-711-8, geb. 152 Seiten, 29,90 €.

Art des Buches:	Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken."

David Hilbert
1862–1943
deutscher Mathematiker

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 111

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Mathis Kaninchen

Mathis hat seine fünf Kaninchen Allo (A), Bull (B), Cato (C), Dull (D) und Ella (E) so in den sechs Abteilen seines dreistöckigen Hasenstalls (vergleiche Skizze) untergebracht, dass gilt:

(1) A rechts neben E

(2) A unmittelbar über C

(3) B links neben D

(4) D ein Stockwerk tiefer als C

Welches Abteil bleibt leer? (H.F.)

Lösung:

E	*A*
	C
B	*D*

Aus (2) und (4) folgt: A ist im dritten Stockwerk. Wegen (1) ist daher A im dritten Stockwerk rechts und E links daneben. C ist im zweiten Stockwerk unter A wegen (2) und nach (4) ist D im ersten Stockwerk und zwar rechts neben B wegen (3). Folglich bleibt das linke Abteil im zweiten Stockwerk leer.

II. Helga und Hildegard nehmen ab

Helga will 3% ihres Körpergewichts abnehmen. Hildegard wiegt 5% mehr als Helga. Sie beschließt 8% ihres Gewichts zu verlieren. Darauf Helga: „Dann sind wir anschließend gleich schwer!“

a) Zeige, dass Helga nicht recht hat!

b) Beide erreichen ihr jeweiliges Ziel. Eine Kontrolle zeigt, dass Hildegard jetzt 240g leichter als Helga ist. Wieviel wog Helga am Anfang? (WJB)

Lösung:

a) Nenne Helgas Anfangsgewicht x. Dann war Hildegards Anfangsgewicht $y = 1{,}05x$. Die Endgewichte waren also für Helga $x_e = 0{,}97x$ und für Hildegard $y_e = 0{,}92y = 0{,}92 \cdot 1{,}05x = 0{,}966x \neq x_e$.

b) $x_e - y_e = 240\text{g}$ bedeutet $(0{,}97 - 0{,}966)x = 240\text{g}$. Dies nach x freigestellt liefert $x = \frac{240\text{g}}{0{,}004} = 60\text{kg}$.

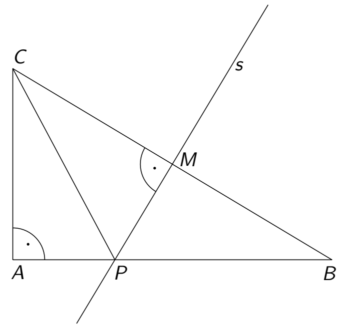
III. Dreieckszerlegung

a) Jedes rechtwinklige, nicht gleichschenklige Dreieck kann man in ein gleichschenkliges und ein rechtwinkliges Dreieck zerlegen. Begründe oder widerlege diese Behauptung!

b) Welche Zerlegungsaussage gilt für ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck? (H.F.)

Lösung:

a) Im Dreieck $\triangle ABC$ sei M der Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{BC}$. Dann ist die Mittelsenkrechte s von $\overline{BC}$ durch M die Symmetrieachse der Strecke $\overline{BC}$. Sei $\overline{AB}$ die längere der beiden Katheten. Dann schneidet s diese Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt $P \neq A$, da ja $\overline{AC} < \overline{AB}$ vorausgesetzt wurde. Dann sind die Strecken $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ gleich lang (denn P liegt auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$). Das Dreieck $\triangle PBC$ ist gleichschenklig und das Dreieck $\triangle PCA$ ist rechtwinklig.



b) Wenn im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gleich lang sind, dann ist s als Mittellot/Höhe der Seite $\overline{BC}$ die Symmetrieachse des Dreiecks, also $s = MA$. Daher zerlegt s das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.

IV. Walters Wanduhr

Walter besitzt eine alte Wanduhr. Diese schlägt zur Viertelstunde einmal, zur halben Stunde zweimal, zur Dreiviertelstunde dreimal und zur vollen Stunde viermal und anschließend die Stundenzahl, also zum Beispiel um 7 Uhr $7 + 4 = 11$-mal und um 16 Uhr, also 4 Uhr nachmittag $4 + 4 = 8$-mal. Die Uhr geht pro Tag eine Stunde zu schnell. Walter stellt um 8:37 Uhr die genaue Zeit ein. Wie viele Schläge macht die Uhr innerhalb der nächsten zehn Stunden? (WJB)

Lösung:

In zehn Stunden geht die Uhr um $\frac{10}{24}$ Stunden vor. $\frac{10}{24}$ Stunden $= \frac{600}{24}$ Minuten $= 25$ Minuten. Sie zeigt dann also nicht 18:37 Uhr, sondern 19:02 Uhr an. Sie hat also 3-mal für 8:45 Uhr, 4-mal für 9:00 Uhr und $10 \cdot (1+2+3+4)$-mal in den zehn Stunden nach 9 Uhr bis 19 Uhr, dazu $9+10+11+12+1+2+3+4+5+6+7 = 70$-mal für die vollen Stunden, insgesamt also $3+4+10 \cdot 10+70 = 177$-mal geschlagen.

V. Viergliedrige Summendarstellung

Stelle

a) die Zahl 2010

b) die Zahl 2011

c) die Zahl 2012

als eine Summe vier unmittelbar aufeinander folgender, positiver, ganzer Zahlen dar! (H.F.)

Lösung:
Die Summe vier unmittelbar aufeinander folgender, positiver, ganzer Zahlen ist $m + (m+1) + (m+2) + (m+3) = 4m + 6$, wobei $m \geq 1$ eine ganze Zahl ist.

a) $2010 = 4m + 6$ liefert $4m = 2004$, also $m = 501$. Die gesuchte Darstellung ist also $501 + 502 + 503 + 504 = 2010$.

b) und c) führen auf einen Widerspruch, da 2005 bzw. 2006 nicht durch 4 teilbar sind, das heißt es gibt keine solche Darstellung.

VI. Vielfaches von 9

Eine fünfziffrige natürliche Zahl n habe die Zifferndarstellung: $n = yy3x3$ mit Ziffern x und y, $x \neq y$, $y \neq 0$. Bestimme x und y so, dass n ein Vielfaches von 9 ist; bestimme dann auch die Zahlen n. (H.F.)

Lösung:
Ist die Quersumme n ein Vielfaches von 9, so ist n selbst ebenfalls ein Vielfaches von n.
Sei nun die Quersumme von n ein Vielfaches von 9. Es gilt dann: $x + 2y + 6 = v \cdot 9$ mit einer positiven ganzen Zahl v.
Wegen $x \leq 9$ und $y \leq 9$ gilt $x + 2y + 6 \leq 9 + 18 + 6 = 33$. Mithin ist $v \cdot 9 \leq 33$ und daher $v \in \{1, 2, 3\}$. Damit ist $x + 2y = 3$ oder $x + 2y = 12$ oder $x + 2y = 21$. Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich die folgende Tabelle:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	–	–	8	6	–	2	0 und 9	–	5	3
Bemerkung	$y \neq 0$	$x \neq y$			$x \neq y$			$x \neq y$		

Die sieben Zahlen 22383, 33363, 55323, 66303, 66393, 88353 und 99333 erfüllen also die Bedingungen in der Aufgabe.

VII. Teilbare Zahlen

Mathis behauptet: „Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen, mit der Eigenschaft: Teilt die natürliche Zahl t die natürliche Zahl n, so teilt auch die Zahl $t - 1$ die Zahl $n - 1$.“ Hat Mathis Recht? (H.F.)
Hinweis: Mathis denkt dabei auch an Quadratzahlen.

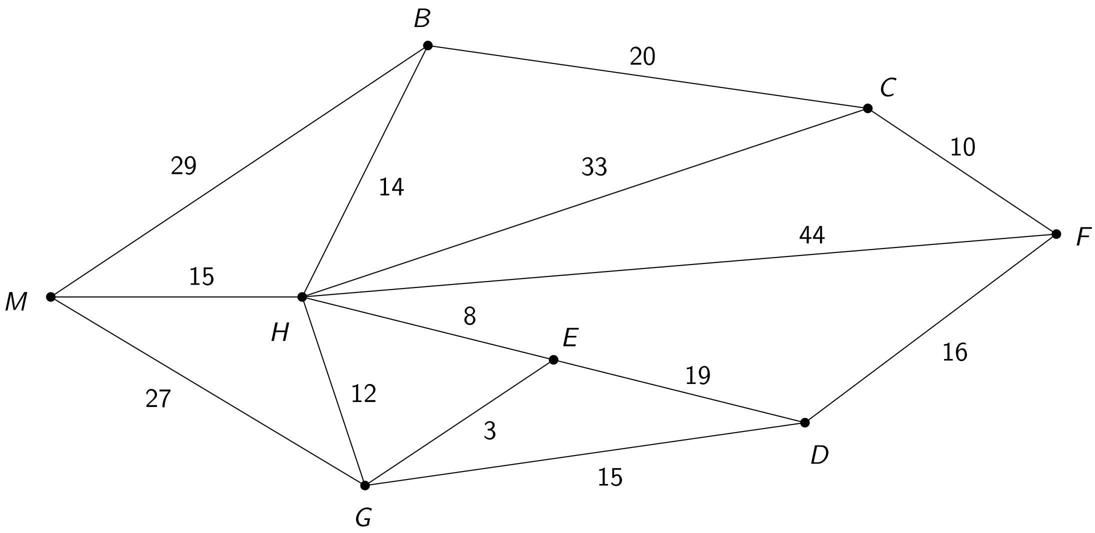
Lösung:
Es sei n eine Quadratzahl – etwa $n = m^2$ – dann gilt: m ist ein Teiler von m^2. Nach der Binomischen Formel $m^2 - 1 = (m-1) \cdot (m+1)$ ist $m - 1$ ein Teiler von $m^2 - 1$. Da es unendlich viele Quadratzahlen gibt, trifft Mathis Behauptung zu.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

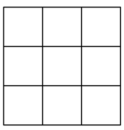
I: Schnellster Wanderweg

Mathis möchte von Mainz (M) nach Finthen (F) wandern, wobei er nur Feldwege benutzen will, die in seiner Wanderkarte (siehe Graphik) samt der jeweils benötigten Wanderzeit (in Minuten) eingezeichnet sind – die von M und F verschiedenen Buchstaben geben jeweils Wegkreuzungen an.



Auf welchem Weg kommt er am schnellsten ans Ziel? (H.F.)

II: Anti-magisches Quadrat



Die Zahlen 1, 2, ..., 9 sind so in die nebenstehenden Kästchen einzutragen, dass die Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen sämtlich verschieden sind. (H.F.)

III: Jahreszahlen-Knobelei

Ersetze die Buchstaben jeweils durch Ziffern so, dass korrekte Additionen entstehen. Dabei dürfen verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden.

(a)
$$\begin{array}{rcccc} & P & Q & R & S \\ & & P & Q & R \\ & & & P & Q \\ + & & & & P \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcccc} & T & U & V & W \\ & & U & V & W \\ & & & V & W \\ + & & & & W \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

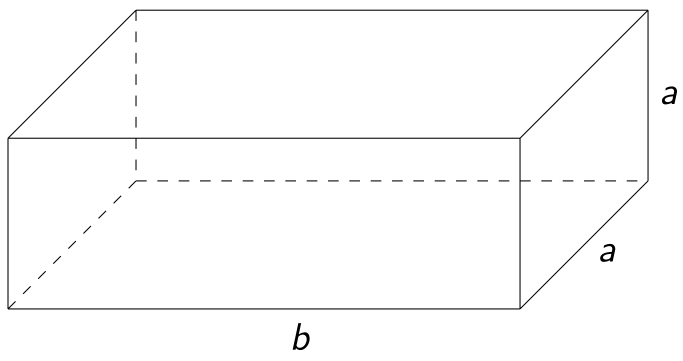
(H.F.)

IV: Ein Bildungsgesetz für Quadratzahlen

Die Zahlen z_n einer Folge sind nach der Regel $z_n = \frac{4}{3} \cdot 10^n - \frac{1}{3}$ gebildet, also $z_1 = 13$, $z_2 = 133$, $z_3 = 1333$ usw. Schreibe nun mindestens für $n = 1, 2, 3, \dots, 6$ die Zahlen z_n^2 hin. Was fällt Dir an diesen Quadratzahlen auf? Beschreibe die Zahl z_{2012}^2. Gib eine Bildungsregel für die Zahl z_n^2 an! (H.F.)

V: Fehlerhafte Bauanleitung

Peter erhält von seinem Ausbilder eine Fertigungsskizze eines Quader, der ein Volumen $V = 150\text{cm}^3$ haben soll. Leider fehlen die Maßangaben der Seitenlängen a und b.



Schafft es Peter, den Quader trotzdem anzufertigen? Die Seitenlängen sollen dabei ganzzahlig (in cm) sein. (AK)

VI: Die richtige Mischung

Der Wetterbericht kündigt Frost an und Herr Ford befürchtet, dass sein Scheibenwasser einfrieren könnte. Es sind 8 Liter Wasser gemischt mit 4 Liter Frostschutzmittel in dem Behälter seines Wagens, aber für diese Nacht sollten es 50% Frostschutzmittel sein. Also beschließt Herr Ford, einen Teil der Mischung durch reines Frostschutzmittel zu ersetzen.

a) Wie viel Flüssigkeit muss Herr Ford durch reines Frostschutzmittel ersetzen, um eine Mischung mit 50% zu erhalten?

b) Herr Benz hört die Warnung ebenfalls, aber er hat nur eine Ersatzflasche, die eine Mischung von 80% Frostschutzmittel und 20% Wasser enthält. Wie viel Flüssigkeit muss Herr Benz ersetzen, wenn sein Behälter für das Scheibenwasser 9 Liter Wasser gemischt mit 6 Liter Frostschutzmittel enthält und er ebenfalls eine 50%-Mischung haben möchte?

Hinweis: Gehe davon aus, dass der Behälter jeweils komplett gefüllt ist und er auch anschließend komplett gefüllt sein soll. (CE)

VII: Dreieckszerlegung

Zerlege ein gleichschenkliges Dreieck mit 30°-Winkeln an der Basis in fünf ähnliche Dreiecke – also gleichschenklige Dreiecke mit 30°-Winkeln an der Basis. (H.F.)

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

Aufgabe 1057: Wo liegt der Fehler?

Den Mathematiker Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898) kennen heute nur noch wenige, aber als Kinderbuchverfasser Lewis Carroll so wunderbarer Geschichten wie „Alice im Wunderland“ und als Erfinder schöner mathematischer Puzzles und logischer Paradoxa ist er heute noch berühmt.

Eines seiner mathematischen Rätsel in nicht wortgetreuer Übersetzung ist dieses:

> Es seien $x = 1$ und $y = 1$. Dann gilt: $2(x^2 - y^2) = 0$ und $5(x - y) = 0$. Also ist $2(x^2 - y^2) = 5(x - y)$ oder $2(x + y)(x - y) = 5(x - y)$. Vergleicht man nun die Faktoren vor $(x - y)$, so ergibt sich: $2(x + y) = 5$, sodass $2 \cdot 2 = 5$ wegen $x = y = 1$ gilt. Wo liegt der Fehler? (gefunden: H.F.)

Aufgabe 1058: Strom sparen

Herrn Ampers Stromrechnung für den Oktober 2010 bis September 2011 betrug $888,98$ Euro. Obwohl er im darauf folgenden Jahr 4,3% weniger Elektrizität verbraucht hat, beträgt seine neue Rechnung $922,75$ Euro, also 3,8% mehr. Um wieviel Prozent ist der Strompreis also gestiegen? (WJB)

Aufgabe 1059: Teilbarkeit von Folgengliedern

Die Folge a_n sei gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n^5 + 11a_n + 10$. Gibt es keine, endlich oder unendlich viele Folgenglieder, die durch 3, 4, 5 beziehungsweise 7 teilbar sind? (Robin Fritsch, Gymnasium Lehrte, Klasse 11)

Aufgabe 1060: Christbaumkugeln

In einer Schale liegen 21 Christbaumkugeln, die entweder rot, blau oder grün gefärbt sind. Es sei bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, bei Ziehung zweier Kugeln aus der Schale zwei gleichfarbige zu erhalten, $\frac{3}{10}$ beträgt.

Ermittle alle möglichen Anzahlen von roten, blauen beziehungsweise grünen Kugeln, die diese Bedingungen erfüllen.

(Robin Fritsch, Gymnasium Lehrte, Klasse 11)

Aufgabe 1061: Quadrat im Dreieck

Konstruiere in ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ ein Quadrat $EFGH$ so, dass die Seite $\overline{EF}$ des Quadrats auf der Seite $\overline{AB}$ und die Endpunkte G und H auf den Seiten $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$ des Dreieck liegen. (H.F.)

Aufgabe 1062: Zahlenknobelei

Ersetze in der nebenstehenden Rechnung jeden Buchstaben g durch eine gerade Ziffer und jeden Buchstaben u durch eine ungerade Ziffer, sodass eine richtige Multiplikation entsteht. (H.F.)

$$\begin{array}{r} g\,g\,u \cdot u\,u \\ \hline g\,u\,g\,u \\ g\,u\,u \\ \hline u\,u\,u\,u\,u \end{array}$$

Aufgabe 1063: Schnittpunkt dreier Tangentialebenen

Bestimme den Schnittpunkt der Tangentialebenen an der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ in den Punkten $(1|0|-1)$, $(1|-\frac{1}{2}\sqrt{3}|\frac{1}{2})$ und $(1|\frac{1}{2}\sqrt{3}|\frac{1}{2})$.

(Peter van Dongen, Universität Mainz)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 111

Klassen 9–13

Aufgabe 1050: Celsius und Fahrenheit

Im Physikunterricht werden die Temperatureinheiten Celsius und Fahrenheit durchgenommen. „In Amerika misst man die Temperatur in Fahrenheit. Um eine Celsiustemperatur in Fahrenheit umzurechnen, muss man den Celsiuswert mit $\frac{9}{5}$ multiplizieren und zu dem Produkt 32 addieren", erklärt der Lehrer. „Rechnet bitte die folgenden Werte um!" Nach einiger Zeit meldet sich Anton: „Aber die Umrechnung ist doch ganz einfach", meint er, „man hat eine Temperatur in Fahrenheit, beispielsweise diese", Anton schreibt eine positive dreistellige Zahl an die Tafel, „dann streicht man nur die erste Ziffer und hängt sie wieder an das Ende der Zahl, und schon hat man die Temperatur in Celsius." „Du Scherzbold", antwortet der Lehrer, „ich fürchte, das ist die einzige dreistellige Zahl, bei der deine Methode funktioniert."

Welche Zahl schrieb Anton an die Tafel? Gibt es weitere positive dreistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft oder hat der Lehrer Recht? (Christoph Sievert)

Lösung:

Für die Umrechnung von °C in °F gilt:

$$°\mathrm{F} = 1{,}8°\mathrm{C} + 32.$$

Die Temperatur in °F sei: $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, wobei a, b, c Ziffern von 0 bis 9 sind und $a \neq 0$ ist; dann hat die Temperatur in °C den Wert: $100 \cdot b + 10 \cdot c + a$. Nun gilt:

$$100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 1{,}8(100 \cdot b + 10 \cdot c + a) + 32.$$

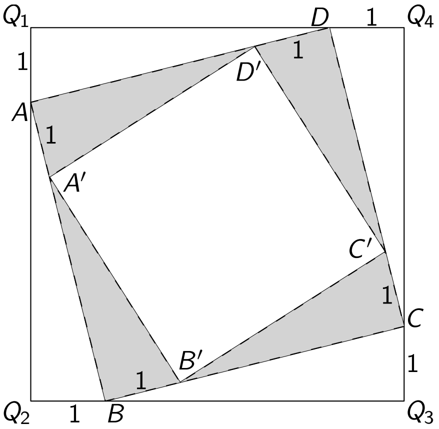
Und damit folgt:

$$c = \frac{98{,}2 \cdot a - 170 \cdot b - 32}{17}.$$

Also muss $98{,}2 \cdot a$ eine natürliche Zahl sein, was nur für $a = 5$ möglich ist. Es folgt $c = \frac{459-170\cdot b}{17} = 27 - 10 \cdot b$. Nur für $b = 2$ erhält man nun eine einstellige

Ziffer c, nämlich $c = 7$. Anton schrieb also die Zahl 527 an die Tafel. Aus der Rechnung ergibt sich, dass keine weitere Zahl mit dieser Eigenschaft existiert.

Aufgabe 1051: Viereck im Viereck im Viereck



Das Viereck $Q_1Q_2Q_3Q_4$ sei ein Quadrat Q der Seitenlänge $n+1$, mit n eine natürliche Zahl ≥ 2. Die Punkte A, B, C und D liegen so auf den Seiten von Q, dass ihr Abstand 1 von der jeweiligen nächstgelegenen Ecke von Q beträgt. Auf den Seiten des Vierecks $V = ABCD$ seien Punkte A', B', C' und D' so festgelegt, dass ihr Abstand 1 von der nächstgelegenen Ecke von V ist. Welche Fläche hat die schraffierte Figur? (H.F.)

Lösung:

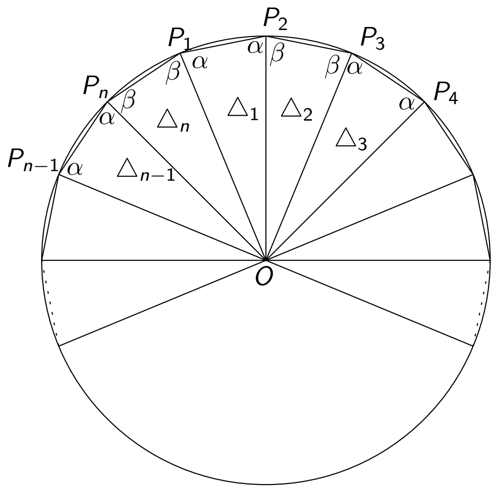
Zunächst zeigt man: Die Dreiecke $\triangle Q_1AD$, $\triangle Q_2BA$, $\triangle Q_3CB$ und $\triangle Q_4DC$ sind rechtwinklig und kongruent.Das Viereck $V = ABCD$ ist nach Konstruktion drehsymmetrisch mit dem Mittelpunkt von Q als Zentrum und dem Drehwinkel 90°. Damit sind seine Innenwinkel gleich groß und aus $360° : 4 = 90°$ folgt: Die Innenwinkel sind 90° groß. Da außerdem die Seiten von V gleich lang sind, ist V ein Quadrat. Für die vier oben genannten Dreiecke gilt dann: Sie stimmen überein in allen drei Seitenlängen und den von den Katheten gebildeten 90°-Winkel.

Daraus folgt: Die Fläche F der schraffierten Figur ist $F = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1(\sqrt{n^2+1} - 1) = 2(\sqrt{n^2+1} - 1)$.

Aufgabe 1052: Ein Vieleck mit gerader Eckenanzahl

Ein n-Eck, dessen Eckpunkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ auf einem Kreis liegen, habe lauter gleich große Innenwinkel δ, jedoch sei das n-Eck nicht regelmäßig. Begründe, dass das n-Eck geradzahlig viele Ecken hat. (H.F.)

Lösung:



Verbindet man die Ecken P_1, P_2, ..., P_n des n-Ecks mit dem Mittelpunkt O des Kreises, dann erhält man n gleichschenklige Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, ..., $\triangle_n$.

Für $\triangle_1$ gilt:

(1) $\sphericalangle OP_1P_2 = \sphericalangle P_1P_2O =: \alpha$.

Für $\triangle_2$ gilt:

(2) $\sphericalangle OP_2P_3 = \sphericalangle P_2P_3O =: \beta$.

Der Innenwinkel des n-Ecks bei P_2 ist $\delta = \alpha + \beta$ und weil nun der Innenwinkel des n-Ecks bei P_3 ebenfalls δ ist, folgt

(3) $\sphericalangle OP_3P_4 = \sphericalangle P_3P_4O = \alpha$

Ganz entsprechend ergibt sich

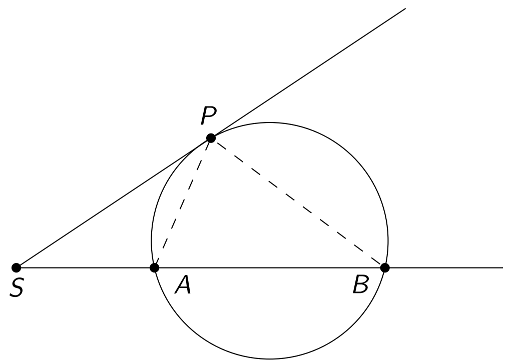
(4) $\sphericalangle OP_4P_5 = \sphericalangle P_4P_5O = \beta$ und so weiter.

Daher gilt für die Dreiecke: $\triangle_1$, $\triangle_3$, $\triangle_5$, ... haben die Basiswinkel α und $\triangle_2$, $\triangle_4$, $\triangle_6$, ... haben die Basiswinkel β.
Weil nun $\triangle_n$ die Basiswinkel β haben muss (vergleiche mit der Abbildung), muss n eine gerade Zahl sein.

Aufgabe 1053: Punkt gesucht

Auf einem von S ausgehenden Strahl seien in dieser Reihenfolge (von S aus) zwei Punkte A und B gegeben. Auf einem weiteren Strahl, der ebenfalls von S ausgeht, befindet sich ein beliebiger Punkt P, wobei $\sphericalangle ASP < 180°$ ist. Nun berechne man für den Punkt P, für den der Winkel $\sphericalangle APB$ maximal ist, die Strecke $|SP|$ in Abhängigkeit von $|SA|$ und $|SB|$. (Robin Fritsch)
Hinweis: Betrachte den Kreis durch P, A und B.

Lösung:
Wir betrachten den Kreis k durch A und B, der den Strahl SP tangiert und beweisen, dass der Berührpunkt dieses Kreises mit SP genau der gesuchte Punkt P ist. Im Zusammenhang mit der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes ist bekannt: Liegt der Punkt X außerhalb des Kreises k, so ist der Winkel $\sphericalangle AXB$ kleiner als im Fall, dass X auf dem Kreis liegt.



Nun liegt nach Konstruktion aber nur ein Punkt – nämlich der Berührpunkt – auf dem Kreis und alle anderen außerhalb. Also ist für diesen Berührpunkt der Winkel $\sphericalangle APB$ am größten und er ist damit der gesuchte Punkt P. Nach dem Sehnen-Tangenten-Satz ist nun aber $|SP|^2 = |SA| \cdot |SB|$, also $|SP| = \sqrt{|SA| \cdot |SB|}$.

Aufgabe 1054: Eine etwas harte Nuss

393	399	407	401	398
406	392	395	397	385
394	387	396	384	400
405	386	383	390	404
388	402	389	403	391

Die 25 Zahlen 383, 384, 385, ..., 407 seien in einem quadratischen Schema (Matrix) so wie nebenstehend angeordnet. Es sollen nun fünf dieser Zahlen, von denen keine zwei in einer Zeile oder in einer Spalte vorkommen und deren Summe ≤ 2012 ist, so ausgewählt werden, dass die kleinste von ihnen möglichst groß ist. Wie heißt die kleinste dieser Zahlen? (H.F.)

Lösung:
Die kleinste der zu wählenden Zahlen sei k. Für die gesuchte Summe S gilt dann: $2012 \geq S \geq k + (k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4) = 5k + 10$, woraus folgt, dass $k \leq 400$ sein muss.
Es sei $k = 400$ (vergleiche die fünfte Spalte). Dann ist 404 nicht mehr wählbar. Wenn man deshalb in der vierten Zeile die einzig mögliche Zahl > 400 – nämlich 405 – wählt, dann gibt es in der zweiten Zeile keine wählbare Zahl, da 406 in der gleichen Spalte wie 405 steht.
Es sei $k = 399$. Dann sind 407, 401 und 402 nicht wählbar. Von den fünf verbleibenden Zahlen > 399 kann man aus den Spaltenpaaren 406, 405 und 400, 404 jeweils nur eine Zahl wählen – es sind daher insgesamt nur drei Zahlen wählbar.
Den Fall $k = 398$ kann man mit ganz ähnlichen Überlegungen wie den Fall $k = 399$ ausschließen.
Wir setzen $k = 397$. Dann entfallen in der Matrix alle Zahlen ≤ 396 sowie 401, 403 und 406 als Wahlkandidaten. Somit bleiben nur folgende Zahlen übrig:

$$\begin{array}{ccccc}
* & 399 & 407 & * & 398 \\
* & * & * & 397 & * \\
* & * & * & * & 400 \\
405 & * & * & * & 404 \\
* & 402 & * & * & *
\end{array}$$

In der ersten Spalte ist also 405 zu wählen; 404 entfällt dann. Aus der ersten Zeile nimmt man 407, während 399 und 398 ausscheiden. Somit bleiben 402 in der zweiten Spalte und 400 in der dritten Zeile. Da die Summe der gewählten Zahlen $397 + 400 + 402 + 405 + 407 = 2011$ und damit ≤ 2012 ist, folgt: Die gesuchte Zahl ist $k = 397$; die anderen vier Zahlen sind 400, 402, 405 und 407.

Aufgabe 1055: Erbkrankheit

Eine bestimmte Erbkrankheit kommt durch die Mutation eines Gens zustande, das jeder Mensch in doppelter Ausführung trägt. Die Krankheit tritt genau dann auf, wenn beide Kopien des Gens mutiert sind. Kinder erben von jedem Elternteil zufällig eines der beiden Gene.
In einer gewissen Population hat ein Anteil von x zwei gesunde Gene, ein Anteil von y ein gesundes und ein mutiertes Gen und ein Anteil von $z = 1 - x - y$ zwei mutierte Gene. Wie entwickelt sich unter der Annahme, dass Ehepartner zufällig ausgesucht werden und die Kinderanzahl konstant ist, die Erbkrankheit in der Population?
Wie entwickelt sich die Erbkrankheit in der Population, wenn von der Krankheit befallene Personen keine Nachkommen haben können? (WJB)

Lösung:
1. Fall:
Das von einem der Eltern an ein Kind weitergegebene Gen ist normal mit (bedingter) Wahrscheinlichkeit 1, falls das Elternteil zwei normale Gene besitzt, $\frac{1}{2}$, wenn es ein normales und ein mutiertes Gen besitzt, und 0, wenn seine Gene beide

mutiert sind. Insgesamt ist also die Wahrscheinlichkeit für die Weitergabe eines normalen Gens $a_0 = x_0 \cdot 1 + y_0 \cdot \frac{1}{2} + z_0 \cdot 0 = x_0 + \frac{y_0}{2}$ und die für ein mutiertes Gen $b_0 = 1 - a_0 = \frac{y_0}{2} + z_0$ mit $(x_0, y_0, z_0) = (x, y, z)$.
Wegen der Unabhängigkeit der Auswahl der beiden Elternteile sind die Wahrscheinlichkeiten (Anteile) in der nächsten Generation:

$$x_1 = a_0^2 = (x_0 + \tfrac{y_0}{2})^2, y_1 = 2a_0b_0 = 2(x_0 + \tfrac{y_0}{2})(\tfrac{y_0}{2} + z_0), z_1 = b_0^2 = (\tfrac{y_0}{2} + z_0)^2.$$

Nun ist $a_1 = x_1 + \frac{y_1}{2} = a_0^2 + a_0b_0 = a_0(a_0 + b_0) = a_0$, d.h. für die nächste Generation ergibt sich:

$$x_2 = a_1^2 = a_0^2 = x_1,\ y_2 = 2a_1b_1 = 2a_0b_0 = y_1,\ z_2 = b_1^2 = b_0^2 = z_1.$$

Die Anteile ändern sich also nicht mehr.

2. Fall:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person als Elternteil gewählt werden kann, d.h. nicht krank ist, ist $1 - z_0 = x_0 + y_0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sie dann ein normales Gen weitergibt, ist $a_0 = (x_0 + \frac{y_0}{2}) : (1 - z_0)$, die für ein mutiertes Gen $b_0 = \frac{y_0}{2} : (1 - z_0)$. Damit erhalten wir nun

$$x_1 = a_0^2 = (x_0 + \tfrac{y_0}{2})^2 : (1 - z_0)^2,\ y_1 = 2a_0b_0 = 2(x_0 + \tfrac{y_0}{2})(\tfrac{y_0}{2}) : (1 - z_0)^2,$$
$$z_1 = b_0^2 = (\tfrac{y_0}{2})^2 : (1 - z_0)^2.$$

Der Anteil mutierter Gene ist dann $\frac{y_1}{2} + z_1 = a_0b_0 + b_0^2 = b_0 = \frac{y_0}{2} : (1 - z_0)$. Der Vergleich mit dem ursprünglichen Anteil $\frac{y_0}{2} + z_0$ ergibt:

$$y_1 + 2z_1 - (y_0 + 2z_0) = \tfrac{y_0}{1 - z_0} - (y_0 + 2z_0) = \tfrac{1}{1 - z_0}(y_0 - (y_0 + 2z_0)(1 - z_0)) =$$
$$-\tfrac{z_0}{1 - z_0}(2x_0 + y_0) < 0.$$

Der Anteil mutierter Gene fällt also in der nächsten Generation.
Bemerkung: Man kann darüber hinaus sogar zeigen, dass dieser Anteil auch im Folgenden von Generation zu Generation fällt und gegen Null strebt, wenn die Gerenationszahl gegen Unendlich geht.

Aufgabe 1056: Niemals eine Primzahl

Zeige, dass $1 + 4p^4$ niemals eine Primzahl ist, wenn p eine ganze Zahl > 1 ist.
(H.F.)

Lösung:
Mit quadratischer Ergänzung gelangt man schnell zur Lösung: $1 + 4p^4 = 1 + 4p^2 + 4p^4 - 4p^2 = (1 + 2p^2)^2 - 4p^2 = [(1 + 2p^2) + 2p][(1 + 2p^2) - 2p]$. Wegen $p > 1$ sind beide Klammern ≥ 2, haben wir eine echte Faktorisierung von $1 + 4p^4$ gefunden und es gilt somit die Behauptung.

Wer war's?

von Wolfgang J. Bühler

Die Mutter des Gesuchten, eine Volksschullehrerin, machte ihn schon als Fünfjährigen mit einfachen Brüchen bekannt, indem sie ihm am Klavier unterschiedlich lange Noten vorspielte. Sein Vater führte ihn dann ernsthaft in die Mathematik ein. Mit neun Jahren wurde der Gesuchte Schüler des Gymnasiums in Simbirsk (heute Uljanowsk). Es war Klassenbester und hatte ein besonderes Interesse an der Mathematik. Er liebte es, seinen Klassenkameraden etwas ausgefallene, zum Teil von ihm selbst erfundene Aufgaben zu stellen, darunter auch diese Aufgabe:

> Es gilt $65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25$ und $105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25$. Finde die allgemeine Regel für das Quadrieren ungerader Vielfacher von 5 und zeige ihre Gültigkeit. (Die Lösung dieser Aufgabe findest Du am Ende dieses Artikels.)

Bekannt wurde er später als Begründer und Führer eines bedeutenden Reiches. Sein Interesse an der Mathematik bestand Zeit seines Lebens. Er nahm großen Einfluss auf die Lehrpläne in der Mathematik und auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts in seinem Land.

Wer war's?

Des Rätsels Lösung

Der Gesuchte war Wladimir Iljitsch Uljanow, geboren am 22.04.1870 in Simbirsk. Sein Vater schrieb eine Dissertation über die Bahnbestimmung eines Kometen. Er lehrte danach Mathematik und Physik am Adelsinstitut in Pensa und am Knaben-Gymnasium in Nischni-Nowgorod. Als Volksschulinspektor für das Simbirsker Gouvernement besuchte er oft tschuwaschische* Schulen und diskutierte die Mängel des dortigen Mathematikunterrichts mit dem befreundeten Mathematiklehrer Jakowlew. Diese Diskussionen über die Verbesserungen des Arithmetikunterrichts und die gezielte Förderung durch den Vater führten dazu, dass sich Wladimir, sein älterer Bruder Alexander und die jüngere Schwester Anna leidenschaftlich mit der Mathematik beschäftigten. Wladimir war nicht nur in Mathematik, sondern auch in allen anderen Fächern ausgezeichnet. In seinem Abschlusszeugnis 1887 hatte er in allen Fächern (darunter vier(!) Fremdsprachen) die Bestnote 5, obwohl sein Bruder drei Tage nach Beginn der Abschlussprüfungen wegen Beteiligung an einem Attentat auf den Zaren hingerichtet wurde.

Schon kurz nach Beginn seines Studiums an der Universität in Kasan wurde Uljanow wegen Beteiligung an einem Studentenprotest von der Universität verwiesen. In der Folgezeit lebte er vom Vermögen seiner Familie, beschäftigte sich mit Literatur über politische und ökonomische Theorien und studierte Jura, ohne an einer

* Tschuwaschien ist heute eine autonome Republik in Russland.

Universität eingeschrieben zu sein. Um 1890 begann er mit politischer Agitation und war mehrmals gezwungen, sein Land zu verlassen. Er verwendete mehrere Decknamen, seit circa 1900 insbesondere den Namen Lenin. Nach der missglückten russischen Revolution von 1905 floh er zunächst nach Finnland und hielt sich danach in mehreren westeuropäischen Ländern auf. 1912 gründete er die Prawda (Wahrheit), die später zur wichtigsten Zeitung der Sowjetunion wurde. Aus dieser Zeit stammt auch seine Schrift „Der Imperialismus als höchstes Stadium des Kapitalismus", in der die ökonomische Theorie von Karl Marx** weiterentwickelt wurde. 1917 gelangte Lenin mit deutscher Unterstützung wieder nach Russland, wo er sich an die Spitze der Revolution setzte und zum Gründer und Herrscher der Union der Sozialistischen Sowjet-Republiken (UdSSR) wurde. Als Staatschef reformierte Lenin das Schul- und Bildungswesen, z.B. mit verpflichtenden Kursen für Analphabeten. Unter seiner Herrschaft begann der Terror, den nach seinem Tod am 21.01.1924 die Partei unter Stalin noch härter weiterführte.

Lösung der Aufgabe

Aus $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ folgt $a^2 = (a-b)(a+b) + b^2$. Setzen wir $a = (2n+1) \cdot 5 = n \cdot 10 + 5$ und $b = 5$, so folgt $((2n+1) \cdot 5)^2 = (10n+5)^2 = 10n \cdot 10(n+1) + 25 = n(n+1) \cdot 100 + 25$.

Mathematische Entdeckungen

Zerlegung einer Ebene in Gebiete

In wieviele Gebiete kann eine Ebene durch n sich überschneidende gleich große Quadrate höchstens zerlegt werden? (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. März 2013 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 110

In Heft 110 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Die Aufgabe des Apollonios

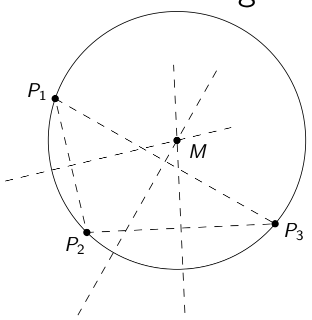
Apollonios von Perge (um 260 – 190 v.Chr.) war nach Archimedes und Euklid der bedeutendste Mathematiker der griechisch-römischen Epoche. Er lehrte vermutlich an der „Bibliothek" von Alexandria, dem Wissenschaftszentrum der Antike.

** Karl Marx, 05.05.1818 (Trier) – 13.03.1883, hat in seinen ökonomioschen Schriften mathematische Methoden verwendet und auch „Mathematische Manuskripte" hinterlassen.

Der Herr Professor stellte damals seinen Studenten eine berühmt gewordene geometrische Aufgabe, die alle Wirren der Zeit überstanden hat und die heute noch – mehr als 2000 Jahre später – nicht vergessen ist:
Es seien drei geometrische Objekte in der Ebene gegeben, von denen jedes ein Punkt, eine Gerade oder ein Kreis sein kann. Man konstruiere einen Kreis – falls das möglich ist –, der durch jeden gegebenen Punkt läuft und der jede der gegebenen Gerade sowie jeden der gegebenen Kreise berührt. Man nennt einen solchen Kreis den Kreis des Apollonios.
Hinweis: Es gibt zehn verschiedene Dreierkombinationen aus den Objekten Punkt, Gerade und Kreis, sodass man das Problem des Apollonios in entsprechend viele Teilaufgaben zerlegen und diese dann der Reihe nach lösen kann. (H.F.)

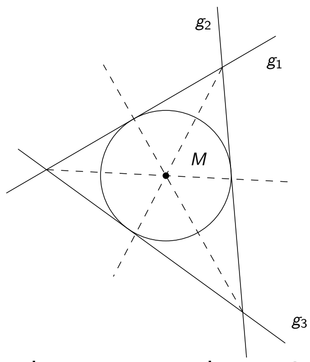
Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe hat sich Bettina Diller, 11. Klasse der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik in München, beschäftigt.
Sie listet die zehn möglichen Dreierkombinationen auf und diskutiert sie einzeln. Hier ihre Lösungen für die Fälle dreier Punkte und dreier Geraden:



Verbindet man drei gegebene Punkte P_1, P_2 und P_3, die nicht auf einer Gerade liegen, zu einem Dreieck, so kann mit Hilfe der Mittelsenkrechten dessen Umkreis konstruiert werden, der durch alle gegebenen Punkte verläuft.

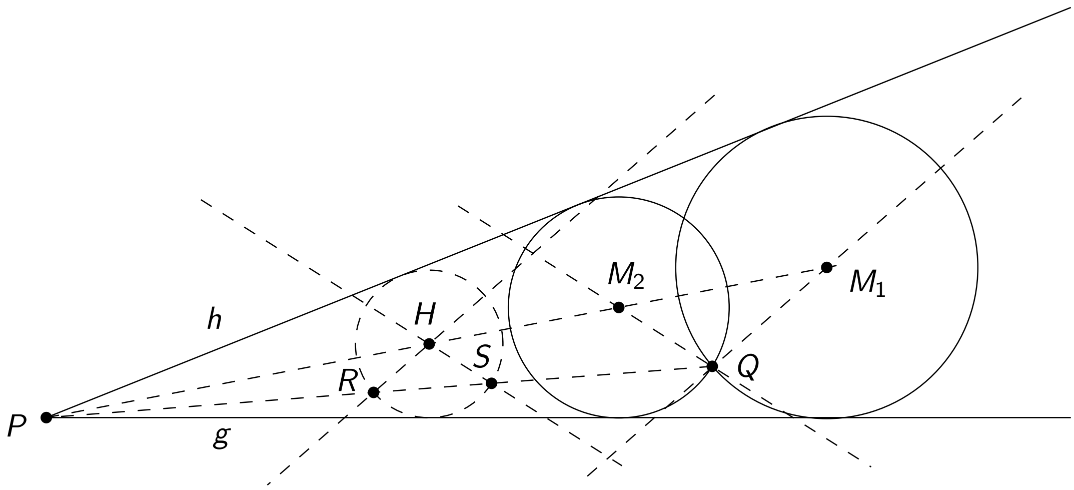
Sofern die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 paarweise nichtparallel sind, bilden sie ein Dreieck. Mit Hilfe der Winkelhalbierenden kann der Inkreis konstruiert werden, der jede Gerade berührt.



Es zeigt sich, dass außer im Fall dreier Punkte zu jeder Kombination mehrere Kreise des Apollonios existieren. In drei der zehn Fälle gibt es sogar acht solcher Kreise. So verästelt sich der einzelne Fall wiederum in weitere Unterfälle. Dazu ist es ebenso notwendig, die verschiedenen Möglichkeiten der Lage der geometrischen Objekte untereinandern zu untersuchen wie die Bedingungen, unter denen überhaupt die Konstruktion der Berührkreise möglich ist.

Wir geben noch - als Beispiel für einen „Mischfall" – eine Konstruktion für einen Punkt und zwei Geraden an. Hierfür wird die zentrische Streckung benutzt.
Es seien zwei Geraden g und h, die sich im Punkt P schneiden, und ein Punkt Q, der weder mit g noch mit h inzidiert, gegeben. Der Mittelpunkt M des gesuchten

Kreises liegt auf der Winkelhalbierenden von g und h.
Konstruiere einen Hilfskreis mit Mittelpunkt H auf der Winkelhalbierenden, der beide Geraden berührt. Verbinde dann P und Q. Die Gerade PQ schneidet den Hilfskreis in R und S. Zeichne nun die Geraden RH und SH. Die Parallele zu RH durch Q schneidet die Winkelhalbierende im Mittelpunkt M_1 des gesuchten Apollonioskreises. Die Parallele zu SH durch Q schneidet die Winkelhalbierende im Mittelpunkt M_2 eines weiteren Apollonioskreises.



Pythagoreische Tripel zu flächengleichen Dreiecken

von Roland Schröder

Gibt es verschiedene pythagoreische Tripel, welche zu flächengleichen Dreiecken gehören? Ja, die gibt es. Zum Beispiel gehören $(40, 42, 58)$ und $(24, 70, 74)$ zu den Dreiecken mit dem Flächeninhalt 840. Wie werden solche Tripel konstruiert?

Es liegt nahe, eine Frage mit bekannter Antwort zum Ausgangspunkt zu nehmen: Wie werden beliebige pythagoreische Tripel gewonnen? Im Band X seiner „Elemente“ hat Euklid sinngemäß diese Antwort gegeben: Man wähle zwei natürliche Zahlen m und n ($n > m$) und konstruiere damit das Tripel $(n^2-m^2, 2mn, n^2+m^2)$. Euklid hat auch dargestellt, wie er diese Antwort gefunden hat. Kann es sein, dass Tripel, welche zu flächengleichen Dreiecken gehören, eine Besonderheit in den Zahlen m und n aufweisen, durch welche sie erzeugt werden? Aber wie findet man die Erzeugenden m und n zu einem Tripel (a, b, c)? Ganz einfach:

$\frac{a+c}{b} = \frac{2n^2}{2mn} = \frac{n}{m}$.

Führt man die beiden Tripel des einführenden Beispiels auf ihre Erzeugenden zurück, so stellt sich heraus, dass 7 in beiden Fällen Erzeugende ist. Das gibt Anlass zu der Vermutung, dass Tripel flächengleicher Dreiecke in einer ihrer beiden Erzeugenden übereinstimmen müssen. Wir konstruieren daher das Tripel zu den

Erzeugenden (n, m) sowie das Tripel zu den Erzeugenden (n, k). Die Gleichheit ihrer Flächen führt zu dem Ansatz $(n^2 - m^2) \cdot mn = (n^2 - k^2) \cdot nk$. Nach n^2 aufgelöst ergibt sich unter Benutzung von $\frac{m^3-k^3}{m-k} = m^2 + km + k^2$:

(1) $n^2 = m^2 + mk + k^2$.

Die Aufgabe, ein Tripel natürlicher Zahlen (m, n, k) zu finden, welches die Gleichung (1) erfüllt, ähnelt nun sehr der Aufgabe, die schon Euklid mit seinem Konstruktionsprinzip für pythagoreische Tripel gelöst hat. Sie ähnelt übrigens auch sehr der Aufgabe, sogenannte $60°$-Tripel zu finden - siehe MONOID 109, Seite 15. Wir werden auch hier der Herleitung Euklids folgen. Die Division von Gleichung (1) durch n^2 führt zu:

$$\frac{n^2}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} + \frac{m}{n}\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Substituiert man hier $\frac{m}{n} = x$ und $\frac{k}{n} = y$, so erhält man die Gleichung einer Ellipse:

(2) $1 = x^2 + xy + y^2$.

Betrachtet man für natürliche Zahlen r und s die Gerade mit rationaler Steigung der Gleichung

(3) $y = \frac{r}{s}x + \frac{r}{s}$,

so schneiden sich die Ellipse (2) und die Gerade (3) in $A = (-1, 0)$ und $B = \left(\frac{s^2-r^2}{r^2+rs+s^2}, \frac{r^2+2rs}{r^2+rs+s^2}\right)$. Im Schnittpunkt B setzen wir

(4) $m = s^2 - r^2, \quad n = r^2 + rs + s^2, \quad k = r^2 + 2rs$,

sodass B die Koordinaten $\left(\frac{m}{n}, \frac{k}{n}\right)$ hat, welche die Gleichung (2) erfüllen müssen:

(5) $1 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \frac{m}{n}\frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2$.

Die Gleichung (5) ist äquivalent zu (1). Um also zwei verschiedene pythagoreische Tripel mit flächengleichen zugehörigen Dreiecken zu erzeugen, wählen wir zwei natürliche Zahlen r und s und berechnen daraus mit Hilfe der Gleichungen (4) die Zahlen m, n, k. Die Erzeugenden des ersten Tripels sind (n, m), die des zweiten Tripels (n, k).

Die Tripel des eingangs gewählten Beispiels wurden für $r = 1$ und $s = 2$ gefunden, sind also die kleinsten ihrer Art.

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 10

Teilbarkeit durch 2013

Zur Begründung benutzen wir den Satz: Die ganzen Zahlen m und n seien durch die ganze Zahl $t \neq 0$ geteilt, r_m und r_n seien die dabei auftretenden Divisionsreste. Dann gilt: Die Produkte mn und $r_m r_n$ haben bei Division durch t den gleichen Rest.

Das ergibt sich unmittelbar, wenn man $m = at + r_m$ und $n = bt + r_n$ mit ganzen Zahlen a, b schreibt – denn dann ist $mn = (abt + ar_n + br_m)t + r_m r_n$.
Nun ist $!2012! = (2013 - 2011)(2013 - 2009) \dots (2013 - 1)$. Wenn man hier die Faktoren $2013 - i$ durch 2013 teilt, dann bleibt der Rest $-i$ und zwar für $i = 1, 3, 5, \dots, 2011$. Nach dem Satz oben haben dann !2012! und das Produkt $(-2011)(-2009) \dots (-3)(-1) = (-1)^{\frac{1}{2} \cdot 2012} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2011 =!2011!$ den gleichen Divisionsrest bei Teilung durch 2013. Die Differenz $!2012! - !2011!$ hat also den Rest 0 bei Division durch 2013 – dies war zu zeigen.

Summenwert

Es sei $T = 1 - \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{4}{a^3} \pm \dots + \frac{n-1}{a^{n-2}} - \frac{n}{a^{n-1}}$ mit geradem n. Dann ist $\frac{1}{a} T = \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} \mp \dots + \frac{n-1}{a^{n-1}} - \frac{n}{a^n}$. Daraus folgt $T + \frac{1}{a} T = \left(1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} \pm \dots + \frac{1}{a^{n-1}}\right) - \frac{n}{a^n}$. Die eingeklammerte Summe ist eine geometrische Reihe und daher ist ihr Wert $\frac{1 - \left(-\frac{1}{a}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{a}\right)} = \frac{(a^n - 1)a}{a^n(a-1)}$, wobei die Gleichheit gilt, da n gerade ist. Damit gilt $T + \frac{1}{a} T = \frac{a+1}{a} T = \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a^n - 1}{a^n} - \frac{n}{a^n}$. Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{a+1}{a}$, so erhält man $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 T = \frac{a^{n+1} - a - n(a+1)}{a^{n+1}}$, also $T = \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \cdot \frac{a^{n+1} - (a+n+an)}{a^{n+1}}$. Nun setzt man $a = n = 2012$ und es ergibt sich:
$S = \frac{2012^2}{2013^2} \cdot \frac{2012^{2013} - (2 \cdot 2012 + 2012^2)}{2012^{2013}} = \frac{1}{2013^2} \cdot \left(2012^2 - \frac{2014}{2012^{2010}}\right) \approx 0,999.$

Ein Polynom

Da $p(x)$ an den Stellen 2, 0, 1 und 3 den Wert 2 besitzt, hat $p(x) - 2$ dort den Wert 0. Daher lässt sich $p(x) - 2$ so darstellen:

> $p(x) - 2 = (x-2)(x-0)(x-1)(x-3)q(x)$, $q(x)$ ein Polynom mit ganzahligen Koeffizienten.

Annahme: Es gibt eine ganze Zahl g, sodass $p(g) = 2013$ ist. Dann gilt $p(g) - 2 = (g-2)(g-0)(g-1)(g-3)q(g) = 2011$. Die vier Klammern $(g-2)$, $(g-0)$, $(g-1)$ und $(g-3)$ sind ganzzahlig und sie sind verschieden. Daraus folgt: 2011 muss mindestend vier verschiedene ganzzahlige Teiler haben. Aber 2011 ist eine Primzahl undn hat nur zwei verschiedene Teiler: entweder 1 und 2011 oder -1 und -2011. Dies ist ein Widerspruch. Die Annahme ist also falsch – es gilt die Behauptung.

Fuunktionswert gesucht

1. Setze $a = b$ und $c = a$. Dann gilt $f(a,b) + f(b,c) = 2f(a,a)$ und $a + b + c - f(a,c) = 3a - f(a,a)$. Daraus folgt

   (1) $f(a,a) = a$.

2. Setze nun $b = c$. Dann gilt $f(a,b) + f(b,c) = f(a,b) + f(b,b)$ und $a + b + c - f(a,c) = a + 2b - f(a,b)$. Daraus folgt $2f(a,b) = a + 2b - f(b,b)$.

Wegen (1) gilt $f(b, b) = b$, sodass

(2) $f(a, b) = \frac{1}{2}(a + b)$ gilt.

Mit (1) und (2) erhält man $f(20, 13) = \frac{33}{2}$.

Ein Wunsch der Redaktion

3	7	5	6	8	1	9	4	2
2	8	4	3	5	9	7	1	6
6	9	1	2	4	7	5	3	8
5	3	2	1	7	4	6	8	9
7	6	9	5	3	8	4	2	1
4	1	8	9	2	6	3	7	5
9	4	7	8	1	5	2	6	3
8	2	6	7	9	3	1	5	4
1	5	3	4	6	2	8	9	7

Die Monoid-Redaktion wünscht allen ihren Lesern ein glückliches und erfolgreiches neues Jahr.

Mainzer Mathe-Akademie 2012

von Clara Gessner

Auch in diesem Jahr fand die Mainzer Mathematik Akademie an der Universität in Mainz statt.

Unter der Leitung von Marcel Gruner und Martin Mattheis verbrachten 30 mathematikbegeisterte Jugendliche fünf Tage im Jugendhaus Don Bosco und an der Universität in Mainz.

Am Mittwoch den 29. August ging es los: Bei ein paar lustigen Kennenlernspielen am Abend versuchten wir alle mehr oder weniger erfolgreich, die Namen der restlichen Teilnehmer zu lernen.

Am nächsten Morgen wurden uns die drei Kurse von ihren Kursleitern vorgestellt. Der erste Kurs hieß *Vom Münzwurf zur Brownschen Bewegung* und wurde von Prof. Dr. Reinhard Höpfner geleitet. Er wollte sich in seinem Kurs mit der Zufälligkeit der Brownschen Bewegung beschäftigen und zeigen, wie viele Zufallsexperimente mit dieser Bewegung zusammenhängen.

Der nächste Kurs *Information und Codierung* bei Prof. Dr. Manfred Lehn sollte sich damit beschäftigen, was eigentlich Informationen sind und wie man sie möglichst fehlerfrei übermitteln kann - natürlich möglichst platzsparend.

Der Kurs *Graphentheorie* mit Dr. Cynthia Hog-Angeloni sagte mir am meisten zu. Wir beschäftigten uns während der Zeit der MMA mit den Grunddefinitionen der Graphentheorie und mit verschiedenen Techniken, den optimalen oder einen guten Weg in einem Graphen zu finden. Eine grundlegende Technik ist zum Beispiel die des „gierigen“ Algortimus, zu der Du im aktuellen Heft in der Rubrik „Hättest Du es gewusst?“ mehr erfahren kannst. Typische Alltagsprobleme, die wir uns

angesehen haben, sind zum Beispiel das chinesische Postbotenproblem oder das „Travelling-Salesman“-Problem (Problem des Handlungsreisenden).
Neben den Kursen gab es auch jeden Tag interessante und lustige Freizeitaktionen, die das Gemeinschaftsgefühl innerhalb weniger Tage erstaunlich wachsen ließen. Wir wurden von Martin Mattheis durch Mainz geführt, waren zusammen Minigolf spielen und verbrachten unseren letzten Abend als gemütlichen Grillabend auf dem Unicampus. Außerdem wurde für die meisten Teilnehmer das Spiel „Die Werwölfe aus dem Düsterwald“ zur abendlichen Tradition.
Alles in allem war ich persönlich sehr begeistert von meiner ersten MMA. Die mathematischen Inhalte waren anspruchsvoll und trotzdem verständlich – so, dass man vielleicht auch später noch einmal darauf zurückgreifen kann.

Clara Gessner ist Schülerin des Trifels-Gymnasiums in Annweiler. Sie besucht die 10. Klasse und war dieses Jahr erstmals Teilnehmerin der Mainzer Mathematik-Akademie. Wir bedanken uns herzlich bei Ihr für den Bericht.
Wenn auch Ihr Lust bekommen habt, einmal an der MMA teilzunehmen, dann haltet die Augen offen: Sowohl in Monoid als auch unter www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie werdet Ihr rechtzeitig informiert. Die nächste Akademie wird übrigens vom 4. bis 8. September stattfinden.

Pressemitteilung des Gymnasium Oberursel zur Monoid-Feier 2012

Am Samstag, dem 24.11.2012, stand das Gymnasium Oberursel ganz im Zeichen der Mathematik, denn in der neuen Aula wurden in einer Feierstunde die Preise des Jahres 2012 im deutschlandweiten Wettbewerb der Zeitschrift MONOID verliehen. Unter den Ausgezeichneten waren auch 11 Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums Oberursel. Außerdem wurden die Sieger der ersten Runde im „Landeswettbewerb Mathematik Rheinland-Pfalz“ des Jahres 2012 geehrt. In seinem Festvortrag zum Thema „Mathematik in der heutigen Gesellschaft“ unterstrich Prof. Dr. Matthias Brinkmann (Hochschule Darmstadt) die große Relevanz der Mathematik für den Standort Deutschland. Für den musikalischen Rahmen der Preisvergabe sorgten Solisten des Gymnasiums Oberursel. Die Veranstaltung wurde vom „Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz“, der „Familie Bottling-Stiftung“ sowie dem Förderforum des Gymnasiums Oberursel unterstützt. Die Organisation vor Ort lag in den Händen der Mathematiklehrerinnen Angelika Beitlich und Christa Elze.

In seiner Begrüßungsrede unterstrich Schulleiter Volker Räuber sehr anschaulich die allseitige Bedeutung der Mathematik im heutigen Leben: Ob im Flugzeug, bei der Kernspintomografie, dem Handy oder dem Notebook, ohne mathematische Rechnungen funktionierte nichts. Deshalb sei es auch so wichtig, Begabungen und mathematische Leistungen in jungen Jahren zu fördern. Dies leiste das Redaktionsteam der Zeitschrift MONOIDum Dr. Cynthia Hog-Angeloni in vorbildlicher Weise; es vermittle Freude an komplexen Fragestellungen und an der eigenen Leistung. Dr. Hog-Angeloni selbst überbrachte die Grüße der Universität Mainz und lud interessierte Schülerinnen und Schüler zum „Tag der offenen Tür“ am 30.1.2013 ins Institut der Mathematik ein. Auch verblüffte sie das Publikum mit ihren mathematischen Zauberkünsten.

Professor Matthias Brinkmann (Darmstadt) outete sich in seiner Festansprache als „MONOID-Fan“ und belegte in einem hochinteressanten und kurzweiligen Vortrag, dass in einem hoch entwickelten Land wie Deutschland letztlich die Mathematik den Wohlstand sichert. An fünf Beispielen aus der Region, angefangen von der Digital-Kamera über das Ceran-Kochfeld bis hin zur Sicherheitstechnik im Auto, machte er deutlich, dass hinter vielen modernen Produkten, von denen Deutschlands Export lebt, mathematische Optimierungsprozesse stehen. Da aber gute Ideen und große Erfindungen nicht vom Himmel fielen, seien die Schulen gefordert. Mit den MONOID-Aufgaben und dem gleichnamigen Wettbewerb lieferten die Mainzer „das beste Trainingslager“ für kommende MINT-Akademiker, die Deutschland dringend brauche. Brinkmann riet denn auch den heutigen Schülergenerationen nachdrücklich, mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Fächer nicht abzuwählen, denn sie böten beste Karrierechancen.„Mathe ist cool“, lautete seine Botschaft.

Davon brauchte er aber die anwesenden zahlreichen Preisträger des MONOID-Wettbewerbs nicht mehr zu überzeugen, die an diesem Samstagvormittag mit großer Freude ihre Preise entgegennahmen, darunter fast genau so viele Mädchen wie Jungen. Gewinner eines zusätzlichen Forscherpreises waren Niklas Bockius vom Otto-Schott-Gymnasium Mainz und Bettina Diller von der Städtischen Berufsschule für Informatik München. Mir dem „Goldenen M“ für vielschichtige Erfolge im MONOID-Wettbewerb wurde Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal ausgezeichnet. Auch die Sieger im Landeswettbewerb Mathematik Rheinland-Pfalz wurden in Oberursel geehrt, dabei waren wieder auffällig viele Mädchen. Mit ausgefeiltem A-Cappella-Gesang vom Gymnasium Oberursel klang dann der offizielle Teil der überzeugenden Mathematik-Veranstaltung aus. Jetzt heißt es wieder lustvoll rechnen, denn das nächste MONOID-Heft mit kniffligen Aufgaben für engagierte Tüftler steht schon bereit.

Mit freundlicher Abdruckgenehmigung (gekürzte Version)
Jutta Niesel-Heinrichs (Pressesprecherin)
Volker Räuber (Schulleiter)

Impressionen der MONOID-Jahresfeier 2012

Die Monoid-Preisträger 2012

Das Goldene M: Marcel Wittmann (Karolinen-Gymnasium, Frankenthal).

Forscherpreise: Niklas Bockius (Gymnasium Gonsenheim, Mainz), Bettina Diller (Städtische Berufsschule für Informationstechnik, München).

1. Preise: Henning Ballweber, Niklas Bockius, Riccardo Brode, Jasmin Hallyburton, Tobias Heinze, Iolanthe Köcher, Heiko Kötzsche, Fabian Liepach, Leo Lutz, Frank Schindler, Maike Stanischewski, David Storzer.

2. Preise: Shaima'a Ahmed Doma, Lara Braun, Luca Bühler, Elisa Dernier, Sebastian Ludwig, Jara Müller-Kästner, Katharina Rößler, Leonie Rößler, Björn Stanischewski.

3. Preise: Elisabeth Böttger, Andreas Dernier, Bettina Diller, Martha Friederich, Christoph Hemmer, Rabea Klesing, Tim Lutz, Niclas Mayer, Victoria Mogwitz, Krystof Navratil, Giang Phi, Andreas Pitsch, Nils Prepens, Jamico Schade, Melanie Schuy, Mareike Vestner, Sandra Wingender, Emily Zollmann,

Monoid-Jahresabonnenments 2013: Tillmann Ballweber, Darleen Baum, Hannah Bock, Thomas Fischer, Robin Fritsch, Stefanie Giesbrecht, Marc Hoffmann, Lara Kern, Axel Krafft, Emma Mais, Marion Misiewicz, Lukas Nießen, Theresa Paulus, Runa Ruttert, Sebastian Schneider, Lea Storzum, Vincent van't Hof, Dominik Vogel, Marvin Weisbender, Anja Wingender, Marina Witte, Ella Zwermann.

Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2011/2012 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die ersten, zweiten und dritten Preise sowie der Preis für den Träger des Goldenen M wurden vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet, die Forscherpreise von Herrn Dr. Genannt. Die Monoid-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 110

Aachen, Inda-Gymnasium:
Kl. 5: Luca Bühler 41.

Aachen, Städtische Tageseinrichtung für Kinder mit Montessorizweig:
Meret Bühler 5.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen
Kl. 6: Hanaa El Sammak 10, Malak Hasham 12;

Kl. 7: Zalwa Alaa 5, Salma Amr 3, Alaa Elfawal 3, Virginia Mandouh 3;
Kl. 9: Marianne Michel 19.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Kunz)**:**
Kl. 7: Niclas Mayer 27;
Kl. 8: Sebastian Maak 2, Jann Ole Neitzel 13, Katharina Rößler 42;
Kl. 10: Marc de Zoeten 2, Lena Ehrenhard-Dickescheid 4, Sebastian Ludwig 60, Benedikt Maurer 14, Alexander Rupertus 11;
Kl. 11: Andreas Pitsch 22.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler)**:**
Kl. 5: Lena-Marie Senft 10, Carla Vo 5.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 11: Frank Schindler 78.

Brannenburg, Gymnasium Raubling:
Kl. 7: Jakob Sussmann 13.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 9: Jamico Schade 36.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 6: Iolanthe Köcher 75.

Edenkoben, Gymnasium:
Kl. 7: Amelie Knecht 15, Theresa Paulus 18.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 8: Anne Vogel 6.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 8: Jana Kummer 2 Tim Schossau 3 Kai Wilezkowiak 5.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 6: Lea Storzum 16;
Kl. 7: Tillmann Ballweber 17, Christoph Hemmer 23, Marion Misiewicz 17, Maximilian Münch 7, Sam Washington 7, Sonja Zimmermann 10;
Kl. 8: Adriana Stenger 5, Marcel Wittmann 142;
Kl. 11: Henning Ballweber 73;

Frankenthal, Robert-Schumann-Schule:
Kl. 6: Patrick Riebe 13.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 2: Philipp Kraus 1, Ella Zwermann 17;
Kl. 3: Martha Friederich 22, Bent Gerstenberger 1, Merlin Kolrep 6, Vrishab Vittagondana 9;

Kl. 4: Natascha Albrecht 4, Nicolas Becker 4, Sophie Brandenburg 9, Franco Dorsch 5, Maike Dürr 5, Kimberly Frahm 5, Naima Gerlach 9, Christian Ickstadt 6, Lara Kern 18, Maxim Leheta 6, Laura Lino 4, Maya Most 10, Marc Ohlemacher 2, Sean Panreck 4, Lina Renger 6, Franziska Schlüter 14, Vincent van't Hof 9;
Kl. 5: Justus Binnewies 3, Emma Braulke 1, Patrick Coles 2, Laura Häger 4, Maximilian Kolrep 1, Shirly Michel 3, Sebastian Schneider 16, Felix Schröder 1;
Kl. 7: Nicolas Gladiator 1, Ludwik Huth 4, Amelie Klaus 12,

Gießen, Landgraf-Ludwigs-Gymnasium:
Kl. 5: Laura Kristin Kettner 3, Felix Köhler 9.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 5: Luca Kloft 14, Lisa Metternich 2, Leonie Stahl 4,Melanie Schuy 20;
Kl. 6: Kim Bruder 6, Matthias Hannappel 7, Julia Holzhüter 5, Emma Mais 18, Nils Prepens 38, Max Schneider 12, Simeon Schneider 10, David Storzer 75, Konrad Uecker 5;
Kl. 7: Robin Dobischok 7, Sven Gobbitza 7, Steffi Langer 12, Lea Stiehl 8, Marvin Weisbender 14, Emily Zollmann 22,
Kl. 8: Moritz Schäfer 8.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 8: Mariam Baher 15;
Kl. 11: Shaima'a Ahmed Doma 50.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Andreas Benz 10;
Kl. 6: Patrick Piesch 4, Max Rosenberg 6;
Kl. 8: Björn Stanischewski 57;
Kl. 9: Maike Stanischewski 74.

Köln, Ursulinengymnasium:
Kl. 9: Elisabeth Böttger 21.

Lehrte, Gymnasium Lehrte:
Kl. 11: Robin Fritsch 17.

Limburg, Tilemannschule:
Kl. 6: Helena Rist;
Kl. 7: Virginia Beck 10, Lena Daum 12, Anna Ebenig 11, Marie Harling 9, Ina Helfenstein 9, Emilie Orgler 10, Greta Schlinke 13, Sarah Urban 9;
Kl. 8: Chantall Klemm 11.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 6: Jason Beck 8, Jana Eichhorn 5, Angela Hahn 3, Marc Hoffmann 18, Sebastian Hospice 6, Lukas Koenen 8, Tim Morsbach 8, Annalena Silz 4, Chiara Stork 4, Sebastian Trapp 7;

Kl. 7: Melanie Weibrich 7, Marina Witte 16;
Kl. 12: Ann-Kathrin Hientzsch 10, Giang Phi 21.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 12: Niklas Bockius 82.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Wittekindt):
Kl. 7: Lukas Krader 14;
Kl. 8: Leo Lutz 71;
Kl. 9: Léonard Wagner 3;
Kl. 12: Tim Lutz 38.

München, Max-Planck-Gymnasium: Kl. 9: Greta Sandor 7.

München, Michaeli-Gymnasium: Kl. 10: Axel Krafft 17.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:
Kl. 10: Bettina Diller 35.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Jelena Arambasic 11, Chantal Cornely 3, Kevin Cornely 8, Karolina Mengert 14, Victoria Mogwitz 22, Ellen Wagner 13;
Kl. 6: Jonas Ahlfeld 4, Darleen Baum 19, Liana Bergen 14, Stefanie Giesbrecht 17, Rabea Klesing 26, Runa Ruttert 16, Clemens Schlosser 6, Joshua Thron 6, Anja Wingender 18, Ege Yilmazer 5;
Kl. 7: Jasmin Hallyburton 68, Verena Rüsing 10, David Thiessen 14;
Kl. 9: Mirjam Bourgett 8, Naemi Dörksen 8, Elena Hummel 6, Markus Schlosser 11, Sandra Wingender 23;
Kl. 10: Janina Vogl 6.
Kl. 11: David Michel 15.

Niddatal, Geschwister-Scholl-Schule:
Kl. 4: Leonie Rößler 49.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 4: Jonas Glückmann 9,
Kl. 5: Roberto Becciu 7, Manuel Blumenschein 8, Hannah Bock 16, Lara Braun 44, Franziska Burkard 4, Debora Gampfer 8, Laurin Gerber 12, Tobias Heinze 68, Florian Kuhn 5, Fabian Liepach 65, Simon Lutz 9, Jara Müller-Kästner 58, Krystof Navratil 25, Leon Sobotta 9, Leoni Steinweden 8, Mareike Vestner 34, Dominik Vogel 17;
Kl. 6: Ricardo Bode 80;
Kl. 9: Heiko Kötzsche 105, Thomas Fischer 17.
(betr. Lehrer: Herr Meixner):
Kl. 4: Vera Apel 3, Antonia Emmler 1 Chiara Glander 3, Lukas Nießen 16, Hanna Pasternak 1.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium:
Kl. 10: Luis Ressel 14.

Templin, Egelpfuhlschule:
Kl. 5: Ronja Gantzke 6.

Weißkirchen, Grundschule:
Kl. 4: Jonas Glückmann 28.

Wiesbaden, Leibnizschule:
Kl. 6: Andreas Dernier 39;
Kl. 7: Elisa Dernier 54.

Mitteilungen

- Am Mittwoch, den 30. Januar 2013 findet der Tag der offenen Tür der Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz statt, zu dem alle Monoid-L(o)eser herzlich eingeladen sind. Weitere Informationen findet Ihr unter:
  http://www.uni-mainz.de/studium/362_DEU_HTML.php,
  http://www.uni-mainz.de/studium/Dateien_Studium/TdoT2013_Einladung_Schulen.pdf.
- Die nächste Mainzer Mathe-Akademie (MMA) findet vom 4. bis 8. September 2013 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  http://www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie.
- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Kalenderjahr 2013 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Stichwort „Monoid“, Adresse bitte nicht vergessen).

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe
Versand: Katherine Pillau
Betreuung der Abonnements: Anita Peffer-Kohl

Jahrgang 32 | Heft 112 | Dezember 2012

Inhalt

H. Fuchs: Das Zahlenrätsel des Michael Stifel . . . 3
B. Diller: Kopfrechnen – so schnell wie ein Inder . . . 5
H. Fuchs: Hättest Du es gewusst? . . . 7
Aufgaben zum neuen Jahr . . . 10
Die Aufgabe für den Computer-Fan . . . 12
H. Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen . . . 13
I. Rubin: Der Kreis des Apollonios . . . 14
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik . . . 17
Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 111 . . . 18
Neue Mathespielereien . . . 21
Neue Aufgaben . . . 23
Gelöste Aufgaben aus Monoid 111 . . . 24
W. J. Bühler: Wer war's? . . . 29
Mathematische Entdeckungen . . . 30
R. Schröder: Pythagoreische Tripel zu flächengleichen Dreiecken . . . 32
Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr . . . 33
Bericht zur Mainzer Mathe-Akademie 2012 . . . 35
Pressemitteilung des Gymnasium Oberursel zur Monoid-Feier 2012 . . . 36
Impressionen der MONOID-Jahresfeier 2012 . . . 38
Die Monoid-Preisträger 2012 . . . 39
Rubrik der Löser und Löserinnen . . . 39
Mitteilungen . . . 43
Impressum . . . 44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Unkostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid