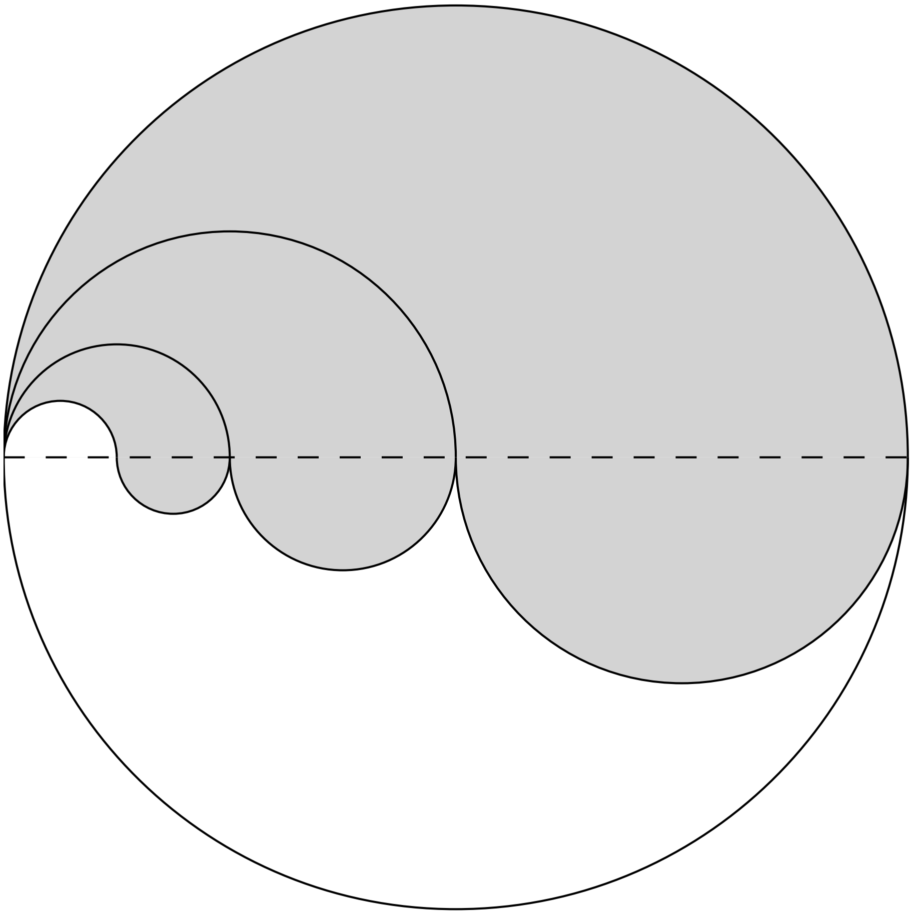
Jahrgang 33 Heft 113 März 2013

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.05.2013.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Kunz, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Mathematik in der heutigen Gesellschaft

von Matthias Brinkmann

„Mathematik ist kompliziert und anstrengend!“
„Mathematik ist uncool!“
„In Mathe bekommt man schlechte Noten!“
„Zum Rechnen gibt es heute Computer!“

Kennt Du solche Behauptungen? Nimmt man diese Aussagen ernst, so ergeben sich daraus folgende Grundsatzfragen zur Bedeutung der Mathematik in der heutigen Zeit:

Benötigt unsere Gesellschaft heute noch Mathematik?
Müssen wir noch gut in Mathematik sein?
Brauchen wir noch Mathematik in der Schule?

Ich möchte dieses Thema gerne in zweierlei Hinsicht betrachten.

1. Wir Menschen sind von Geburt an bereits Hochleistungsmathematiker!

Wir verfügen über eine Art „genetisch angeborener Mathematik“, die wir im Alltag ständig benutzen. Unsere Gehirne sind „Rechenmaschinen“, die allen künstlichen Automaten und Computern haushoch überlegen sind. In motorischer Hinsicht zeigt sich dies unter anderem darin, dass keine Maschine so perfekte und flexibel abgestimmte Bewegungen durchführen kann wie wir Menschen. Kein Automat kann beispielsweise so gut ein Musikinstrument spielen oder sportliche Übungen durchführen wie Menschen. Des Weiteren können wir Menschen mit unseren Gehirnen reale Prozesse in unserer Umgebung erkennen, interpretieren und korrekte Vorhersagen über zukünftige Ereignisse treffen. Sehr gut zeigt sich dies wiederum beim Ballsport. Im Vergleich zum „Menschen-Fußball“ wirkt „Roboter-Fußball“ sehr „unbeholfen“, da die Sensorik, Rechenleistung und Feinmotorik von Maschinen bei weitem nicht an unsere menschlichen Fähigkeiten heranreichen.*
Der „genetisch angeborenen Mathematik“ gegenüber steht die „wissenschaftliche“, von uns allen zu erlernende Mathematik, welche wir unter anderem in der Schule und im Beruf anwenden. Die oben aufgeführten (negativen) Kommentare beziehen sich ausschließlich auf diesen Bereich, den wir gemeinhin als „Schul-Mathematik“ bezeichnen.

* Zu diesem Thema gibt es viel Literatur. Das aktuelle Buch „Inkognito. Die geheimen Eigenleben unseres Gehirns“ von David Eagleman ist 2012 im Campus-Verlag erschienen.

2. Wir Menschen in Deutschland brauchen Mathematik zu unserem Glück!

Selbstverständlich hat der Wohlstand in Deutschland viele Wurzeln, unter anderem unser demokratisches System, den Frieden in Europa, unsere Kultur und Offenheit. Aber ein entscheidender Faktor liegt auch in der starken Wirtschaftskraft Deutschlands. Weltweit genießen die Labels „Made in Germany“ und seit einigen Jahren auch „Invented in Germany“ sehr hohes Ansehen. Deutschland mit (nur) 82 Millionen Einwohnern konkurriert mit China (1,3 Milliarden Einwohnern) jedes Jahr um den Titel „Exportweltmeister“. Was sind diese deutschen Produkte, die in der Welt so begehrt sind?

Deutschland verfügt im weltweiten Vergleich über nur wenige Rohstoffe. Die in Deutschland produzierten Nahrungsmittel werden zum größten Teil im eigenen Land oder zumindest in Europa verzehrt. Auch ist Deutschland in der Welt nicht unbedingt als Urlaubsziel bekannt oder zeichnet sich durch den Verkauf seiner Kulturgüter aus. Unter „Made in Germany“ versteht man hauptsächlich:

- High-Tech-Produktionsmaschinen
- Qualitäts- und Präzisionsprodukte
- Erfindungen, Innovationen, Lizenzen
- Technologiedienstleistungen
- Finanz- und Versicherungsprodukte

Für die Entwicklung und Herstellung dieser Exportschlager benötigt man sehr, sehr viel Mathematik. Ich möchte dies anhand von drei konkreten Beispielen erläutern:

- Deutschland ist weltweit führend in der Maschinentechnik zur Präzisionsbearbeitung von Materialien, zum Beispiel metallische Bauteile für Automobile. Ein Großteil der Werkstoffbearbeitung erfolgt heutzutage mit Hochleistungslasern, welche äußert präzise Schnitte, Schweißnähte oder Oberflächenmarkierungen durchführen können. Für die Entwicklung solcher Laser muss die optische Strahlführung sehr präzise bestimmt werden. Dazu benötigt man die mathematische Beschreibung des Laserlichts als elektromagnetisches Wellenphänomen. Die zugehörige Mathematik besteht aus partiellen Differentialgleichungen mit sehr komplexen Rand- oder Anfangsbedingungen. Die mathematischen Grundlagen hierzu werden in der Oberstufe gelegt und in den ersten Semestern des technischen Hochschulstudiums vertieft. Ohne dieses mathematisches Wissen gäbe es keine Materialbearbeitungssysteme „Made in Germany“.
- Die Innovationskraft der deutschen Automobilindustrie ist ebenfalls weltweit führend. Insbesondere die Sicherheitstechnik im Auto wird weltweit hoch geschätzt, so zum Beispiel der Airbag „Made in Germany“, der seit seiner Einführung den Anteil schwerer Verletzungen bei Verkehrsunfällen von ca. 30% auf ca. 5% gesenkt hat. Heutige adaptive Airbag-Systeme erkennen „blitzschnell“ die Aufprallsituation und entscheiden innerhalb von Mikrosekunden, welche

der Airbags ausgelöst und innerhalb von Zehntelsekunden komplett entfaltet werden. Für das Design und die Entwicklung dieser Airbags sind mathematische Modelle zur Simulation der mechanischen Kräfte und Bewegungen beim Aufprall und der Entfaltung des Airbags zwingend notwendig. Auch hierbei werden als mathematische „Standardwerkzeuge“ Differential-, Integralrechnung und das analytische und numerische Lösen von partiellen Differentialgleichungen benötigt. Die Entwickler und Konstrukteure dieser Bauteile müssen diese Mathematik „im Schlaf“ beherrschen.

- Die rasanten Entwicklungen im IT- und Multimediabereich erfordern eine Vielzahl an mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten, nicht nur im Software-, sondern auch im Hardwarebereich. Heutzutage verfügt nahezu jedes Mobil-Telefon (Smartphone) über eine Minikamera mit einem Bauvolumen von wenigen Kubikzentimetern. Diese Kameras liefern mit enormer Auflösung gestochen scharfe Bilder und Videos. Klassische Kompakt- und Spiegelreflexkameras wirken demgegenüber eher riesig und unhandlich. Für die Entwicklung und die Herstellung solcher Minikameras wird ein Höchstmaß an feinmechanischem und optischem Verständnis benötigt, welches auf breitem mathematischen Wissen zur räumlichen Geometrie und zur technischen Optik basiert.

Die Liste der Beispiele ließe sich noch weiter fortsetzen. Meine Schlussfolgerung hieraus ist eindeutig: Für die vielen High-Tech-Produkte „Made in Germany“ benötigt Deutschland viele (mathematische) Denker und Querdenker. Denn gute (Produkt-)Ideen fallen nicht vom Himmel. Sie sind stets das Resultat harter (geistiger) Arbeit. Statistisch gesehen werden aus 10 000 Ideen nur 100 zu Erfindungen (Patenten) geführt. In der Regel entsteht daraus nur ein erfolgreiches Produkt.

Die hierfür benötigten „klugen technischen Köpfe“ werden aber nicht (alleine) an der Hochschule ausgebildet. Die Grundlagen dazu werden im mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulunterricht gelegt. Quasi als ergänzendes zusätzliches Trainingslager wirken dabei die Mathe-Schülerwettbewerbe und insbesondere die Zeitschrift Monoid, die zum logischen Denken und Querdenken anregt.

Aus aktuellen Studien** geht hervor: Deutschland benötigt in den kommenden Jahren sehr viele MINT-Akademiker. Die Abkürzung „MINT“ steht dabei für die Fachrichtungen Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik. Deutschland sucht dringend gut ausgebildete Mathematiker, Informatiker, Naturwissenschaftler und Ingenieure. Das aktuelle Defizit an solchen Qualifikationen führt dazu, dass Absolvierende dieser Fächer momentan eine faktische Jobgarantie besitzen.

Schülerinnen und Schüler, die sich aus diesem Grund für ein MINT-Studium interessieren, sei Folgendes gesagt: Der Erfolg eines MINT-Studiums wird zum größten Teil bereits in der Schule gelegt, denn hier wird unter anderem das mathematische Grundlagenwissen vermittelt und das mathematische „Rüstzeug“ ausgegeben.

** Quelle: Institut der deutschen Wirtschaft Köln

Der größte Teil der MINT-Studienabbrecher hat in der Oberstufe seine Schwerpunkte (zum Beispiel durch seine Leistungskurswahl) nicht auf die MINT-Fächer gelegt. Hingegen zeigt die Erfahrung, dass Schülerinnen und Schüler mit Mathe-Leistungskurs in vielen Fällen das MINT-Studium problemlos innerhalb der Regelstudienzeit absolvieren.
Als Fazit möchte ich daher auf die obigen Kommentare zur Bedeutung des Fachs Mathematik in unserer heutigen Gesellschaft erwidern:

> Kommentar: „Mathematik ist kompliziert und anstrengend!“
> Meine Erwiderung: Ja, aber die Anstrengung lohnt sich!
> Kommentar: „Mathematik ist uncool!“
> Meine Erwiderung: Nein, denn man kann damit „coole Sachen“ machen!
> Kommentar: „In Mathe bekommt man schlechte Noten!“
> Meine Erwiderung: Nur, wenn man sich nicht dafür interessiert. Mit Mathe bekommt man „tolle Jobs“!
> Kommentar: „Zum Rechnen gibt es heute Computer!“
> Meine Erwiderung: Ja, aber wir brauchen Menschen, welche die Computer programmieren und bedienen!

Ich gratuliere allen Preisträgern des Monoid-Wettbewerbs 2012, bedanke mich beim Monoid-Team für die fantastische Arbeit und wünsche uns für 2013 tolle neue Ausgaben der Zeitschrift mit interessanten und spannenden Mathematik-Aufgaben zum Knobeln, Denken und Querdenken!

Informationen zum Artikel

Dr. Matthias Brinkmann ist Professor am Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften an der Hochschule Darmstadt. Er hat am 24. November 2012 im Rahmen der Monoid-Feier 2012 den Festvortrag gehalten, der in obigem Artikel zusammengefasst ist.

Wie viele Wärter braucht ein Museum?

von Hartwig Fuchs

Lichtenberg* teilt uns von einem exzentrischen Engländer, einem angeblichen Sir H. S., mit, dass der eine umfangreiche Sammlung höchst skurriler Gegenstände besessen haben soll, darunter so erstaunliche Dinge wie

- ein Messer ohne Klinge, an dem der Stiel fehlt,
- eine Sonnenuhr, an einem Reisewagen anzubringen,
- ein messingenes Schlüsselloch

* G.C. Lichtenberg (1742–1799) aus Darmstadt – Physiker, Mathematiker und Schriftsteller mit satirischer Feder, der sein Lesepublikum gerne „auf den Arm nahm“ – etwa in seinem spöttischen Traktat: Verzeichnis einer Sammlung von Gerätschaften des Sir H. S. (Neuauflage Berlin 1988)

Dieser Sir H. S. – so wird erzählt – wollte für seine Kuriositätensammlung ein eingeschossiges Museum mit einem so verzwickten polygonalen Grundriss bauen, dass das Gebäude selbst ebenfalls eine Kuriosität darstellen würde; zum Beispiel ein Museum mit einem Grundriss wie in Bild 1:

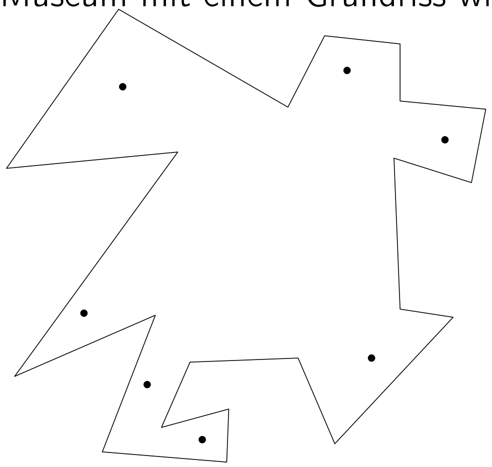


Bild 1

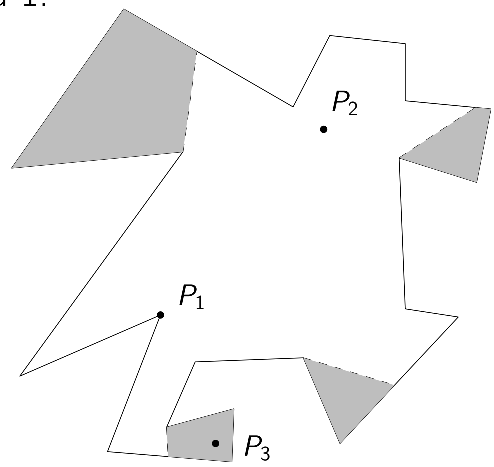


Bild 2

Ein Architekt warnte Sir H. S.: Wenn der Grundriss des Gebäudes zu verwinkelt ist, dann werden viele Musuemswärter erforderlich sein. Daraufhin befragte Sir H. S. einen mit ihm befreundeten Mathematiker:

> Wie viele Wärter braucht man höchstens bei einem beliebigen n-eckigen Museumsgrundriss (die Wärter sind dabei an einer Stelle fest platziert, aber mit 360°-Rundblick, zum Beispiel auf einem Drehstuhl sitzend, vorausgesetzt)?

Die Antwort des Mathematikers fiel etwas umfänglich aus, weil er sie systematisch entwickelte. Hier ist sie!

Zunächst stellte der Mathematiker fest, dass es genügt, statt des geplanten Gebäudes seinen Grundriss zu betrachten, wenn alle Museumsstücke längs der Wände aufgestellt oder an ihnen aufgehängt sind.

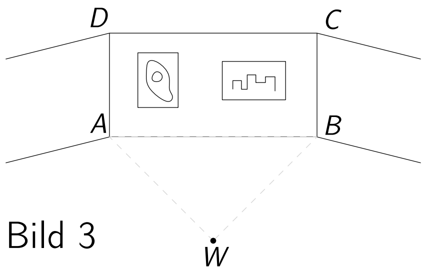


Bild 3

Denn ein Wärter, der in der Position W das Dreieck AWB überblickt (siehe Bild 3), sieht auch alles im Raumstück $AWBCD$ sowie die gegenüberliegende Wand $ABCD$.

Deshalb darf die Frage von Sir H. S. als ein ebenes geometrisches Problem behandelt werden.

Danach befasste sich der Mathematiker mit dem von Sir H. S. vorgeschlagenen Beispiel eines 21-eckigen Museumsgrundrisses. Platziert man hier in jedem Winkel des 21-Ecks einen Wächter, wie in Bild 1, dann sind sieben Wärter zur Überwachung einzusetzen.

Dieses Ergebnis war jedoch keineswegs das günstigste. Von der Stelle P_1 aus überblickt ein Wärter fast das ganze 21-Eck (weiße Fläche in Bild 2) mit Ausnahme von vier dunklen Winkeln; von denen aber sind drei durch einen Wärter in Position

P_2 kontrollierbar – nur für den vierten dunklen Winkel benötigt man noch einen weiteren Wärter, etwa in P_3.

Allgemeine Lösung des Wärterproblems für konvexe n-Ecke

Die polygonalen Figuren, bei denen das Wärterproblem am leichtesten lösbar ist, sind die konvexen n-Ecke, deren bekannteste Vertreter Dreiecke, Rechtecke, regelmäßige n-Ecke, $n \geq 3$, sind.

Im Folgenden sei mit dem Begriff n-Eck das Innengebiet eines n-Ecks samt seinem Rand gemeint. Dann definiert man: Ein n-Eck heißt *konvex*, wenn für jede zwei Punkte P und Q des n-Ecks ihre Verbindungsstrecke PQ vollständig im n-Eck liegt.

(1) Zur Überwachung eines Musuems mit einem n-eckigen konvexen Grundriss genügt ein Wärter, dessen Position beliebig im n-Eck gewählt werden kann.

Nachweis:

Jeder beliebige Punkt P eines konvexen n-Ecks (Bild 4) kann mit jedem Punkt Q auf dem Rand des n-Ecks durch die Strecke PQ verbunden werden, die nach der vorausgesetzten Konvexität vollständig im n-Eck verläuft. Folglich kann ein Wärter von P aus das ganze n-Eck überblicken.

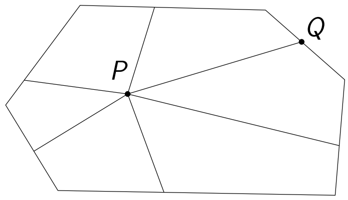


Bild 4

Allgemeine Lösung des Wärterproblems für nicht-konvexe n-Ecke

Unter den nicht-konvexen n-Ecken gibt es einige Typen, die nur einen Wärter erforderlich machen; zum Beispiel genügt bei Museumsgrundrissen, die regelmäßige n-zackige Sterne sind (Bild 5 für $n = 3$), genau ein ins Zentrum des Sterns gesetzter Wärter zur Überwachung.

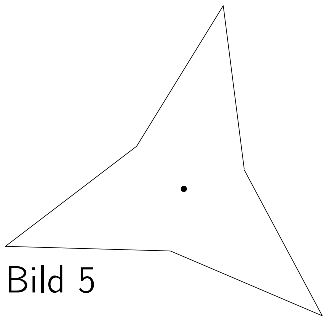


Bild 5

Aber bei Grundrissen wie zum Beispiel dem aus Bild 1 wird man im Allgemeinen mehr als nur einen Wärter brauchen. Wie gelangt man in einem solchen Fall zu einer brauchbaren Aussage über die Anzahl der Wärter?

Naheliegend ist, dass man das n-Eck in m konvexe Teilfiguren zerlegt. Nach (1) benötigt man dann höchstens m Wärter. Mit dieser Idee ist es dem tschechischen Mathematiker Vasek Chvátal 1973 gelungen, eine Abschätzung für m zu finden:

(2) Für ein Museum mit n-eckigem Grundriss benötigt man höchstens $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wärter, $n \geq 4$.
Dabei bedeutet $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ die größte ganze Zahl, die $\leq \frac{n}{3}$ ist.

Beispiel: Für ein 21-eckiges Museum mit einem Grundriss wie in Bild 1 kommt man mit höchstens $\left\lfloor \frac{21}{3} \right\rfloor = 7$ Wärtern aus.

Der folgende Beweis von (2) stellt ein Beispiel dar für einen Beweis, den viele

Mathematiker als schön bezeichnen würden!
1. Schritt: Man zerlegt das gegebene n-Eck in lauter Dreiecke, bei denen jeder Eckpunkt zugleich ein Eckpunkt des n-Ecks ist (eine solche sogenannte Triangulation des n-Ecks ist stets möglich). Für einen Beweis dieser Aussage verweisen wir auf das Buch der Beweise. Aus den dort angestellten Überlegungen folgt auch:
2. Schritt: Man färbt die Eckpunkte der Dreiecke mit drei verschiedenen Farben so, dass in jedem Dreieck jede Farbe genau ein Mal vorkommt.
Weil auf diese Weise n Punkte gefärbt wurden, muss es eine Farbe geben, die höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$-mal vorkommt – denn sonst wären ja in jeder der drei Farben mindestens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ Punkte gefärbt, was aber wegen $3 \cdot (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1) > n$ unmöglich ist.
3. Schritt: Man setze auf diejenigen Punkte, die in der am wenigsten oft vertretenen Farbe gefärbt sind, einen Wärter. Dieser überblickt sein Dreieck vollständig und somit können höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wärter das gesamte n-Eck überschauen. Daraus folgt (2).

Mit (1) und (2) hatte der Mathematiker die Frage von Sir H. S. nach der höchstens benötigten Anzahl von Wärtern beantwortet. Aber Sir H. S. meinte, die Abschätzung in (2) sei gewiss verbesserbar. Er verwies auf sein Beispiel eines 21-eckigen Museumsgrundrisses (Bild 1 und 2): Nach (2) ist nicht auszuschließen, dass man dafür $\lfloor \frac{21}{3} \rfloor = 7$ Wärter benötigt, während man tatsächlich mit nur 4 Wärtern auskommt.
Der Mathematiker zeigte sich unbeeindruckt – ja, er behauptete sogar, dass (2) die bestmögliche Antwort bei beliebigen n-Ecken darstellt, denn es gilt:

(3) Zu jedem $n \geq 4$ gibt es einen Museumsgrundriss, für den man $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wärter braucht.

Für $n = 4$ und $n = 5$ ist (3) klar, weil $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = \lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$ ist. Sei also $n \geq 6$. Zunächst wird die Gültigkeit von (3) für $n = 9$, 10 und 11 gezeigt und zwar an den n-Ecken, $n = 9$, 10 und 11, in Bild 6:

$n = 9$: $n = 10$: $n = 11$:

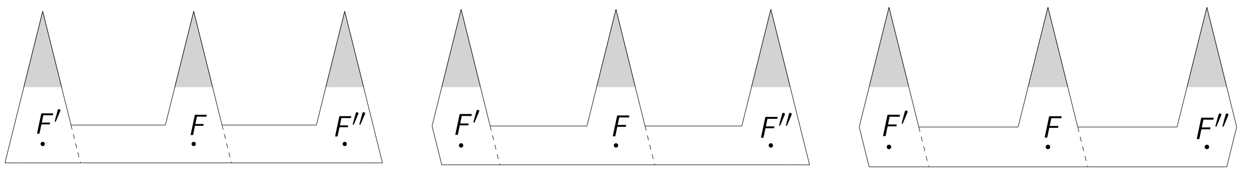


Bild 6

Wie auch immer ein Wärter in einer der Teilfiguren F, F' oder F'' platziert ist, er wird nicht seine Teilfigur und zugleich die schwarzen Ecken der beiden anderen Teilfiguren überblicken können. Für die n-Ecke in Bild 6 benötigt man daher 3 Wärter.
Wegen $\lfloor \frac{9}{3} \rfloor = \lfloor \frac{10}{3} \rfloor = \lfloor \frac{11}{3} \rfloor = 3$ gilt also (3) für $n = 9$, 10 und 11.
Wenn man nun in den n-Ecken, $n = 9, 10, 11$ von Bild 6 die mittlere Teilfigur F entfernt oder sie durch $2, 3, 4, \ldots$ Teilfiguren F ersetzt, dann erhält man für

$n = 6, 7, 8$ und für $n = 12, 13, 14, \ldots$ jeweils nicht-konvexe n-Ecke, bei denen (3) offensichtlich zutrifft.
Damit ist gezeigt, dass (3) für jedes $n \geq 4$ gilt.

Nachspiel

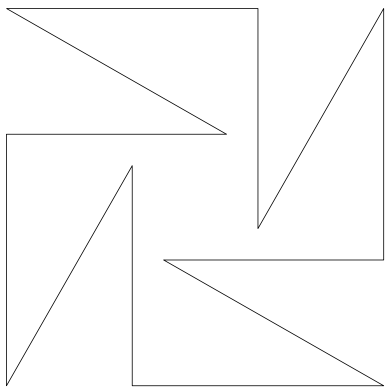
Man darf vermuten, dass Sir H. S. aus Lichtenbergs Geschichte nicht dazu gekommen ist, seine Museumspläne auszuführen. Denn Lichtenberg berichtet, dass der spleenige Engländer vor kurzem verstorben sei und dass seine Kuriositätensammlung demnächst in öffentlicher Auktion aufgelöst werden solle, wozu er sein oben erwähntes Traktat erstellt habe.

Der Mathematiker aber und seine späteren Kollegen haben außer ad hoc-Betrachtungen keine Methode gefunden, wie man die Minimalzahl an Wärtern zu jedem vorgebenen polygonalen Museumsgrundriss bestimmen kann.

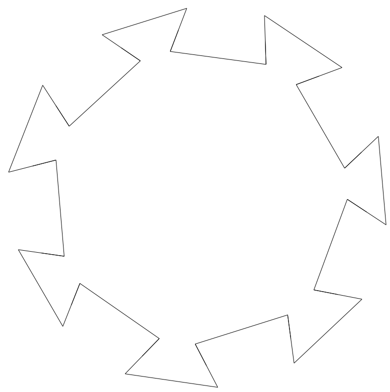
Aufgabe

Bestimme, wie viele Wärter mindestens benötigt werden, um die Museen mit den folgenden Grundrissen vollständig zu überwachen.

(a)



(b)

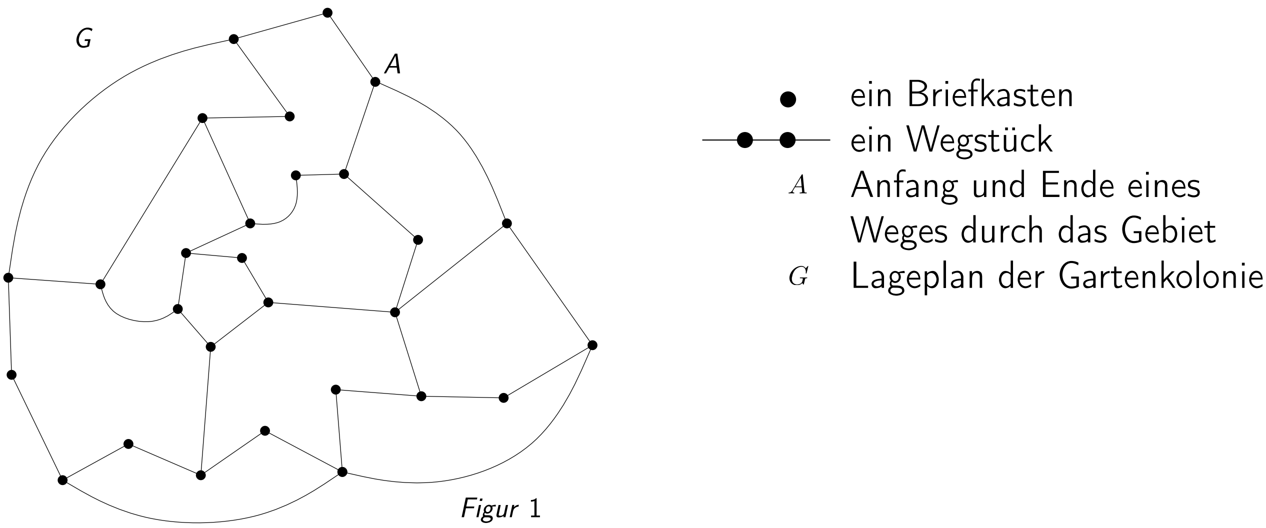


Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 35.

Der angeberische Postbote

von Hartwig Fuchs

Bei allen Briefträgern ist der Bezirk Gartenkolonie (G) – vergleiche die Figur 1 – sehr unbeliebt: Es ist nämlich noch keinem von ihnen gelungen, in dem ungeplant entstandenen Wegenetz der Siedlung eine Route zu finden, über die man zu jedem der 28 Briefkästen gelangt und dabei an keinem Briefkasten mehrfach vorbeigehen muss.



Figur 1

Ein junger Postbote, der seit einiger Zeit in der Gartenkolonie die Post austrägt, behauptet eines Tages voller Stolz:

> Ich habe die von meinen Vorgängern vergeblich gesuchte „Tour ohne Wiederholungen“ gefunden!

Seine Kollegen bezweifeln jedoch, dass er die Wahrheit sagt, weil er ihnen diese Route nicht verraten will. Was also trifft zu?

Der Versuch, diese Frage durch systematisches Probieren zu entscheiden, ist wegen der enormen Anzahl von möglichen Wegen ein wenig effektives Verfahren. Die Mathematik führt da schneller zum Ziel. Machen wir uns deshalb ein mathematisches Modell für das Problem.

Der Hamilton-Kreis

In der Ebene seien n Punkte, mit $n \geq 3$, und m diese Punkte verbindenden Linien, wobei $m \geq 0$ ist, gegeben. Ein solches Gebilde heißt ein *Graph* mit *n Ecken* und *m Kanten*. Nach dem Muster von Figur 1 betrachten wir im Folgenden Graphen G mit den Eigenschaften: Jede Ecke von G ist mit mindestens zwei anderen Ecken durch jeweils eine Kante verbunden und keine Ecke ist mit sich selbst verbunden und in G gibt es keine Kanten, die sich kreuzen.
Wenn es dann in einem solchen Graph G einen in sich zurücklaufenden Kantenzug gibt, in dem außer der *Anfangsecke* = *Endecke* jede der anderen $n-1$ Ecken genau einmal vorkommt, dann heißt ein solcher Weg ein *Hamilton-Kreis* in G, benannt nach William Rowan Hamilton (1805–1865), der als Erster solche geschlossenen Kantenzüge untersucht hat.

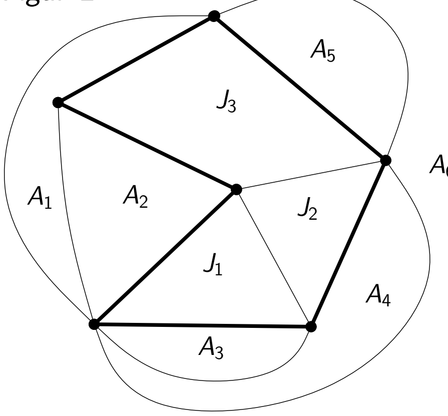
Mit diesen Begriffen lautet die Behauptung des jungen Postboten:

(1) In dem von Figur 1 beschriebenen Graphen G gibt es einen Hamilton-Kreis.

Lässt sich nun ein Kriterium finden, mit dem man entscheiden kann, ob ein Graph G einen Hamilton-Kreis besitzt?
Annahme: Es sei G ein Graph mit n Ecken, $n \geq 3$, der einen Hamilton-Kreis H

besitzt. Dieser Hamilton-Kreis H zerlegt die Ebene in zwei Teilgebiete: das Innere J von H und das Äußere A von H.

Figur 2



Beispiel (Figur 2): Im Graphen G mit sechs Ecken ist der dick eingezeichnete Rundweg ein Hamilton-Kreis, dessen Innengebiet J aus den Teilgebieten J_1, J_2, J_3 und dessen Außengebiet A aus den Teilgebieten A_1, A_2, ..., A_6 besteht; dabei wird A_6 – die Ebene ohne das vom Rand des Graphen G umschlossene Gebiet – als ein äußeres Teilgebiet des Hamilton-Kreises betrachtet.

Das Innengebiet J eines Hamilton-Kreises H

Wenn d Kanten des n-eckigen Graphen G im Innengebiet J liegen, dann zerlegen sie J in $d+1$ Teilgebiete. Jedes dieser Teilgebiete wird von einer bestimmten Anzahl von Kanten begrenzt. Es sei j_t die Anzahl der Teilgebiete von J, die von t Kanten begrenzt sind – wobei $2 \leq t \leq n$ ist. Dann gibt $j_2 + j_3 + ... + j_n$ die Gesamtzahl aller Teilgebiete von J an. Es gilt daher:

(2) $j_2 + j_3 + ... + j_n = d + 1$.

Für jedes t mit $2 \leq t \leq n$ gilt: Alle j_t Gebiete mit t Kanten haben zusammen $t \cdot j_t$ Kanten. Daher ist $2j_2 + 3j_3 + ... + nj_n$ die Gesamtzahl aller Kanten des Innengebietes J von H, jede allerdings doppelt gezählt (eine Kante gehört stets zu zwei Teilgebieten); ferner sind in dieser Summe auch alle n Kanten auf dem Hamilton-Kreis H mitgezählt. Damit gilt:

(3) $2j_2 + 3j_3 + ... + nj_n = 2d + n$.

Aus (2) und (3) kann man d eliminieren, indem man von (3) das Doppelte von (2) subtrahiert:

$$(2j_2+3j_3+...+nj_n)-(2j_2+2j_3+...+...+2j_n) = (2d+n)-(2d+2) = n-2.$$

Also gilt:

(4) $j_3 + 2j_4 + ... + (n-2)j_n = n - 2$.

Das Außengebiet A eines Hamilton-Kreises H

Es gebe D Kanten des n-eckigen Graphen G, die im Außengebiet A von H liegen. Bezeichnen wir mit a_t die Anzahl der Teilgebiete von A, die von t Kanten begrenzt werden, wobei $2 \leq t \leq n$ ist, dann gilt mit gleichen Überlegungen wie oben für das Innengebiet J von H, jetzt für das Außengebiet:

(2') $a_2 + a_3 + ... + a_n = D + 1$,

(3') $2a_2 + 3a_3 + ... + na_n = 2D + n$.

und daraus folgt:

(4') $a_3 + 2a_4 + ... + (n-2)a_n = n-2$.

Der Satz von Grinberg und die Behauptung des jungen Postboten

Aus den Gleichungen (4) und (4') – die unter der Annahme hergeleitet wurden, dass der betrachtete Graph G einen Hamilton-Kreis besitzt – folgt durch Gleichsetzen eine Formel, die der lettische Mathematiker E. J. Grinberg entdeckt hat:

(5) $(j_3 - a_3) + 2(j_4 - a_4) + 3(j_5 - a_5) + ... + (n-2)(j_n - a_n) = 0$.

Es gilt daher der **Satz von Grinberg**:

(6) Wenn es in einem Graph einen Hamilton-Kreis gibt, dann gilt die Formel (5).

Mit dem Satz von Grinberg lässt sich überprüfen, ob die Behauptung des jungen Briefträgers zutrifft.
Zunächst wollen wir ihm vertrauen und davon ausgehen, dass der Graph G in Figur 1 – der seinen Postbezirk Gartenkolonie darstellt – tatsächlich einen Hamilton-Kreis H enthält.

Aus der Figur 1 entnimmt man, dasss alle Teilgebiete des Graphen G von fünf oder acht Kanten begrenzt sind bis auf das außerhalb von G liegende Gebiet, das neun Kanten besitzt. Daher haben alle durch den Hamilton-Kreis H festgelegten Zahlen j_t und a_t mit einem Index $t \neq 5$, 8, 9 den Wert 0. Damit reduziert sich die Grinberg-Formel (5) für den Graphen G des Postboten auf

(7') $3(j_5 - a_5) + 6(j_8 - a_8) + 7(j_9 - a_9) = 0$.

Wie auch immer der angenommene Hamilton-Kreis H in G verläuft: Das von neun Kanten begrenzte Teilgebiet liegt auf jeden Fall außerhalb von H. Also ist $j_9 = 0$ und $a_9 = 1$. Dann folgt aus (7'):

(7'') $3(j_5 - a_5) + 6(j_8 - a_8) = 7$

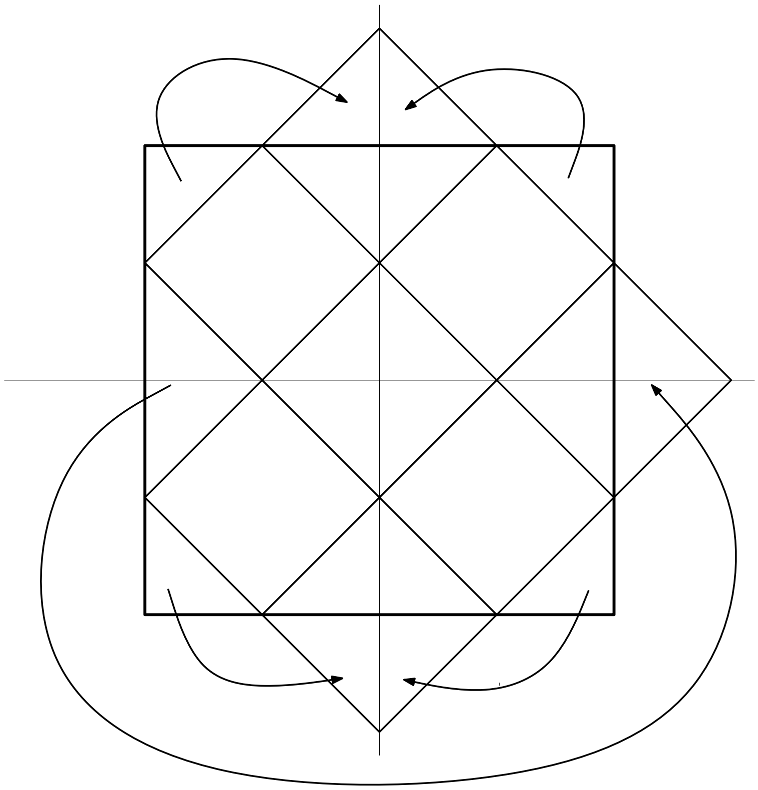
Die linke Seite von (7'') ist ein Vielfaches von 3, die rechte Seite aber nicht – ein Widerspruch. Die Annahme, dass der in Figur 1 dargestellte Graph einen Hamilton-Kreis besitzt, ist also falsch.
Daher hat der junge Postbote mit seiner Behauptung geschwindelt; er wollte wohl nur ein bisschen angeben.

Die besondere Aufgabe
Kein Zaubertrick
von Arthur Köpps

Aufgabe

Zerlege ein Quadrat in acht gleich große Quadrate.

Lösung ohne Worte



Die Aufgabe für den Computer-Fan

Narzisstische Zahlen

Eine $(n+1)$-ziffrige Zahl $a = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, $0 \leq a_i \leq 9$, $0 \leq i \leq n-1$, $0 < a_n \leq 9$, heißt narzisstisch*, wenn sie gleich der Summe der Potenzen ihrer Ziffern ist, wobei die Exponenten der Ziffernpotenzen gemäß der Ziffernposition in der Zahl ansteigen, wenn also gilt: $a = a_n^1 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^3 + \dots + a_2^{n-1} + a_1^n + a_0^{n+1}$. Ein Beispiel: 175 ist narzisstisch, denn $1^1 + 7^2 + 5^3 = 1 + 49 + 125 = 175$. Gibt es weitere dreiziffrige narzisstische Zahlen?

Trivialerweise sind die Zahlen 1, 2, ..., 9 narzisstisch. Welche zweiziffrigen natürlichen Zahlen sind narzisstisch?

Bestimme für möglichst viele $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ alle $(n+1)$-ziffrigen narzisstischen Zahlen! (E.K.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2013 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

---

* von Narziss, der griechischen Sage nach ein in sein Bild verliebter schöner Jüngling.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 111

Zahlen als Summe aus zwei abundanten Zahlen

Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen (perfekt), wenn sie gleich der Summe $\sigma'(n)$ ihrer echten Teiler ist, sie heißt abundant, wenn $\sigma'(n) > n$ ist, und defizient, falls $\sigma'(n) < n$ gilt.

Die beiden kleinsten vollkommenen Zahlen sind 6 und 28. Alle Zahlen von 1 bis 11, ausgenommen 6, sind defizient (dabei wird $\sigma'(1) = 0$ gesetzt). Die kleinste abundante Zahl ist 12, denn $\sigma'(12) = 16 > 12$.

Im Jahre 1962 wurde von Charles Stanley Ogilvy ein merkwürdiger Satz veröffentlicht:

> Fast alle natürlichen Zahlen (das heißt alle mit Ausnahme von endlich vielen Zahlen) können als eine Summe von zwei abundanten Zahlen geschrieben werden; die endlich vielen Ausnahmezahlen, für die es eine solche Darstellung also nicht gibt, sind alle ≤ 83160. Diese Schranke konnte wenig später auf 28123 und sogar noch weiter erniedrigt werden.

Nun die Frage an die Computer-Fans:

> Welches ist die größte Ausnahmezahl und wie viele Ausnahmezahlen gibt es?

(H.F.)

Ergebnisse:

Auf die erfolgreiche Suche nach solchen Ausnahmezahlen haben sich begeben: Niklas Bockius vom Otto-Schott-Gymnasium in Mainz mit einem eigenen Python-Programm und Bettina Diller von der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik in München mit einem eigenen Java-Programm. Beide haben ihre Programme sehr gut dokumentiert durch Beschreibung der programmierten Funktionen (Niklas) beziehungsweise durch ein Struktogramm und ein zusätzliches Flussdiagramm (Bettina). Als größte Ausnahmezahl fanden sie die Zahl 20161. Niklas Bockius hat eine Tabelle aller Ausnahmezahlen erstellt, es sind 1457 Zahlen, die sich nicht als Summe zweier abundanter Zahlen darstellen lassen.

Mathematische Entdeckungen

Neue Aufgabe

Mathis behauptet, dass man 5 auf 16 verschiedene Arten als Summe aus natürlichen Zahlen schreiben kann. Man überprüft schnell, dass er Recht hat, wenn er zum Beispiel $4 + 1$ und $1 + 4$ als verschieden betrachtet und auch Summen aus einem Summanden, zum Beispiel $5 = 5$, zulässt.

a) Was hälst du davon: 11 kann auf mehr als 1000 Arten als eine Summe dargestellt werden?

b) Auf wie viele Arten kannst du eine beliebige natürliche Zahl $n > 1$ als eine Summe schreiben? (H.F.)

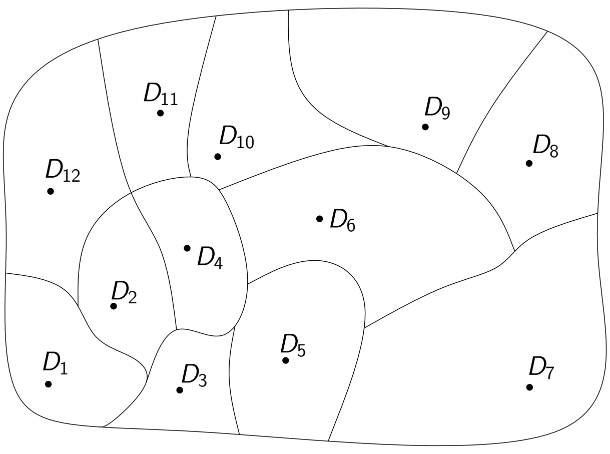
Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2013 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 111

In Heft 111 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Straßennetz im Königreich der n Dörfer

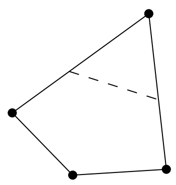
In einer fernen Weltgegend liegt das rückständige „Königreich der n Dörfer". Als Beispiel ist hier eine Landkarte mit $n = 12$ Dörfern abgebildet. Darin sind die Dörfer $D_1, \dots, D_{12}$ durch Punkte und die Grenzen der Dorfgebiete $G_1, \dots, G_{12}$ durch Linien dargestellt.



Weil bisher die Dörfer nur durch Eselspfade verbunden sind, beschließt der König den Bau eines modernen Wegenetzes in seinem kleinen Reich nach den folgenden Vorgaben: Zwischen je zwei Dörfer D_i, D_j soll eine Straße D_iD_j dann – aber auch nur dann! – gebaut werden, wenn die beiden Dorfgebiete G_i und G_j eine gemeinsame Grenze besitzen; die Straße D_iD_j soll vollständig in den Gebieten G_i und G_j verlaufen und sie soll deren gemeinsame Grenze schneiden.

Einige Zeit, nachdem die Straßen gebaut sind, beklagen sich die Dörfler, dass es nun Gebiete gibt, die zwar von Straßen umschlossen sind, durch die aber keine Straße hindurchführt.

Der König fragt darauf seinen Verkehrsminister: „Wenn ich durch jedes dieser Gebiete genau eine Straße bauen lasse, wie viele neue Straßen gibt es dann?"



Beispiel:
4 alte Straßen
1 neue Straße

Versuche ein Formel zu finden, mit der der König für n Dörfer, $n = 3, 4, 5, \dots$ die Anzahl der neuen Straßen berechnen kann. (H.F.)

Hinweis: Ziehe für die Aufstellung einer solchen Formel eine mögliche Beziehung zwischen den Anzahlen der Dörfer, der alten und der neuen Straßen zunächst für

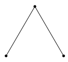
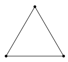
$n = 3$, dann für $n = 4$ usw. in Betracht.

Ergebnisse

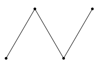
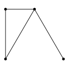
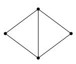
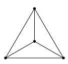
Mit dieser Aufgabe hat sich Bettina Diller, 11. Klasse der Städtische Berufsschule für Informationstechnik München, beschäftigt:

Sie erstellt eine Liste aller „wesentlich verschiedenen" Straßennetze und stellt dabei fest, dass es tatsächlich nur auf die Anzahl k der alten Straßen ankommt, wie viele neue Straßen gebaut werden müssen.

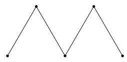
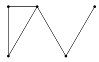
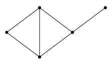
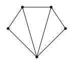
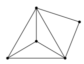
$n = 3$:

Alte Straßen		Neue Straßen
2		0
3		1

$n = 4$:

Alte Straßen		Neue Straßen
3		0
4		1
5		2
6		3

$n = 5$:

Alte Straßen		Neue Straßen
4		0
5		1
6		2
7		3
8		4
9		5

Die Anzahl g der neuen Straßen unterscheidet sich hier jeweils um $n - 1$ von der der alten Straßen, sie beträgt $k - n + 1$.

Tatsächlich hat Bettina die Eulersche Polyederformel entdeckt. Für jeden ebenen Graphen gilt:

Anzahl der Ecken − Anzahl der Kanten + Anzahl der Gebiete = 1,
also $n - k + g = 1$.

Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst, aber Bettina fragt sich weiter nach einer Formel, die die Maximalzahl alter (und somit neuer) Straßen angibt, die für n Hauptstadtverbindungen enstehen kann.

Hierzu liest sie aus den oben ermittelten Möglichkeiten für Straßennetze folgende Tabelle ab:

n	3	4	5	6	7
k_{max}	3	6	9	12	15

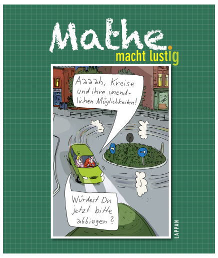
Sie vermutet den Zusammenhang $k_{max} = 3(n-2)$.
Diese maximale Anzahl Straßen wird bei solchen Straßennetzen erreicht, die nur aus Dreiecken bestehen (siehe die Fälle $n = 3$ und $k = 3$, $n = 4$ und $k = 6$ sowie $n = 5$ und $k = 9$): Bei Hinzunahme einer weiteren Hauptstadt kommen dann drei weitere Kanten und drei weitere Gebiete hinzu.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Beutelspacher, Albrecht et. al.: „Mathe macht lustig"
Was kommt dabei heraus, wenn vier Menschen aus zwei verschiedenen Museen zusammenkommen, davon zwei aus dem Mathematikum in Gießen und zwei aus dem caricatura Museum Frankfurt? Ganz einfach, alle vier bringen ihre gesammelten Erfahrungen ein und heraus kommt eine Ausstellung im Mathematikum. So geschehen vom 27. September bis zum 14. November 2012. In dieser Ausstellung wurden 101 Karikaturen und Cartoons von 45 verschiedenen Künstlern gezeigt, die alle nur eines gemeinsam hatten: Sie drehten sich in irgendeiner Weise um Mathematik. Für alle diejenigen, die die Ausstellung verpasst haben – und auch für die, denen die gezeigten Cartoons so gut gefallen haben, dass sie sie nach Hause mitnehmen wollen – hat der Lappan-Verlag eine Auswahl von 80 Stück als Buch herausgebracht.
Genauso vielfältig wie die Zeichner ist auch die Ausgestaltung: Die Künstler (von Beck bis Zak) setzten ihr Bild von Mathematik in den unterschiedlichsten Stilrichtungen um. Mathematisch-inhaltlich geht es von einfachen Grundrechenarten – inklusive der Doppeldeutigkeit des Wortes Rechenzentrum – über Mathematik in der Schule bis hin zur Riemannschen Zeta-Funktion. Daneben gibt es auch kurze Exkursionen in die Mathematik oder Physik. Für viele Nichtmathematiker scheint neben der Formel zum Satz des Pythagoras Einsteins $\mathsf{E} = \mathsf{mc}^2$ der Inbegriff mathematischer Formeln zu sein
Vom mathematischen Verständnis sind die überwiegende Mehrheit der in das Buch aufgenommenen Cartoons auch für Laien – und Schüler unter 14 Jahren – verständlich, allerdings ist nicht ganz sicher, ob letztere mit der Art von Humor etwas anfangen können, deshalb die Altersempfehlung.
Neben vielen neu für die Ausstellung gezeichneten Bildern wurden auch einige Klassiker mathematischer Cartoons wie „Sie berühren sich im Unendlichen!" von Kriki oder „Touché" von Tom mitaufgenommen.

Fazit: Wie in einem Cartoonband nicht anders zu erwarten werden dem geneigten Leser oder der geneigten Leserin manche der gezeigten Kunstwerke besser, andere weniger gut gefallen; der Rezensent ist sich jedoch sicher, dass für jeden etwas dabei ist, was nicht nur zum Schmunzeln, sondern eventuell auch zum Nachdenken anregen wird.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Kronenberg, Tom/Willimann, Lea/Beutelspacher, Albrecht/Popovic, Laila: Mathe macht lustig, Lappan 2012, ISBN 978-3-8303-3320-3, geb. 84 Seiten, 14,95 €.

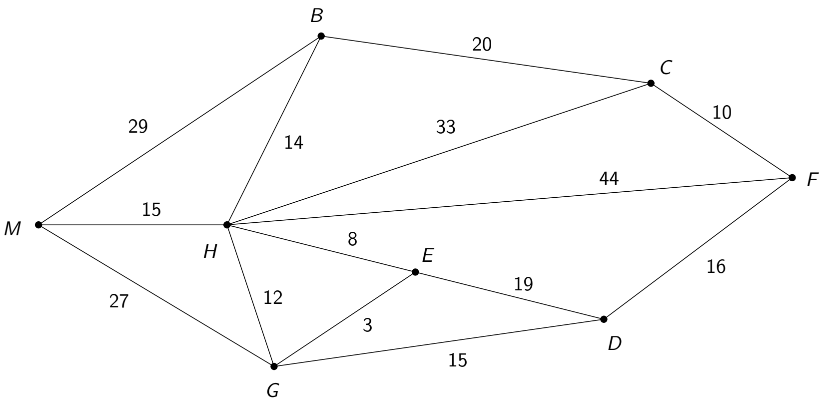
Art des Buches:	Cartoon-Sammlung
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 112

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Schnellster Wanderweg

Mathis möchte von Mainz (M) nach Finthen (F) wandern, wobei er nur Feldwege benutzen will, die in seiner Wanderkarte (siehe Graphik) samt der jeweils benötigten Wanderzeit (in Minuten) eingezeichnet sind – die von M und F verschiedenen Buchstaben geben jeweils Wegkreuzungen an.



Auf welchem Weg kommt er am schnellsten ans Ziel? (H.F.)

Lösung:

Mit $|XY|$ bezeichnen wir die Zeit, die man von X längs des Weges XY bis zu Y benötigt.

Da nur die drei Wegstücke CF, DF und HF Endstücke eines jeden Weges nach F sind, werden wir zunächst den minimalen Zeitaufwand von M nach C und von M nach D bestimmen.

Von M nach C kommen nur drei Wege in Frage (jeder andere Weg ist ein Umweg): MBC mit $|MBC| = 49$, MHC mit $|MHC| = 48$ und $MHBC$ mit $|MHBC| = 49$. Von M nach D kommen nur vier Wege in Frage: MGD mit $|MGD| = 42$, $MHGD$ mit $|MHGD| = 42$, $MHED$ mit $|MHED| = 42$ und $MHEGD$ mit $|MHEGD| = 41$. Nun gilt: $|MHF| = 59$. $|MHC| + |CF| = 58$. $|MHEGD| + |DF| = 57$.
Also ist $MHEGDF$ der schnellste Weg.

II. Anti-magisches Quadrat

Die Zahlen 1, 2, ..., 9 sind so in die nebenstehenden Kästchen einzutragen, dass die Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen sämtlich verschieden sind. (H.F.)

Lösung:
Eine Lösung ist beispielsweise:

7	6	3
5	1	2
8	4	9

Es gibt noch viele weitere Lösungen.

III. Jahreszahlen-Knobelei

Ersetze die Buchstaben jeweils durch Ziffern so, dass korrekte Additionen entstehen. Dabei dürfen verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden.

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rr} & P\,Q\,R\,S \\ & P\,Q\,R \\ & P\,Q \\ + & P \\ \hline & 2\;0\;1\;3 \end{array} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{rr} & T\,U\,V\,W \\ & U\,V\,W \\ & V\,W \\ + & W \\ \hline & 2\;0\;1\;2 \end{array}$$

(H.F.)

Lösung:
Zu (a):

$$(1)\quad \begin{array}{rl} P\,Q\,R\,S = & 1000\cdot P + 100\cdot Q + 10\cdot R + S \\ P\,Q\,R = & 100\cdot P + 10\cdot Q + R \\ P\,Q = & 10\cdot P + Q \\ P = & P \\ \hline 2\;0\;1\;3 = & 1111\cdot P + 111\cdot Q + 11\cdot R + S \end{array}$$

Wegen $P \neq 0$ folgt aus (1): $P = 1$ und daher $111Q + 11R + S = 2013 - 1111 = 902$. Wäre $Q = 9$, so wäre $111Q > 902$; wäre $Q \leq 7$, so wäre $111Q + 11R + S \leq 777 + 99 + 9 < 902$. Also ist $Q = 8$. Aus (1) ergibt sich damit: $11R + S = 2013 - 1111 - 888 = 14$. Wäre $R = 0$, so wäre $S = 14$. Also ist $R = 1$ und $S = 3$.
Die Addition lautet somit: $1813 + 181 + 18 + 1 = 2013$.

Zu (b): Genau wie in (a) erhält man

(2) $2012 = 1000T + 200U + 30V + 4W$.

Zunächst sind T, U, V und W sämtlich ungleich 0.
Aus (2) folgt: Wäre $T > 1$, so wäre $1000T + 200U \geq 2000 + 200 > 2012$. Also ist $T = 1$ und $200U + 30V + 4W = 2012 - 1000 = 1012$. Wäre nun $U \geq 5$, so wäre $200U + 30V \geq 1000 + 30 > 1012$; wäre $U \leq 3$, so wäre $200U + 30V + 4W \leq 600 + 270 + 36 < 1012$. Somit ist $U = 4$, und es gilt $30V + 4W = 2012 - 1000 - 800 = 212$. Wäre $V \geq 7$, so wäre $30V + 4W \geq 210 + 4 > 212$; wäre $V \leq 5$, so wäre $30V + 4W \leq 150 + 36 < 212$. Daher ist $V = 6$ und mithin $W = 8$.
Die Addition lautet somit: $1468 + 468 + 68 + 8 = 2012$.

IV. Ein Bildungsgesetz für Quadratzahlen

Die Zahlen z_n einer Folge sind nach der Regel $z_n = \frac{4}{3} \cdot 10^n - \frac{1}{3}$ gebildet, also $z_1 = 13$, $z_2 = 133$, $z_3 = 1333$ usw. Schreibe nun mindestens für $n = 1, 2, 3, \dots, 6$ die Zahlen z_n^2 hin. Was fällt Dir an diesen Quadratzahlen auf? Beschreibe die Zahl z_{2012}^2. Gib eine Bildungsregel für die Zahl z_n^2 an! (H.F.)

Lösung:

n	z_n	z_n^2
1	13	169
2	133	17689
3	1333	1776889
4	13333	177768889
5	133333	17777688889
6	1333333	1777776888889

Die Eigenschaften der Zahlen z_n und z_n^2 liest man aus den obenstehenden Zahlenpyramiden ab. Dies kann man beispielsweise aus der Bildungsregel für z_n beweisen:

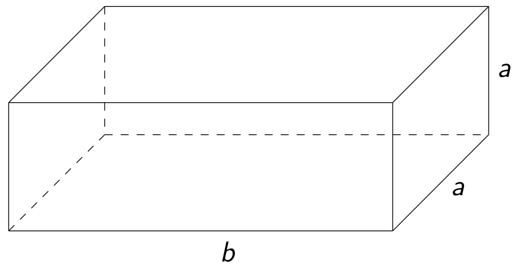
$$z_n^2 = \tfrac{1}{9}(16 \cdot 10^{2n} - 8 \cdot 10^n + 1) = 1\underbrace{777\dots77}_{n-1 \text{ Ziffern}}6\underbrace{888\dots88}_{n-1 \text{ Ziffern}}9, \text{ denn:}$$

$\frac{16}{9}10^{2n} = 1 \cdot 10^{2n} + \frac{70}{9} \cdot 10^{2n-1}$, $\frac{70}{9} \cdot 10^{2n-1} = 7 \cdot (10^{2n-1} + \dots + 10^{n+1}) + \frac{70}{9} \cdot 10^n$, $\frac{70-8}{9} \cdot 10^n = 6 \cdot 10^n + \frac{80}{9} \cdot 10^{n-1}$, $\frac{80}{9} \cdot 10^{n-1} = 8 \cdot (10^{n-1} + \dots + 10) + \frac{80}{9}$, $\frac{80+1}{9} = 9$.

Für $n = 2012$ ist also $z_{2012}^2 = 1\underbrace{777\dots77}_{2011 \text{ Ziffern}}6\underbrace{888\dots88}_{2011 \text{ Ziffern}}9$.

V. Fehlerhafte Bauanleitung

Peter erhält von seinem Ausbilder eine Fertigungsskizze eines Quaders, der ein Volumen $V = 150\text{cm}^3$ haben soll. Leider fehlen die Maßangaben der Seitenlängen a und b.



Schafft es Peter, den Quader trotzdem anzufertigen? Die Seitenlängen sollen dabei ganzzahlig (in cm) sein. (AK)

Lösung:

Offensichtlich ist $a = 1\text{cm}$, $b = 150\text{cm}$ eine Möglichkeit, die Seitenlängen zu wählen, um das Volumen $V = 150\text{cm}^3$ zu erhalten.

Nun nehmen wir an, a ist $\neq 1\text{cm}$. Da $V = a \cdot a \cdot b$ ist und die Seitenlängen ganzzahlig sein sollen, betrachten wir die Primfaktorzerlegung von 150:

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Jeder Primfaktor der Seitelänge a muss doppelt vorkommen, also ist $a = 5\text{cm}$. Primfaktoren von 150, die nicht mehrfach auftreten, können keine Primfaktoren von a sein, sondern nur von b, also ist $b = 6\text{cm}$.

Peter kann den Quader also auf genau zwei verschiedene Arten anfertigen, weiß jedoch nicht, welche der beiden Varianten in der Anleitung beabsichtigt war.

VI. Die richtige Mischung

Der Wetterbericht kündigt Frost an und Herr Ford befürchtet, dass sein Scheibenwasser einfrieren könnte. Es sind 8 Liter Wasser gemischt mit 4 Liter Frostschutzmittel in dem Behälter seines Wagens, aber für diese Nacht sollten es 50% Frostschutzmittel sein. Also beschließt Herr Ford, einen Teil der Mischung durch reines Frostschutzmittel zu ersetzen.

a) Wie viel Flüssigkeit muss Herr Ford durch reines Frostschutzmittel ersetzen, um eine Mischung mit 50% zu erhalten?

b) Herr Benz hört die Warnung ebenfalls, aber er hat nur eine Ersatzflasche, die eine Mischung von 80% Frostschutzmittel und 20% Wasser enthält. Wie viel Flüssigkeit muss Herr Benz ersetzen, wenn sein Behälter für das Scheibenwasser 9 Liter Wasser gemischt mit 6 Liter Frostschutzmittel enthält und er ebenfalls eine 50%-Mischung haben möchte?

Hinweis: Gehe davon aus, dass der Behälter jeweils komplett gefüllt ist und er auch anschließend komplett gefüllt sein soll. (CE)

Lösung:

a) Es müssen für die 50%-Mischung 6 Liter Wasser, also 9 Liter der ursprünglichen Mischung, im Kühler sein, daher ersetzt Herr Ford 3 Liter der Mischung durch reines Frostschutzmittel.

Er ersetzt x Liter der Mischung durch Frostschutzmittel, um 6 Liter Wasser zu erhalten.

$$6 = \frac{2}{3}(12 - x) \quad \Longrightarrow \quad x = 3,$$

daher müssen 3 Liter von den 12 Litern abgelassen werden.

b) Herr Benz ersetzt y Liter der Mischung in seinem Wagen, um 7,5 Liter Wasser zu erhalten:

$$7{,}5 = \frac{9}{15}(15 - y) + \frac{1}{5}y = 9 - \frac{2}{5}y \quad \Longrightarrow \quad y = 3{,}75.$$

Herr Benz muss also 3,75 Liter Flüssigkeit ersetzen.

Benz	vorher				nachher
Gesamt	15	-3,75	+	3,75	15
Wasser	9	-2,25	+	0,75	7,5
Frostschutz	6	-1,5	+	3	7,5

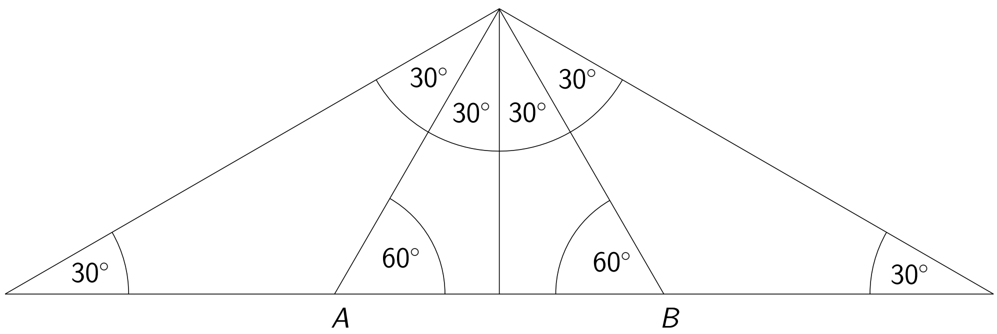
VII. Dreieckszerlegung

Zerlege ein gleichschenkliges Dreieck mit 30°-Winkeln an der Basis in fünf ähnliche Dreiecke – also gleichschenklige Dreiecke mit 30°-Winkeln an der Basis. (H.F.)

Lösung:

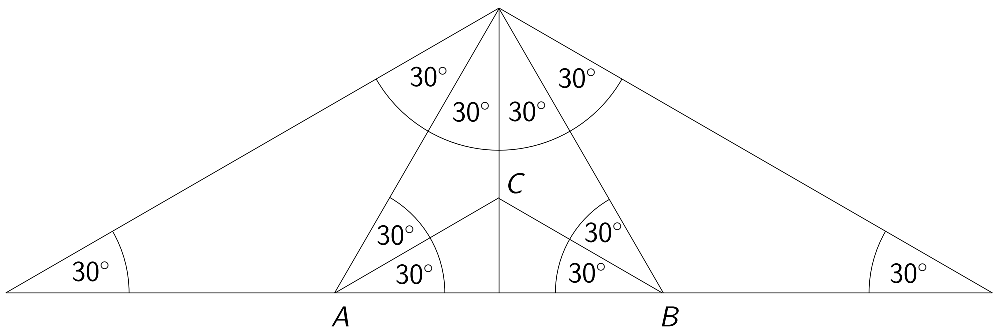
1. Schritt:

Zerlege den 120°-Winkel des Dreiecks in vier 30°-Winkel.



2. Schritt:

Konstruiere das Dreieck $\triangle ABC$.



Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Zahlen mit Ziffernfolge 2013

a) Wie viele sechsstellige Zahlen gibt es, in denen die Ziffernfolge 2013 zusammenhängend vorkommt?

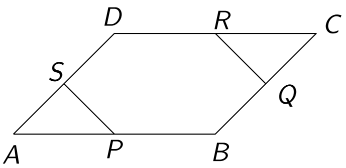
b) Welches ist die kleinste, welches ist die größte dieser Zahlen? (WJB)

II. Zahlenauswahl

Aus der Menge M der Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2012$ wird eine beliebige Teilmenge T mit 1007 Zahlen ausgewählt.

Zeige: In T gibt es zwei Zahlen a und b, für die $a + b = 2013$ ist. (H.F.)

III. Flächenberechnung



Im Parallelogramm $ABCD$ seien P, Q, R, S die Seitenmittelpunkte. Welchen Anteil hat die Fläche des Sechsecks $PBQRDS$ an der Parallelogrammfläche? (H.F.)

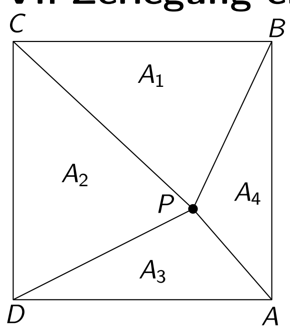
IV. Besondere Brüche

Man kann aus den neun Ziffern 1, 2, ..., 9 Brüche herstellen, in deren Zähler und Nenner zusammen jede Ziffer genau ein Mal vorkommt. Beispiel: $\frac{4392}{17568} = \frac{1}{4}$. Kannst du auf diese Weise die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ herstellen? (H.F.)

V. Kleinstes Vielfaches

Finde das kleinste Vielfache von 5 mit der Quersumme 45. (WJB)

VI. Zerlegung eines Quadrats



P sei ein Punkt im Innengebiet eines Quadrats $ABCD$. Verbindet man P mit den Ecken A, B, C und D, so entstehen vier Dreiecke mit den Flächen A_1, A_2, A_3 und A_4. Untersuche, ob $A_1 + A_3 = A_2 + A_4 = \frac{1}{2}|ABCD|$ ist. (H.F.)

VII. Problem eines Gärtners

Wie kann man zehn Bäumchen so pflanzen, dass sie in fünf geraden Linien mit jeweils vier Bäumen stehen? (Eine Zeichnung genügt!) (gefunden: H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1064: Ohne Taschenrechner!

Zeige: Der Wert der alternierenden Reihe $2012^2 - 2011^2 + 2010^2 \pm \ldots - 3^2 + 2^2 - 1^2$ ist ein Vielfaches von 2013. (H.F.)

Aufgabe 1065: Bemerkenswerte Summendarstellung von 2013

Es sei $S_n = \frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Kann man n so wählen, dass $S_n = 2013$ ist? Begründe Deine Antwort. (H.F.)

Aufgabe 1066: Eine Jahreszahlen-Aufgabe

Es sei $\mathbb{M} = \{z_1, z_2, \ldots, z_{11}\}$ eine Menge beliebiger, jedoch paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen, die sämtlich ≤ 2013 sind. Dann gibt es in jeder solchen Menge $\mathbb{M}$ stets zwei Zahlen z_i, z_k, für die gilt: $1 < \frac{z_i}{z_k} \leq 2$. Zeige dies. (H.F.)

Aufgabe 1067: Verkauf von Äpfeln

Zwei Obstbauern aus Rheinhessen verkaufen Äpfel in Beuteln zu je 5kg auf dem Mainzer Wochenmarkt. Am Ende des Tages haben sie zusammen 100 Beutel verkauft. Dabei hat jeder gleich viel Geld eingenommen. Hätte der erste Bauer auch die Äpfel des zweiten Bauern verkauft, so hätte er 720 Euro mehr erlöst. Hätte aber der zweite Bauer auch die Äpfel des ersten verkauft, so hätte sein Mehrerlös nur 320 Euro betragen. Wie viel hat jeder Bauer verkauft, und zu welchem Preis?

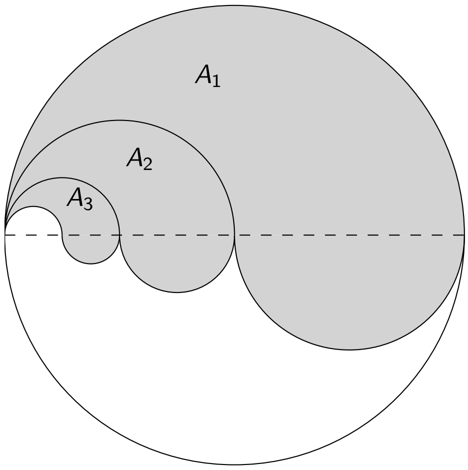
(gefunden: WJB, nach Leonhard Euler (1707–1783))

Aufgabe 1068: Stadtlauf

Bei einer Laufveranstaltung gibt es den Volkslauf über 5036m und den Stadtlauf über genau 10000m. Läufer des Volkslaufs laufen drei Runden, die des Stadtlaufs sechs Runden, wobei der Start jeweils außerhalb der gewöhnlichen Strecke liegt und jeweils dort in die Runde führt, wo sich das Ziel befindet. Dabei starten alle Läufer am selben Start, d.h. sowohl die Volks- als auch die Stadtläufer laufen die selbe Strecke zur Runde. Nach jedem Kilometer wird dieser mit einer Tafel am Streckenrand angezeigt. In welcher Reihenfolge wird ein Läufer die verschiedenen Kilometertafeln innerhalb der ersten Runde passieren?

(Bettina Diller, Städtische Berufsschule für Informationstechnik, München)

Aufgabe 1069: Yin und Yang



In einem Kreis vom Radius 1 zeichnen wir die nebenstehenden Figuren (dabei bestehen die gezeichnete Kurven jeweils aus Halbkreisen mit den Radien 1, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$):

a) Welche Inhalte haben jeweils die grauen Flächen A_1, A_2 und A_3?

b) Wenn man das Verfahren so weiterführt, was ist die Gesamtfläche, die gefärbt wird?

(WJB)

Aufgabe 1070: Teilbarkeit durch n!

Das Produkt aus n unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets durch $n!$ teilbar.

Trifft diese Behauptung zu?

Hinweis: Die *Fakultät* ! ist so definiert: $1! := 1$ und $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ für eine natürliche Zahl $n > 1$. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 112

Klassen 9–13

Aufgabe 1057: Wo liegt der Fehler?

Den Mathematiker Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898) kennen heute nur noch wenige, aber als Kinderbuchverfasser Lewis Carroll so wunderbarer Geschichten wie „Alice im Wunderland" und als Erfinder schöner mathematischer Puzzles und logischer Paradoxa ist er heute noch berühmt.

Eines seiner mathematischen Rätsel in nicht wortgetreuer Übersetzung ist dieses:

> Es seien $x = 1$ und $y = 1$. Dann gilt: $2(x^2 - y^2) = 0$ und $5(x - y) = 0$. Also ist $2(x^2 - y^2) = 5(x - y)$ oder $2(x + y)(x - y) = 5(x - y)$. Vergleicht man nun die Faktoren vor $(x - y)$, so ergibt sich: $2(x + y) = 5$, sodass $2 \cdot 2 = 5$ wegen $x = y = 1$ gilt. Wo liegt der Fehler? (gefunden: H.F.)

Lösung:

Der Übergang von $2(x + y)(x - y) = 5(x - y)$ nach $2(x + y) = 5$ bedeutet algebraisch, dass beide Seiten durch $(x - y)$ und damit durch Null dividiert werden. Diese nicht erlaubte Operation verursacht den Unsinn $2 \cdot 2 = 5$.

Aufgabe 1058: Strom sparen

Herrn Ampers Stromrechnung für den Oktober 2010 bis September 2011 betrug $888,98$ Euro. Obwohl er im darauf folgenden Jahr 4,3% weniger Elektrizität verbraucht hat, beträgt seine neue Rechnung $922,75$ Euro, also 3,8% mehr. Um wieviel Prozent ist der Strompreis also gestiegen? (WJB)

Lösung:

Wäre der Strompreis unverändert, so betrüge die neue Rechnung $(100-4{,}3)\% = 95{,}7\%$ von $888,98$ Euro, also 850,75 Euro. Der neue Betrag ist das $\frac{922{,}75}{850{,}75} = 1{,}0846$-fache davon. Der Strompreis ist also um 8,46% gestiegen.

Aufgabe 1059: Teilbarkeit von Folgengliedern

Die Folge a_n sei gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n^5 + 11a_n + 10$. Gibt es keine, endlich oder unendlich viele Folgenglieder, die durch 3, 4, 5 beziehungsweise 7 teilbar sind? (Robin Fritsch, Gymnasium Lehrte, Klasse 11)

Lösung:

Teilbarkeit durch 3 und 7:

Wir beweisen mit vollständiger Induktion, dass $a_n \equiv 1 \mod 21$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wegen a_1 gilt die Aussage für $n = 1$. Wenn die Aussage nun für ein beliebiges $n \geq 1$ gilt, folgt $a_{n+1} = a_n^5 + 11a_n + 10 \equiv 1^5 + 11 \cdot 1 + 10 = 22 \equiv 1 \mod 21$ und damit gilt die Aussage auch für $n+1$. Also ist $a_n \equiv 1 \mod 21$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da aber $21 = 3 \cdot 7$ ist, gilt damit auch $a_n \equiv 1 \mod 3$ und $a_n \equiv 1 \mod 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist kein Folgenglied durch 3 oder 7 teilbar.

Teilbarkeit durch 5:

Wir zeigen, dass sich in den Resten von a_n modulo 5 eine Periode ergibt, in der die 0 nicht vorkommt. Wenn $a_n = 1 \mod 5$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n^5 + 11a_n + 10 \equiv 1^5 + 11 \cdot 1 + 10 = 22 \equiv 2 \mod 5\\
a_{n+2} &= a_{n+1}^5 + 11a_{n+1} + 10 \equiv 2^5 + 11 \cdot 2 + 10 = 64 \equiv -1 \mod 5\\
a_{n+3} &= a_{n+2}^5 + 11a_{n+2} + 10 \equiv (-1)^5 + 11 \cdot (-1) + 10 = -2 \mod 5\\
a_{n+4} &= a_{n+3}^5 + 11a_{n+3} + 10 \equiv (-2)^5 + 11 \cdot (-2) + 10 = -44 \equiv 1 \mod 5
\end{aligned}$$

Da $a_1 = 1$ ist, beginnt die Periode bei $n = 1$ und es wiederholen sich stets die Reste 1, 2, -1 und -2. Also ist nie $a_n \equiv 0 \mod 5$ und daher kein Folgenglied durch 5 teilbar.

Teilbarkeit durch 4:

Wir zeigen, dass unendlich viele Folgenglieder durch 4 teilbar sind. Es ist $a_1 = 1$, $a_2 = 1^5 + 11 \cdot 1 + 10 = 22 \equiv 2 \mod 4$ und damit $a_3 \equiv 2^5 + 11 \cdot 2 + 10 = 64 \equiv 0 \mod 4$. Damit ist a_3 durch 4 teilbar. Wenn nun a_n durch 4 teilbar ist, folgt

$$a_{n+1} = a_n^5 + 11a_n + 10 \equiv 0^5 + 11 \cdot 0 + 10 = 10 \equiv 2 \mod 4$$
$$a_{n+2} = a_{n+1}^5 + 11a_{n+1} + 10 \equiv 2^5 + 11 \cdot 2 + 10 = 64 \equiv 0 \mod 4$$

und auch a_{n+2} ist durch 4 teilbar. Also gibt es unendlich viele durch 4 teilbare Folgenglieder.

Aufgabe 1060: Christbaumkugeln

In einer Schale liegen 21 Christbaumkugeln, die entweder rot, blau oder grün gefärbt sind. Es sei bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, bei Ziehung zweier Kugeln aus der Schale zwei gleichfarbige zu erhalten, $\frac{3}{10}$ beträgt.

Ermittle alle möglichen Anzahlen von roten, blauen beziehungsweise grünen Kugeln, die diese Bedingungen erfüllen.

(Robin Fritsch, Gymnasium Lehrte, Klasse 11)

Lösung:

Es seien a rote, b blaue und c grüne Kugeln in der Schale. Offensichtlich ist dann $a + b + c = 21$. Die Wahrscheinlichkeit zwei rote Kugeln zu ziehen beträgt dann $\frac{a}{21} \cdot \frac{a-1}{20}$. Da dies analog auch für blaue und grüne Kugeln gilt, ergibt sich die Gleichung

$$\frac{a(a-1)}{21 \cdot 20} + \frac{b(b-1)}{21 \cdot 20} + \frac{c(c-1)}{21 \cdot 20} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) = 126.$$

Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem quadratischen Mittel

$$\sqrt{\tfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \tfrac{a+b+c}{3} \text{ gilt also } a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(\tfrac{a+b+c}{3})^2.$$

Daraus folgt mit $a + b + c = 21$ nun

$$126 = a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) \geq 3(\tfrac{a+b+c}{3})^2 - (a + b + c) = 126.$$

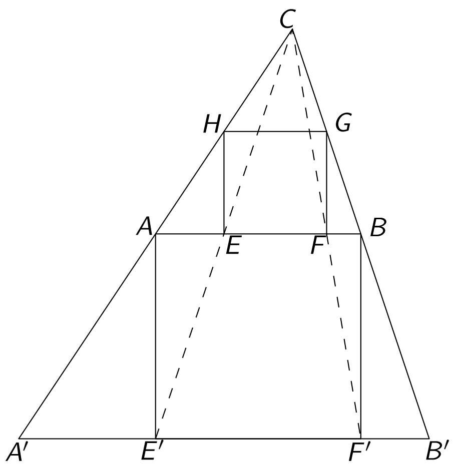
Somit muss in der verwendeten Ungleichung offensichtlich der Gleichfall eintreten. Dies ist bei den Mittelungleichungen genau dann der Fall, wenn alle gemittelten Zahlen gleich sind. Also folgt schließlich $a = b = c = 7$. Das heißt, es befinden sich 7 rote, 7 blaue und 7 grüne Kugeln in der Schale.

Aufgabe 1061: Quadrat im Dreieck

Konstruiere in ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ ein Quadrat $EFGH$ so, dass die Seite $\overline{EF}$ des Quadrats auf der Seite $\overline{AB}$ und die Endpunkte G und H auf den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ des Dreieck liegen.

(H.F.)

Lösung:



1. Konstruiere das Quadrat $AE'F'B$ und mit seiner Hilfe das Dreieck $\triangle A'B'C$.
2. Betrachte das Dreieck $\triangle A'B'C$ als das Bild des Dreiecks $\triangle ABC$ bei einer zentrischen Streckung von C aus.
3. Rekonstruiere die Urbilder E und F der Punkte E' und F' mit Hilfe der Abbildungsstrahlen $\overline{CE'}$ und $\overline{CF'}$. Die Strecke $\overline{EF}$ ist dann die auf $\overline{AB}$ liegende Seite des gesuchten Quadrats.
4. Konstruiere mit Hilfe von $\overline{EF}$ das Viereck $EFGH$. Dieses Viereck ist als Urbild des Quadrats $E'F'BA$ ebenfalls ein Quadrat.

Aufgabe 1062: Zahlenknobelei

Ersetze in der nebenstehenden Rechnung jeden Buchstaben g durch eine gerade Ziffer und jeden Buchstaben u durch eine ungerade Ziffer, sodass eine richtige Multiplikation entsteht. (H.F.)

$$\begin{array}{r} g\,g\,u \cdot u\,u \\ \hline g\,u\,g\,u \\ g\,u\,u \\ \hline u\,u\,u\,u\,u \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lr} (1) & A\,B\,c \cdot d\,e \\ \hline (2) & C\,f\,D\,g \\ (3) & E\;i\;k\; \\ \hline (4) & l\,m\,n\,p\,q \end{array}$$

Wir bezeichnen gerade Ziffern mit Großbuchstaben, ungerade Ziffern mit Kleinbuchstaben; die vier Zeilen der Rechnung bezeichnen wir mit (1) bis (4).

(3): $Eik \leq 899$. Wäre $d = 1$ in Zeile (1), so wäre in (3): $Eik = ABc$, also $i = B$ – Widerspruch. Wäre $d \geq 5$, so wäre $ABc \cdot d \geq 201 \cdot 5 > 1000$, was Zeile (3) widerspricht. Daher ist $d = 3$.

(1): Sei $A \geq 4$. Dann ist $ABc \cdot 3 > 1000$, was Zeile (3) widerspricht. Daher ist $A = 2$.

(1),(2): Es ist $2Bc \cdot e = CfDg \geq 2101$. Wäre nun $e \leq 7$, so wäre $2Bc \cdot 7 \leq 289 \cdot 7 = 2023 < 2101$ – ein Widerspruch. Folglich ist $e = 9$.

(1),(2): $2Bc \cdot 9 \leq 289 \cdot 9 = 2601$. Aus Zeile (2) folgt: $C = 2$. Es gilt $C + E +$ (größtmöglicher Übertrag 1) $\leq 2 + E + 1 = lm$. Wäre $E \leq 6$, so wäre $2 + E + 1 < 10$ – ein Widerspruch zu (4). Somit ist $E = 8$, woraus $l = m = 1$ folgt.

(1),(3): $2Bc \cdot 3 = 8ik \geq 811$. Wäre $B \leq 6$, so wäre $2Bc \cdot 3 \leq 269 \cdot 3 = 807 < 811$ – ein Widerspruch. Somit ist $B = 8$. Weiter ist $28c \cdot 3 = 8ik$. Wäre hier

$c = 1$, 3, 7 oder 9, so rechnet man leicht nach, dass in allen vier Fällen i gerade ist – ein Widerspruch. Mithin ist $c = 5$.

Die Rechnung lautet also:

$$\begin{array}{r} 285 \cdot 39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

Diese Lösung ist nach obiger Konstruktion eindeutig.

Aufgabe 1063: Schnittpunkt dreier Tangentialebenen

Bestimme den Schnittpunkt der Tangentialebenen an der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ in den Punkten $(1|0|-1)$, $(1|-\frac{1}{2}\sqrt{3}|\frac{1}{2})$ und $(1|\frac{1}{2}\sqrt{3}|\frac{1}{2})$.

(Peter van Dongen, Universität Mainz)

Lösung:

Die gegebene Kugel k um den Ursprung O mit dem Radius $\sqrt{2}$ ist symmetrisch zu jeder Ebene durch O und rotationssymmetrisch zu jeder Geraden durch O.

Es seien $A = (1|0|-1)$, $B = (1|-\frac{1}{2}\sqrt{3}|\frac{1}{2})$ und $C = (1|\frac{1}{2}\sqrt{3}|\frac{1}{2})$. Wegen $b_2 = -c_2$ sowie $b_1 = c_1$ und $b_3 = c_3$ liegen die Punkte B und C und damit die Tangentialebenen T_B und T_C spiegelbildlich zur x_1-x_3-Koordinatenebene $x_2 = 0$. Ihre Schnittgerade kann daher nur in der Ebene $x_2 = 0$ liegen, also gilt für den Schnittpunkt $S = (s_1|0|s_3)$.

Wählt man die x_1-Achse als Rotationsachse und die x_2-x_3-Koordinatenebene als „Äquatorebene“, so liegen A, B und C auf dem Breitenkreis k_φ zu $\varphi = 45°$ „nördlicher Breite“

$$k_{45°}\colon x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 = 1$$

mit Radius $r_{45°} = 1$ in der „Höhe“ $h_{45°} = r_{45°} = 1$ über der Äquatorebene $x_1 = 0$. Alle Tangentialebenen zu Punkten P_φ auf einem Breitenkreis k_φ ($\varphi \neq 0°$) schneiden wegen der Rotationssymmetrie die Rotationsachse aber an derselben, nur von φ abhängigen Stelle q_φ, d.h. diese Tangentialebenen schneiden sich in einem Punkt $Q_\varphi = (q_\varphi|0|0)$. Für $\varphi = 45°$ sind der Berührpunktradius OP_φ und die dazu senkrechte Strecke $P_\varphi Q_\varphi$ gleich lang und beide um 45° geneigt. Daher liegt dieser Achsenschnittpunkt Q_φ genau doppelt so hoch über der Äquatorebene wie der Breitenkreis, sodass hier $s_1 = q_{45°} = 2r_{45°} = 2$ ist und somit $S = (2|0|0)$ der gesuchte Schnittpunkt ist. (KG)

Alternative Lösung:

Die Normalenform einer Ebene E ist gegeben mit

$$E\colon (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0,$$

wobei $\vec{p}$ ein Stützvektor eines Punktes der Ebene und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene sind.

Ausgeschrieben bedeutet dies:

$$(x_1 - p_1) \cdot n_1 + (x_2 - p_2) \cdot n_2 + (x_3 - p_3) \cdot n_3 = n_1x_1 - n_1p_1 + n_2x_2 - n_2p_2 + n_3x_3 - n_3p_3 = 0.$$

Der Schnittpunkt S mit den Koordinaten $(x_1|x_2|x_3)$ liegt auf allen drei Tangentialebenen, erfüllt also alle drei Ebenengleichungen. Die Normalenvektoren der Tangentialebene zeigen in Richtung des Kugelmittelpunktes, der hier dem Ursprung $(0|0|0)$ entspricht, oder genau in die gegengesetzte Richtung. Daher kann man als Normalenvektoren der drei Tangentialebenen (in dieser Reihenfolge) wählen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &1x_1 - 1 + 0x_2 - 0 - 1x_3 - 1 = 0 & & x_1 - x_3 - 2 = 0 \\ &1x_1 - 1 + (-\frac{1}{2}\sqrt{3})x_2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4} = 0 & \Leftrightarrow \quad & x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 2 = 0 \\ &1x_1 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}x_2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4} = 0 & & x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 - x_3 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 2 = 0 \\ & \sqrt{3}x_2 = 0 \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $x_2 = 0$ und die beiden ersten Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$x_1 + x_3 - 2 = 0,\ x_1 + \frac{1}{2}x_3 - 2 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 + x_3 = 2,\ \frac{1}{2}x_3 = 0.$$

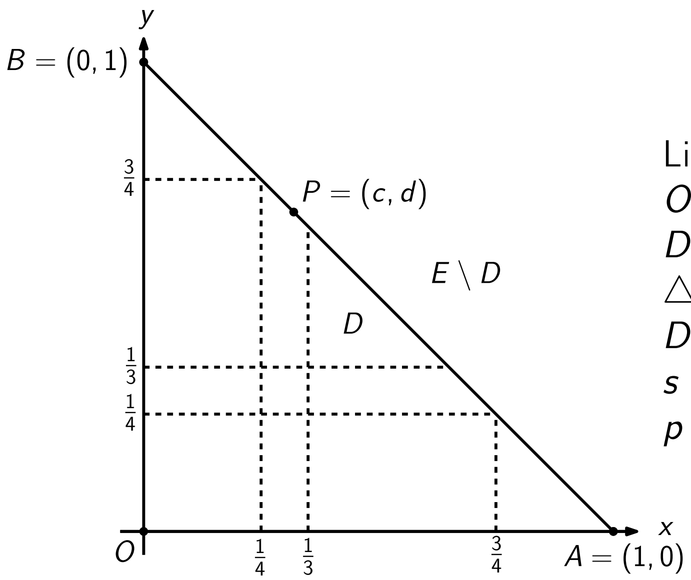
Aus der zweiten Gleichung folgt nun $x_3 = 0$ und damit $x_1 = 2$.
Der Schnittpunkt aller drei Ebenen ist also $S = (2|0|0)$. (MG)

Ein undurchdringliches Punkte-Dickicht?

von Hartwig Fuchs

In der mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene sei E die Menge der Punkte (x, y) mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Ein Punkt (x, y) aus E heißt *rational*, wenn x und y rationale Zahlen sind; er heißt *irrational*, wenn x oder y irrational ist.

Die Punktemenge E werde nun von der Strecke $s = AB$ mit den Endpunkten $A = (1, 0)$ und $B = (0, 1)$ in die Teilmengen D und $E \setminus D$ zerlegt: D ist die Menge der Punkte im Dreieck $\triangle ABO$ und auf seinem Rand $AO \cup OB$, O der Punkt $(0, 0)$; $E \setminus D$ ist die Menge der Punkte von E oberhalb und auf der Strecke s.



Liste feststehender Bezeichnungen:
$O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$
$D = \{(x, y) \,|\, (x, y)$ im Dreieck $\triangle ABO$ oder auf dem Rand $AO \cup OB\}$
D^*: die rationalen Punkte von D
$s = AB$
$p = OP$ mit $P \in s$, $P \neq A$, $P \neq B$

Aus D seien nun sämtliche irrationalen Punkte entfernt – die Restmenge aus rationalen Punkten sei mit D^* bezeichnet. Jede geradlinige Verbindung zweier Punkte P und Q aus D^* besteht nur aus rationalen Punkten. Gilt das auch dann noch, wenn einer der Punkte P, Q in der Strecke s liegt und irrational ist? Dieser Frage wollen wir nachgehen.

Es sei P ein Punkt der Strecke s. Dann heißt P *vom Punkt O aus sichtbar*, wenn sich auf der geradlinigen Verbindung $p = OP$ von O und P kein rationaler Punkt befindet. Damit haben wir uns ein Problem geschaffen:

(1) Gibt es Punkte P in der Strecke s, die von O aus sichtbar sind?

Es sei $P = (c, d)$ ein Punkt der Strecke s, $P \neq A$ und $P \neq B$. Dann gibt es für jedes rationale r_1 mit $0 < r_1 < c$ in D^* eine *vertikale* Punktemenge $V(r_1) = \{(r_1, y) \mid 1 > y > d\}$ und für jedes rationale r_2 mit $d < r_2 < 1$ eine *horizontale* Punktemenge $H(r_2) = \{(x, r_2) \mid 0 < x < c\}$ aus jeweils unvorstellbar nahe beieinander liegenden rationalen Punkten – vergleiche die Figur. Und die unendlich vielen Mengen $V(r_1)$ und $H(r_2)$ bilden in ihrer Gesamtheit, wenn man von O aus in Richtung des Punktes P blickt, ein anscheinend undurchdringliches Dickicht aus rationalen Punkten. Deshalb wird man auf jeder Verbindung von O und P rationale Punkte erwarten – was dann zu der Vermutung führt:

(2) Von O aus durch D^* blickend ist kein Punkt P der Strecke s sichtbar – auf jeder Strecke $p = OP$ gibt es stets rationale Punkte $\neq O$.

Die Endpunkte $A = (1, 0)$ und $B = (0, 1)$ der Strecke $s = AB$ sind von O aus nicht sichtbar. Wie aber steht es mit anderen Punkten von s? Die Untersuchung

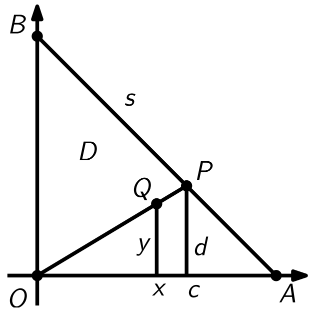
dieser Frage führen wir mit folgendem Argument:
Mit w sei eine Irrationalzahl bezeichnet, für die $w = \sqrt{r}$ ist mit einem positiven rationalen r. Dann gilt:

(3) Für jedes rationale u, $u > 0$, und für jedes irrationale w, $0 < w < 1$, ist uw eine Irrationalzahl.

Um (3) zu beweisen, treffen wir die Annahme:
Zu einer gegebenen Irrationalzahl w, $w > 0$, gibt es rationale Zahlen u, $u > 0$, so dass uw rational ist.
Es sei dann M die Menge der Zahlen u, für die uw rational ist. M ist nach Annahme nicht leer.
Setzt man $u = \frac{m}{n}$ mit positiven ganzen Zahlen m und n, dann gibt es Zahlen u in M mit kleinster Summe $m + n$ und k sei die kleinste dieser Zahlen. Dann ist k die kleinste Zahl in M überhaupt und kw ist rational. Die Differenz $l = k - kw$ ist daher ebenfalls rational und wegen $w < 1$ ist $l > 0$.
Auch lw ist rational, weil $lw = kw - kw^2$ ist mit rationalen kw und kw^2. Aus der Rationalität von l und von lw folgt: $l \in M$.
Daraus ergibt sich jedoch ein Widerspruch: Wegen $l = k - kw = k(1 - w)$ und $0 < 1 - w < 1$ ist $l < k$ und somit ist k nicht die kleinste Zahl in M.
Also ist die oben gemachte Annahme für keine irrationale Zahl w, $0 < w < 1$, zulässig, was (3) beweist.

Aus (3) lässt sich eine Aussage über die Elemente der nicht reduzierten Punktmenge D herleiten, mit der sich die Frage (1) beantworten lässt.

Mit $P = (c, d)$ sei wie oben ein Punkt der Strecke s mit $P \neq A$ und $P \neq B$ und daher $0 < c$, $d < 1$ bezeichnet, ebenso sei p die Strecke OP. Dann gibt es zu jedem Punkt $Q \in D$, jedoch $Q \notin OA$ und $Q \notin OB$, genau eine Strecke $p = OP$ mit $Q \in p$.
Für die Koordinaten x, y eines Punktes $Q \in p$ mit $Q \neq O$ gilt dann nach dem Strahlensatz:



$\frac{y}{x} = \frac{d}{c}$ mit $0 < \frac{d}{c} < \infty$.
Jeder Punkt $Q = (x, y)$, $Q \neq O$, der Strecke p erfüllt daher die Gleichungen $y = \frac{d}{c}x$ und auch $x = \frac{c}{d}y$.
Man nennt $\frac{d}{c}$ die Steigung von p.
Für Strecken p mit irrationaler Steigung $\frac{d}{c}$ gilt:

(4) Es sei $p = OP$ eine Strecke in $D \cup \{P\}$ mit $P \in s$, $P \neq A$ und $P \neq B$ und $P = (c, d)$. Die Steigung $\frac{d}{c}$ von p sei irrational und es sei $\frac{d}{c} = \sqrt{r}$, $0 < \sqrt{r} < \infty$ und r eine positive rationale Zahl. Dann ist jeder Punkt $Q \in p$, $Q \neq O$, ein irrationaler Punkt.

Beweis:
Es sei $Q = (x, y)$, wobei $0 < x$, $y < 1$ ist. Wir setzen $\frac{d}{c} = w$.
1. Fall: $0 < w < 1$
Jeder Punkt $Q \in p$ erfüllt die Gleichung $y = wx$. Für $Q \neq O$ gilt daher: x und y sind nicht beide rational, weil sonst auch $\frac{y}{x}$ und damit w rational wäre.
Sei nun x rational. Dann ist wegen (3) wx und daher y und somit schließlich der Punkt Q irrational.
Sei y rational. Dann kann nicht auch x rational sein; folglich ist Q ein irrationaler Punkt.
Und Q ist irrational, wenn x und y beide irrational sind.
2. Fall: $1 < w < \infty$
Dann sei $\frac{1}{w} = v$ gesetzt. Für v gilt: $0 < v < 1$.
Wegen $v = \frac{1}{w} = \frac{c}{d}$ erfüllt jeder Punkt $Q \in p$ die Gleichung $x = vy$. Für jedes $Q \neq O$ folgt daraus mit der gleichen Argumentation wie im 1. Fall, dass Q ein irrationaler Punkt ist.

Mit (4) kann man nun die Vermutung (2) leicht widerlegen. Man erhält die Punktmenge D^*, indem man aus D alle irrationalen Punkte entfernt. Für die Strecken $p = OP$ mit irrationaler Steigung aus Satz (4), deren Punkte Q mit Ausnahme des Punktes O sämtlich irrational sind, hat der Übergang von D zu D^* eine einschneidende Folge:
Die Menge aller Punkte der Strecke $p = OP$ wird reduziert auf die beiden Endpunkte O und P.
Im Hinblick auf (2) bedeutet das: Blickt man in D^* von O aus in Richtung eines Punktes $P = (c, d)$ mit irrationalen Koordinatenquotienten $\frac{d}{c} = \sqrt{r}$, $0 < \sqrt{r} < \infty$ und r eine positive rationale Zahl, dann erblickt man P, denn zwischen O und P liegt kein einziger rationaler Punkt. Damit ist (2) widerlegt.

Da es in der Strecke s unendlich viele Punkte $P = (c, d)$ gibt mit irrationalen Koordinatenquotienten $\frac{d}{c} = \sqrt{r}$, $0 < \sqrt{r} < \infty$ und r positiv rational, wird jede zugehörige Strecke $p = OP$ aus $D \cup s$ beim Übergang von D zu D^* auf die Punkte O und P reduziert - und damit ist die Frage (1) in ziemlich unerwarteter Weise geklärt:

(5) Es gibt in der Strecke s unendlich viele Punkte P, die von O aus sichtbar sind.

Ausblick

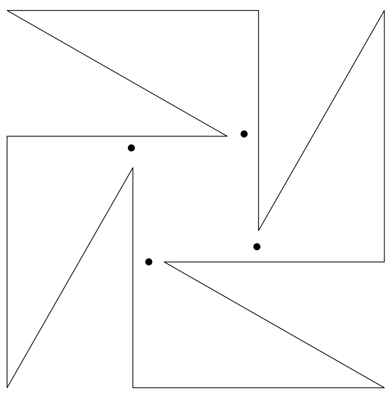
Der Satz (5) beschreibt eine geometrisch interessante weil anschaulich doch ziemlich paradox anmutende Situation. Aber als mathematisches Theorem hat er kaum eine Bedeutung in dem Sinne, dass er Auswirkungen auf irgend ein Gebiet der Mathematik hat. Man braucht jedoch die mit der Vermutung (2) gestellte Frage, die zu (5) führt, – nämlich: Gibt es auf bestimmten Strecken rationale Punkte? – nur ein wenig zu verallgemeinern, etwa so: – Hat eine gegebene Kurve rationale Punkte? – um zu Problemen zu gelangen, die in der Mathematik ganz aktuell sind.

Dazu nur ein Beispiel: Leopold Kronecker (1823–1891) untersuchte die Kurve mit der definierenden Gleichung $4x^3 + 27y^2 = -1$ und er konnte 1859 zeigen, dass sie nur die beiden rationalen Punkte $(-1, \frac{1}{3})$ und $(-1, -\frac{1}{3})$ besitzt. In seiner Nachfolge befasste sich der Zahlentheoretiker Louis J. Mordell (1888–1972) ebenfalls mit dem Problem der rationalen Punkten auf Kurven* und er stellte 1921 die Vermutung auf, dass alle Kurven, die durch einen bestimmten Typ von Polynomialgleichungen vom Grad ≥ 3 definiert sind, höchstens endlich viele rationale Punkte haben.

Die Mordellsche Vermutung zog zwar eine Flut von Veröffentlichungen nach sich, sie konnte jedoch erst 1983 von Gerd Faltings bewiesen werden. Und diesen Satz von Mordell-Faltings benutzte Andrew Wiles 1993 als einen wichtigen Mosaikstein in seiner hochkomplexen Herleitung des Satzes von Fermat-Wiles, dass die Kurven mit den definierten Polynomialgleichungen $x^n + y^n = z^n$, mit $n \geq 3$, keine ganzzahligen Punkte außer dem Punkt $(0, 0, 0)$ haben.

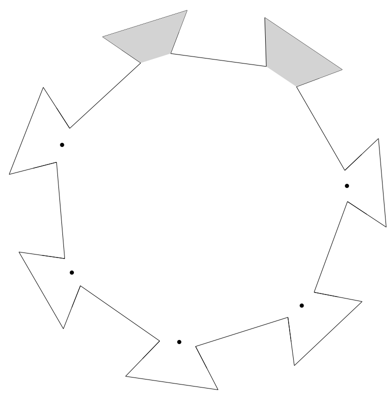
Lösungen zu den Aufgaben von Seite 10

(a)



Bei diesem Grundriss benötigt man vier Wärter.

(b)



Man benötigt nicht $\lfloor \frac{29}{3} \rfloor = 9$, auch nicht sieben, sondern nur fünf Wärter. Bei genauer Betrachtung ergibt sich, dass die fünf auf den mit $\cdot$ markierten Positionen die grauen Winkel vollständig überblicken.

* Heute noch heißen Polynomgleichungen $x^3 - y^2 = k$, wobei k eine Zahl von einem bestimmten Typ ist, manchmal Mordell-Gleichungen.

Bundeswettbewerb Mathematik 2013

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen ist?

Lösung: Nein, für die Menge $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ existiert eine solche Zerlegung nicht.

1. Beweis (durch Widerspruch)**:** Wir wissen, dass die Summe endlich vieler natürlicher Zahlen genau dann ungerade (bzw. gerade) ist, wenn die Anzahl ungerader Summanden in der Summe ungerade (bzw. gerade) ist. Damit enthält jede Teilmenge der natürlichen Zahlen, die die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft hat, eine gerade Anzahl ungerader Zahlen: Denn ist die größte Zahl einer solchen Teilmenge ungerade (bzw. gerade), so muss unter den übrigen Zahlen der Teilmenge, die summiert die größte Zahl ergeben, eine ungerade (bzw. gerade) Anzahl ungerader Zahlen sein — insgesamt ist in beiden Fällen eine gerade Anzahl ungerader Zahlen in der Teilmenge enthalten.
Wir nehmen an, die Menge $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ ließe sich in Teilmengen zerlegen, die alle die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft haben. Dann enthält, wie eben gesehen, jede dieser Teilmengen eine gerade Anzahl ungerader Zahlen. Weil jede Zahl aus $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ in genau einer dieser Teilmengen auftritt, müsste auch $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ als Vereinigung der Teilmengen eine gerade Anzahl ungerade Zahlen enthalten, sie enthält aber 11 ungerade Zahlen. — Widerspruch: Es gibt also keine Zerlegung von $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ wie in der Aufgabenstellung. $\square$

2. Beweis (durch Widerspruch)**:** In einer beliebigen Teilmenge der natürlichen Zahlen, die die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft hat, ist die Summe aller in dieser Teilmenge enthaltenen Zahlen gleich dem Doppelten der größten Zahl und somit insbesondere eine gerade Zahl. Wir nehmen an, die Menge $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ ließe sich in Teilmengen zerlegen, von denen jede die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft habe. Wir bilden für jede Teilmenge die Summe der darin enthaltenen Zahlen — diese ist nach unserer anfänglichen Beobachtung für jede Teilmenge gerade — und addieren dann die Summen aller Teilmengen. Das Ergebnis dieser Addition ist als Summe gerader Zahlen ebenfalls gerade. In der Addition kommt jede der Zahlen in $\{1, 2, 3, \ldots, 21\}$ genau einmal vor; das Ergebnis der Addition entspricht also der Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + 21 = 11 \cdot 21 = 231$, das ist eine ungerade Zahl! Widerspruch zur Annahme: Es gibt also keine Zerlegung der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 21\}$ wie in der Aufgabenstellung. $\square$

Bemerkung: Für andere Mengen der Form $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \geq 3$, existieren solche Zerlegungen. Es sei N eine Menge natürlicher Zahlen von dieser Form, die zudem die in der Aufgabenstellung beschriebene Eigenschaft habe. Damit besteht in einer Zerlegung von N wie in der Aufgabenstellung jede Teilmenge aus mindestens drei verschiedenen Elementen. Mit einem Argument wie im 2. Beweis folgt, dass für eine beliebige Zerlegung von N die Summe S_n aller Maxima aus den Teilmengen der Zerlegung wegen

$$2 \cdot S_n = \sum_{m \in N} m = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

tatsächlich nur von n und nicht von der konkreten Zerlegung abhängt. Außerdem folgt, dass $\frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+1) = S_n$ sein muss. Für $3 \leq n \leq 23$ lässt sich mit diesen Beobachtungen und etwas Ausprobieren schnell begründen, dass für die Zahlen n, bei denen $n \cdot (n+1)$ ein Vielfaches von 4 ist, beispielsweise die folgenden Zerlegungen existieren:

n	S_n	Existieren Beispiele für eine Zerlegung wie in der Aufgabenstellung?
3	3	Ja, $\{1, 2, 3\}$ (das einzige Beispiel)
4	5	Nein, wegen $S_4 > 4$ bestünde eine Zerlegung aus mindestens zwei Teilmengen, dafür wären mindestens sechs verschiedene natürliche Zahlen erforderlich.
7	14	Nein, wegen $S_7 > 7 + 6$ bestünde jede Zerlegung aus mindestens drei Teilmengen, dafür wären mindestens neun verschiedene natürliche Zahlen erforderlich.
8	18	Nein, wegen $S_8 > 8 + 7$ bestünde jede Zerlegung aus mindestens drei Teilmengen, dafür wären mindestens neun verschiedene natürliche Zahlen erforderlich.
11	33	Nein, wegen $S_{11} > 11 + 10 + 9$ bestünde jede Zerlegung aus mindestens vier Teilmengen, dafür wären mindestens zwölf verschiedene natürliche Zahlen erforderlich.
12	39	Ja, $\{1, 11, 12\}$, $\{2, 7, 9\}$, $\{3, 5, 8\}$, $\{4, 6, 10\}$ oder $\{4, 8, 12\}$, $\{2, 9, 11\}$, $\{3, 7, 10\}$, $\{1, 5, 6\}$
15	60	Ja, $\{1, 14, 15\}$, $\{3, 10, 13\}$, $\{4, 8, 12\}$, $\{5, 6, 11\}$, $\{2, 7, 9\}$
16	68	Ja, $\{5, 11, 16\}$, $\{3, 12, 15\}$, $\{1, 4, 9, 14\}$, $\{6, 7, 13\}$, $\{2, 8, 10\}$
19	95	Ja, $\{8, 11, 19\}$, $\{6, 12, 18\}$, $\{4, 13, 17\}$, $\{2, 14, 16\}$, $\{3, 5, 7, 15\}$, $\{1, 9, 10\}$
20	105	Ja, $\{9, 11, 20\}$, $\{7, 12, 19\}$, $\{5, 13, 18\}$, $\{3, 14, 17\}$, $\{6, 10, 16\}$, $\{1, 2, 4, 8, 15\}$
23	138	Ja, $\{1, 6, 16, 23\}$, $\{2, 3, 17, 22\}$, $\{9, 12, 21\}$, $\{7, 13, 20\}$, $\{5, 14, 19\}$, $\{8, 10, 18\}$, $\{4, 11, 15\}$

Aufgabe 2

Kann man jedes Dreieck in genau fünf gleichschenklige Dreiecke zerlegen?

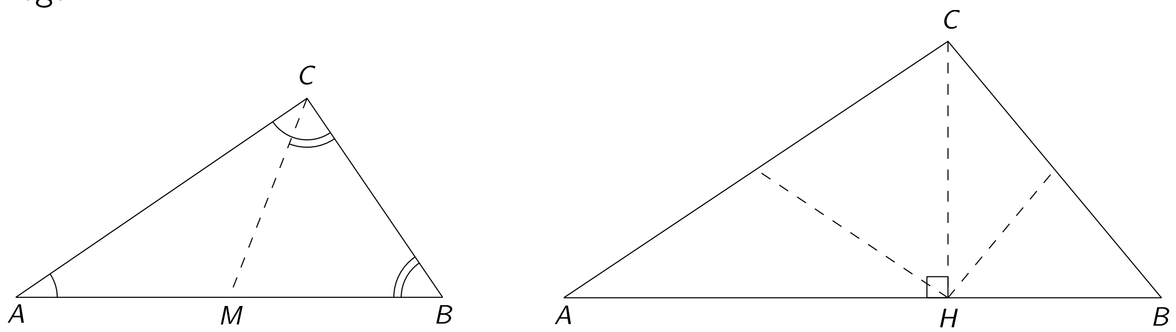
Bemerkung: Bei allen betrachteten Dreiecken liegen die drei Eckpunkte nicht auf einer Geraden.

Lösung: Ja, eine solche Zerlegung existiert für jedes Dreieck.

Beweis: Wir beweisen zunächst den **Hilfssatz**, dass sich jedes beliebige Dreieck in genau vier gleichschenklige Dreiecke zerlegen lässt.

Wir benutzen für den Beweis des Hilfssatzes, dass sich jedes beliebige rechtwinklige Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegen lässt, wovon man sich folgendermaßen überzeugt; siehe links in Skizze 2.1: Im Dreieck $\triangle ABC$ sei der Winkel mit dem Scheitel C ein rechter. Dann liegt der Mittelpunkt M des Umkreises wegen der Umkehrung des Satzes von Thales in der Mitte der Seite AB. Die Strecken AM, MC und MB haben dieselbe Länge, weil es Umkreisradien in $\triangle ABC$ sind. Damit sind die Dreiecke $\triangle CAM$ bzw. $\triangle BCM$ gleichschenklig mit Basen CA bzw. BC.

Es sei nun, wie rechts in Skizze 2.1, $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck kann in $\triangle ABC$ höchstens ein Winkel größer oder gleich 90° sein; mindestens zwei Winkel sind kleiner als 90°, dies seien ohne Einschränkung die Winkel mit Scheitel A bzw. B. Dann liegt der Fußpunkt H der Höhe durch C im Inneren der Strecke AB, und die Dreiecke $\triangle CAH$ und $\triangle BCH$ sind nach Konstruktion rechtwinklig. Auf Grund der Überlegungen am Beginn des Beweises lassen sie sich jeweils in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegen. Damit haben wir das beliebige Dreieck $\triangle ABC$ in genau vier gleichschenklige Dreiecke zerlegt. ◇



Skizze 2.1: Beweis des Hilfssatzes

Nun kommen wir zurück zur ursprünglichen Aufgabenstellung und betrachten ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: Das Dreieck $\triangle ABC$ ist nicht gleichseitig. Dann existieren zwei Seiten unterschiedlicher Länge, ohne Einschränkung sei $\overline{AB} > \overline{AC}$; siehe links in Skizze 2.2. Dann können wir einen Punkt D im Inneren von AB so auswählen, dass $\overline{AD} = \overline{AC}$. Wir haben also $\triangle ABC$ zerlegt in das Dreieck $\triangle DCA$, das nach Konstruktion gleichschenklig mit Basis DC ist, und das Dreieck $\triangle DBC$, dessen Eckpunkte nicht alle auf einer Gerade liegen. Das Dreieck $\triangle DBC$ kann nach dem Hilfssatz in weitere vier gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden. Damit haben wir $\triangle ABC$ in genau fünf gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

2. Fall: Das Dreieck $\triangle ABC$ sei gleichseitig, das heißt,

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \sphericalangle ACB = 60°. \tag{2.1}$$

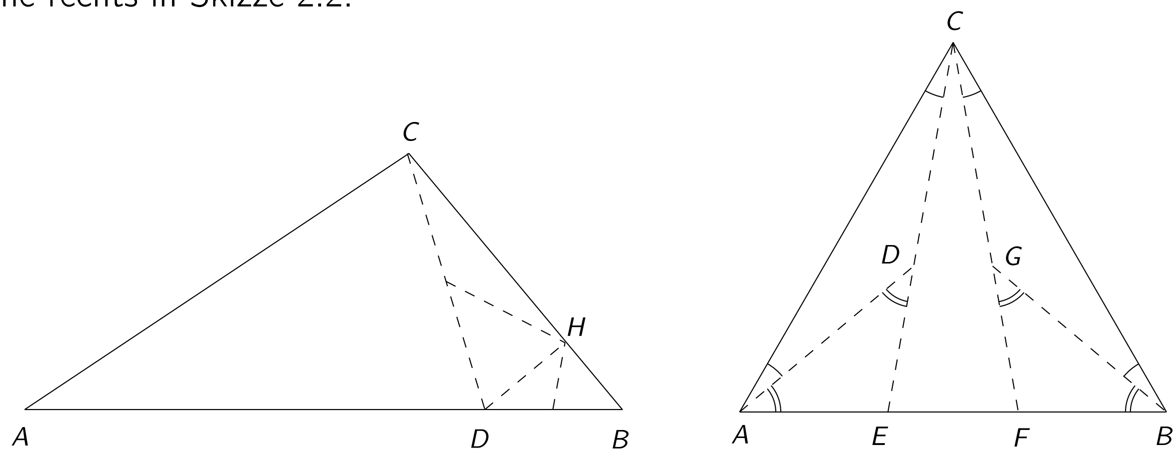
Wir dritteln den Winkel $\sphericalangle ACB$; die Punkte E und F auf AB seien entsprechend so gewählt, dass

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle ECF = \sphericalangle FCB = 20^\circ. \tag{2.2}$$

Zudem lassen sich Punkte D im Inneren von EC bzw. G im Inneren von FC wählen, dass auch

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle CBG = 20^\circ; \tag{2.3}$$

siehe rechts in Skizze 2.2.



Skizze 2.2: Fall 1 und Fall 2

Die Dreiecke $\triangle CAD$ bzw. $\triangle BCG$ sind dann nach Konstruktion gleichschenklig mit Basen CA bzw. BC, denn sie haben wegen (2.2) und (2.3) gleiche Basiswinkel. Auch die Dreiecke $\triangle DAE$ und $\triangle BGF$ sind gleichschenklig: Denn wegen (2.1) und (2.3) sind

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle GBF = 40^\circ; \tag{2.4}$$

und aus der Betrachtung des Nebenwinkels von $\sphericalangle ADE$, der Winkelsumme im Dreieck $\triangle CAD$ sowie (2.2) folgt (für $\sphericalangle FGB$ analog)

$$\sphericalangle ADE = 180^\circ - \sphericalangle CDA = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle ACD) = 40^\circ = \sphericalangle FGB. \tag{2.5}$$

Demzufolge sind $\sphericalangle DEA = \sphericalangle BFG = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$, also

$$\sphericalangle FEC = 180^\circ - \sphericalangle CEA = 80^\circ = 180^\circ - \sphericalangle BFC = \sphericalangle CFE; \tag{2.6}$$

somit ist auch das Dreieck $\triangle EFC$ gleichschenklig, weil es gleiche Basiswinkel hat. Wir haben demnach auch das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ in genau fünf gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

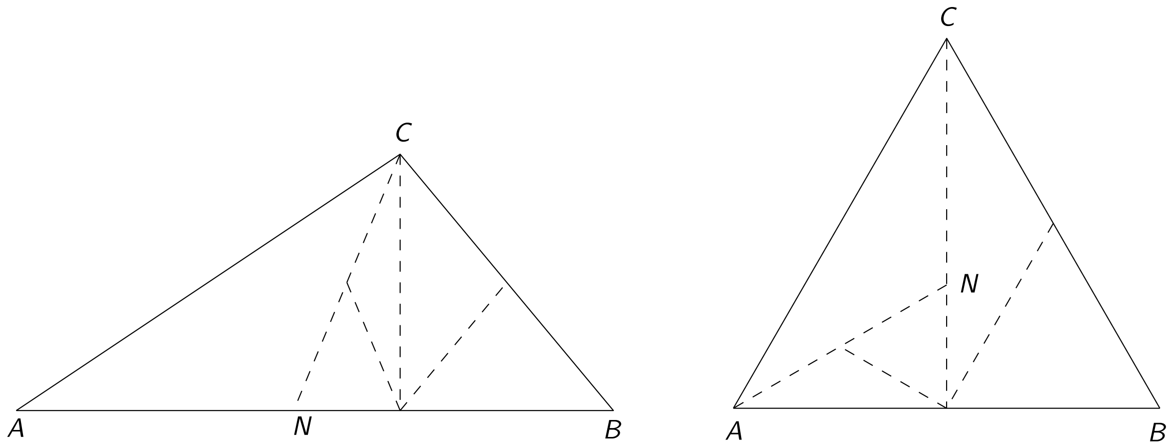
Man überzeuge sich abschließend, dass bei allen in den Beweisen betrachteten Dreiecken die drei Eckpunkte nicht auf einer Gerade liegen. $\square$

Bemerkungen:

1. Jedes Dreieck lässt sich auch in genau sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen (ausgehend von den Inkreisradien).

2. Jedes spitzwinklige Dreieck lässt sich in genau drei gleichschenklige Dreiecke zerlegen (ausgehend von den Umreisradien).

3. Ausgehend von einem **Hilfssatz 2** skizzieren wir einen zweiten Beweis. *Jedes beliebige Dreieck $\triangle DEF$ lässt sich in genau zwei Dreiecke zerlegen, von denen eines rechtwinklig und eines gleichschenklig ist.* Ohne Einschränkung sei $\sphericalangle DFE = 90°$, und die Mittelsenkrechte auf DE schneide die Seiten des Dreiecks in $M \in DE$ und $N \in DF$. Fällt N nicht mit F zusammen, so sind $\triangle DEN$ ein gleichschenkliges und $\triangle NEF$ ein rechtwinkliges Dreieck. Ist $N = F$, so sind die Dreieck $\triangle FDM$ und $\triangle EFM$ beide rechtwinklig und gleichschenklig, was den Hilfssatz beweist. Für ein beliebiges Dreieck gelangen wir zu einer Zerlegung wie in der Aufgabenstellung, indem wir es zunächst in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen (analog zu Skizze 2.1, rechts). Eines der rechtwinkligen Dreiecke zerlegen wir wie im Hilfssatz 2 in ein gleichschenkliges und ein rechtwinkliges Dreieck. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke zerlegen wir dann in jeweils zwei gleichschenklige Dreiecke (analog zu Skizze 2.1, links).



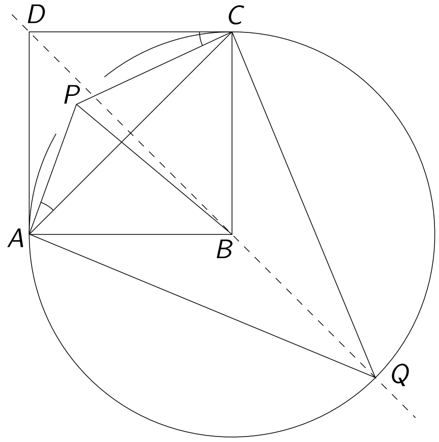
Skizze 2.3: Zerlegung in fünf gleichschenklige Dreiecke unter Nutzung von Hilfssatz 2

Aufgabe 3

Im Inneren des Quadrats $\square ABCD$ liege der Punkt P so, dass $\sphericalangle DCP = \sphericalangle CAP = 25°$ gilt. Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle PBA$?

Lösung: Es ist $\sphericalangle PBA = 40°$.

1. Beweis: Weil der Punkt P im Inneren des Quadrats $\square BCD$ liegt, folgt aus $\sphericalangle DCP = 25° < 45° = \sphericalangle DCA$, dass P auf der derselben Seite von AC wie der Punkt D liegt. Wir ergänzen die geometrische Figur um den Kreis k mit Mittelpunkt B und Radius $\overline{AB} = \overline{BC}$; außerdem sei Q derjenige Schnittpunkt der Geraden (DB) mit dem Kreis k, der außerhalb des Quadrats $\square ABCD$ liegt.



Wir weisen nun nach, dass das Viereck $\square AQCP$ ein Sehnenviereck ist. Weil die Punkte A, Q und C auf dem Kreis k liegen, muss damit auch der Punkt P auf dem Kreis k liegen. Es ist dann $\sphericalangle PBA$ der Mittelpunktswinkel über dem Kreisbogen k_{AP} und $\sphericalangle PCA$ ein Umfangswinkel über demselben Kreisbogen. Mit dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel, der Aufgabenstellung sowie der Lage von P folgt

$$\sphericalangle PBA = 2 \cdot \sphericalangle PCA = 2 \cdot (\sphericalangle DCA - \sphericalangle DCP) = 2 \cdot (45^\circ - 25^\circ) = 40^\circ, \quad (3.1)$$

was die angegebene Lösung beweist.

Es bleibt also zu zeigen, dass das Viereck $\square AQCP$ ein Sehnenviereck ist, dass also in $\square AQCP$ die Summe gegenüberliegender Winkel 180° beträgt. Der Winkel $\sphericalangle CQA$ ist Umfangswinkel über dem Kreisbogen k_{AC} mit $\sphericalangle CBA$ als dem zugehörigen Mittelpunktswinkel. Auf Grund des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel ist

$$\sphericalangle CQA = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle CBA = 45^\circ,$$

und im Dreieck $\triangle CAQ$ deshalb

$$\sphericalangle QAC + \sphericalangle ACQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ. \quad (3.2)$$

Nach Aufgabenstellung ist $\sphericalangle CAP = 25^\circ$ und auf Grund der Lage von P gilt $\sphericalangle PCA = \sphericalangle DCA - \sphericalangle DCP = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$. Zusammen mit (3.2) folgt aus diesen Beobachtungen

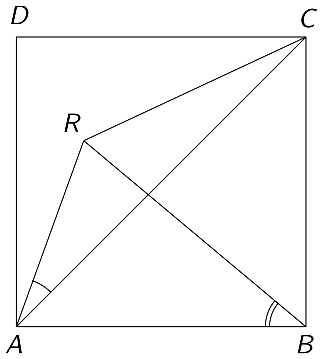
$$\begin{aligned} \sphericalangle QAP + \sphericalangle PCQ &= \sphericalangle QAC + \sphericalangle CAP + \sphericalangle PCA + \sphericalangle ACQ \quad (3.3) \\ &= 135^\circ + 25^\circ + 20^\circ = 180^\circ; \end{aligned}$$

dies beweist auf Grund der Winkelsumme 360° im Viereck, dass $\square AQCP$ ein Sehnenviereck ist. $\square$

2. Beweis: Wir konstruieren im Quadrat $\square ABCD$ einen weiteren Punkt R, der auf derselben Seite von AC wie der Punkt D liegt, mit

$$\sphericalangle CAR = 25^\circ \text{ und } \sphericalangle RBA = 40^\circ \quad (3.4)$$

und weisen nach, dass die Punkte R und P identisch sind. Damit folgt die Lösung sofort.



Wir betrachten zunächst das Dreieck $\triangle RAB$: In ihm ist auf Grund der Lage von R

$$\sphericalangle BAR = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAR = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ, \tag{3.5}$$

und auf Grund der Winkelsumme im Dreieck auch

$$\sphericalangle ARB = 180^\circ - \sphericalangle BAR - \sphericalangle RBA = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ. \tag{3.6}$$

Das Dreieck $\triangle RAB$ ist also gleichschenklig mit Basis RA und

$$\overline{RB} = \overline{AB} = \overline{CB}; \tag{3.7}$$

dabei folgt die zweite Gleichung in (3.7) aus der Quadrateigenschaft des Vierecks $\square ABCD$.

Mit der äußeren Identität in (3.7) sehen wir, dass auch das Dreieck $\triangle CRB$ gleichschenklig mit Basis CR ist. In diesem Dreieck gilt nach Definition von R in (3.4) für den Scheitelwinkel

$$\sphericalangle CBR = \sphericalangle CBA - \sphericalangle RBA = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

und daher für die Basiswinkel

$$\sphericalangle BRC = \sphericalangle RCB = \tfrac{1}{2} \cdot (180^\circ - \sphericalangle CBR) = \tfrac{1}{2} \cdot (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ.$$

Hieraus schließen wir

$$\sphericalangle DCR = \sphericalangle DCB - \sphericalangle RCB = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ; \tag{3.8}$$

der Punkt R ist also auf Grund der linken Gleichung in (3.4) sowie der Gleichung (3.8) durch dieselben Bedingungen wie der Punkt P bestimmt. Da höchstens ein Schnittpunkt zweier Halbgeraden existiert, müssen die Punkte P und R übereinstimmen. $\square$

Aufgabe 4

Anja und Bernd spielen folgendes Spiel: Sie schreiben jeweils abwechselnd je eine Ziffer an die Tafel, wobei Anja beginnt. Jede weitere Ziffer wird entweder rechts oder links neben die schon an der Tafel stehende Ziffernfolge geschrieben.

Beweise, dass Anja verhindern kann, dass nach einem Zug von Bernd die Ziffernfolge einschließlich evtl. führender Nullen eine Quadratzahl im Dezimalsystem darstellt.

Beweis: Alle Überlegungen des Beweises erfolgen im Dezimalsystem. Wir stellen zunächst fest, dass für beliebige nichtnegative Zahlen a, b die Einerziffer der Quadratzahl $(10a+b)^2$ wegen

$$(10a+b)^2 = (10a)^2 + 20ab + b^2 = 10 \cdot (10a^2 + 2ab) + b^2 \qquad (4.1)$$

mit der Einerziffer von b^2 übereinstimmt. Zusammen mit der Berechnung in der Tabelle

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

lassen sich aus (4.1) die folgenden Hilfssätze schließen:

- **Hilfssatz 1:** Keine Quadratzahl kann eine der vier Ziffern 2, 3, 7 oder 8 als Einerziffer haben.
- **Hilfssatz 2:** Es gibt keine zweistellige Quadratzahl mit der Zehnerziffer 7.

Wir werden außerdem die folgende Aussage nutzen:

- **Hilfssatz 3:** Es sei $Z \geq 7$; dann enthält das Intervall $I = [100 \cdot Z \dots 100 \cdot Z + 99]$, das aus 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen besteht, höchstens zwei Quadratzahlen. Liegt im Intervall überhaupt eine Quadratzahl, dann sei y^2 die kleinste solche Quadratzahl. Es ist offensichtlich $y^2 \geq 700 > 676 = 26^2$, also $y \geq 27$. Damit folgt
$$(y+2)^2 = y^2 + 4y + 4 \geq y^2 + 4 \cdot 27 + 4 = y^2 + 112 > 100 \cdot Z + 99.$$
Die Quadratzahl $(y+2)^2$ liegt also außerhalb des Intervalls I, das demnach höchstens die zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen y^2 und $(y+1)^2$ enthalten kann. $\diamond$

Wir zeigen nun induktiv über die Anzahl der Züge von Anja, wie Anja die Aufgabenstellung erfüllen kann.

Im ersten Zug (Induktionsanfang) schreibt Anja die Zahl 7 an die Tafel. Aus den Hilfssätzen 1 und 2 folgt sofort, dass unabhängig davon, ob Bernd in seinem ersten Zug seine Ziffer rechts oder links neben die an der Tafel stehende 7 schreibt, die Ziffernfolge nach Bernds erstem Zug keine Quadratzahl darstellt. Die Ziffernfolge wird stets eine Zahl darstellen, die größer oder gleich 7 ist.

Die Ziffernfolge Z an der Tafel stelle also nach einem Zug von Bernd einschließlich evtl. führender Nullen eine Zahl dar, die größer oder gleich 7, jedoch keine Quadratzahl ist (Induktionsvoraussetzung). Anja schreibt dann in ihrem nächsten Zug eine noch geeignet zu wählende Ziffer aus der Menge $\{2, 3, 7, 8\}$ rechts neben die Ziffernfolge. Wenn Bernd seine Ziffer links neben die nun an der Tafel stehende Ziffernfolge $10 \cdot Z + 2$, $10 \cdot Z + 3$, $10 \cdot Z + 7$ oder $10 \cdot Z + 8$ schreibt, wird die Ziffernfolge nach Bernds Zug, unabhängig von Anjas konkreter Wahl, wegen Hilfssatz 1 nie eine Quadratzahl darstellen. Die Ziffernfolge wird jedoch stets eine Zahl darstellen, die größer oder gleich 7 ist. Durch die nun zu beschreibende geeignete Wahl einer Ziffer stellt Anja sicher, dass die Ziffernfolge nach Bernds Zug selbst dann keine Quadratzahl darstellen kann, wenn Bernd seine Ziffer rechts neben die Ziffernfolge schreibt.

Schreiben sowohl Anja als auch Bernd ihre Ziffern rechts neben die Ziffernfolge Z, so ist $100 \cdot Z + 20$ die kleinste Ziffernfolge (auch sie ist offensichtlich größer oder gleich 7) und $100 \cdot Z + 89$ die größte Ziffernfolge, die nach Bernds Zug an der Tafel stehen kann. Anja betrachtet das Intervall $I_Z = [100 \cdot Z + 20 \dots 100 \cdot Z + 89]$, das 70 aufeinander folgende natürliche Zahlen und alle Ziffernfolgen umfasst, die nach Bernds Zug an der Tafel stehen können. Das Intervall I_Z ist in dem Intervall enthalten, das wir in Hilfssatz 3 untersucht haben; auch I_Z enthält also höchstens zwei Quadratzahlen. Weil diese beiden Quadratzahlen höchstens zwei unterschiedliche Zehnerziffern haben, treten also mindestens zwei der Ziffern 2, 3, 7 und 8 nicht als Zehnerziffer einer Quadratzahl auf, die im betrachteten Intervall liegt. Anja wählt eine dieser Ziffern und stellt so sicher, dass die Ziffernfolge auch nach Bernds direkt folgendem Zug keine Quadratzahl darstellt (wohl aber eine Zahl größer oder gleich 7). □

Wir danken Herrn Prof. Quaisser und Herrn StD Fegert für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 111

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 6: Luca Bühler 5.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Kunz)**:**
Kl. 5: Maximilian Hauck 15, Pia Richter 3, Manuel Wolf 5, Anna Wullmann 8, Rabea Zimmermann 6;
Kl. 7: Philip Eisenhuth 11;
Kl. 8: Nick Wittig 11;
Kl. 9: Sebastian Maak 10, Katharina Rößler 10;
Kl. 12: Andreas Pitsch 8.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler)**: Kl. 5:** Annalena Schimbol 2.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 12: Frank Schindler 21.

Bottrop, Josef-Albers-Gymnasium: Kl. 8: Malte Schürks 14.

Brannenburg, Gymnasium Raubling: Kl. 8: Jakob Sussman 12.

Bürglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 10: Jamico Schade 11.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 7: Iolanthe Köcher 20.

Edenkoben, Gymnasium: Kl. 8: Theresa Paulus 14.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Guiseppina Alfano 2, Christoph Behrens 2, Anna Grenz 2, Annika Koch 10, Cornelius Martin 2, Leonie Marton 4, Mark Neumaier 2, Katharina Scholl 5;
Kl. 6: Leon-Maurice Bähr, Samuel Bentz 2, Leonie Groll 2, Anna-Lena Hartmann 4, Selina Kuralay 2, Florian Leutz 6, Arlind Murtezaj 2, Rebecca Rech 2, Albion Syla 2;
Kl. 8: Tillmann Ballweber 22, Carolin Heidt 15;
Kl. 9: Adriana Stenger 9, Marcel Wittmann 23;
Kl. 12: Henning Ballweber 14.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 3: Ridh Choudhury 5, Merlin Kolrep 2, Thies Koster 5, Ella Zwermann 5;
Kl. 4: Nicholas Becker 2, Franco Dorsch 5, Maike Dürr 5, Kimberly Frahm 5, Martha Friederich 8, Christian Ickstadt 2, Maxim Leheta 2, Sean Panreck 2, Lina Renger 5, Vrishab Wittagondana 5.

Grünstadt, Leininger Gymnasium: Kl. 9: Annika Gold 11.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 6: Luca Kloft 9, Melanie Shuy 11;
Kl. 7: David Storzer 26, Nils Prepens 18;
Kl. 8: Emily Zollmann 9.

Hangelsberg, Montessorischule: Kl. 3: Joris Witte 4.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:
Kl. 11: Shaima'a Ahmed Doma 12;

Karben, Kurt-Schuhmacher-Schule: Kl. 5: Leonie Rößler 11.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Nick Bäumken 1, Dennis Mayle 10, Beatrice Popescu 9;
Kl. 7: Nils Müller 5;
Kl. 8: Björn Stanischewski 15.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 12: Robin Fritsch 10.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Paula Roderer 2, Tim Schüler 4, Roy Seifert 4;
Kl. 6: Katharina Weber 5, Konstantin Unterkeller 3;
Kl. 7: Sebastian Trapp 7.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 13: Niklas Bockius 11.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 5: David Menzel 8.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:
Kl. 11: Bettina Diller 8.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Amiv Camdzic 6, Kevin Gren 6;
Kl. 6: Kevin Cornely 7, Victoria Mogwitz 4, Nico Stanic 7;
Kl. 7: Anja Wingender 7;
Kl. 8: Jasmin Hallyburton 18, Verena Rüsing 13;
Kl. 10: Sandra Wingender 11;
Kl. 11: Janina Vogl 15;
Kl. 12: David Michel 16.

Neuwied, Wemer-Heisenberg Gymnasium: Kl. 11: Robert Kowallek 12.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Jonas Glückmann 5;
Kl. 6: Lara Braun 4, Tobias Heinze 18, Fabian Liepach 13;
Kl. 10: Heiko Kötzsche 21.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner)**:**
Kl. 5: Vera Apel 1, Joel Jansen 4, Lara Loosen 2, Lukas Nießen 15, Hanah Pasternak 2;
Kl. 6: Wiebke Buhmann 3, Emil Faust 4, Hannah Langer 3, Max Leiwig 3, Fabian Staffel 4, Johannes Stähler 4, Lena Seifert 4.

Wiesbaden, Leibnizschule:
Kl. 7: Andreas Dernier 8;
Kl. 8: Elisa Dernier 11.

Mitteilung

Am 23. Oktober 2012 ist das Buch „Mathematik-Olympiade“ von unserem langjährigen Leser und Gastautoren Tom Ballik im Ikon-Verlag erschienen (ISBN: 978-3990230824, 312 Seiten). Das Buch richtet sich an Schüler/innen und allgemein Mathematik-Interessierte sowie an Kursleiter/innen im Anfänger- und Fortgeschrittenen-Bereich. Das vorliegende Werk zeigt eigenständige Lösungsstrategien und versucht, die Gratwanderung zwischen „Techniken erlernen“ und „Kreativität entwickeln“, denn eines ist klar: Ohne Zweifel braucht der Mathematik-Olympionike zahlreiche „handwerklichen“ Techniken und die Kenntnis mathematischer Sätze. Es geht darum, den mathematischen Blick für das Wesentliche zu schulen und jene Stellen eines Beispiels, wo man den Lösungs-Hebel ansetzen kann, herauszufinden.

Mainzer Mathematik-Akademie
3.–7. September 2013

Das Institut für Mathematik der Universität Mainz veranstaltet vom 3. bis zum 7. September 2013 die dritte Mainzer Mathematik-Akademie für alle Mathematik-Begeisterte ab 15 Jahren.

In Fachvorträgen, Gruppen- und Projektarbeit mit anschließender Präsentation werden Themen aus (wahlweise) drei Bereichen mit Professoren und wissenschaftlichen Mitarbeitern der Universität Mainz bearbeitet.

Der Workshop findet im Institut für Mathematik statt; wohnen werden wir im Haus Don Bosco, mittags essen wir in der Mensa. Für die Unterbringung (Übernachtung, Frühstück, Abendessen) wird eine Eigenleistung von 50 Euro erhoben, den Restbetrag trägt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz. Anreise ist am Mittwochabend, Abreise am Sonntagmittag.

Falls zur Beurlaubung vom Unterricht eine persönliche Einladung benötigt wird, können wir eine solche gerne zusenden. Für Informationen zur Mainzer Mathematik-Akademie der vergangenen Jahre (zum Beispiel Kursthemen) siehe

`www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie`

Im nächsten Heft gibt es genauere Informationen zur vierten *Mainzer Mathematik-Akademie* und den Link zum Anmeldeformular; Rückfragen unter:
`freunde@mathematik.uni-mainz.de`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe
Versand: Katherine Pillau
Betreuung der Abonnements: Anita Peffer-Kohl mit freundlicher Unterstützung von Dr. Ekkehard Kroll

Jahrgang 33 | Heft 113 | März 2013

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`