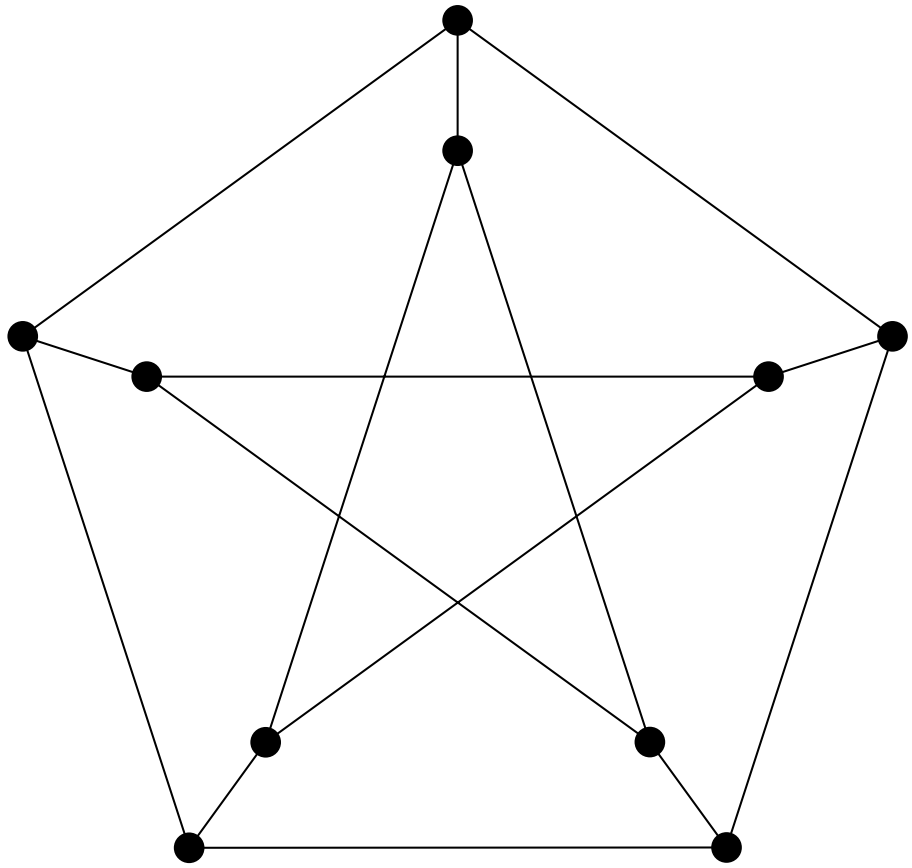
Jahrgang 33 Heft 114 Juni 2013

# MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

## Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

**Wichtig:** Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

**Für Schüler/innen der Klassen 5–8** sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–8 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **31.08.2013.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg–Universität**
**Institut für Mathematik**
**Monoid-Redaktion**
**55099 Mainz**

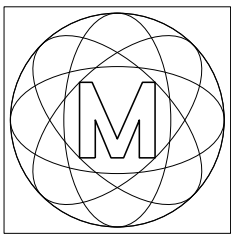
Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.




Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

# Mainzer Mathe Akademie
## 4. – 8. September 2013

Bei der Mainzer Mathematik-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathematik-Akademie anzumelden, die vom 04.– 08.09. an der Universität Mainz stattfindet.

### Ablauf der Akademie

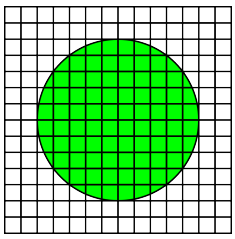
| | |
|---|---|
| Mi., 04.09. | Anreise (bis 18 Uhr) und Kennenlernabend |
| Do.-Sa., 05.09.–07.09. | Kurse in Arbeitsgruppen; Rahmenprogramm, betreut von Studierenden (zum Beispiel: Stadtführung, Improtheater) |
| So., 08.09. | Präsentation und Abreise (ab 14 Uhr) |

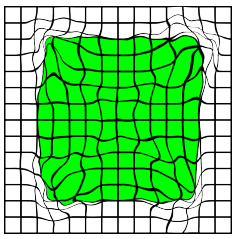
Ein genauerer Terminplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben.

### Kurse

- Summenformeln in Analysis und Geometrie (Prof. Dr. Steffen Fröhlich)
  Der neunjährige Carl Friedrich Gauß soll seinen Mathematiklehrer, einen gewissen Büttner, mit einem eleganten Dreh für die Summation der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 verblüfft haben. Ein besonderer Kunstgriff, fast schon eine mathematische Formel, erlaubte ihm, die gesuchte Summe mit einem Schlag zu berechnen, anstatt seine Energie mit dem langwierigen und fehleranfälligen Aufaddieren jeder dieser einzelnen Zahlen zu verschwenden.
  Das Thema in dieser Arbeitsgruppe dreht sich um genau solche Fragen: Wie gewinnt man explizite Ausdrücke für Summen von natürlichen Zahlen, von geraden und ungeraden Zahlen, von Quadratzahlen, Kubikzahlen oder sogar beliebigen Potenzzahlen? Was sind geometrische Reihen, alternierende Reihen, und was versteht man unter Umordnungen von Reihen?
  Wir wollen dabei nicht nur die rein analytischen Techniken zur Herleitung solcher Summenformeln studieren. Vielmehr legen wir besonderen Wert auf anschauliche, elementargeometrische Beweise. Das erlaubt uns nämlich, abseits der Analysis in interessante Probleme der Geometrie einzusteigen, angefangen vom Satz des Pythagoras bis zur Konstruktion einfacher fraktaler Kurven in der Ebene.
- Topologie oder: Das Wesentliche an einer Kaffeetasse ist der Henkel (Akade-

mische Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni und Simon Drewitz)
Um die Mitte des 18. Jahrhunderts begann eine völlig neue Entwicklung in der Geometrie, die bald in der modernen Mathematik eine große Rolle spielen sollte. Das neue Gebiet – Analysis Situs oder Topologie genannt – betrifft das Studium derjenigen Eigenschaften geometrischer Figuren, die selbst dann bestehen bleiben, wenn die Figuren so drastischen Verformungen unterworfen werden, dass Längen und Winkel verlorengehen, die Figur jedoch nicht zerrissen wird.





Malt man eine überschneidungsfreie geschlossene Kurve auf ein Gummituch, so kann man dieses so zurechtziehen, dass aus der Kurve ein Kreis wird. Bei einer „wild“ eingebetteten Kugeloberfläche lässt sich die „Raumsoße“ dagegen im Allgemeinen nicht mehr analog zurechtziehen.
Beim Studium der Topologie kann man bemerken, dass durch starres Festhalten an einer „strengen“ Darstellungsform leicht der wesentliche geometrische Gehalt unter einem Berg formaler Einzelheiten verdeckt wird. Um so höher ist die Leistung zu bewerten, dass die Topologie in den Rahmen der strengen Mathematik eingegliedert werden konnte, wo die Anschauung die Quelle, aber nicht das letzte Beweismittel der Wahrheit ist.

- Strukturerhaltende Abbildungen und Invarianten (Prof. Dr. Ysette Weiß-Pidstrygach)
  Viele Problemstellungen können in eine Spielsituation umformuliert werden, in der man von gegebenen Positionen und erlaubten Zügen ausgeht. Oft haben diese Züge die Eigenschaften, dass sie umkehrbar sind und Kompositionen von Zügen wieder erlaubte Züge des Spiels sind. In unserem Kurs werden wir uns mit Fragestellungen der Art: Kann man aus Position A in Position B durch erlaubte Züge gelangen? In welcher Position befindet man sich nach einer bestimmten Anzahl von Zügen?
  Systematisches Probieren hilft in vielen Situationen Vermutungen aufzustellen. Die Lösungsmethode, die wir uns erarbeiten und in verschiedenen Situationen anwenden werden, besteht in dem Finden von Eigenschaften der Positionen und des Spiel, die sich bei Ausführen der Züge nicht verändern – sogenannten Invarianten.

## Unterbringung

Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

**Kosten**
Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50€. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

**Anmeldung**
Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:

`www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie`

# Wer war's?

von Wolfgang J. Bühler

Der Gesuchte war das älteste von sieben Kindern eines nonkonformistischen* Geistlichen. Das Studium in Oxford oder Cambridge stand Nonkonformisten nicht offen. Der Gesuchte erhielt seine Ausbildung zum presbyterianischen Geistlichen in Edinburgh. Dort begann er mitten im Studienjahr, ein Hinweis darauf, dass er vorher schon Kenntnisse in verschiedenen Bereichen erlangt hatte, insbesondere in klassischer griechischer und lateinischer Literatur, aber auch in Mathematik. Zu seinen Lebzeiten hat er nur zwei Schriften veröffentlicht, die erste, „Divine Benevolence", in der er versuchte, zu zeigen, dass Gottes Absicht das Glück seiner Geschöpfe ist. Die zweite Veröffentlichung war eine Replik auf eine Schrift, in der George Berkeley** die Differentialrechnung von Isaac Newton angegriffen hatte. Der Ruhm des hier Gesuchten basiert aber auf einer erst nach seinem Tod veröffentlichten statistischen Arbeit. Diese ist einer der Gründe dafür, dass 250 Jahre später das Jahr 2013 als internationales Jahr der Statistik gefeiert wird.

Wer war's?

## Des Rätsels Lösung

Der Gesuchte ist Thomas Bayes, geboren wahrscheinlich 1701 in Leather Lane, England. Er entstammte einer wohlhabenden Familie, die ihr Vermögen in der Besteck-Industrie in Sheffield gemacht hatte. Thomas Bayes wuchs auf in einer Umgebung von hochgebildeten und religiösen Menschen in und um London. Daher stammten seine vielfältigen Interessen nicht nur in der Theologie, sondern auch in den Naturwissenschaften (Elektrizität, Optik, Harmonielehre in der Musik) und in der Mathematik. 1742 wurde er zum Fellow der Royal Society gewählt. Es ist unklar, welche seiner Verdienste um die Wissenschaft dabei den Ausschlag gegeben

* „Noncomformists" waren seit dem 17. Jahrhundert in England tolerierte Protestanten, die nicht der „Church of England" angehörten, insbesondere die „Presbyterians", die Baptisten und die Quäker.

** George Berkeley (12.03.1685 – 14.01.1753) war seit 1734 Bischof von Cloyne, Irland. Nach ihm sind die Universität und Stadt Berkeley in Kalifornien benannt.

haben. Nach langer durch Krankheit und wegen theologischer Streitigkeiten unterbrochener Tätigkeit als Pfarrer in einer Gemeinde in Turnbridge Wells, England, starb Bayes dort 1761.

## Der Disput mit Berkeley

Newtons Argument zur Bestimmung der Ableitung lief für $x^n$ im Wesentlichen so: Lässt man in der Entwicklung von $(x+h)^n$ die höchsten Potenzen von $h$ weg, so ist

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = nx^{n-1} + h\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.$$

Setzt man nun $h = 0$, so ergibt sich $nx^{n-1}$.
Berkeleys Einwand war, dass die Entwicklung von $(x+h)^n$ einen Zuwachs $h$ voraussetzt, im Widerspruch zur anschließenden Setzung $h = 0$. Bayes hat in seiner Replik die Setzung $h = 0$ (nach heutigen Maßstäben vielleicht nicht ganz streng) durch den Grenzübergang $h \to 0$ ersetzt.

## Unendliche Reihen

Unter den von Bayes hinterlassenen unveröffentlichten Notizen finden sich folgende Beziehungen zwischen den Ableitungen $y'$, $y''$, $y'''$, ... und den Differenzen $y_\prime$ (mit $y_\prime(x) = y(x+1) - y(x)$), $y_{\prime\prime}$ (mit $y_{\prime\prime}(x) = y_\prime(x+1) - y_\prime(x)$), $y_{\prime\prime\prime}$, ..., nämlich:

$$y_\prime = y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2\cdot 3}y''' + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}y'''' + \ldots$$
$$y' = y_\prime - \frac{1}{2}y_{\prime\prime} + \frac{1}{3}y_{\prime\prime\prime} - \frac{1}{4}y_{\prime\prime\prime\prime} + \ldots$$

Die erste dieser Gleichungen war schon 1715 von Taylor*** gefunden worden und heißt heute Taylor-Reihe. Die zweite wurde erst später von Lagrange**** veröffentlicht, der wohl Bayes' Notizen nicht kannte.

## Bayes als Statistiker

In dem 1763 postum veröffentlichen Artikel ging es Bayes um folgendes Problem: „Gegeben sei die Anzahl der Fälle, in denen ein Ereignis eingetreten beziehungsweise nicht eingetreten ist. Gesucht sei die Chance, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens irgendwo zwischen irgend zwei vorgegebenen Grenzen liegt“ (frei übersetzt).
Ist der wahre Wert der Wahrscheinlichkeit $p$ und ist das Ereignis $j$ Mal eingetreten und $n-j$ Mal nicht, so ist bei vorausgesetzt unabhängigen Wiederholungen die Wahrscheinlichkeit, dass das Beschriebene eingetreten ist, gleich $\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}$. Diese „Binomial“-Wahrscheinlichkeit leitet Bayes her als Vorbereitung zur Lösung des obigen Problems. Vorher formuliert er die heute als Bayes-Regel bekannte

*** Brook Taylor (18.08.1685 – 2912.1731), englischer Mathematiker
**** Joseph Luis Lagrange (25.01.1736 – 10.04.1813), italienischer Mathematiker

Formel: Sind $A$ und $B$ zwei Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, so gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Für das Weitere gehen wir nicht mit voller mathematischer Strenge vor: Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Dichte $f$ (das heißt: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$) und $Y$ eine Variable mit Werten 0, 1, 2, so setzen wir $A = \{x \leq X \leq x + dx\}$, $B = \{Y = j\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(Y = j|X = x)P(x \leq X \leq x + dx)}{P(Y = j)} \\ &= \frac{P(Y = j|X = x)f(x)dx}{\int P(Y = j|X = z)f(z)dz}, \end{aligned}$$

das heißt, die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ gegeben $Y = j$ hat die Dichte $g_j$ mit

$$g_j(x) = \frac{P(Y = j|X = x)f(x)}{\int P(Y = j|X = z)f(z)dz}.$$

Wir wenden dies an auf den von Bayes betrachteten Fall unter der Voraussetzung, dass a priori über die unbekannte Wahrscheinlichkeit $X$ nichts bekannt ist. Aus dieser Voraussetzung begründet Bayes, dass die Dichte $f$ konstant ist, das heißt $f(x) = 1$ für alle $x \in [0, 1]$. Damit ergibt sich:

$$P(a \leq X \leq b|Y = j) = \int_a^b g_j(x)dx = \frac{\int_a^b \binom{n}{j} x^j(1-x)^{n-j}dx}{\int_0^1 \binom{n}{j} x^j(1-x)^{n-j}dx}.$$

Heute spielt die skizzierte Methode in vielen Anwendungen und Verallgemeinerungen eine große Rolle in der Statistik.

# Hättest Du es gewusst?

## Was ist die Regel von Tābit?

von Hartwig Fuchs

### Mūsā und seine Söhne

Gegen Ende des 8. Jahrhunderts machte ein junger Mann die Handelswege nach Bagdad, der Hauptstadt des Abbasiden-Reiches, unsicher: Mūsā ibn Schākir. Mit seiner Bande überfiel er Karawanen, womit er sich ein Vermögen zusammenstahl. Aber trotz dieser wenig rühmlichen Vorgeschichte gewann er später die Gunst des Kalifen al-Mamūn (Regierungszeit 813–833) und stieg bei Hofe in hohe Ämter auf.

Das versetzte ihn in die Lage, seinen drei Söhnen eine hervorragende Ausbildung zu verschaffen. Sie wurden alle drei angesehene Mathematiker und Astronomen und sie haben das Verdienst, dass sie große Teile ihres ererbten Reichtums dazu verwendeten, griechische wissenschaftliche Manuskripte zu erwerben und ins Arabische übersetzen[1] zu lassen – und sie dadurch aus dem Zusammenbruch der antiken Zivilisation zu retten.

Vermutlich hat Mohammed ibn Mūsā (gestorben um 872), der älteste der Mūsā-Brüder, bei einer Reise nach Byzanz den Devisenhändler Tābit kennengelernt und ihn eingeladen, ihn nach seiner Heimatstadt zu begleiten. Und so kam Tābit nach Bagdad, dem wissenschaftlichen Zentrum der damaligen arabischen Welt.

## Tābit ibn Qurra

Abu-I Hassan Tābit ibn Qurra ibn Marwān (um 826–901) wurde in Harrān in der heutigen Türkei geboren. Er war dort Geldwechsler. Schon früh aber findet man ihn in Bagdad, wo er dank seiner Kenntnis der griechischen Sprache im Auftrag der Brüder Mūsā als Übersetzer antiker mathematischer und naturwissenschaftlicher Texte des Archmides, Euklid und mehrerer anderer Autoren arbeitete. Durch seine intensive Beschäftigung mit den Schriften griechischer Mathematiker entwickelt sich Tābit im Laufe der Zeit selbst zu einem anerkannten Mathematiker, dem neue mathematische Erkenntnisse zu verdanken sind.

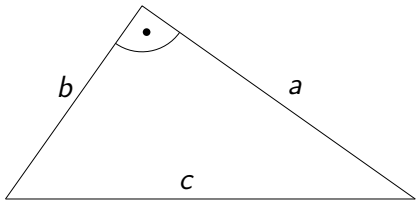
So hat er etwa das früheste Beispiel einer eigenständigen Leistung der arabischen Zahlentheorie geliefert: Er hat ein Verfahren hergeleitet, mit dem man befreundete Zahlen[2] findet.

Auch in der Geometrie hat er Neues entdeckt. Von ihm stammt eine schöne Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras, die viel zu wenig bekannt ist – und die deshalb unten beschrieben werden soll.

## Tābit und Pythagoras

Mit den Bezeichnungen aus der Figur 1 lautet der Satz des Pythagoras: Für die Seitenlängen $a$, $b$, $c$ eines rechtwinkligen Dreiecks gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Figur 1

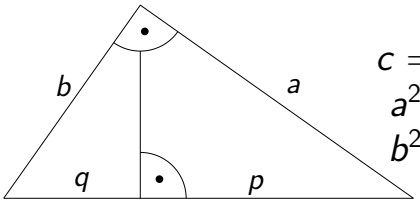
Die Griechen haben die grundlegende Bedeutung diese Satzes für die Geometrie[3] sehr wohl erkannt. Schon früh haben sie ihn deshalb variiert, etwa zum Kathetensatz (Figur 2) oder zum Höhensatz (Figur 3).

---

[1] Die erste westeuropäische Ausgabe der wichtigsten mathematischen Schrift der Antike – Euklids „Elemente" – erschien 1482 als eine lateinische Übersetzung einer arabischen Fassung, die in wesentlichen Teilen auf Tābit zurückgeht.

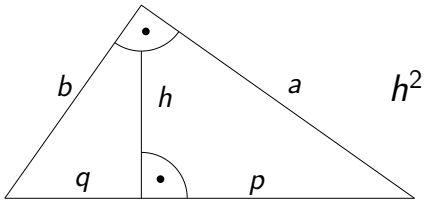
[2] Zwei natürliche Zahlen $m$ und $n$ heißen befreundet, wenn $n$ die Summe der echten Teiler von $m$ und $m$ die Summe der echten Teiler von $n$ ist. Zum Beispiel sind 220 und 284 befreundet.

[3] Der Satz des Pythagoras sorgte bei den Griechen aber auch für nicht geringe Irritationen – führte er doch auf Irrationalzahlen wie $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, die zwar geometrisch als Längen von Strecken darstellbar sind, die aber nicht dem Zahlenreich angehörten, mit dem sie vertraut waren.




$c = p + q$ :
$a^2 = c \cdot p$
$b^2 = c \cdot q$

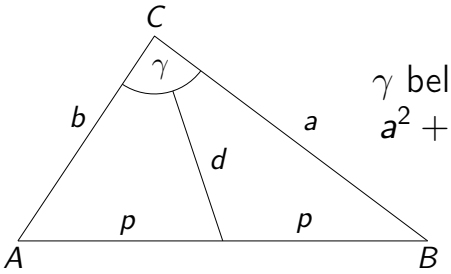
Figur 2




$h^2 = p \cdot q$

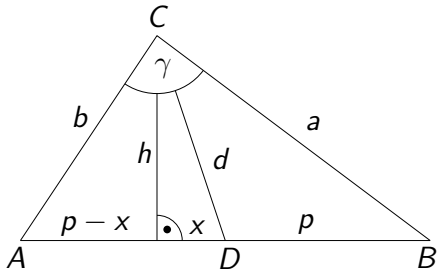
Figur 3

Und sie haben den Satz des Pythagoras verallgemeinert – es sei hier nur der Satz des Apollonios von Pergä (Figur 4) genannt:




$\gamma$ beliebig, $2p = |AB|$:
$a^2 + b^2 = 2(d^2 + p^2)$

Figur 4




Figur 5

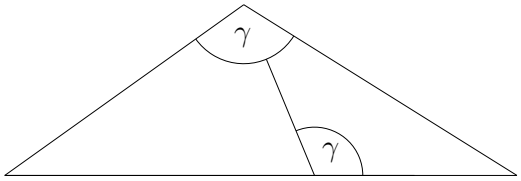
Beweis (Figur 5):
Im Dreieck $\triangle ABC$ mit einem beliebigen Winkel $\gamma$ beim Eckpunkt $C$ sei $CD$ die Seitenhalbierende von $AB$ mit $|CD| = d$. Ferner sei $p = \frac{1}{2}|AB|$ und $h$ sei die Länge der Höhe von $C$ auf $AB$. Dann sind $a^2 = h^2 + (p+x)^2$, $b^2 = h^2 + (p-x)^2$ und $h^2 + x^2 = d^2$. Daraus folgt: $a^2 + b^2 = (2h^2 + 2x^2) + 2p^2 = 2d^2 + 2p^2$, was zu zeigen war.

Ist hier $\gamma = 90°$, so ist nach dem Satz des Thales $D$ der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$. Es gilt also $d = p$ und daher $a^2 + b^2 = 2(p^2 + d^2) = (2p)^2$. Setzt man nun $2p = c$, dann folgt der Satz des Pythagoras aus dem des Apollonios.

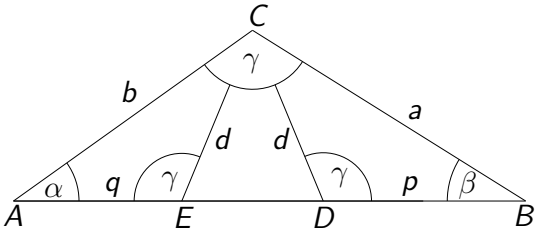
All dies und mehr hat Tābit bei seiner Übersetzungsarbeit kennengelernt und man darf vermuten, dass es ihm ein Ansporn war, selbst auch einen Beitrag zum Thema „Satz des Pythagoras“ zu leisten.

## Die Regel des Tābit

Wenn man in der Figur 2 die beiden dort angegeben rechten Winkel durch große stumpfe Winkel $\gamma$ ersetzt, dann erhält man ein Dreieck mit einer schrägen Transversalen wie in Figur 6. Das ist die Ausgangsfigur, aus der sich die von Tābit entdeckte Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras – die sogenannte Regel von Tābit – herleiten lässt:




Figur 6




Figur 7

Im Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $a$, $b$, $c$ und den Innenwinkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sei $CD$ eine Transversale aus $C$, die $AB$ im Punkt $D$ unter dem Winkel $\gamma > 90°$

schneidet (vergleiche den rechten Teil der Figur 7).
Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ und im Dreieck $\triangle BCD$ ist $\sphericalangle DCB + \beta + \gamma = 180°$, woraus $\sphericalangle DCB = \alpha$ folgt. Also stimmen die Innenwinkel in beiden Dreiecken überein und daher sind $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ ähnlich. Deshalb gilt: $\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|BA|}{|BC|}$ oder $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$, wenn man $|BD| = p$ und $|BA| = c$ setzt. Somit ist

(1) $a^2 = p \cdot c$ für Dreiecke wie Figur 7.

Im Dreieck $\triangle ABC$ gibt es noch eine zweite Transversale $CE$ aus dem Punkt $C$, welche $AB$ in $D$ unter dem Winkel $\gamma$ schneidet (siehe Figur 7). Man prüft leicht nach, dass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AEC$ übereinstimmende Innenwinkel haben und sie daher ähnlich sind, sodass gilt: $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Mit $|AE| = q$ folgt daraus $\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$, woraus sich ergibt:

(2) $b^2 = q \cdot c$ für Dreiecke wie Figur 7.

Weiter folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AEC$, dass $\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ und daher mit $|CE| = d$ auch $\frac{d}{b} = \frac{a}{c}$ ist. Mit (1) und (2) folgt daraus wegen $d = \frac{ab}{c} = \frac{\sqrt{pc}\sqrt{qc}}{c}$, dass

(3) $d^2 = p \cdot q$ für Dreiecke wie Figur 7.

Addiert man die Gleichungen (1) und (2), so ergibt sich:

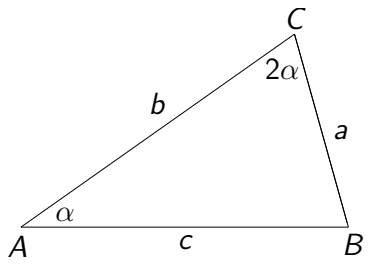
(4) *Die Regel des Tābit*: $a^2 + b^2 = c \cdot (p + q)$ für Dreiecke wie Figur 7.

Die Sätze (1) bis (4) sind Verallgemeinerungen und zwar (1) und (2) des Kathetensatzes, (3) des Höhensatzes und (4) des Satzes von Pythagoras.
*Nachweis:* Im Dreieck $\triangle ABC$ der Figur 7 sei $\gamma = 90°$. Dann ist $CD = CE$ und $p + q = c$. Dann stellen (1) und (2) den Kathetensatz und (4) wegen $p + q = c$ den Satz des Pythagoras dar; die Transversale $CD$ ist die Höhe im Dreieck $\triangle ABC$, sodass (3) mit $d = h$ der Höhensatz ist.

Die Tābit-Figur 7 ist also im Blick auf Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Satzes von Pythagoras und seiner zwei Varianten Katheten- und Höhensatz erstaunlich ergiebig.

Und nun beweise selbst die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras:
Im Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $a$, $b$, $c$, dessen Winkel bei $C$ doppelt so groß wie der Winkel bei $A$ ist, gilt:

$$c^2 = a^2 + a \cdot b.$$



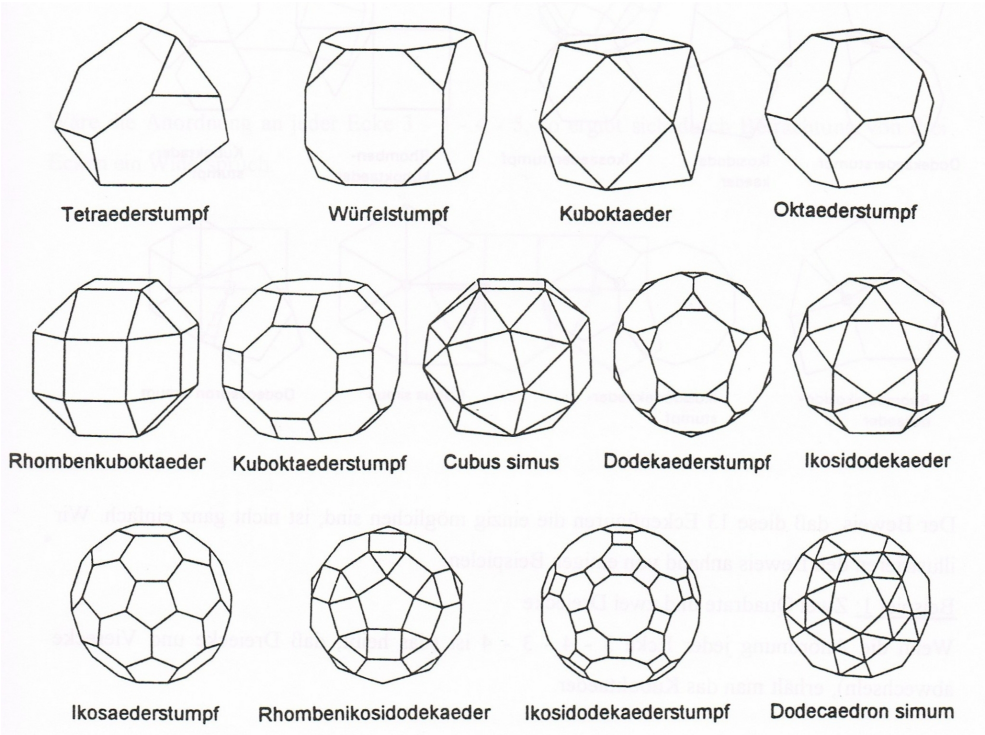

*Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 13.*

# Trickreiche Volumenbestimmung halbregulärer Körper

von Arthur Köpps

## Ein kleiner Exkurs über halbreguläre Körper

Die halbregulären Körper waren schon dem griechischen Philosophen Archimedes (287–212 v. Chr.) bekannt und tragen auch den Namen *Archimedische Körper*. In der folgenden Abbildung* sind alle aufgelistet:




Sie zeichnen sich durch folgende Eigenschaften aus:

a) Sie lassen sich durch geeignetes Abschneiden von Ecken beziehungsweise Ecken und Kanten jeweils aus Platonischen (regulären) Körper erzeugen.

b) Jede Fläche eines Archimedischen Körpers stellt ein regelmäßiges Vieleck dar.

c) An jeder Ecke ist die Abfolge der Vielecke gleich.

d) Im Gegensatz zu den Platonischen Körpern, die jeweils nur aus gleichseitigen Dreiecken, Quadraten oder regelmäßigen Fünfecken bestehen, treten bei den Archimedischen Körpern zwei oder drei verschiedene regelmäßige Vielecke auf.

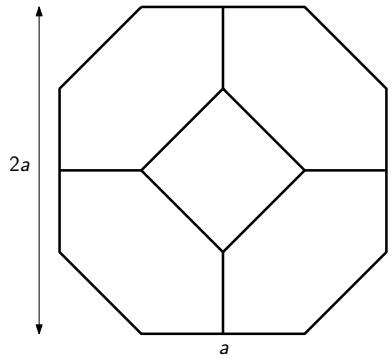
Es gibt 13 dieser halbregulären Körper (siehe obige Abbildung).

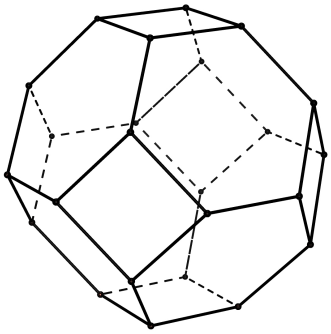
---

* aus: Katalog Geometrische Modelle, Mathematik zum Anfassen von Herrn Prof. Albrecht Beutelspacher, ursprünglich aus Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde von Paul Adam und Arnold Wyss, Verlag: Freies Geistesleben, 1994.

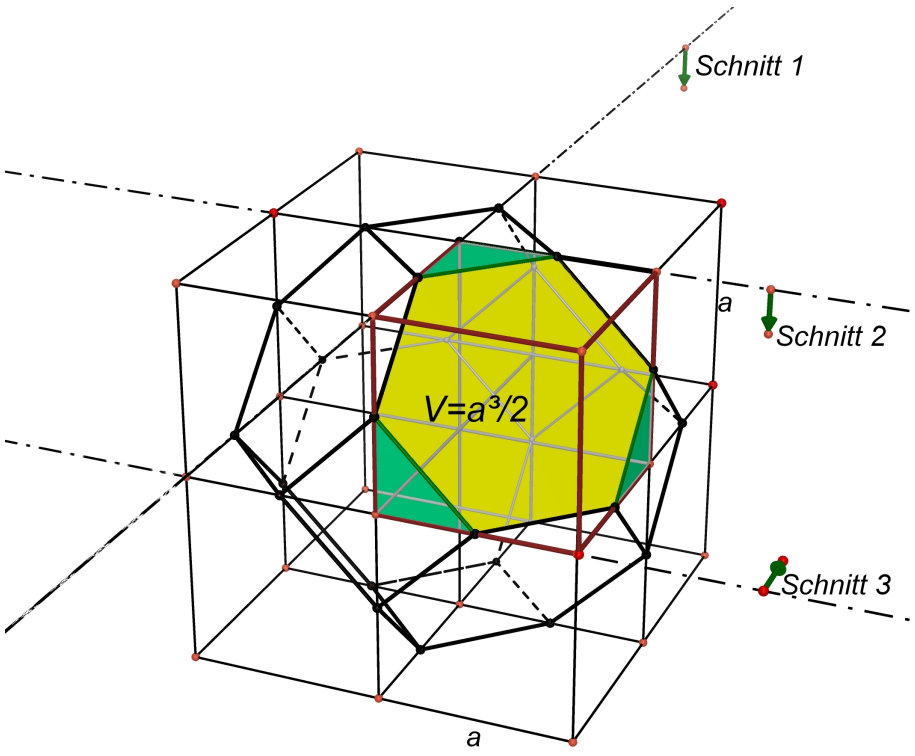
## Der Oktaederstumpf

Die folgenden Abbildungen** zeigen die Ansicht eines Körpers, der durch Abschneiden der Ecken eines Platonischen Körpers (regelmäßiger Vielflächler) entstanden ist. Der Körper stellt einen Archimedischen Körper dar und trägt den Namen Oktaederstumpf.



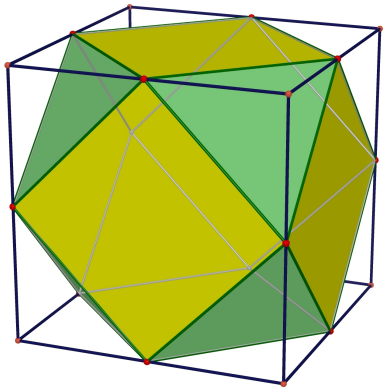



Zur Volumenberechnung dieses Körpers bietet sich folgendes geschicktes Vorgehen an: Man zerteilt den Körper durch drei Schnitte in acht gleichgeformte Teilkörper (siehe unten). Es entstehen acht Würfelhälften der Kantenlänge $a$, sodass das Volumen $V_{OS} = 8 \cdot \frac{1}{2}a^3 = 4a^3$ ist. Der diesen Körper umhüllende Würfel besitzt die Kantenlänge $2a$, hat also das Volumen $V_W = 8a^3$. Somit stellt das Volumen des Oktoaederstumpfes genau die Hälfte des Volumens des ihm umschriebenen Würfels dar: $V_{OS} = \frac{1}{2}V_W$.
Ansicht eines Teilkörpers:




** Diese und die folgenden Graphiken wurde von Redaktionsmitglied Dr. Ekkehard Kroll erstellt, herzlichen Dank!

## Vom Würfel zum Kuboktaeder



Schneidet man an den achten Ecken eines Würfels Dreieckspyramiden ab, wobei die Schnittflächen jeweils gleichseitige Dreiecke darstellen, so entsteht ein Kuboktaeder (siehe Abbildung).

Die acht abgeschnittenen Teilkörper lassen sich zu einem Oktaeder zusammenfügen. Besitzt der Würfel die Kantenlänge $a$, so beträgt die Kantenlänge des Oktaeders $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Man erhält also für die Volumina:

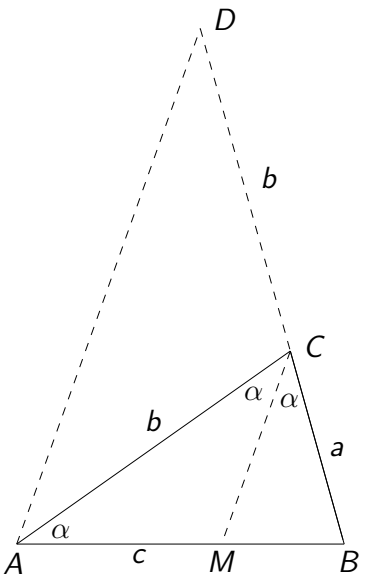
$$V_{\text{Okt}} = \frac{(\frac{a}{2}\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{6}$$

$$V_{\text{Kubokt}} = V_{\text{Würfel}} - V_{\text{Okt}} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6}a^3$$

Besitzt der Kuboktaeder die Kantenlänge $a$, so gilt: Die Kantenlänge des umbeschriebenen Würfels beträgt $\sqrt{2}a$. Dann ist also:

$$V_{\text{Kubokt}} = (a\sqrt{2})^3 - \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 2a^3\sqrt{2} - \frac{1}{3}a^3\sqrt{2} = \frac{5}{3}a^3\sqrt{2}.$$

# Lösungen zu den Aufgaben von Seite 10




Verlängere $BC$ bis zum Punkt $D$, sodass $|CD| = |CA|$ ist. Weiter sei $CM$ die Winkelhalbierende des Winkels bei $C$. Dannn ist das Dreieck $\triangle AMC$ gleichschenklig und wegen $\sphericalangle CMA = 180° - 2\alpha$ und $\sphericalangle DCA = 180° - 2\alpha$ gilt:

(1) $\sphericalangle CMA = \sphericalangle DCA$.

Da das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig ist, haben die Winkel bei $A$ und $D$ die gleiche Größe $\delta$ und wegen (1) ist $\delta = \alpha$ – vergleiche dazu die Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle ACD$. Daher stimmen in den Dreiecken $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ die drei Innenwinkel überein – die beiden Dreiecke sind also ähnlich. Folglich gilt:
$|AB| : |BD| = |BC| : |AB|$ oder $c : (a + b) = a : c$ und daher

$$c^2 = a(a + b) = a^2 + ab.$$

# Mathematische Lese-Ecke
## – Lesetipps zur Mathematik –

**Dietrich Lissautzki, Axel Müller: „Klug gedacht – leicht gemacht“**

Denksportbücher gibt's wahrlich viele, seit langem bis heute. Dieses neuartige und durch seine gefällige Aufmachung aus dem üblichen Angebot fallende Buch will auf „Gehirnjogging - Tour quer durch Deutschland“ schicken – und ist natürlich mitnichten gleichzeitig ein Reiseführer!

Aus dem Leben gegriffene Situationen werden zu 45 Denkaufgaben formuliert. In jedem der 16 Bundesländer spielt mindestens eine von ihnen, die mit ein wenig mathematischem Hintergrundwissen oder auch nur mit konsequenter Logik zu erschließen sind. Die benötigte Mathematik hält sich in den Grenzen der Sekundarstufe 1. Angesprochen werden soll jeder allgemein geistig Interessierte mit dem Wunsch, sich der Lösung eines Problems in kleinen folgerichtigen Schritten zu nähern durch konzentriertes Nachdenken – manchmal führen aber auch spontane Ideen zum Ziel. Um Frusterlebnisse zu vermeiden, hat Dietrich Lissautzki zu jeder Aufgabe als Einstiegshilfe einen „TIPP“ parat (auf den Kopf gestellt) sowie ausführliche Lösungen – ebenfalls kopfstehend – im zweiten Teil des Buches. Ein besonderes Bonbon darin ist die mathematische Lyrik von Jürgen Kettner, nämlich in Reimform gefasste acht zusätzliche Lösungen.

Jede Aufgabe nimmt zwei Seiten ein, ein jeweils passendes Farbfoto leitet den anschaulich-lebensnah gehaltenen Rätseltext ein, und dann gibt's ein mehr oder minder großes Notizfeld für erste Überlegungen sowie den erwähnten TIPP. 44 der Aufgaben sind als „einfach“, „schwieriger“ bzw. „anspruchsvoll“ klar gekennzeichnet. Die Idee zur 45. stammt von Prof. Dr. habil. Peter Ullrich (Uni Koblenz-Landau) zum Jahr der Mathematik 2008.

Letztlich hervorgegangen ist das Buch aus einer im wöchentlichen Rhythmus vor rund 10 Jahren von Lissautzki und Müller veröffentlichten Gehirn-Jogging-Serie der Koblenzer Rhein-Zeitung, die von der Leserschaft begeistert aufgenommen wurde. Damals widmete ihr die Wochenzeitung DIE ZEIT einen ausführlichen Beitrag unter dem Titel „Eine Gleichung für die ganze Familie“, woraufhin sich verschiedene Radiosender (u.a. Deutschlandfunk, HR, SWR), auch Universitäten und insbesondere große Wirtschaftunternehmen meldeten, um mit diesen und ähnlichen Aufgaben die Schulung ihrer leitenden Mitarbeiter zu unterstützen. „Denken ist auch Sport“ titelte die Rhein-Zeitung zum Erscheinen des Buches im Februar 2013.

*Fazit:* Ein schönes Buch, auch rein äußerlich, für alle Denkbegeisterten. Farbige Bebilderung jeder Aufgabe. Einsteigerniveau und Kniffliges. Notizseiten und Tipps als Anschubhilfe, ausführliche Lösungen. Handliches Format – gut für unterwegs,

im Urlaub usw.. Alle Rätselgeschichten mit regionalen Bezügen.

*Gesamtbeurteilung:* sehr gut ☺☺☺

**Angaben zum Buch:**

Dietrich Lissautzki/Axel Müller: Klug gedacht – leicht gemacht, Idee-Media-Verlag 2013, ISBN 978-3942779227, gebundene Ausgabe, 143 Seiten, 14,95 €.

| | |
|---|---|
| Art des Buches: | Rätselbuch |
| Mathematisches Niveau: | verständlich |
| Altersempfehlung: | ab 12 Jahren |

# Die besondere Aufgabe

von Robin Fritsch

## Aufgabe

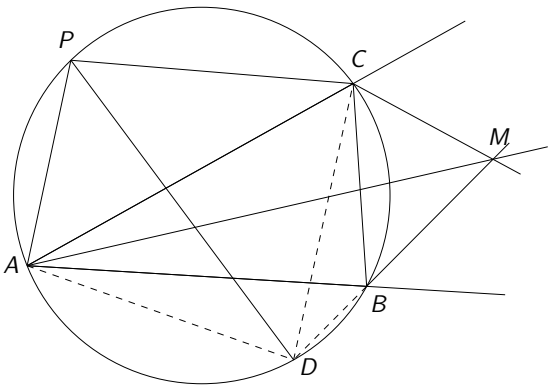
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ sowie ein Punkt $P$ auf dem Umkreis von $\triangle ABC$, sodass $B$ und $P$ auf verschiedenen Seiten von $AC$ liegen. Weiter sei $D$ der von $P$ verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle APC$ mit dem Umkreis von $\triangle ABC$. Der Mittelpunkt des Ankreises von $\triangle ABC$, der die Seite $BC$ berührt, sei $M$.

a) Man beweise, dass die Punkte $B$, $D$ und $M$ auf einer Geraden liegen.

b) Man beweise, dass dann $|DC| = |DM|$ gilt.

## Lösung

a) Da $PD$ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle APC$ ist, gilt $\sphericalangle APD = \sphericalangle DPC$. Daraus folgt mit der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes $|AD| = |CD|$. Das heißt, das Dreieck $\triangle ACD$ ist gleichschenklig und mit dem Peripheriewinkelsatz folgt somit für $\beta = \sphericalangle CBA$:




$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \frac{180^\circ - \sphericalangle CDA}{2} = \frac{180^\circ - \sphericalangle CBA}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Da $M$ der Ankreismittelpunkt ist, halbiert $BM$ den Außenwinkel bei $B$. Also gilt:

$$\sphericalangle MBC = \frac{180^\circ - \sphericalangle CBA}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Schließlich folgt damit:

$$\begin{aligned}\sphericalangle MBD &= \sphericalangle MBC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ABD = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \beta + \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\\ &= 180^\circ.\end{aligned}$$

Also liegen die Punkte $B$, $D$ und $M$ auf einer Geraden.

b) Da $M$ der Ankreismittelpunkt ist, halbieren $BM$ und $CM$ die Außenwinkel bei $B$ beziehungsweise $C$. Damit gilt mit $\gamma = \sphericalangle ACB$:

(1) $\sphericalangle CMB = 180^\circ - \sphericalangle MBC - \sphericalangle BCM = 180^\circ - \frac{180^\circ-\beta}{2} - \frac{180^\circ-\gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Andererseits gilt nach den Erkenntnissen aus a) auch

$$\sphericalangle DCM = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCM - \sphericalangle ACD = \gamma + \frac{180^\circ-\gamma}{2} - \frac{180^\circ-\beta}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Daraus folgt nun mit (1) und dem Ergebnis aus a) $\sphericalangle DCM = \sphericalangle CMB = \sphericalangle CMD$. Das heißt, $\triangle CDM$ ist gleichschenklig und es gilt $|DC| = |DM|$.

# Pythagoreische Tripel der Form $(a, a+1, c)$

von Roland Schröder

Das pythagoreische Tripel $(3, 4, 5)$ hat die Form $(a, a+1, c)$. Gibt es weitere pythagoreische Tripel dieser Form?

Um diese Frage beantworten zu können, bilde man zwei Folgen $a(k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $b(k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Hilfe der Gleichungen

$(\sqrt{2}-1)^{2n-1} = a(2n-1)\cdot\sqrt{2} - b(2n-1)$ und
$(\sqrt{2}-1)^{2n} = a(2n) - b(2n)\sqrt{2}$.

Die ersten Folgenglieder sehen dann so aus:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a(k)$ | 1 | 3 | 5 | 17 | 29 | 99 | 169 | 577 | 985 |
| $b(k)$ | 1 | 2 | 7 | 12 | 41 | 70 | 239 | 408 | 1393 |

Dann eignen sich die Folgen $a(k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $b(k)_{k\in\mathbb{N}}$ einerseits zur Einschachtelung von $\sqrt{2}$ (denn es ist $\frac{b(2n-1)}{a(2n-1)} < \sqrt{2} < \frac{a(2n)}{b(2n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$) und andererseits zur Konstruktion von pythagoreischen Tripeln der Form $(a, a+1, c)$: Wir wählen dazu gemäß Konstruktion nach Euklid* $n = b(2i)$ und $m = a(2i-1)$ oder $n = b(2i+1)$ und $m = a(2n)$ als Erzeugende.

Beispiele: Für $n = 2$ und $m = 1$ – dies entspricht $i = 1$ in der ersten Wahl von $n$ und $m$ – ergibt sich das Tripel $(3, 4, 5)$ und für $n = 7$ und $m = 3$ ergibt sich das Tripel $(40, 42, 58)$ und damit ist auch $(20, 21, 29)$ ein pythagoreisches Tripel der gewünschten Form $(a, a+1, c)$. Für $n = 12$ und $m = 5$ erhält man das Tripel $(119, 120, 169)$ mit der gewünschten Form und für $n = 41$ und $m = 17$ wird $(1392, 1394, 1970)$ erzeugt, was zu dem gewünschten Tripel $(696, 697, 985)$ führt. Man erhält also entweder direkt gewünschte Tripel oder die Zahlen der gewonnen Tripel müssen noch halbiert werden.

* Siehe hierzu: Monoid 112, Seite 32

Die pythagoreischen Tripel der Form $(a, a+1, c)$ weisen noch eine weitere Besonderheit auf: Schreibt man sie der Größe nach sortiert nieder so hat der Nachfolger des Tripels $(a, a+1, c)$ die Form $(3a+2c+1, 3a+2c+2, d)$. So ist der Nachfolger von $(119, 120, 169)$ beispielsweise $(3 \cdot 119 + 2 \cdot 169 + 1, 3 \cdot 119 + 2 \cdot 169 + 2, d) = (696, 697, 985)$.

# Die Aufgabe für den Computer-Fan

### Zahlendarstellungen

Überprüfe für alle natürlichen Zahlen $n$ mit $6 \leq n \leq 10^4$ die folgende Vermutung auf ihre Richtigkeit:

> Jedes $n$ ist die Summe aus einer Primzahl und einer Potenz, das heißt $n$ besitzt mindestens eine Darstellung der Form $n = p + b^k$ mit einer Primzahl $p$und natürlichen Zahlen $b \geq 1$ und $k \geq 2$.

Beispiele: $6 = 2 + 2^2 = 5 + 1^2$, $7 = 3 + 2^2$, $8 = 7 + 1^2$, $9 = 5 + 2^2$, $10 = 2 + 2^3$, $11 = 2 + 3^2 = 3 + 2^3 = 7 + 2^2$, $12 = 3 + 3^2 = 11 + 1^2$, .... (H.F.)

*Hinweis:* Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2013 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

# Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 112

### Eine Vermutung über Primzahlzwillinge

Sind $p$ und $p+2$ Primzahlen, so heißt das Paar $(p, p+2)$ ein Primzahlzwilling. Beispiele sind: $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, $(29, 31)$, ....

Es wird vermutet, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, was jedoch bis heute noch nicht bewiesen ist. Darum reizt es auch Amateure, nach Serien von Primzahlzwillingen zu fahnden, die möglicherweise unendlich viele Elemente umfassen. So erhielt die Monoid-Redaktion von einem solchen Amateur namens René Peer folgende Vermutung per E-Mail:

> Für alle ungeraden natürlichen Zahlen $N$ ist das Zahlenpaar $6 \cdot \frac{2^N-1}{G} - 1$ und $6 \cdot \frac{2^N-1}{G} + 1$ ein Primzahlzwilling. Hierbei bezeichne $G$ den größten Primfaktor von $2^N - 1$ (im Falle $2^N - 1 = 1$ sei $G = 1$).

Was halten unsere Computer-Fans von dieser Vermutung? (E.K.)

### Ergebnisse

Tatsächlich ergeben sich für alle ungeraden $N$ bis einschließlich $N = 23$ Primzahlzwillinge (bis $N = 19$ konnte sich davon auch Bettina Diller von der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik in München überzeugen). Dabei tritt mehrfach der Zwilling $(5, 7)$ auf, nämlich für $N = 1$ und immer dann, wenn $2^N - 1$ eine Primzahl und daher gleich $G$ ist – zutreffend für $N = 3, 5, 7, 13, 17, 19$. Des Weiteren erhalten wir die Primzahlzwillinge $(41, 43)$ für $N = 9$, $(137, 139)$ für $N = 11$, $(1301, 1303)$ für $N = 15$, $(37337, 37339)$ für $N = 21$ und schließlich $(281, 283)$ für $N = 23$. Dagegen ergibt sich für $N = 25$ *erstmalig kein* Primzahlzwilling, sondern das Paar $(111785 = 5 \cdot 79 \cdot 283, 111787 = 13 \cdot 8599)$. Somit ist bereits hierdurch die Vermutung von René Peer widerlegt. Für die nachfolgenden $N$ treten in unregelmäßiger Abfolge sowohl Primzahlzwillinge als auch Paare auf, bei denen nur einer der beiden Komponenten prim ist oder wo beide keine Primzahlen sind. (E.K.)

# Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 113

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

## I. Zahlen mit Ziffernfolge 2013

a) Wie viele sechsstellige Zahlen gibt es, in denen die Ziffernfolge 2013 zusammenhängend vorkommt?

b) Welches ist die kleinste, welches ist die größte dieser Zahlen? (WJB)

*Lösung:*

a) Die Zahlen sind von der Form:

(1) $ab2013$

(2) $a2013b$

(3) $2013ab$

Für die Ziffer $a$ gibt es in den Fällen (1) und (2) je 9 Möglichkeiten und für $b$ je 10 Möglichkeiten, in (3) gibt es für $a$ und $b$ jeweils 10 Möglichkeiten, also für die Fälle (1) und (2) jeweils $9 \cdot 10 = 90$ und für den Fall (3) $10 \cdot 10 = 100$ Möglichkeiten, zusammen also $2 \cdot 90 + 100 = 280$.

b) Die kleinste Zahl ist 102013, die größte ist 992013.

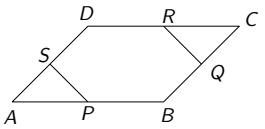
## II. Zahlenauswahl

Aus der Menge $M$ der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2012$ wird eine beliebige Teilmenge $T$ mit 1007 Zahlen ausgewählt.

Zeige: In $T$ gibt es zwei Zahlen $a$ und $b$, für die $a + b = 2013$ ist. (H.F.)

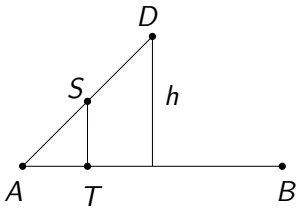
*Lösung:*
Aus den Zahlen der gegebenen Menge $M$ bilde man die 1006 Zahlenpaare $(1, 2012)$, $(2, 2011)$, ..., $(1006, 1007)$.
Wenn nun aus der Menge $M$ 1007 Zahlen ausgewählt werden, dann müssen (mindestens) zwei davon im gleichen Zahlenpaar vorkommen. Diese zwei Zahlen haben die Summe 2013, weil in jedem Zahlenpaar die Summe seiner zwei Komponenten 2013 ist.

## III. Flächenberechnung

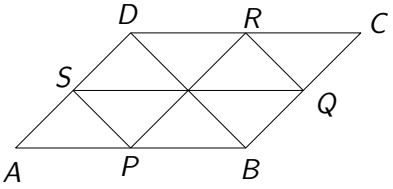



Im Parallelogramm $ABCD$ seien $P$, $Q$, $R$, $S$ die Seitenmittelpunkte. Welchen Anteil hat die Fläche des Sechsecks $PBQRDS$ an der Parallelogrammfläche? (H.F.)

*Lösung:*




Die Fläche $F$ des Parallelogramms ist $F = a \cdot h$, wobei $a$ die Länge der Seite $AB$ und $h$ die Höhe des Parallelogramms, das heißt der Abstand der Strecken $AB$ und $CD$, sind. In der nebenstehenden Teilfigur des Parallelogramms $ABCD$ gilt: $|ST| : h = |AS| : |AD| = 1 : 2$, sodass $|ST| = \frac{1}{2}h$ ist.
Für die kongruenten Dreiecke $\triangle APS$ und $\triangle CRQ$ gilt dann: $|APS| = |CRQ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{8}ah$. Folglich ist $|PBQRDS| = |ABCD| - 2\,|APS| = ah - \frac{1}{4}ah = \frac{3}{4}ah = \frac{3}{4}F$.
*Alternative Lösung:*
Wir zerlegen das Parallelogramm $ABCD$ mit Hilfe der Mittelparallelen $RP$ und $SQ$ in vier gleich große Parallelogramme. Anschließend zeichnen wir die Diagonale $BD$ ein, sodass wir das Parallelogramm in acht kongruente und damit gleich große Dreiecke eingeteilt haben. Eine Fläche eines Dreiecks entspricht also einem Achtel der Gesamtfläche des Parallelogramms und somit hat das Sechseck $PBQRDS$ einen Anteil von $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ an der Gesamtfläche von $ABCD$.




## IV. Besondere Brüche

Man kann aus den neun Ziffern 1, 2, ..., 9 Brüche herstellen, in deren Zähler und Nenner zusammen jede Ziffer genau einmal vorkommt. Beispiel: $\frac{4392}{17568} = \frac{1}{4}$. Kannst Du auf diese Weise die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ herstellen? (H.F.)

*Lösung:*
Mögliche Lösungen sind:
$\frac{1}{2} = \frac{6729}{13458}$, $\frac{1}{3} = \frac{5823}{17469}$, $\frac{1}{5} = \frac{2697}{13485}$, $\frac{1}{6} = \frac{2943}{17658}$, $\frac{1}{7} = \frac{2394}{16758}$, $\frac{1}{8} = \frac{5789}{46312}$, $\frac{1}{9} = \frac{6381}{57429}$.

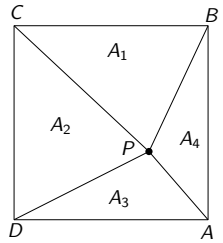
## V. Kleinstes Vielfaches

Finde das kleinste Vielfache von 5 mit der Quersumme 45. (WJB)

*Lösung:*

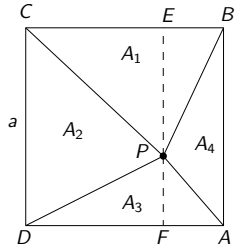
Die letzte Ziffer der gesuchten Zahl ist 0 oder 5. Mit letzter Ziffer 0 ist 999990 die kleinste Möglichkeit, da alle anderen Zahlen mit der Quersumme 45 mehr als sechs Stellen haben. Mit der letzten Ziffern 5 ergibt sich 499995 mit der gleichen Begründung als kleinste Lösung, und diese ist kleiner als 999990, also die gesuchte Zahl.

## VI. Zerlegung eines Quadrats




$P$ sei ein Punkt im Innengebiet eines Quadrats $ABCD$. Verbindet man $P$ mit den Ecken $A$, $B$, $C$ und $D$, so entstehen vier Dreiecke mit den Flächen $A_1$, $A_2$, $A_3$ und $A_4$. Untersuche, ob $A_1 + A_3 = A_2 + A_4 = \frac{1}{2}|ABCD|$ ist. (H.F.)

*Lösung:*




Es sei $|AB| = a$. Ferner sei $EF$ eine zu $AB$ parallele Strecke durch $P$ und es sei $|EP| = h_1$ sowie $|FP| = h_3$. Dann gilt: $A_1 = \frac{1}{2}ah_1$ und $A_3 = \frac{1}{2}ah_3$, woraus folgt: $A_1 + A_3 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_3) = \frac{1}{2}a^2$. Dann ist auch $A_2 + A_4 = \frac{1}{2}a^2$ und die Behauptung ist wahr.

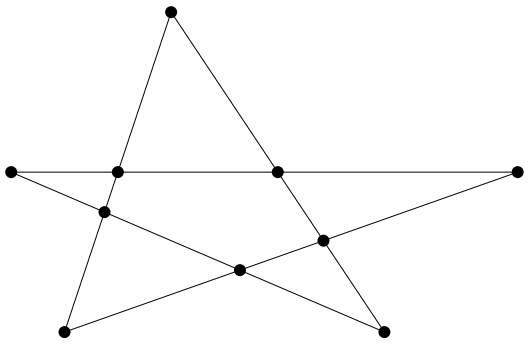
*Alternative Lösung:*

Die vier Lote von $P$ auf die Seiten des Quadrates $ABCD$ zerlegen dies in vier Rechtecke und andererseits in vier Paare von jeweils kongruenten Dreiecken, nämlich den Hälften der vier Rechtecke. Also ist $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$, denn beide Seiten bestehen je aus vier Dreiecken aus den vier Dreieckspaaren.

## VII. Problem eines Gärtners

Wie kann man zehn Bäumchen so pflanzen, dass sie in fünf geraden Linien mit jeweils vier Bäumen stehen? (Eine Zeichnung genügt!) (gefunden: H.F.)

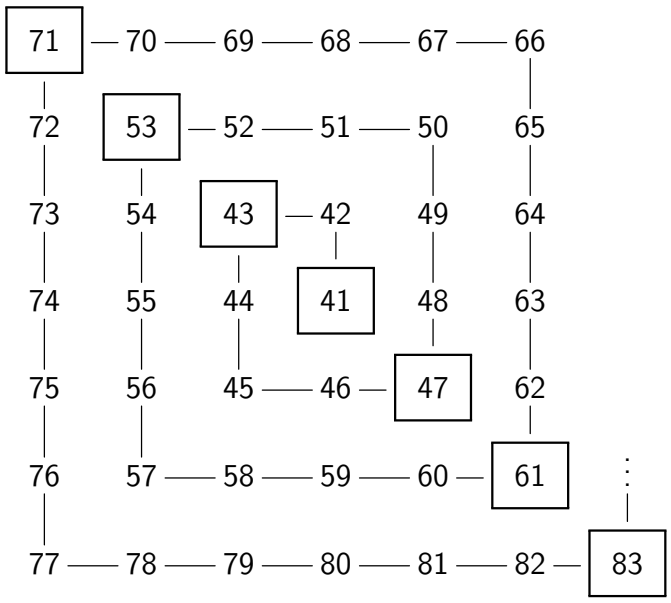
*Lösung:*



# Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

## I: Eine erstaunliche Zahlenspirale




Mathis entdeckt in einer Zeitschrift eine Zahlenspirale. Nachdem er sich ausgiebig mit ihr befasst hat, findet er sie so bemerkenswert, dass er auch andere zu ihrer Untersuchung motivieren möchte. So stellt er Dir die folgende Aufgabe:

a) Bestimme die nächsten vier Zahlen auf der Diagonale. Überprüfe, ob alle diese Zahlen in der Diagonale Primzahlen sind.
*Hinweis:* Eine Tabelle mit Primzahlen findest Du im Internet.

b) Wie kommst Du auf die weiteren Zahlen in der Diagonale?

c) Welche Zahl ist die erste Nicht-Primzahl auf der Diagonalen? (gefunden: H.F.)

## II: Schläge einer Uhr

Manche Uhren zeigen die Stunden durch Schläge an. Eine Uhr benötigt sechs Sekunden, vier Mal zu schlagen. Wie lange braucht sie für zwölf Schläge? (H.F.)

## III: Trugschluss?

Mathis behauptet: Wenn man eine kleinere Zahl durch eine größere Zahl teilt, dann ist stets das Ergebnis kleiner, als wenn man die größere Zahl durch die kleinere Zahl teilt. Hat Mathis Recht? (H.F.)

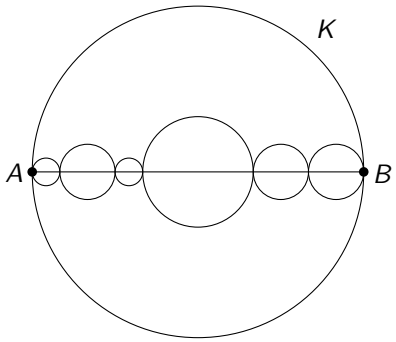
## IV: Rechteck aus Quadraten

Setze neun Quadrate mit den Seitenlängen 2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36 so zusammensetzen, dass sie ein vollständiges Rechteck bilden. (H.F.)

## V: Dreiteilung einer Kreisscheibe

Zerlege allein mit einem Zirkel eine Kreisscheibe in drei flächengleiche Teilfiguren. (H.F.)

## VI: Kreise im Kreis




Gegeben seien ein Kreis $K$ vom Durchmesser $D$ und eine Durchmesserlinie $AB$. Entlang der Strecke $AB$ seien $n$ Kreise $k_1, k_2, \ldots k_n$ (d.h. die Mittelpunkte $M_i$ der Kreise liegen auf $AB$) mit den Durchmessern $d_1, d_2, \ldots d_n$ so gewählt, dass gilt: Die Kreise $k_1, k_2, \ldots k_n$ liegen alle vollständig in $K$ und überdecken die Strecke $AB$ von $K$ vollständig; keine zwei Kreise überlappen sich (vergleiche Abbildung). Es sei $s$ die Summe der Umfänge von $k_1, k_2, \ldots k_n$ und $U$ der Umfang von $K$. Entscheide, welche der folgenden drei Aussagen zutrifft: $s < U$ oder $s = U$ oder $s > U$. (H.F.)

*Bemerkung:* Für den Kreisumfang $U$ gilt $U = \pi \cdot d$. Bei allen Kreisen ist das Verhältnis $\frac{U}{d}$ des Umfangs zum Durchmesser konstant. Seit Euler (1737) wird diese Konstante mit $\pi$ bezeichnet, dem Anfangsbuchstaben des griechischen Wortes periphereia (Peripherie, Umfang).

## VII: Logisches Puzzle

a) Laura stellt Tim ein Rätsel: Ich habe mir zwei positive ganze Zahlen $x$ und $y$ ausgedacht. Damit du sie erraten kannst, gebe ich dir drei Hinweise:

(1) $x + 4y$ ist eine Primzahl;

(2) $x = 2y + 11$;

(3) $y$ ist ein Teiler von $x + 3$.

Welche Zahlen kommen nach diesen Hinweisen für $x$ und $y$ in Frage? Gib alle Möglichkeiten an.

b) Am nächsten Tag erzählt Tim das Rätsel weiter an Clara. Dabei will er es aber noch etwas schwerer machen. Er sagt: Ich denke mir zwei positive ganze Zahlen $x$ und $y$, für die genau drei der folgenden vier Aussagen wahr sind:

(1) $x + 4y$ ist eine Primzahl;

(2) $x = 2y + 11$;

(3) $y$ ist ein Teiler von $x + 3$;

(4) 3 ist ein Teiler von $x + y$.

Kann Clara allein aus diesen Hinweisen erkennen, dass Aussage (4) falsch ist, und dann auf das gleiche Ergebnis wie Tim zuvor kommen? Wie? (H.F.)

# Neue Aufgaben

Klassen 9–13

## Aufgabe 1071: Welche Zahl ist größer?

Es seien $S(2012) = \frac{1}{2012}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2012})$ und $S(2013) = \frac{1}{2013}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013})$.
Welche der beiden Zahlen $S(2012)$ und $S(2013)$ ist die größere? (H.F.)

## Aufgabe 1072: Darstellung von 2013

Es sei $S(m, n) = \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + ... + \frac{1}{(m+n)(m+n+1)}$. Kann man $m$ und $n$ so wählen, dass $\frac{1}{S(m,n)} = 2013$ ist? (H.F.)

## Aufgabe 1073: Keine Ziffern 7, 8 und 9

Wie viele positive ganze Zahlen $\leq 10000$ gibt es, in deren Zifferndarstellung keine der Ziffern 7, 8 und 9 vorkommt? (H.F.)

## Aufgabe 1074: Jahreszahlen-Aufgabe

Für welche natürliche Zahl $n$ gilt erstmals $\sqrt[11]{2^1} \cdot \sqrt[11]{2^3} \cdot \sqrt[11]{2^5} \cdot ... \cdot \sqrt[11]{2^{2n+1}} \geq 2013$? (H.F.)

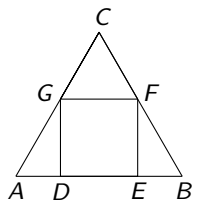
## Aufgabe 1075: Näherungswerte für $\sqrt{3}$

Den Abstand zweier reeller Zahlen $a$ und $b$ definiert man durch $|a - b|$. Ist $|a - b|$ klein, dann sagt man auch: $a$ ist ein guter Näherungswert für $b$ (oder $b$ ist ein guter Näherungswert für $a$). Es gilt: Wenn $\frac{m}{n}$ mit positiven ganzen Zahlen $m$ und $n$ ein Näherungswert für $\sqrt{3}$ ist, dann ist $\frac{m+3n}{m+n}$ ein besserer Näherungswert für $\sqrt{3}$. Begründe dies. (H.F.)

## Aufgabe 1076: Kugel, Würfel, Kugel

In einem Würfel befindet sich eine Kugel, die sämtliche sechs Würfelseiten von innen berührt. Der Würfel selbst liegt im Inneren einer Kugel, wobei jede Würfelecke in der Kugeloberfläche liegt. Bestimme das Verhältnis, in dem die Volumina der beiden Kugeln und auch ihre Oberflächen zueinander stehen. (H.F.)

## Aufgabe 1077: Flächenvergleich




Einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ sei ein Quadrat $DEFG$ so einbeschrieben, dass seine Eckpunkte auf den Dreiecksseiten liegen – wie in der Figur. Untersuche, ob dann die Fläche des Quadrats halb so groß wie die Dreiecksfläche ist. (H.F.)

# Gelöste Aufgaben aus Monoid 113

Klassen 9–13

## Aufgabe 1064: Ohne Taschenrechner!

Zeige: Der Wert der alternierenden Reihe $2012^2-2011^2+2010^2\pm\ldots-3^2+2^2-1^2$ ist ein Vielfaches von 2013. (H.F.)

*Lösung:*

$2012^2-2011^2+2010^2-2009^2+\ldots+2^2-1^2=(2012-2011)(2012+2011)+(2010-2009)(2010+2009)+\ldots+(2-1)(2+1)=(2012+2011)+(2010+2009)+\ldots+(2+1)=\frac{1}{2}\cdot 2012\cdot 2013=1006\cdot 2013.$

## Aufgabe 1065: Bemerkenswerte Summendarstellung von 2013

Es sei $S_n=\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Kann man $n$ so wählen, dass $S_n=2013$ ist? Begründe Deine Antwort. (H.F.)

*Lösung:*

Leider hat der Druckfehlerteufel zugeschlagen und in der Aufgabenstellung ein „$+\ldots$“ unterschlagen, so sollte es $S_n=\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ heißen.

In der abgedruckten Version besteht die Summe $S_n$ aus vier Summanden der Form $\frac{1}{x}$ mit $x\geq 1$, sodass $S_n$ für alle $n\geq 0$ (sonst ist der Ausdruck $\sqrt{n}$ nicht definiert) $\leq 4$, also insbesondere verschieden 2013 ist. Die Gleichung besitzt also keine Lösung.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass es für $S_n=\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ein $n$ gibt, sodass $S_n=2013$ ist.

Wegen $\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}=\frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{(\sqrt{i+1}+\sqrt{i})(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})}=\sqrt{i+1}-\sqrt{i}$ für $i=0,1,2,\ldots$ lässt sich $S_n$ auch so schreiben:

$$S_n=(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}.$$

Denn in dieser nach Umklammern alternierenden Summe $S_n$ mit $2(n+1)$ Gliedern heben sich je zwei Terme weg bis auf $\sqrt{0}=0$ und $\sqrt{n+1}$. Wenn daher $n=2013^2-1$ ist, dann ist $S_n=2013$.

## Aufgabe 1066: Eine Jahreszahlen-Aufgabe

Es sei $\mathbb{M}=\{z_1,z_2,\ldots,z_{11}\}$ eine Menge beliebiger, jedoch paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen, die sämtlich $\leq 2013$ sind. Dann gibt es in jeder solchen Menge $\mathbb{M}$ stets zwei Zahlen $z_i$, $z_k$, für die gilt: $1<\frac{z_i}{z_k}\leq 2$. Zeige dies. (H.F.)

*Lösung:*

Man zerlege die Menge $\mathbb{M}=\{1,2,3,\ldots,2013\}$ in zehn Teilmengen:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{1, 2\} \\
M_2 &= \{3, 4, 5, 6\} \\
M_3 &= \{7, 8, 9, \dots, 14\} \\
&\vdots \\
M_9 &= \{511, 512, \dots, 1022\} \\
M_{10} &= \{1023, 1024, \dots, 2013\}
\end{aligned}
$$

Dabei sind die ersten neun Teilmengen so gewählt, dass die größte Zahl der Menge jeweils das Doppelte der kleinste Zahl der Menge ist. Wählt man nun elf beliebige Zahlen aus $\mathbb{M}$, so liegen mindestens zwei dieser Zahlen in einer der zehn Mengen $M_n$, $n = 1, 2, 3, \dots, 10$. Die beiden Zahlen seien $z_i$, $z_k$ und $z_k$ sei die kleinere von beiden Zahlen. $M_l$ sei die Menge mit $z_i$, $z_k \in M_l$ und $z_a$ sei die kleinste und $z_b$ die größte Zahl dieser Menge. Es ist $z_b = 2z_a$, falls $l \leq 9$. Damit folgt aus $z_a \leq z_k < z_i \leq z_b$: $1 < \frac{z_i}{z_k} \leq \frac{z_i}{z_a} \leq \frac{z_b}{z_a} = 2$. Für $l = 10$ gilt $z_b < 2z_a$. Es gilt also die Behauptung.

## Aufgabe 1067: Verkauf von Äpfeln

Zwei Obstbauern aus Rheinhessen verkaufen Äpfel in Beuteln zu je 5kg auf dem Mainzer Wochenmarkt. Am Ende des Tages haben sie zusammen 100 Beutel verkauft. Dabei hat jeder gleich viel Geld eingenommen. Hätte der erste Bauer auch die Äpfel des zweiten Bauern verkauft, so hätte er 720 Euro mehr erlöst. Hätte aber der zweite Bauer auch die Äpfel des ersten verkauft, so hätte sein Mehrerlös nur 320 Euro betragen. Wie viel hat jeder Bauer verkauft, und zu welchem Preis?

(gefunden: WJB, nach Leonhard Euler (1707–1783))

*Lösung:*

Verkauft der erste Bauer $x$ Beutel zum Preis von $a$ Euro und der zweite Bauer $100 - x$ Beutel für je $b$ Euro, so gilt:

$$ax = b(100 - x),\ a(100 - x) = 720,\ bx = 320.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach $\frac{a}{b}$ und bestimmen $\frac{a}{b}$ aus den anderen beiden Gleichungen:

$$\frac{a}{b} = \frac{100-x}{x},\ \frac{a}{b} = \frac{720}{320} \cdot \frac{x}{100-x} = \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{100-x}.$$

Daraus ergibt sich: $4(100 - x)^2 = 9x^2$, also $2(100 - x) = 3x$ ($x$ und $100 - x$ sind positiv!) und somit $x = 40$, $a = \frac{720}{60} = 12$ und $b = \frac{320}{40} = 8$. Der erste Bauer hat also 40 Beutel zum Preis von je 12 Euro verkauft, während der zweite Bauer 60 Beutel zu je 8 Euro verkauft hat. Jeder hat 480 Euro eingenommen.

## Aufgabe 1068: Stadtlauf

Bei einer Laufveranstaltung gibt es den Volkslauf über 5036m und den Stadtlauf über genau 10000m. Läufer des Volkslaufs laufen drei Runden, die des Stadtlaufs

sechs Runden, wobei der Start jeweils außerhalb der gewöhnlichen Strecke liegt und jeweils dort in die Runde führt, wo sich das Ziel befindet. Dabei starten alle Läufer am selben Start, d.h. sowohl die Volks- als auch die Stadtläufer laufen die selbe Strecke zur Runde. Nach jedem Kilometer wird dieser mit einer Tafel am Streckenrand angezeigt. In welcher Reihenfolge wird ein Läufer die verschiedenen Kilometertafeln innerhalb der ersten Runde passieren? (Bettina Diller, Städtische Berufsschule für Informationstechnik, München)

*Lösung:*
Es sei $x$ die Länge der Strecke vom Start zur Runde und $y$ die Länge einer Runde (jeweils in m). Dann gilt:

$$5036 = x + 3y \Longrightarrow x = 5036 - 3y$$
$$10000 = x + 6y \Longrightarrow x = 10000 - 6y$$
$$\Longrightarrow 5036 - 3y = 10000 - 6y \Longrightarrow 3y = 4964 \Longrightarrow y = 1654\frac{2}{3} \Longrightarrow x = 72$$

Damit betragen die Laufstrecken nach den jeweiligen Runden:

| gelaufene Runde | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| gelaufene Strecke | $72 + 1654\frac{2}{3} = 1726\frac{2}{3}$ | $3381\frac{1}{3}$ | 5036 | $6690\frac{2}{3}$ | $8345\frac{1}{3}$ | 10000 |

Betrachtet man die einzelnen Runden, so erhält man als Differenzen der Kilometertafeln zum Rundenbeginn:

| Kilometertafel bei | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Runde | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| Rundenbeginn | 72 | $1726\frac{2}{3}$ | $1726\frac{2}{3}$ | $3381\frac{1}{3}$ | $3381\frac{1}{3}$ | 5036 |
| Differenz zu Rundenbeginn | 928 | $273\frac{1}{3}$ | $1273\frac{1}{3}$ | $618\frac{2}{3}$ | $1618\frac{2}{3}$ | |

| Kilometertafel bei | 7000 | 8000 | 9000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| Runde | 5 | 5 | 6 | 7 |
| Rundenbeginn | $6690\frac{2}{3}$ | $6690\frac{2}{3}$ | $8345\frac{1}{3}$ | 10000 |
| Differenz zu Rundenbeginn | $309\frac{1}{3}$ | $1309\frac{1}{3}$ | $654\frac{2}{3}$ | 0 |

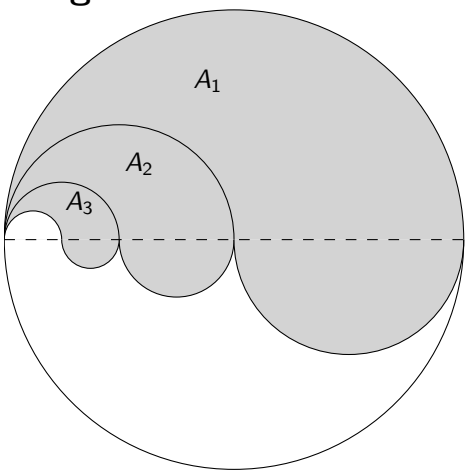
Die Differenzen werden aufsteigend geordnet:

$0 < 273\frac{1}{3} < 309\frac{1}{3} < 618\frac{2}{3} < 654\frac{2}{3} < 928 < 964 < 1273\frac{1}{3} < 1309\frac{1}{3} < 1618\frac{2}{3}$.

Nun können ihnen die Kilometer zugewiesen werden. So ist die 10-Kilometer-Tafel die erste, der man begegnet:

$10 \to 2 \to 7 \to 4 \to 9 \to 1 \to 6 \to 3 \to 8 \to 5$.

## Aufgabe 1069: Yin und Yang




In einem Kreis vom Radius 1 zeichnen wir die nebenstehenden Figuren (dabei bestehen die gezeichnete Kurven jeweils aus Halbkreisen mit den Radien 1, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$):

a) Welche Inhalte haben jeweils die grauen Flächen $A_1$, $A_2$ und $A_3$?

b) Wenn man das Verfahren so weiterführt, wie groß ist die Gesamtfläche, die gefärbt wird?

(WJB)

*Lösung:*

a) Ergänzen wir jeweils die oberen Halbkreise zu einem ganzen Kreis, so ist der graue Teil gerade die Hälfte davon. Die Radien der Kreise sind also 1, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ und damit die Flächen $\pi$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{16}$. Diese Flächen müssen wir noch halbieren und erhalten $A_1 = \frac{\pi}{2}$, $A_2 = \frac{\frac{\pi}{2}}{4}$ und $A_3 = \frac{\frac{\pi}{2}}{4^2}$.

b) Führt man obiges Verfahren weiter, so sieht man, dass jeweils $A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n$ gilt. Die Gesamtfläche ist also:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{3}.$$

## Aufgabe 1070: Teilbarkeit durch n!

Das Produkt aus $n$ unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets durch $n!$ teilbar.

Trifft diese Behauptung zu?

*Hinweis:* Die *Fakultät* ! ist so definiert: $1! := 1$ und $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ für eine natürliche Zahl $n > 1$. (H.F.)

*Lösung:*

Sei $P$ das Produkt der $n$ Zahlen $m+1, m+2, m+3, \ldots, m+n$, wobei $m$ eine beliebige ganze Zahl $\geq 1$ ist, dann gilt $P = \frac{(m+n)!}{m!}$. Nun ist aber der Wert des Binominalkoeffizienten $b := \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{\frac{(m+n)!}{m!}}{n!} = \frac{P}{n!}$ eine ganze Zahl, d.h. $P$ ist durch $n!$ teilbar.

Alternative:

Es gibt $P = (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1) = \frac{(m+n)!}{m!}$ Möglichkeiten, $n$ nummerierte Kugeln in $m+n$ unterscheidbare Fächer so zu legen, dass in jedes Fach höchstens eine Kugel gelegt wird. Werden nun die Kugeln nicht unterschieden, so führen je $n!$ Belegungen zu demselben Resultat „Fach belegt“ oder „Fach frei“, wofür es dann $\frac{P}{n!}$ Möglichkeiten gibt; dies ist eine ganze Zahl. Insbesondere ist also $P$ durch $n!$ teilbar.

Alternative:
Es sei $P$ das Produkt der $n$ Zahlen $m$, $m+1$, $m+2$,..., $m+n-1$, wobei $m$ eine beliebige natürliche Zahl $\geq 1$ sei.
Zu zeigen ist $n! \mid P$.
Es sei $[\frac{x}{y}]$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{x}{y}$. Wenn dann $2^z$ die größte Zweierpotenz $\leq n$ ist, dann gilt:
In $n!$ kommen $[\frac{n}{2}]$ Vielfache von 2 vor; darunter sind $[\frac{n}{4}]$ Vielfache von 4, wovon $[n/8]$ Vielfache von 8 sind, ... und zuletzt sind $[n/2^z]$ Vielfache von $2^z$ unter den Vielfachen von $2^{z-1}$.
Daher ist $a_2 = [n/2] + [n/4] + [n/8] + ... + [n/2^z]$ die Anzahl der Faktoren 2 in $n!$. Ganz genauso ergibt sich, dass die Anzahl $b_2$ der Faktoren 2 in $P = m(m+1)...(m+n-1)$ mindestens gleich $a_2$ ist; Für jede Primzahl $r$ mit $r \leq n$ leitet man ganz entsprechend her: $b_r \geq a_r$.
Ist daher $p$ die größte Primzahl $\leq n$, so lauten die Primfaktoren-Zerlegungen von $n!$ und von $P$:
$n! = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot ... \cdot p^{a_p}$ und $P = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot ... \cdot p^{b_p} \cdot w$, $w$ ein Produkt aus Potenzen von Primzahlen $> p$, $w \geq 1$.
Wegen $b_r \geq a_r$ ist dann $P = (2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot ... \cdot p^{a_p} \cdot v) \cdot w = n! \cdot v \cdot w$ mit $v$ einem Produkt von Primfaktoren $\leq p$, woraus $n! \mid P$ folgt.

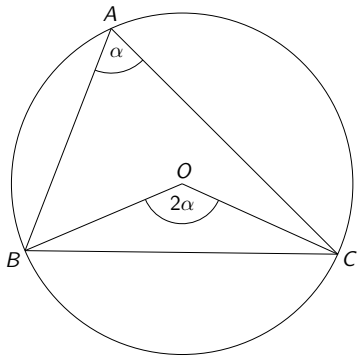
# Die besondere Aufgabe

von Florian Schweiger

## Aufgabe 1

In Aufgabe 1045 in Monoid 110 wurde ein Dreieck mit lauter spitzen Winkeln betrachtet, und es ging um die Lage des Umkreismittelpunkts. Dort wurde gezeigt, dass er innerhalb des Dreiecks oder außerhalb, aber nicht auf einer Seite liegen kann. In Wahrheit kann aber sogar nur einer dieser drei Fälle eintreten. Welcher und wieso?

## Lösung:



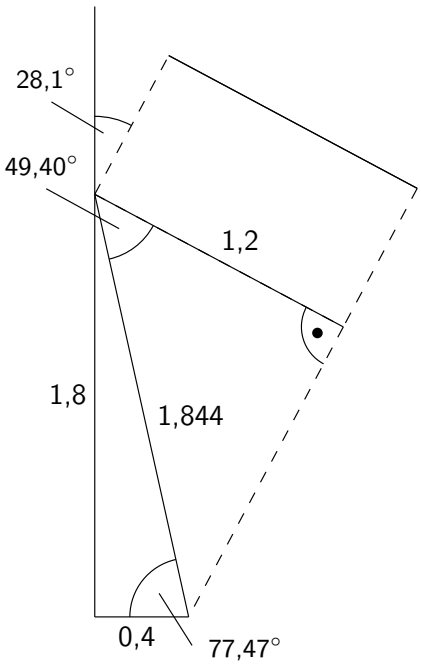

Der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks liegt immer im Innern.
Beweis: Sei $ABC$ das Dreieck und $O$ sein Umkreismittelpunkt. Sei $\angle BAC = \alpha$. Nach Voraussetzung $\alpha < 90°$, also ist der Zentriwinkel $\angle BOC = 2\alpha < 180°$. Also liegt $O$ auf der selben Seite der Geraden $BC$ wie $A$. Das gilt genauso auch für die anderen beiden Dreiecksseiten, also liegt $O$ im Innern des Dreiecks.

## Aufgabe 2

Herr Müller macht täglich einen Spaziergang. Sein Körper hat annäherungsweise die Form eines Zylinders mit Höhe 1,80m und Grundflächenradius 20cm. Heute regnet es nun allerdings, und das auch noch schief, nämlich mit einem Winkel von $\alpha$ von der Senkrechten abweichend. Sein Regenschirm ist eine Kreisscheibe vom Durchmesser 1,20m. Wie groß darf $\alpha$ maximal sein, damit er verhindern kann, nass zu werden?

**Antwort:** Etwa 28,1°.

Beweis: Der Regenschirm ist eine Kreisscheibe. Mit ihr erreicht Herr Müller die optimale Abschirmung, wenn er sie senkrecht zum Regen hält (denn: Wenn man einen Kreis vom Radius $r$ parallel auf eine Ebene projiziert, so erhält man eine Ellipse mit großer Halbachse $r$. Diese ist sicherlich im Kreis mit Radius $r$ enthalten.). Herr Müller muss zunächst auf jeden Fall seine „Raumdiagonale“ abschirmen. Diese hat die Länge $\sqrt{1{,}8^2+0{,}4^2}\text{m} \approx 1{,}844\text{m}$. Sie steht im Winkel $\arcsin\frac{1{,}8}{1{,}844} \approx 77{,}47°$ zur Grundebene. Im Grenzfall, in dem Regenschirm und Raumdiagonale zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, liegt zwischen ihnen der Winkel $\arccos\frac{1{,}2}{1{,}844} \approx 49{,}40°$. Der Neigungswinkel des Schirms gegen die Senkrechte beträgt dann also $49{,}40° + (90° - 77{,}47°) \approx 61{,}93°$. Im Grenzfall fällt der Regen senkrecht auf den Schirm. Er ist dann um $61{,}93°$ gegen die Waagrechte, das heißt um $90° - 61{,}93° = 28{,}07°$ gegen die Senkrechte geneigt.




Zu beantworten bleibt noch die Frage, ob mit der Raumdiagonalen auch der ganze Herr Müller abgeschirmt ist. Die Schrägprojektion eines Zylinders sind zwei Ellipsen, die durch zwei Parallelen verbunden sind. Man projiziert nun also den Zylinder auf die um 28,07° geneigte Schirmebene. Eine halbwegs genaue Zeichnung zeigt nun, dass das Bild im Kreis mit dem Bild der Raumdiagonalen als Durchmesser enthalten sind (die problematische Stelle sind die Enden der Ellipsen). Das kann man auch nachrechnen: Das Bild eines der Kreise mit Radius 20cm ist eine Ellipse mit Halbachsen 20cm und $20\text{cm} \cdot \cos(28{,}07°) \approx 17{,}65\text{cm}$. Ihr Krümmungsradius am Nebenscheitel ist $20\text{cm} \cdot \frac{20}{17{,}65} \approx 22{,}67\text{cm}$, und das ist (viel) weniger als der Radius des Regenschirms.

## Aufgabe 2′

Herr Müller macht täglich einen Spaziergang auf einem kreisförmigen Weg. Sein Körper ist recht eckig und hat annäherungsweise die Maße eines Quaders mit Sei-

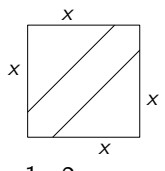
ten 1,80m, 40cm, 30cm. Heute regnet es nun allerdings, und das auch noch schief, nämlich mit einem Winkel von $\alpha$ von der Senkrechten abweichend. Sein Regenschirm ist eine Kreisscheibe vom Durchmesser 1,20m. Wie groß darf $\alpha$ maximal sein, damit er während seines Weges verhindern kann, nass zu werden (Selbstverständlich läuft er immer nach vorne und nie seitlich)?

**Antwort:** Etwa 24,4°.

Beweis: Der Regenschirm ist eine Kreisscheibe. Mit ihr erreicht Herr Müller die optimale Abschirmung, wenn er sie senkrecht zum Regen hält (denn: Wenn man einen Kreis vom Radius $r$ parallel auf eine Ebene projiziert, so erhält man eine Ellipse mit großer Halbachse $r$. Diese ist sicherlich im Kreis mit Radius $r$ enthalten.) Weil Herr Müller auf dem kreisförmigen Weg immer geradeaus geht, fällt der Regen während seiner Wanderung aus allen möglichen Richtungen ein. Die längste Strecke seines Körpers, die er abschirmen muss, ist offenbar die Raumdiagonale*. Der Extremfall ist also gerade, dass mit einer Kreisscheibe vom Radius 60cm die Raumdiagonale abgeschirmt werden muss, und genau dann, wenn Herr Müller das kann, wird er trocken bleiben.
Die Raumdiagonale hat die Länge $\sqrt{1{,}8^2 + 0{,}4^2 + 0{,}3^2}\ m \approx 1{,}868$m, und hat einen Winkel von $\arcsin \frac{1{,}8}{1{,}868} \approx 74{,}48°$ zur Horizontalen. Wegen $\arccos \frac{1{,}2}{1{,}868} \approx 50{,}03°$ muss der Schirm um mindestens 50,03° gegen die Raumdiagonale geneigt sein. Der Neigungswinkel des Schirms gegen die Senkrechte muss also mindestens $50{,}03° + (90° - 74{,}48°) \approx 65{,}55°$ sein. Da im Extremfall der Regen genau senkrecht auf den Schirm fallen soll, ist dann der Regen um 65,55° gegen die Waagrechte, das heißt um $90° - 65{,}55° = 24{,}45°$ gegen die Senkrechte geneigt.

# Mathematische Entdeckungen

## Neue Aufgabe




$\frac{1}{2}x^2 = 3$
$x = \sqrt{6}$

Untersuche, wie man ein Quadrat der Seitenlänge 3 durch $n$ Strecken, $n = 2, 3, 4, ...$ in drei flächengleiche Figuren zerlegen kann und ob dies auf mehrere Arten möglich sind.
Gib zu jeder Zerlegung eine Zeichnung mit Längenangaben (diese jeweils mit Begründung) an – so wie im nebenstehenden Beispiel. (H.F.)

*Hinweis:* Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 31. August 2013 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

* Das ist anschaulich klar und es stimmt auch, allerdings legt der mir bekannte Beweis das Ganze in ein Koordinatensystem und rechnet nach, dass der Thaleskreis über der Raumdiagonalen im Winkel 24,2° auch die ganze Projektion des Quaders abdeckt. Die einfachste Möglichkeit, das zu tun, wäre, den Quader in einen Zylinder des Durchmessers 50cm einzubetten und dann wie in Aufgabe 2 weiterzumachen.

# Lösung der Aufgabe aus Heft 112

In Heft 112 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

### Zerlegung einer Ebene in Gebiete

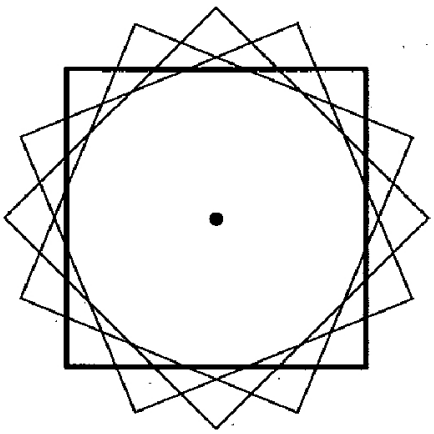
In wieviele Gebiete kann eine Ebene durch $n$ sich überschneidende gleich große Quadrate höchstens zerlegt werden? (H.F.)

### Ergebnisse

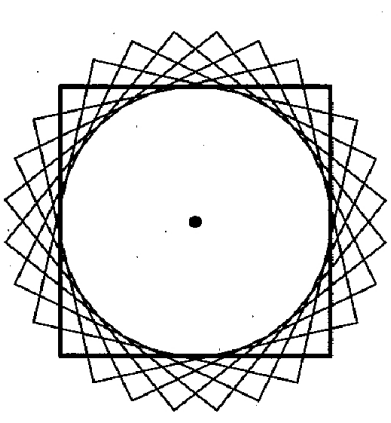
Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt Robin Fritsch, 11. Klasse des Gymnasium Lehrte, Kevin Mours und Marcel Wittmann, beide 9. Klasse des Karolinen-Gymnasium Frankenthal. Sie beobachten übereinstimmend:
Zwei verschiedene Quadrate haben höchstens acht Schnittpunkte. Ein $n$-tes Quadrat schneidet bereits vorhandene $n-1$ Quadrate in maximal $8(n-1)$ Punkten. Jede der dadurch entstehenden höchstens $8(n-1)$ Teilstrecken der Seiten des $n$-ten Quadrats zerlegt ein altes Teilgebiet in zwei neue Teilgebiete, sodass zu den alten Teilgebieten höchstens $8(n-1)$ neue Teilgebiete hinzukommen.
Die Ebene wird nun

| | |
|---|---|
| von 1 Quadrat in höchstens | 2 Gebiete |
| von 2 Quadraten in höchstens | $2+8=10$ Gebiete |
| von 3 Quadraten in höchstens | $2+8+2\cdot 8=26$ Gebiete |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| von $n$ Quadraten in höchstens | $2+8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=2+4n^2-4n$ Gebiete |

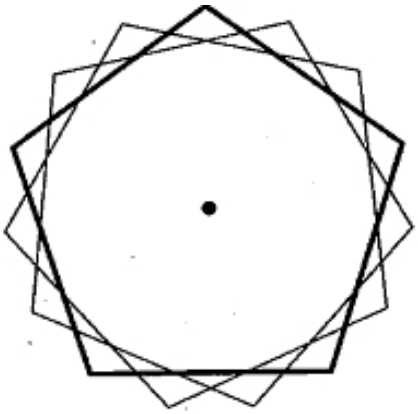
zerlegt.
Die gesuchte Formel für die Anzahl der Gebiete ist also $2+4n(n-1)$.
Robin stellte abschließend fest, dass man die gesamten Überlegungen auf beliebige $k$-Ecke übertragen kann. Man erhält dann für die Anzahl der Gebiete $2+kn(n-1)$.
Sein Ergebnis illustriert er mit folgenden Bildern:



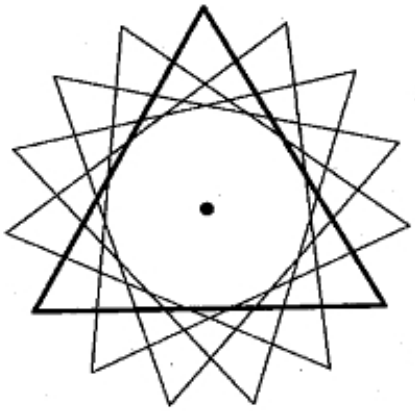
4 Quadrate ($n=4, k=4$),
$F=k\cdot(n-1)n+2=50$



7 Quadrate ($n=7, k=4$),
$F=k\cdot(n-1)n+2=170$



3 Fünfecke ($n = 3, k = 5$),
$F = k \cdot (n-1)n + 2 = 32$



5 Dreiecke ($n = 5, k = 3$),
$F = k \cdot (n-1)n + 2 = 62$

# Kennst Du einen Snark?

von Hartwig Fuchs

Lewis Carroll (1832–1898), wenig erfolgreicher englischer Mathematiker, aber weltberühmter Autor von Kinderbüchern wie „Alice im Wunderland“, hat 1876 eine rätselhafte Ballade[1] veröffentlicht, die von der Jagd nach einem Snark handelt – einem geheimnisvollen geisterhaften Wesen, dem es immer wieder gelingt, sich seinen Jägern zu entziehen.

Als nun um 1880 im Umfeld des Vierfarben-Problems die Frage auftauchte:

(∗) Gibt es einen schlichten, zusammenhängenden, brückenlosen, regulären kubischen Graphen, zu dessen Kantenfärbung man nicht weniger als vier verschiedene Farben benötigt?,

da zeigte sich bald, dass sich die Suche nach dem in (∗) definierten Objekt ähnlich frustrierend gestaltete wie die Jagd nach Carrolls Snark. Daher nannte Martin Gardner, amerikanischer Mathematiker und bekannter Rätsel-Erfinder, einen solchen Graph ebenfalls einen SNARK.[2]

Und ganz so wie man sich in Carrolls Geschichte durch ein Dickicht von Nonsens-Aussagen, Paradoxien, Wortspielen, ... lesen muss, so ist bei der Fahndung nach mathematischen SNARKs vorweg eine Barrikade von Begriffen zu überwinden, bevor man überhaupt erkennt, wonach man sucht.

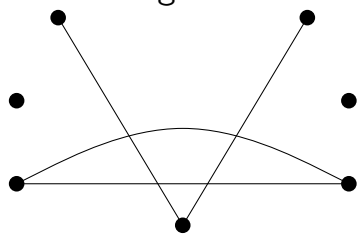
## Endliche Graphen

In der Ebene seien endliche viele Punkte und Linien gegeben. Wenn dann jede Linie genau zwei dieser Punkte verbindet – wobei die Punkte verschieden oder gleich sein können – dann heißt eine solche geometrische Figur ein *endlicher Graph* mit Ecken und Kanten.

[1] Lewis Carroll: The hunting of the Snark

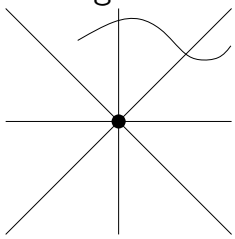
[2] Wir schreiben hier SNARK für das mathematische Objekt.

Figur 1



endlicher Graph

Figur 2

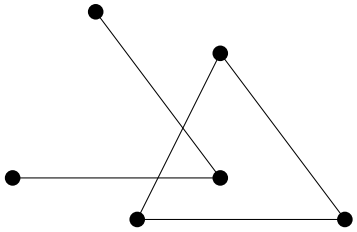


kein Graph

## S-Graphen

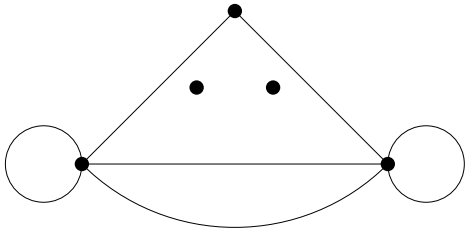
Ein endlicher Graph heißt *schlicht*, wenn je zwei Ecken durch höchstens eine Kante verbunden sind und falls zwei Ecken verbunden sind, dann sind sie verschieden. Wir sagen dann: Er besitzt die Eigenschaft S und nennen ihn deshalb *S-Graph*. Nach Definition hat ein S-Graph weder Mehrfachkanten noch Schlingen.

Figur 3



S-Graph

Figur 4

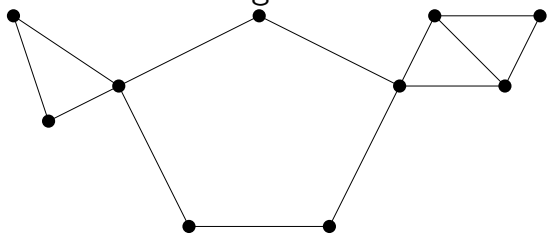


kein S-Graph wegen Zweifachkante und Schlinge

## SN-Graphen

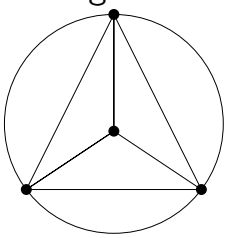
Wenn zwei Ecken eines Graph durch eine Kante oder durch eine nicht unterbrochene Kette von Kanten verbunden sind, so sind sie unmittelbare beziehungsweise mittelbare Nachbarn. Sind alle Ecken eines Graph benachbart, dann nennt man einen auf diese Weise zusammenhängenden Graphen auch einen *Nachbarschaftsgraph* – wir sagen auch: er hat die Eigenschaft N. S-Graphen mit der Eigenschaft N nennen wir *SN-Graphen*.

Figur 5



SN-Graph

Figur 6



kein SN-Graph

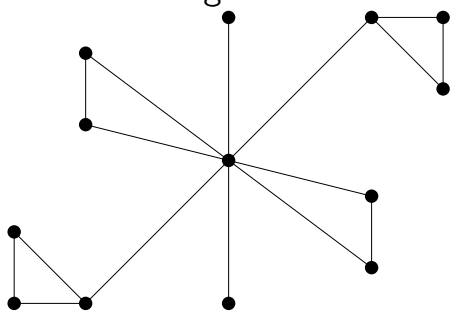
Der Nachbarschaftsgraph in Figur 6 ist wegen seiner drei Zweifachkanten kein S-Graph und daher auch kein SN-Graph.

## SNA-Graphen

Es sei $G$ ein zusammenhängender Graph, in dem es eine Kante $b$ gibt – eine sogenannte Brücke – mit der Eigenschaft: entfernt man die Kante $b$ aus $G$, so

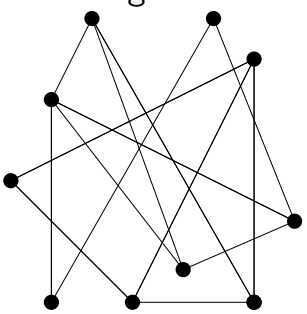
zerfällt $G$ in zwei Graphen $G_1$ und $G_2$ ohne gemeinsame Ecken und Kanten. Im Nachbarschaftsgraph $G$ betrachten wir dann $G_1$ (oder $G_2$) als einen Anhang von $G$. Ein Graph ohne Brücken nennen wir daher *anhangslos* – wir sagen: Er besitzt die Eigenschaft $A$. Unserer bisherigen Übung entsprechend bezeichnen wir dann einen anhangslosen SN-Graph als einen *SNA-Graph*. Der Graph in Figur 5 ist ein SNA-Graph, die Graphen der Figuren 7 und 8 sind es nicht. Finde selbst die Brücke in Figur 8.

Figur 7



kein SNA-Graph (vier Brücken)

Figur 8

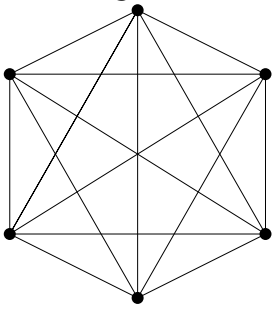


kein SNA-Graph (eine Brücke)

## SNAR-Graphen

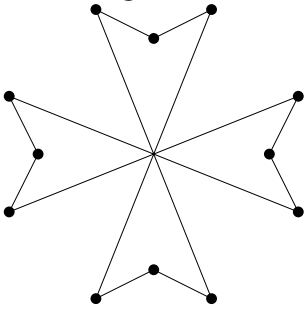
Ein Graph heißt *regulär*, wenn jede seiner Ecken die gleiche Anzahl von unmittelbaren Nachbarn hat und deshalb auch jede Ecke gemeinsamer Endpunkt der gleichen Anzahl von Kanten ist – vergleiche die Figuren 9 und 10. Ein regulärer Graph besitzt die Eigenschaft R. Reguläre SNA-Graphen bezeichnen wir als *SNAR-Graphen*.

Figur 9



SNAR-Graph

Figur 10



kein SNAR-Graph

Die Figur 9 stellt einen SNAR-Graph dar; der Graph in Figur 10 ist nicht zusammenhängend und daher kein SNAR-Graph (der Schnittpunkt der acht Kanten in der Mitte der Figur ist keine Ecke des Graphen).

## SNARK-Kandidaten

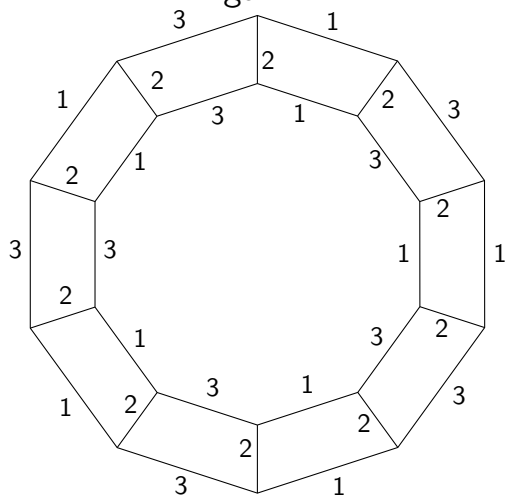
Wenn jede Ecke eines Graphen gemeinsamer Endpunkt von jeweils genau drei Kanten ist, so spricht man von einem *kubischen* Graph mit der Eigenschaft K. Die kubischen SNAR-Graphen nennen wir dann *SNARK-Kandidaten* – vergleiche die Figur 11 – denn gemäß $(*)$ ist ein SNARK nur unter ihnen zu suchen.

Eine wichtige Eigenschaft der SNARK-Kandidaten. Es sei $G$ ein kubischer Graph mit $2n + 1$ Ecken, $n$ eine natürliche Zahl. Da jede Ecke ein Endpunkt von drei

Kanten ist, hat $G$ insgesamt $(2n+1)\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$ Kanten – der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich daraus, dass Kanten $PQ$ und $QP$ nicht als verschieden betrachtet werden. Nun ist aber $(2n+1)\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$ keine natürliche Zahl, woraus folgt, dass der Graph $G$ nicht existiert.

Deshalb gilt: Jeder SNARK-Kandidat (der ja kubisch ist) hat geradzahlig viele Ecken.

Figur 11



Man kann leicht beliebig viele SNARK-Kandidaten erzeugen – etwa mit der Konstruktion von „Radgraphen“:
Man verbindet bei zwei konzentrischen regelmäßigen $n$-Ecken, $n \geq 3$, einander entsprechende Ecken wie in der Figur 11 – der resultierende $2n$-eckige Radgraph ist ein SNARK-Kandidat.
Oder auch so: Im regelmäßigen $2n$-Eck verbindet man jede zwei diametral gegenüberliegende Ecken.

## Kantenfärbung von SNARK-Kandidaten

Die Kanten eines Graphen $G$, die einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, nennt man benachbart. Die Kantenfärbung von $G$ ordnet dann jeder Kante eine Farbe so zu, dass benachbarte Kanten verschiedenfarbig sind. Wenn zu einer Kantenfärbung von $G$ mindestens $n$ verschiedene Farben notwendig sind, dann heißt $G$ *$n$-farbig*.

Ein SNARK ist somit nach Definition 4-farbig.
Die Graphen in den Figuren 10, 11, 4 und 9 sind in dieser Reihenfolge 2-farbig, 3-farbig, 4-farbig und 5-farbig. Überprüfe das selbst für die Figuren 10, 4 und 9; in der Figur 11 sind die drei Farben mit 1, 2 und 3 bezeichnet.

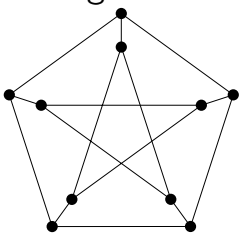
## SNARKs

Die Suche nach den SNARKs beginnt mit dem englischen Mathematiker Peter Tait, der 1880 im Zusammenhang mit einem Lösungsversuch des Vierfarben-Problems den Graphentyp „SNARK“ definierte. Im Jahr 1891 entdeckte dann der Däne Julius Petersen den ersten SNARK, den 10-eckigen Graph der Figur 12. Fast 50 Jahre später fand 1946 der Kroate Danilo Blanuša den zweiten und dritten SNARK, beide mit 18 Ecken – einen davon zeigt die Figur 13. Danach wurden zunächst nur noch zwei weitere SNARKs, der eine mit 50, der andere mit 210 Ecken, bekannt – bis im Jahr 1975 die SNARKs ihren Nimbus der außerordentlichen Rarität eingebüßt haben, den ja ihr Namen ausdrücken sollte. Denn damals bewies[3] der amerikanische Mathematiker Rufus Isaacs die Existenz zweier

[3] Rufus Isaacs: Infinite Families of trivial trivalent graphs which are not Tait-colorable – Americ. Math. Monthly 82(3), 1975

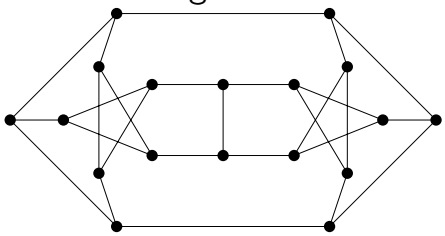
SNARK-Familien mit unendlich vielen Mitgliedern.
Die erste Familie der „Blumen-SNARKs“ besteht aus $4(2n+1)$-eckigen Graphen, $n = 2, 3, 4, \ldots$, von denen der kleinste in Figur 14 dargestellt ist. Die zweite Familie enthält den Petersen-SNARK und die oben erwähnten SNARKs mit 50 und 210 Ecken.

Figur 12



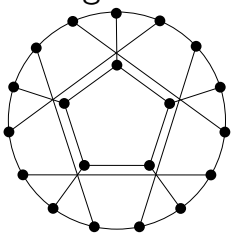
Der Petersen-SNARK

Figur 13



Ein Blanuša-SNARK

Figur 14



Der kleinste Blumen-SNARK

Man kennt heute sämtliche SNARKs mit $n$ Ecken für $n \leq 36$. In der folgenden Tabelle ist für jedes $n \leq 28$ ihre jeweilige Anzahl festgehalten (Stand: 1998).

| Anzahl der Ecken | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der SNARKs | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 20 | 38 | 280 | 2900 |

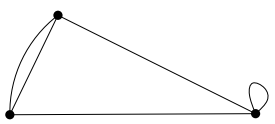
Diese Liste haben Gunnar Brinkmann und andere 2012 bis $n = 36$ fortgeführt. Im Internet findet man unter `mathworld.wolfram.com/Snark.html` 21 SNARKs geometrisch dargestellt.

## Ein Blick zurück

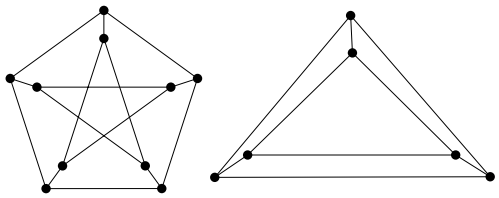
Die Jagd nach SNARKs wird erst dadurch mathematisch interessant, dass sie in der Menge derjenigen Graphen stattfindet, welche nicht weniger als die fünf in der Definition $(*)$ angegebenen und oben mit S, N, A, R und K bezeichneten Eigenschaften besitzen. Verzichtet man nämlich auch nur auf eine dieser Eigenschaften, dann wird die Suche nach solchen „SNARKs“ zu einer recht trivialen Angelegenheit. Das zeigen wir mit den Beispielen 1 bis 5, die – außer Beispiel 4 – leicht beliebig vermehrbar sind.

Zunächst: Besitzt ein Graph $G$ die Eigenschaften N, A, R und K, nicht aber die Eigenschaft S, dann nennen wir $G$ einen $\overline{\text{S}}$-SNARK, wenn zu seiner Kantenfärbung vier verschiedene Farben notwendig sind. Ganz entsprechend definieren wir $\overline{\text{N}}$-, $\overline{\text{A}}$-, $\overline{\text{R}}$−, und $\overline{\text{K}}$−SNARKs.

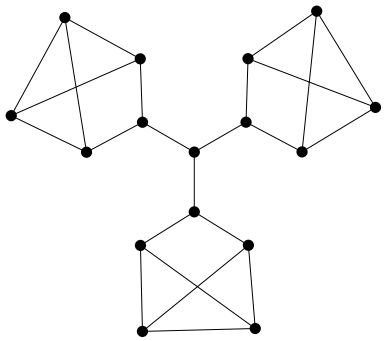
1. *$\overline{\text{S}}$-SNARKs*
   Ein $n$-Eck, $n \geq 3$, mit einer Zweifachkante und einer Schlinge ist ein 4-farbiger *nicht-schlichter* Graph $G$ mit den Eigenschaften N, A, R, K – also ist $G$ ein $\overline{\text{S}}$-SNARK.



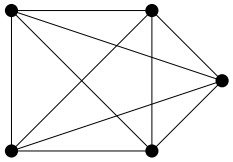
2. *$\overline{N}$-SNARKs*
   Der Petersen-SNARK und ein mit ihm durch keine Kante verbundener $2n$-eckiger Radgraph, $n \geq 3$, (vergleiche Figur 11) bilden zusammen einen 4-farbigen, $(10+2n)$-eckigen Graph $G$ mit den Eigenschaften S, A, R und K, der *kein Nachbarschaftsgraph* ist. Somit ist $G$ ein $\overline{\text{N}}$-SNARK.



3. *$\overline{A}$-SNARKs*
   Mit der „Ventilator-Konstruktion“ verbindet man nach dem nebenstehendem Muster drei $(2n+1)$-Ecke, $n \geq 2$, samt $n$ geeigneten Diagonalen zu einem 4-farbigen und wegen seiner drei Brücken *nicht anhangslosen* Graph $G$ mit den Eigenschaften S, N, R und K – also ist $G$ ein $\overline{\text{A}}$-SNARK.



4. *$\overline{R}$-SNARKs*
   Es gibt keinen *nicht regulären* $\overline{R}$-SNARK. Denn ein $\overline{\text{R}}$-SNARK ist nach Definition kubisch und deshalb auch regulär.
5. *$\overline{K}$-SNARKs*
   Ein $n$-eckiger Graph $G$, für $n \geq 5$, mit den Eigenschaften S, N, A und R, bei dem jede Ecke Endpunkt von vier Kanten ist, ist 4-farbig, also *nicht kubisch*. Daher ist $G$ ein $\overline{\text{K}}$-SNARK.



Der zweifelnde Leser möge selbst überprüfen, ob die dargestellten Graphen jeweils die von ihnen behaupteten Eigenschaften tatsächlich besitzen.

# Muster aus Primzahlen

von Laura Biroth/Toni Weininger

Schreibt man alle natürlichen Zahlen zeilenweise in eine Tabelle und färbt dann alle Primzahlen ein, so erkennt man bei bestimmten Spaltenanzahlen Muster. Unser Leser Toni Weininger schlägt eine Breite von 18 Spalten vor:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 |
| 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |
| 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |

Man sieht, dass (abgesehen von der ersten Zeile) nur in den Spalten mit den Nummern 1, 5, 7, 11, 13 und 17 Primzahlen vorkommen. Das ist nicht nur hier am Anfang dieser Tabelle so, sondern wird immer so weiter gehen.

Toni Weiniger liefert auch eine Erklärung mit: In den Spalten mit den Nummern 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 und 18 stehen nur gerade Zahlen. Dies sind (bis auf die 2) keine Primzahlen. Außerdem kann man von jeder Zahl in der Tabelle die Quersumme berechnen. Wiederholt man das, bis die Quersumme einstellig ist, erhält man für alle Zahlen in einer Spalte das gleiche Ergebnis, nämlich:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Da eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre (einstellige) Quersumme es ist, wissen wir, dass alle Zahlen in den Spalten 3, 6, 9, 12, 15, 18 (einstellige Quersumme 3, 6 oder 9) durch 3 teilbar sind. In diesen Spalten stehen also (außer der 3) auch keine Primzahlen. Die müssen sich also in den übrigen Spalten 1, 5, 7, 11, 13 und 17 drängeln.

Es geht aber auch noch übersichtlicher: Den gleichen Effekt erhält man nämlich auch schon mit sechs Spalten. Hier sammeln sich alle Primzahlen in der ersten und fünften Spalte.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 |
| 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |
| 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |
| 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 |
| 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 |
| 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |

Warum? Ausgehend von der 18-Spalten-Tabelle vermischen sich in der 6-Spalten-Tabelle immer nur drei Spalten, z.B. die Spalten 1, 7 und 13, sowie 5, 11 und 17. Das heißt, alle Primzahlen die sich vorher auf sechs Spalten verteilt haben, sammeln sich jetzt in zwei Spalten, die anderen Spalten bleiben, bis auf die Ausnahmen in der ersten Zeile „primzahlfrei“.
Ohne die Quersummen kann man das auch anders erklären: Da die Länge der Zeilen durch 2 und durch 3 teilbar ist, entstehen Spalten, die nur gerade Zahlen enthalten (Spalten 2, 4 und 6) und Spalten, die nur durch 3 teilbare Zahlen enthalten (die Spalten 3 und 6). Hier stehen also keine Primzahlen $> 3$. Diese sammeln sich dafür in den verbleibenden beiden Spalten.

Allgemein kann man sagen: Wenn die Tabelle $n$ Spalten hat und $p_1, \ldots, p_s$ die Primfaktoren von $n$ sind, dann stehen in allen Spalten, deren Spaltennummer durch ein $p_i$ teilbar ist, nur Zahlen, die auch durch $p_i$ teilbar sind. Außer eventuell der ersten Zahl findet man hier also keine Primzahlen. Die Verteilung der Primzahlen in einer Tabelle mit Spaltenanzahl $n$ sieht also um so „ordentlicher“ aus, je mehr verschiedene Primfaktoren $n$ enthält. In den ersten beiden Beispielen waren das

jeweils die 2 und die 3. Wählt man 30 Spalten, bekommt man zusätzlich noch Spalten, in denen nur durch 5 teilbare Zahlen stehen. Ist $n$ dagegen eine Primzahl, so ist nur eine Spalte – bis auf den ersten Eintrag – frei von Primzahlen.

Zum Beispiel bei $n = 11$:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 |
| 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
| 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |
| 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |
| 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 |
| 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 |
| 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |

Weniger leicht zu verstehen ist der folgende Effekt:

Wenn man die Zahlen nicht zeilenweise, sondern *spiralförmig* von innen nach außen in eine Tabelle einträgt und auch hier die Primzahlen einfärbt, dann erkennt man deutlich diagonale Linien. Dieses Schema nennt man Ulam-Spirale, benannt nach ihrem Entdecker.[1]

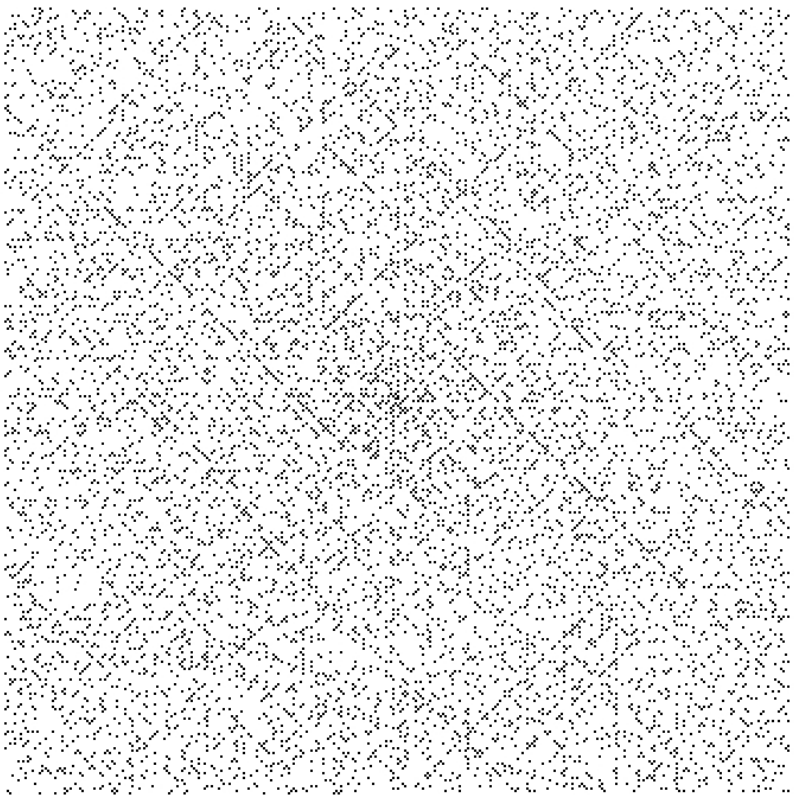
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 |
| 81 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 92 |
| 80 | 49 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 58 | 93 |
| 79 | 48 | 25 | 10 | 11 | 12 | 13 | 32 | 59 | 94 |
| 78 | 47 | 24 | 9 | 2 | 3 | 14 | 33 | 60 | 95 |
| 77 | 46 | 23 | 8 | 1 | 4 | 15 | 34 | 61 | 96 |
| 76 | 45 | 22 | 7 | 6 | 5 | 16 | 35 | 62 | 97 |
| 75 | 44 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 36 | 63 | 98 |
| 74 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 64 | 99 |
| 73 | 72 | 71 | 70 | 69 | 68 | 67 | 66 | 65 | 100 |

Das Ergebnis tritt auch auf, wenn man sich einen größeren Bildausschnitt anschaut.[2]

---

1 Stanislaw Marcin Ulam, 13.04.1909 (Lemberg) – 13.05.1984 (Santa Fe), polnisch-US-amerikanischer Mathematiker

2 Freundlicherweise für Monoid gezeichnet von Prof. Dr. Duco van Straten, Universität Mainz



Die diagonalen Linien entstehen dadurch, dass manche quadratischen Funktionen der Form $f(n) = an^2 + bn + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$ sehr viele Primzahlen liefern, die dann in der Ulam-Spirale auf einer diagonalen Linie stehen. Zum Beispiel liefert die Funktion $f(n) = n^2 - n + 41$ für $n = 0, ..., 40$ oder $g(n) = n^2 + n + 17$ für $n = 0, ..., 15$ nur Primzahlen. Unter den Werten von $f$ für $n = 0, ..., 10^7$ sind gut 22% Primzahlen, obwohl insgesamt nur etwa 3% aller Zahlen zwischen 0 und $f(10^7) \approx 10^{14}$ Primzahlen sind. Diese Phänomene sind nur zum Teil verstanden und Gegenstand aktueller Forschung.

# Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 112

**Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 6:** Luca Bühler 5.

**Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium** (Betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
**Kl. 5:** Jan Gubi 8, Maximilian Hauck 52, Eileen Kirchner 7, Pia Richter 3, Manuel Wolf 26, Anna Wullmann 8, Rabea Zimmermann 6;
**Kl. 6:** Jan-Hendrik Schloo 11;
**Kl. 7:** Philip Eisenhuth 19;
**Kl. 8:** Nick Wittig 27;
**Kl. 9:** Sebastian Maak 10, Niclas Mayer 21, Katharina Rößler 31;
**Kl. 12:** Valma Kuuslampi 5, Andreas Pitsch 20.

**Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium** (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler)**: Kl. 5:** Annalena Schimbol 2.

**Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:**
**Kl. 12:** Frank Schindler 41.

**Bottrop, Josef-Albers-Gymnasium: Kl. 8:** Malte Schürks 14.

**Brannenburg, Gymnasium Raubling: Kl. 8:** Jakob Sussman 31.

**Bürglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:**
**Kl. 10:** Jamico Schade 27.

**Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:**
**Kl. 7:** Iolanthe Köcher 46.

**Edenkoben, Gymnasium: Kl. 8:** Theresa Paulus 14.

**Frankenthal, Karolinen-Gymnasium,** (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
**Kl. 5:** Guiseppina Alfano 2, Christoph Behrens 2, Anna Grenz 2, Annika Koch 18, Cornelius Martin 2, Leonie Marton 6, Mark Neumaier 2, Katharina Scholl 5;
**Kl. 6:** Leon-Maurice Bähr 4, Samuel Bentz 2, Leonie Groll 2, Anna-Lena Hartmann 4, Selina Kuralay 2, Florian Leutz 8, Arlind Murtezaj 2, Rebecca Rech 2, Albion Syla 2;
**Kl. 7:** Emilia Sobotzki 6, Jule Koob 6, Nina Kummer 4, Denise Baum 4, Sophie Bruchmann 2, Pia Neumaier 2;
**Kl. 8:** Tillmann Ballweber 51, Carolin Heidt 28;
**Kl. 9:** Kevin Mours 28, Adriana Stenger 17, Marcel Wittmann 44;
**Kl. 12:** Henning Ballweber 30.

**Frankenthal, Robert-Schuhmann-Schule: Kl. 7:** Patrick Riebe 20.

**Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School** (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
**Kl. 3:** Ridh Choudhury 13, Merlin Kolrep 10, Thies Koster 11, Ella Zwermann 18;
**Kl. 4:** Nicholas Becker 6, Franco Dorsch 13, Maike Dürr 13, Kimberly Frahm 9, Martha Friederich 26, Christian Ickstadt 4, Maxim Leheta 6, Sean Panreck 10, Lina Renger 21, Vrishab Wittagondana 13;
**Kl. 6:** Sebastian Schneider 6.

**Grünstadt, Leininger Gymnasium: Kl. 9:** Annika Gold 11.

**Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule** (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
**Kl. 5:** Hatice Nur Devecioglu 10, Philipp Emer 5, Jakob French 13, Mauritz Pötz 8, Burak Sadic 8, Julian Ständeke 2, Paul Steinhauer 11, David Weißer 10;
**Kl. 6:** Konrad Grasse 2, Luana Jäger 12, Luca Kloft 9, Melanie Shuy 22;
**Kl. 7:** David Storzer 49, Nils Prepens 38;
**Kl. 8:** Sven Gombitzka 4, Marvin Weisbener 21, Emily Zollmann 19.

**Hangelsberg, Montessorischule: Kl. 3:** Joris Witte 4.

**Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:**
**Kl. 11:** Shaima'a Ahmed Doma 19;

**Karben, Kurt-Schuhmacher-Schule: Kl. 5:** Leonie Rößler 11.

**Kelkheim, Eichendorffschule:**
**Kl. 5:** Nick Bäumken 1, Dennis Mayle 23, Beatrice Popescu 17; Daniel Simon 2;
**Kl. 7:** Nils Müller 5;
**Kl. 8:** Björn Stanischewski 15.

**Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 12:** Robin Fritsch 24.

**Mainz, Frauenlob-Gymnasium** (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
**Kl. 5:** Paula Roderer 2, Tim Schüler 4, Roy Seifert 4;
**Kl. 6:** Katharina Weber 5, Konstantin Unterkeller 3;
**Kl. 7:** Sebastian Trapp 7.

**Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 13:** Niklas Bockius 11.

**Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 5:** David Menzel 8.

**München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:**
**Kl. 11:** Bettina Diller 17.

**Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium** (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
**Kl. 5:** Amiv Camdzic 6, Kevin Gren 6;
**Kl. 6:** Kevin Cornely 7, Victoria Mogwitz 5, Nico Stanic 9;
**Kl. 7:** Anja Wingender 15;
**Kl. 8:** Jasmin Hallyburton 29, Verena Rüsing 35;
**Kl. 10:** Sandra Wingender 16;
**Kl. 11:** Janina Vogl 15;
**Kl. 12:** David Michel 34.

**Neuwied, Wemer-Heisenberg Gymnasium: Kl. 11:** Robert Kowallek 25.

**Oberursel, Gymnasium** (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
**Kl. 5:** Jonas Glückmann 17;
**Kl. 6:** Lara Braun 25, Tobias Heinze 34, Fabian Liepach 24, Jara Müller-Kästner 8, Helen Richter 19;
**Kl. 10:** Heiko Kötzsche 37.

**Remagen, Gymnasium Nonnenwerth** (betr. Lehrer: Herr Meixner)**:**
**Kl. 5:** Vera Apel 1, Joel Jansen 4, Lara Loosen 2, Lukas Nießen 52, Hanah Pasternak 2;
**Kl. 6:** Wiebke Buhmann 3, Emil Faust 4, Hannah Langer 3, Max Leiwig 3, Fabian Staffel 4, Johannes Stähler 4, Lena Seifert 4.

**Tübingen, Geschwister-Scholl-Schule:**
**Kl. 6:** Bilal Abbanb 10, Benjamin Baumann 10, Rick Bilge 18, Paul Bohnet 12, Helmuth Büchle 18, Richard Dammnik 9, Jonas Drake 17, Louis Edel 8, Janne Eisenmann 9, Leonie Felger 11, Leon Hennes 13, Carina Janning 13, David K. 10, Lukas Kieninger 18, Sanja König 11, Sophie Kunle 7, Elias Lachenmann 19, Cedric Linder 2, Mariam Maas 7, Paul Mallot 8, Sven Michel 20, Lennart Nagel 6, Pia Neuwirth 13, Jonas Prandl 14, Charlotte Raible 13, Charlotte Rath 11, Kilian Redl 8, Max Reng 6, Julian Riethmüller 15, Johannes Rilling 14, Theresa Schwan 8, Colin Sperrfechter 6, Elinor Stahl 7, Clara Stenzl 11, Emely Stock 5, Lisa-Marie Straka 13, Raphael Unser 11.

**Wiesbaden, Leibnizschule:**
**Kl. 7:** Andreas Dernier 21;
**Kl. 8:** Elisa Dernier 23.

**Wildeshausen, Gymnasium Wildeshausen: Kl. 7:** Leah Heil 13.

# Mitteilungen

- Als neue Autorin stellt sich in diesem Heft unser Redaktionsmitglied Laura Biroth, seit 2003 Monoid-Leserin und seit 2008 Mathematik-Studentin in Mainz, vor.
- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Schuljahr 2013/2014 auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Stichwort „Monoid“, Adresse bitte nicht vergessen).

# Die Redaktion

**Leitung:** Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
**Mitglieder:** Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
**Weitere Mitarbeiter:** Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
**Zusammenstellung und Satz:** Maximilian Preisinger
**Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen:** Bettina Wiebe
**Versand:** Katherine Pillau
**Betreuung der Abonnements:** Anita Peffer-Kohl mit freundlicher Unterstützung von Dr. Ekkehard Kroll

Jahrgang 33 | Heft 114 | Juni 2013

# Inhalt

Einladung zur Mainzer Mathematik-Akademie 2013 . . . 3
W. J. Bühler: Wer war's? . . . 5
H. Fuchs: Hättest Du es gewusst? . . . 7
A. Köpps: Trickreiche Volumenbestimmung halbregulärer Körper . . . 11
Lösungen zu den Aufgaben von Seite 10 . . . 13
Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik . . . 14
R. Fritsch: Die besondere Aufgabe . . . 15
R. Schröder: Pythagoreische Tripel der Form $(a, a+1, c)$ . . . 16
Die Aufgabe für den Computer-Fan . . . 17
Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 113 . . . 18
Neue Mathespielereien . . . 21
Neue Aufgaben . . . 23
Gelöste Aufgaben aus Monoid 113 . . . 24
F. Schweiger: Die besondere Aufgabe . . . 28
Mathematische Entdeckungen . . . 30
H. Fuchs: Kennst Du einen Snark? . . . 32
L. Biroth/T. Weininger: Muster aus Primzahlen . . . 37
Rubrik der Löser und Löserinnen . . . 40
Mitteilungen . . . 43
Impressum . . . 44

**Abonnementbestellungen** per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
**Herausgeber:** Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

**Impressum**

**Anschrift:** Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
**Telefon:** 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
**E-Mail:** monoid@mathematik.uni-mainz.de
**Homepage:** http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid