

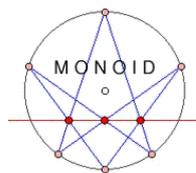
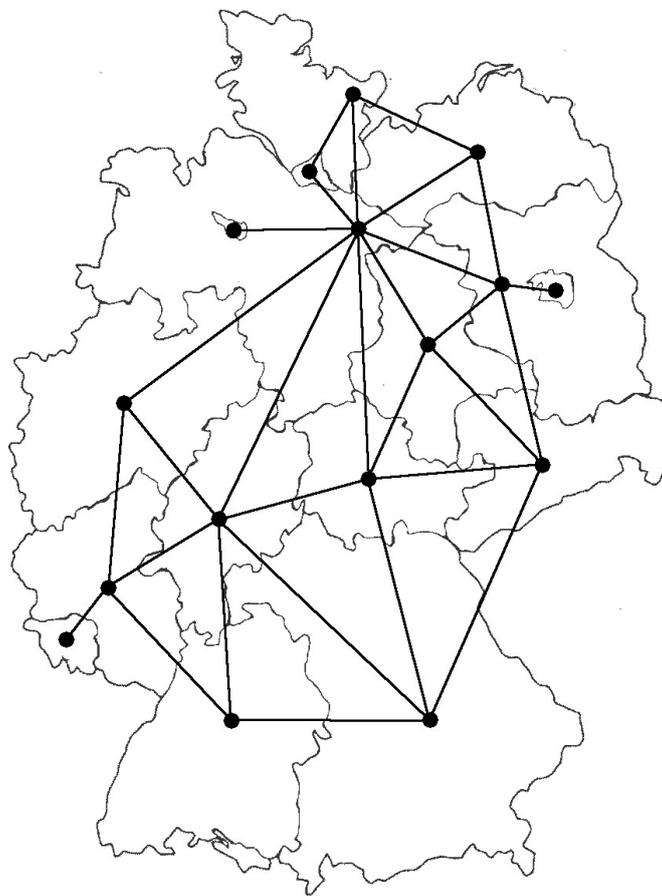
Jahrgang 33

Heft 116

Dezember 2013

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.02.2014.

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

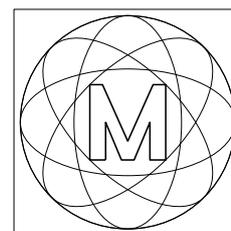
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irntrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die
Redaktion

Aufgaben zum neuen Jahr

Anordnung

Die fünf reellen Zahlen 2014, u , x , y und z erfüllen die Bedingungen

- (1) $u + x - y = 2014$;
- (2) $x - z = u - y$;
- (3) $y < x$;
- (4) $x + z < y + u$.

Ordne die fünf Zahlen nach wachsender Größe. (H.F.)

Differenz zweier Quadratzahlen

- a) Auf wie viele Arten lässt sich 2014 als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen?
- b) Auf wie viele Arten lässt sich 2013 so darstellen? (WJB)

Primzahl oder Quadratzahl?

Gibt es eine natürliche Zahl $n > 1$, sodass gilt: Die Summe S aller Zahlen zwischen 2014 und $2014 + n$ ist

- a) eine Primzahl oder sie ist
- b) eine Quadratzahl? (H.F.)

Summe von Brüchen

Für $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ seien $u_n = \sqrt[3]{n+1}$, $v_n = \sqrt[3]{n-1}$ und $w_n = \frac{2}{u_n^2 + u_n v_n + v_n^2}$.
Berechne für $n = 8\ 169\ 178\ 743$ die Summe $S_n = w_1 + w_3 + \dots + w_n$. (H.F.)

Hinweis: $x^3 + y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Zahlenfolgen

Es sei $F(n)$ eine Zahlenfolge (a_1, a_2, \dots, a_m) , $m \geq 1$, mit $a_i = 1$ oder 2 oder 3 für $i = 1, 2, \dots, m$, für die gilt:

- (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Es sei nun $A(n)$ die Anzahl der Folgen $F(n)$. Entscheide: Ist $A(10 \cdot 2014) > 10^{2014}$ oder $A(10 \cdot 2014) < 10^{2014}$? (H.F.)

Die Lösungen zu den Aufgaben findest Du in diesem Heft ab Seite 42.

Informatische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Informatik –

von Bettina Diller

Friedrich Christian Delius: „Die Frau, für die ich den Computer erfand“

Dieses Buch ist in seiner Form eher ungewöhnlich. Konrad Zuse erklärt einem Interviewer eine ganze Nacht lang die Welt der Computer und sein Leben: Was ist Informationstechnik? Was ist ein Computer? Eine programmgesteuerte Rechenmaschine mit Speicherwerk. Was ist ein Algorithmus? Ein Rechengang, der nach einem bestimmten, bis in alle Einzelheiten festgelegten, sich wiederholenden Schema abläuft zur Lösung definierter Probleme. Was ist Programmieren? Kalkül nach Leibniz. Was ist ein Programm? Ein Rechenplan. Was ist Rechnen? Aus gegebenen Angaben nach einer Vorschrift neue Angaben bilden.

Wie war es diesem Herrn möglich, während des zweiten Weltkrieges den ersten Computer zu bauen? Er erklärt es mit Literatur, Kunst und Liebe. Überall in seiner Geschichte werden Parallelen zu Goethes Faust gezogen und zu Ada Lovelace, die als erste Programmiererin gilt. Gleichzeitig wird klar, wie viel Aufwand für die Erfindung betrieben wurde, bei der er Unterstützung bekam von Studentenfreunden und Familie, vor allem seiner Schwester. Wie weit Zuse die im Roman geschilderten Ansichten vertritt, wird nicht deutlich. Der Autor gibt an, als Inspiration habe ihm ein Gespräch mit Zuse, der Vortrag „Faust, Mephisto und der Computer“ und das Buch „Der Computer – Mein Lebenswerk“ gedient.

So wird auch viel philosophiert über das Erfinderdasein, über die menschliche Psyche und über Prinzipien. Ganz nebenbei erfährt man von der Entstehung des Computers.

Es ist eine schöne Vorstellung, dass der Computer nicht dazu erfunden wurde, alles schneller zu machen, sondern einfach für eine Frau.

Gesamtbeurteilung: gut 😊😊



Angaben zum Buch:

Delius, Friedrich Christian: Die Frau, für den ich den Computer erfand, Rohwolt, 2009, ISBN 978-3-499-25239-6, Taschenbuch, 238 Seiten, 8,99 €.

Art des Buches: Roman
Mathematisches Niveau: gut verständlich
Altersempfehlung: ab 14 Jahren

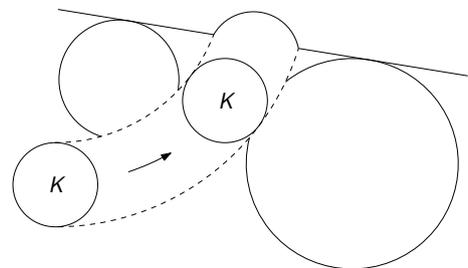
Das Urteil des Richters F. I. Bonacci

von Hartwig Fuchs

Das Flächenland – eine unbegrenzte Ebene – ist so dicht von mobilen geometrischen Figuren bevölkert, dass fast überall Platzmangel herrscht.

Als nun einmal ein Kreis K , der von Beruf Mathematiker war, ein wenig zu viel getrunken hatte und daher nach einem Ort suchte, wo er ein paar Stunden verweilen konnte, um seinen Rausch auszuschlafen, entdeckte er auf einer Wiese eine dazu geeignet erscheinende Lücke zwischen zwei Kreisen und einer Strecke. Bei seinem Versuch, in diese Lücke hineinzukommen, streifte er die Kreise und stieß gegen die Strecke, wodurch die drei sämtlich nicht unerheblich deformiert wurden.

In einer später folgenden Gerichtsverhandlung sprach der Richter Leon F. I. Bonacci den Kreis K schuldig und verurteilte ihn dazu, eine Aufgabe zu lösen, bei der es darum ging, größtmögliche Kreise zu berechnen, die gerade noch in vorgegebene Gebiete hineinpassten, ohne dass sie die das Gebiet begrenzenden Figuren deformierten. Die Lösung der Aufgabe hatte noch eine bemerkenswerte Nebenwirkung: Sie würde den Kreis K stets an den Richter und damit an seine Straftat erinnern.



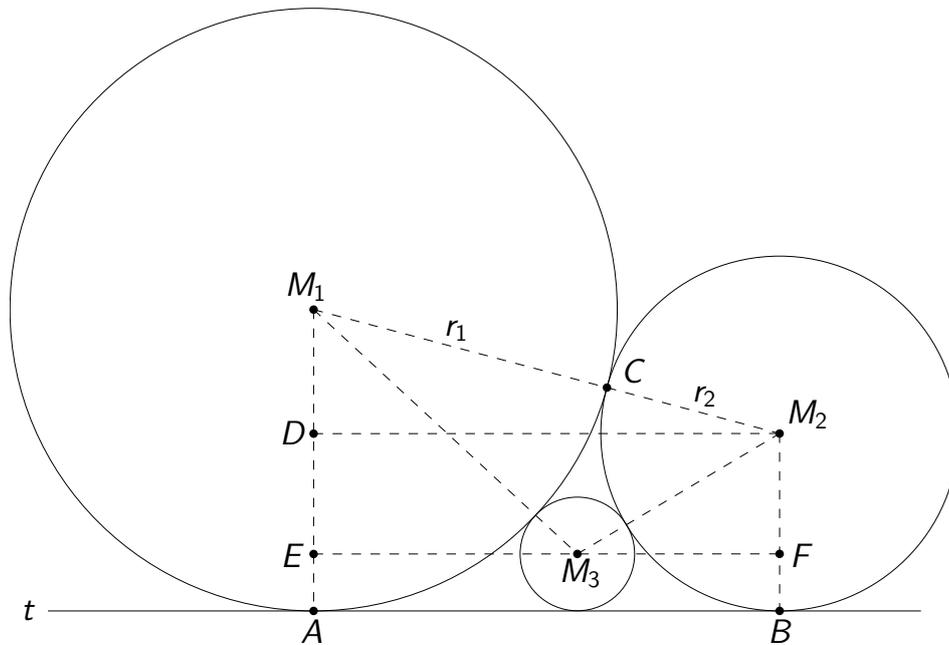
Die Aufgabe

Gegeben seien Kreise K_1 mit Radius r_1 und K_2 mit Radius r_2 , die sich im Punkt C berühren, sowie eine Strecke t , die K_1 in A und K_2 in B berührt.

- Bestimme den Radius r_3 des größten Kreises K_3 , der in die dreieckige Figur ABC hineinpasst – K_3 soll also K_1 , K_2 und t berühren, aber keinesfalls deformieren.
- Für die Kreise K_1 und K_2 aus a) sei der Radius r_3 des Kreises K_3 bestimmt. Wie groß sind dann die Radien r_4, r_5, r_6, \dots der Kreise K_4, K_5, K_6, \dots , von denen K_4 die Kreise K_2, K_3 und die Strecke t , K_5 die Kreise K_3, K_4 und die Strecke t und so weiter \dots berührt?

Lösung der Aufgabe

- Mit den Bezeichnungen der Figur gilt: Die Strecken $\overline{M_1A}$ und $\overline{M_2B}$ sind orthogonal zur Strecke t , sodass $\overline{M_1A} \parallel \overline{M_2B}$ ist. Nun seien die Strecken $\overline{M_2D}$ mit $D \in \overline{M_1A}$ und \overline{EF} mit $E \in \overline{M_1A}$, $F \in \overline{M_2B}$ und $M_3 \in \overline{EF}$ beide orthogonal zu $\overline{M_1A}$ und $\overline{M_2B}$.



Dann gilt: Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle M_1EM_3$ ist $|\overline{EM_3}|^2 = |\overline{M_1M_3}|^2 - |\overline{M_1E}|^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 = 4r_1r_3$; im rechtwinkligen Dreieck $\triangle M_2FM_3$ ist $|\overline{FM_3}|^2 = |\overline{M_2M_3}|^2 - |\overline{M_2F}|^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = 4r_2r_3$.

Daraus folgt: $|\overline{EM_3}| + |\overline{M_3F}| = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3} = 2(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})\sqrt{r_3}$.

Wegen $|\overline{EM_3}| + |\overline{M_3F}| = |\overline{M_2D}|$ und $|\overline{M_2D}|^2 = |\overline{M_1M_2}|^2 - |\overline{M_1D}|^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$, also $|\overline{M_2D}| = 2\sqrt{r_1r_2}$ ergibt sich $2\sqrt{r_1r_2} = 2(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})\sqrt{r_3}$, sodass schließlich

$$(1) \quad r_3 = \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}.$$

b) Es sei $r_1 = r_2$. Dann ist nach (1): $r_3 = \frac{r_1^2}{(2\sqrt{r_1})^2} = \frac{r_1}{4}$.

Für die nächsten Kreise K_4, K_5, K_6 gilt:

$$r_4 = \frac{r_2r_3}{(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})^2} = \frac{r_1^2}{4(\sqrt{r_1}(1 + \frac{1}{2}))^2} = \frac{r_1}{9};$$

$$r_5 = \frac{r_3r_4}{(\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4})^2} = \frac{r_1^2}{36(\sqrt{r_1}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}))^2} = \frac{r_1}{25};$$

$$r_6 = \frac{r_1}{64}.$$

Wie groß ist der Radius r_{n+2} des Kreises K_{n+2} für ein beliebiges $n \geq 1$?

Es sei $r_n = \frac{r_1}{f_n^2}$ und $r_{n+1} = \frac{r_1}{f_{n+1}^2}$ für bestimmte Zahlen f_n, f_{n+1} bewiesen.

Dann ist nach (1):

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= \frac{r_n r_{n+1}}{(\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}})^2} = \frac{\frac{r_1}{f_n^2} \cdot \frac{r_1}{f_{n+1}^2}}{\left(\sqrt{\frac{r_1}{f_n^2}} + \sqrt{\frac{r_1}{f_{n+1}^2}}\right)^2} \\ &= \frac{r_1^2}{f_n^2 f_{n+1}^2 \cdot \left(\sqrt{r_1} \left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}}\right)\right)^2} = \frac{r_1^2 f_n^2 f_{n+1}^2}{f_n^2 f_{n+1}^2 \cdot r_1 (f_n + f_{n+1})^2}. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungskette auch für $n = 1$ mit $f_1 = f_2 = 1$ zutrifft, gilt (vollständige Induktion):

$$(2) \quad r_{n+2} = \frac{r_1}{(f_n + f_{n+1})^2} \text{ für } n \geq 1.$$

Die Formel (2) lässt ein einfaches Bildungsmuster für r_3, r_4, r_5, \dots erkennen: Die Folge f_n , für $n = 1, 2, 3, \dots$ mit $f_1 = f_2 = 1$, der in den Nennern von r_3, r_4, r_5, \dots vorkommenden Zahlen gehorcht der rekursiven Regel:

$$(3) \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \text{ mit } f_1 = f_2 = 1 \text{ für } n \geq 1.$$

Damit bilden die Zahlen $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, \dots$ genau die Folge, welche Fibonacci¹ in seinem Buch „Liber Abaci“ aus dem Jahr 1202 ausführlich beschreibt.

Da die Fibonacci-Folge, wie sie heute genannt wird, viele überraschende und schöne Eigenschaften besitzt, und da sie oft völlig unerwartet in den verschiedensten mathematischen Zusammenhängen – wie zum Beispiel in der obigen Aufgabe des Richters – auftaucht, ist sie so interessant, dass sie jeder Mathematiker – und gewiss auch der Kreis K – kennt und sie in einer unüberschaubaren Flut von Veröffentlichungen untersucht worden ist.

Geometrie mit der Schere

2. Teil: Zerschneidung eines k -Ecks

von Hartwig Fuchs

Zerschneidung eines Vierecks in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke

Die Zerlegungsmöglichkeiten eines konvexen Vierecks E_4 in Dreiecke oder konvexe Vierecke sind leicht anzugeben.

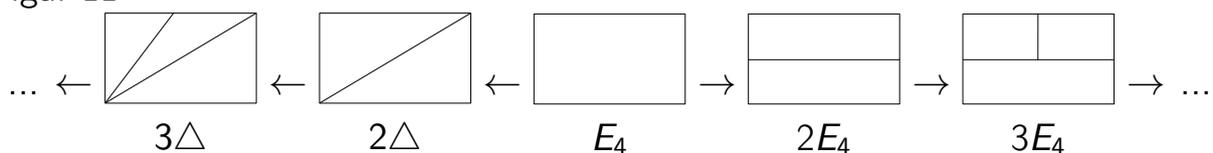
Satz $E_4 \longrightarrow n\Delta$:

(5) Jedes konvexe Viereck ist in n Dreiecke Δ , $n = 2, 3, 4, \dots$, zerlegbar.

Bezeichnet man konvexe Vierecke mit E_4 , dann gilt:

$$E_4 \longrightarrow 2\Delta \xrightarrow{(1)} 3\Delta \xrightarrow{(1)} \dots - \text{vergleiche Figur 11.}$$

Figur 11



Satz $E_4 \longrightarrow nE_4$:

(6) Jedes konvexe Viereck ist in n konvexe Vierecke E_4 , $n = 2, 3, 4, \dots$, zerlegbar.

¹ Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (um 1170 – 1250), bedeutender Mathematiker am Ende des Mittelalters

Statt eines Beweises sei auf Figur 11 verwiesen.

Der Nachweis des folgenden Zerschneidungssatz ist aufwändiger.

Satz $E_4 \rightarrow nE_5$:

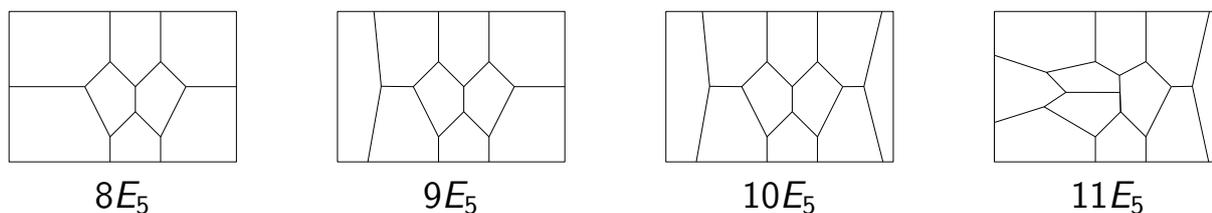
- (7) Jedes konvexe Viereck ist in n konvexe Fünfecke E_5 , $n = 8, 9, 10, \dots$, zerlegbar.

Nachweis:

An der Figur 12 sieht man:

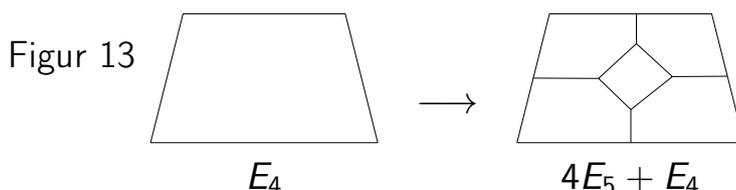
- (7.1) Ein konvexes Viereck E_4 kann in 8, 9, 10 und 11 konvexe Fünfecke E_5 zerlegt werden.

Figur 12



Mit Hilfe der Zerlegung

- (7.2) $E_4 \rightarrow 4E_5 + E_4$ – vergleiche Figur 13 –



sowie den Zerlegungen (7.1) gelangt man zu der Behauptung:

- (7.3) $E_4 \rightarrow (k - 1)E_5 + iE_5$ für jedes $k \geq 1$ und $i = 8, 9, 10$ oder 11 .

Mit vollständiger Induktion zeigt man, dass (7.3) zutrifft. Ersetzt man nun die Zahl $(k - 1) + i$ in (7.3) durch n für $k = 1, 2, 3, \dots$, dann ist mit (7.3) auch (7) bewiesen.

Zerschneidung eines Fünfecks in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke

Satz $E_5 \rightarrow n\Delta$:

- (8) Jedes konvexe Fünfeck E_5 ist in n Dreiecke, $n = 3, 4, 5, \dots$, zerlegbar.

Aus Figur 14 und aus Satz (1), angewendet auf die Figur 14, folgt unmittelbar Satz (8).

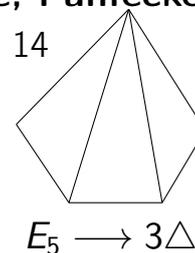
Satz $E_5 \rightarrow nE_4$:

- (9) Jedes konvexe Fünfeck E_5 ist in n konvexe Vierecke, $n = 2, 3, 4, \dots$, zerlegbar.

Ein Beweis ergibt sich aus Figur 15 und einer Anwendung von Satz (6) auf Figur 15 so:

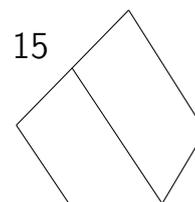
$$E_5 \rightarrow 2E_4 \rightarrow E_4 + 2E_4 = 3E_4 \rightarrow \dots$$

Figur 14



$$E_5 \rightarrow 3\Delta$$

Figur 15



$$E_5 \rightarrow 2E_4$$

Satz $E_5 \rightarrow nE_5$:

(10) Jedes konvexe Fünfeck ist in n konvexe Fünfecke E_5 , $n = 9, 10, 11, \dots$, zerlegbar.

Zunächst zerschneidet man ein gegebenes Fünfeck in ein Viereck und ein Fünfeck. Wegen Satz (7) kann man dann E_4 in $n - 1$ Fünfecke zerteilen. Es gilt also:

$$E_5 \rightarrow E_4 + E_5 \rightarrow (n - 1)E_5 + E_5 = nE_5, \quad n = 9, 10, 11, \dots$$

Bemerkung:

Die in den Sätzen $E_5 \rightarrow n\Delta$, $E_5 \rightarrow nE_4$ und $E_5 \rightarrow nE_5$ angegebenen Zahlen n , nämlich $n = 3$, $n = 2$ und $n = 9$, sind die kleinstmöglichen Werte.

Zerschneidung eines k -Ecks, $k \geq 3$, in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke

Aus den Sätzen (1)–(10) erhält man zusammenfassend als generelles Ergebnis:

(11) Jedes konvexe k -Eck mit $k \geq 3$, ist in Dreiecke, konvexe Vierecke oder/und konvexe Fünfecke zerlegbar.

Zum Beweis von (11) zeigen wir durch vollständige Induktion, dass gilt:

(12) Jedes konvexe k -Eck, $k \geq 4$, ist stets in $k - 2$ Dreiecke zerlegbar.

Die Behauptung (12) gilt für ein Viereck. Es sei also bewiesen, dass jedes $(k - 1)$ -Eck in $k - 3$ Dreiecke zerlegbar ist. Ist dann $E_k = P_1P_2 \dots P_{k-1}P_k$ ein konvexes k -Eck mit den Eckpunkten P_i , dann zerlegt man E_k in das Dreieck $P_1P_{k-1}P_k$ und das $(k - 1)$ -Eck $E_{k-1} = P_1P_2 \dots P_{k-1}$. Nach Voraussetzung gilt dann:

$$E_k \rightarrow \Delta + E_{k-1} \rightarrow \Delta + (k - 3)\Delta = (k - 2)\Delta,$$

sodass (12) für jedes $k \geq 4$ zutrifft.

Beweis von (11):

Es sei E_k ein konvexes k -Eck, $k \geq 3$. Für $k = 3, 4, 5$ gilt (11) wegen der Sätze (1)–(10). Ist $k \geq 6$, so zerlegt man E_k in $k - 2$ Dreiecke, für die dann die Sätze (1)–(3) gelten, woraus (11) folgt.

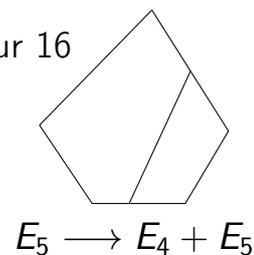
Ausblick

Wir haben bisher – außer im Fall eines Dreiecks – die Zerlegungen eines konvexen k -Ecks in konvexe Sechsecke nicht untersucht, weil das ein weites, unbearbeitetes Gebiet mit mehr Fragen als gesicherten Ergebnissen ist. Etwa:

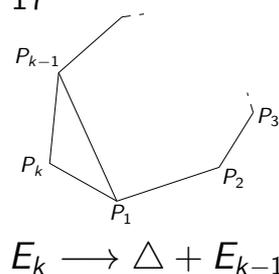
- Für welche Zahlen $k \geq 4$ ist ein konvexes k -Eck E_k in konvexe Sechsecke E_6 zerlegbar?

Beispiele, dass Satz (4), $\Delta \rightarrow nE_6$, sich nicht für jedes $k \geq 4$ auf k -Ecke verallgemeinern lässt: Für $k = 8$ ist $E_8 \rightarrow 2E_6$ und für $k = 10$ ist $E_{10} \rightarrow 3E_6$ jeweils eine solche Zerschneidung möglich – vergleiche Figur 18.

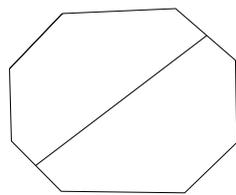
Figur 16



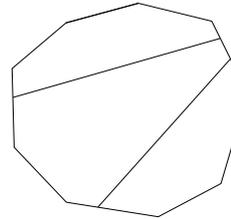
Figur 17



Figur 18



$$E_8 \longrightarrow 2E_6$$



$$E_{10} \longrightarrow 3E_6$$

Vielleicht ist die folgende Frage leichter zu beantworten:

- Für welche $k \geq 4$ ist eine Zerlegung eines konvexen k -Ecks E_k in konvexe Sechsecke nicht möglich?

Ein noch weiter führendes Problem ist dieses:

- Für welche k ist eine Zerlegung von E_k in konvexe Siebenecke, Achtecke, ... möglich oder aber nicht möglich?

Es gibt also noch viel Neues zu entdecken!

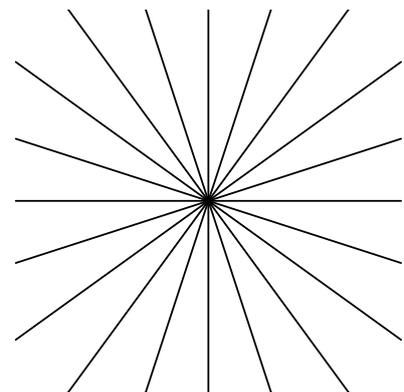
Einfärben von Landkarten

von Laura Biroth

Wie viele Farben braucht man, um die Länder auf einer ebenen Landkarte so einzufärben, dass nirgends zwei Länder gleicher Farbe zusammenstoßen?

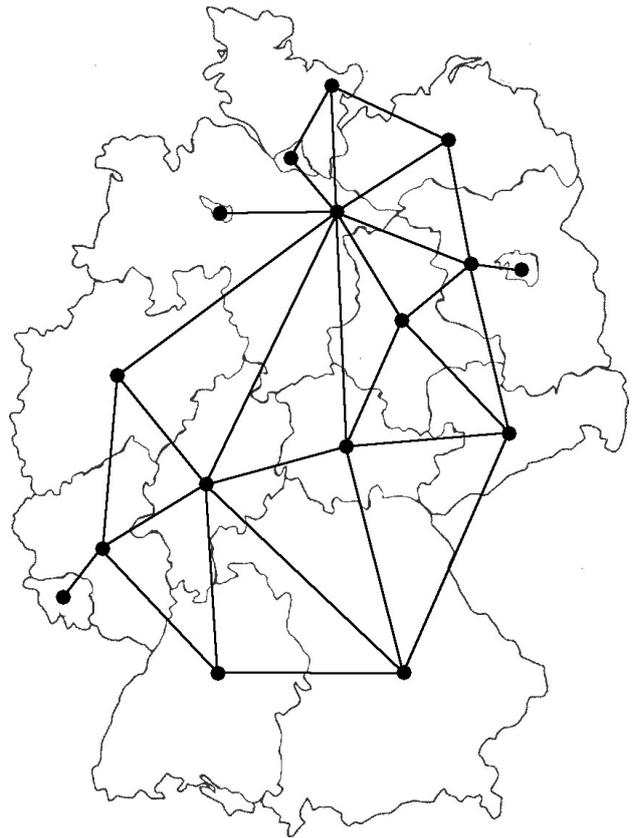
Das kommt darauf an, was man unter einem „Land“ und was man unter „zusammenstoßen“ versteht. Muss ein Land zusammenhängen oder darf es auch aus mehreren Stücken bestehen? Zählt es schon als Zusammenstoßen, wenn sich die Ecken zweier gleichfarbiger Länder berühren, oder muss es ein Stück der Kante (Grenze) sein?

Wir gehen zunächst davon aus, dass jedes Land aus nur einem Stück besteht (mehr zu den anderen Varianten später). Die Frage, ob es sinnvoll ist, einander berührende Ecken als Zusammenstoß zu zählen, kann man aber beantworten. Rechnet man solche Ecken als Zusammenstoß, so berühren alle „tortenstückförmigen“ Länder auf der nebenstehenden Karte einander, es müsste also jedes in einer eigenen Farbe gefärbt werden. Da man aber eine Karte aus beliebig vielen Tortenstücken zeichnen kann, gibt es dann also keine Anzahl an Farben, die ausreichen würde, um jede beliebige Karte einzufärben. Interessant wird das Problem also nur, wenn wir nur auf gemeinsame Kanten achten.



Unter diesen Voraussetzungen (jedes Land hängt zusammen und es zählt nur Kantenkontakt) kann man jede Karte mit nur vier Farben so einfärben, dass sich keine zwei Länder gleicher Farbe berühren. Der Beweis dazu ist aber sehr kompliziert und kommt nicht ohne den Einsatz von Computern aus. Deshalb zeigen wir hier nur, dass man jede Karte mit höchstens fünf Farben so einfärben kann.

Dazu betrachtet man am besten nicht die Karte selbst, sondern den dazu gehörigen Graphen. Diesen erhält man, indem man für jedes Land genau einen Punkt (Knoten) zeichnet und zwei Knoten genau dann durch eine Linie (Kante) verbindet, wenn die dazugehörigen Länder aneinander grenzen. Jeder solche Graph lässt sich auf ein Blatt Papier zeichnen, ohne dass sich seine Kanten schneiden (er ist planar) und enthält weder Schleifen noch doppelte Kanten (man sagt auch: er ist einfach). Umgekehrt kann man zu jedem einfachen planaren Graphen eine Karte zeichnen. Die Frage, wie viele Farben man braucht, um eine Landkarte einzufärben, ohne dass gleichfarbige Länder aneinandergrenzen, ist dann äquivalent dazu, wie viele Farben man braucht, um die Knoten eines einfachen planaren Graphen so einzufärben, dass keine zwei gleichfarbigen Knoten durch eine Kante verbunden sind. Wir werden also zeigen, dass das immer mit höchstens fünf Farben möglich ist.



Zunächst überlegt man sich, dass jeder einfache planare Graph einen Knoten enthalten muss, an dem höchstens fünf Kanten zusammenstoßen.

Der Beweis hierzu funktioniert wie folgt:

Für jeden planaren Graphen gilt die eulersche Polyederformel

$$E - K + F = 2,$$

wobei E die Anzahl der Knoten (Ecken), K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen ist, in die der Graph das Papier zerlegt (der Rand außen um den Graphen herum zählt dabei mit). Wir zählen für jede Ecke, wie viele Kanten an ihr zusammenstoßen. Die Anzahl der Ecken, an denen k Kanten zusammenstoßen nennen wir E_k . Außerdem zählen wir für jede Fläche, von wie vielen Kanten sie begrenzt wird. Wir schreiben F_k für die Anzahl der Flächen, die von k Kanten begrenzt wird. Da der Graph einfach ist, wird jede Fläche durch mindestens drei Kanten begrenzt. Es gilt also:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots$$

Außerdem grenzt jede Kante an genau zwei Flächen, also ist

$$2K = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Zieht man dreimal die erste von der zweiten Gleichung ab, so erhält man

$$2K - 3F = F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \dots \geq 0 \quad (*)$$

Angenommen an jeder Ecke trafen sechs oder mehr Kanten zusammen, dann wäre

$$E = E_6 + E_7 + E_8 + \dots$$

Da jede Kante an genau zwei Knoten grenzt, gilt

$$2K = 6E_6 + 7E_7 + 8E_8 + \dots$$

Auch diese Gleichungen ziehen wir voneinander ab, und erhalten

$$2K - 6E = E_7 + 2E_8 + 3E_9 + \dots \geq 0 \quad (**)$$

Jetzt addieren wir zweimal die Ungleichung (*) zu (**).

$$6 \cdot (K - E - F) = 2 \cdot (2K - 3F) + (2K - 6E) \geq 0$$

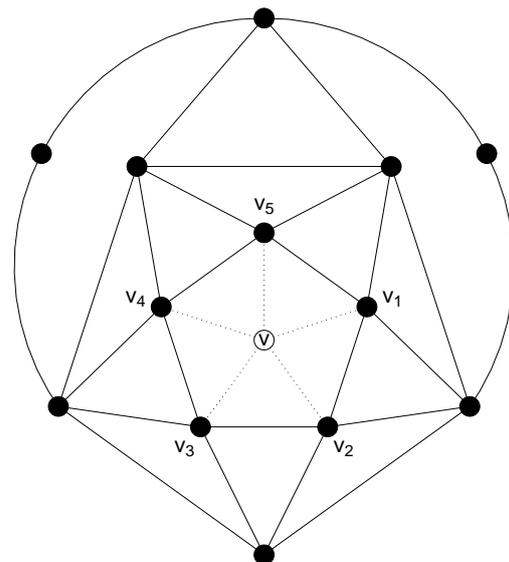
Nach der Polyederformel ist aber $E - K + F = 2$ also $K - E - F = -2$. Setzt man das in die letzte Ungleichung ein, so erhält man $-12 \geq 0$, was offensichtlich nicht stimmt. Also muss die Annahme, dass an jeder Ecke mindestens sechs Kanten zusammentreffen, falsch sein. Es gibt also eine Ecke mit höchstens fünf Kanten.

Jetzt kümmern wir uns um die Einfärbung der Karten bzw. Graphen.

Für Graphen mit fünf oder weniger Knoten ist es natürlich möglich, sie mit höchstens fünf Farben einzufärben.

Wenn wir bereits wissen, dass eine solche Färbung für alle planaren einfachen Graphen mit n Knoten möglich ist, und jetzt einen planaren einfachen Graphen G mit $n + 1$ Knoten färben wollen, gehen wir wie folgt vor:

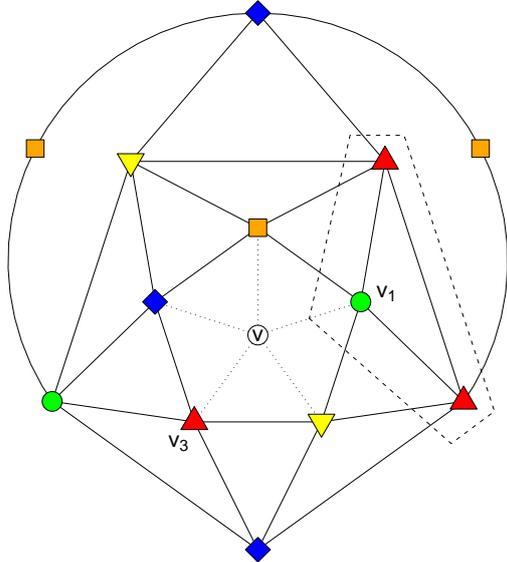
Wir wählen einen Knoten v , an dem höchstens fünf Kanten zusammenstoßen. Wir haben gerade gezeigt, dass es immer so einen Knoten gibt. Der Graph G^* , der aus allen Knoten von G außer v und allen Kanten von G , die nicht an v grenzen, besteht, hat nur n Knoten. Wir wissen also, dass man G^* mit höchstens 5 Farben einfärben kann. Wir müssen jetzt noch eine Farbe für v finden (und evtl. einige andere Knoten umfärben), um eine zulässige Färbung von ganz G mit höchstens fünf Farben zu bekommen.



Dazu unterscheiden wir verschiedene Fälle: Wenn sich in v tatsächlich weniger als fünf Kanten treffen, v also weniger als fünf Nachbarknoten hat, dann färben

wir v einfach in einer unserer fünf Farben ein, die noch für keinen Nachbarknoten verwendet wurde.

Genauso gehen wir vor, wenn v zwar fünf Nachbarn hat, aber mehrere davon die gleiche Farbe haben.

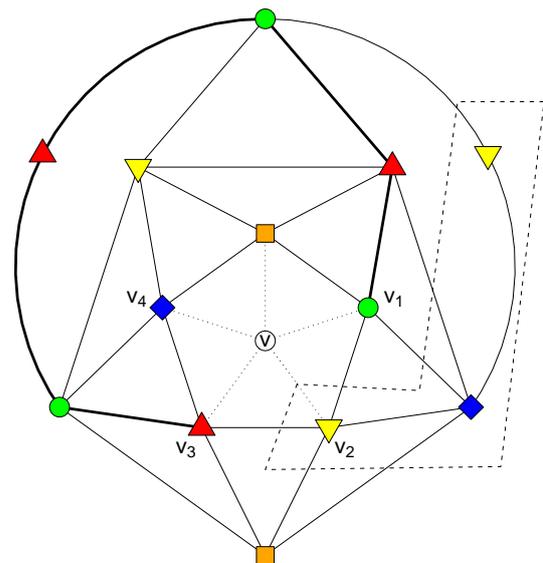


Wenn aber alle fünf Nachbarn von v in verschiedenen Farben eingefärbt sind, so bleibt keine Farbe für v übrig. In diesem Fall müssen wir die Farben der anderen Knoten verändern. Wir bezeichnen die Nachbarn von v im Uhrzeigersinn mit v_1 bis v_5 . Wir gehen davon aus, dass der Knoten v_1 grün (in der Skizze mit \circ gekennzeichnet) und der Knoten v_3 rot (in der Skizze: \triangle) ist (ansonsten kann man hier natürlich auch jede andere Farbbezeichnung einsetzen). Gibt es einen Weg durch den Graphen G^*

von v_1 nach v_3 , der nur rote und grüne Knoten enthält?

Wenn nein, dann betrachten wir alle Knoten, die rot oder grün sind und mit v_1 auf einem Weg verbunden sind, der nur rote und grüne Knoten enthält (v_3 gehört nicht zu diesen Knoten!). Jetzt vertauschen wir die Farben all dieser Knoten, färben also die grünen rot und die roten grün. So erhält man eine neue zulässige Färbung von G^* , nur dass v_1 und v_3 jetzt beide rot sind. Jetzt haben die Nachbarn von v also nur noch vier verschiedene Farben und wir können v in der fünften Farbe (in unserem Beispiel also grün) färben.

Wenn v_1 und v_3 allerdings durch einen rot-grünen Kreis verbunden sind, hilft uns dieser Trick nicht weiter, weil wir jetzt, um v_1 grün zu färben, auch gleichzeitig v_3 rot färben müssten. Wir würden also nur die Farben von v_1 und v_3 vertauschen. Stattdessen betrachten wir jetzt den (gelben) Knoten v_2 (in der Skizze: ∇) und den (blauen) Knoten v_4 (in der Skizze: \diamond). Diese können unmöglich durch einen Weg in G^* verbunden sein, der nur gelbe und blaue Knoten enthält, da dieser den rot-grünen Weg von v_1 nach v_3 kreuzen müsste. Also vertauschen wir jetzt die Farben aller blauen und gelben Knoten die durch blau-gelbe Wege mit v_2 verbunden sind. Auf diese Weise erhalten wir eine zulässige Färbung von G^* , in der v_2 und v_4 beide



blau sind. Wir können den Knoten v dann also gelb einfärben.

Somit haben wir gezeigt, dass man jeden (einfachen) planaren Graphen mit fünf Farben so einfärben kann, dass keine Knoten mit gleicher Farbe durch eine Kante verbunden sind, oder eben, dass man jede ebene Landkarte (bzw. jede Karte auf einer Kugeloberfläche) mit zusammenhängenden Ländern mit höchstens fünf Farben einfärben kann. Tatsächlich reichen dazu schon vier Farben.

Wie sieht es jetzt aber aus, wenn man nicht darauf besteht, dass alle Länder zusammenhängen? Wenn jedes Land aus bis zu $m \geq 2$ einzelnen Gebieten bestehen darf, weiß man, dass sich jede solche Karte mit höchstens $6m$ Farben einfärben kann. Umgekehrt kennt man auch Karten, die tatsächlich $6m$ Farben benötigen. Hier lässt sich also keine kleinere Grenze finden.

Wenn man die Gebiete aber so anordnet, dass sich jeweils genau ein Teil eines Landes auf der Erde und eines auf dem Mond befindet (oder auf zwei Planeten, oder auf zwei Kontinenten, wobei man das Meer nicht färben muss), dann ist nicht bekannt, wie viele Farben man für eine solche Karte höchstens braucht. Mit Sicherheit genügen 12 Farben, aber man weiß nicht, ob nicht vielleicht schon weniger reichen würden. Die „bunteste“ bekannte Erde-Mond-Karte besteht aus 11 Ländern und benötigt 9 Farben. Die nötige Anzahl zum Einfärben jeder Erde-Mond-Karte könnte also bei 9, 10, 11 oder 12 Farben liegen.

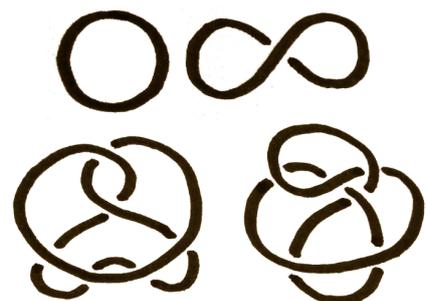
Entsteht beim Schuhebinden immer der gleiche Knoten?

von Daniela Müller

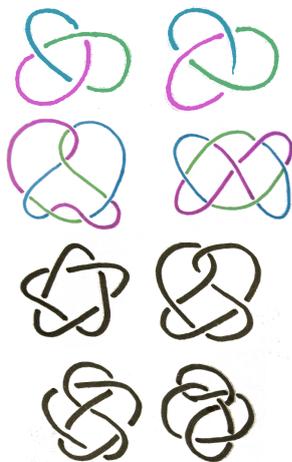


Den Anfangsknoten beim Schuhebinden kann man auf zwei verschiedene Weisen bilden, doch sind die beiden Knoten, die entstehen, wenn man die Enden der Schnürsenkel verbindet, wirklich verschieden? Oder kann man sie irgendwie so verformen, dass man am Ende doch den gleichen Knoten hat? Die nebenstehende Abbildung zeigt die zwei Varianten der sogenannten Kleeblattschlinge.

Solche Abbildungen von Knoten, in denen kleine Lücken zum Andeuten der Über- und Unterkreuzungen gelassen werden, heißen *Knotendiagramme*. Ein Knoten hat unendlich viele Knotendiagramme, denn man kann die Schnüre beliebig umlegen und der Knoten bleibt im Prinzip doch gleich. So zeigt die Abbildung rechts einige mögliche Knotendiagramme des sogenannten *trivialen Knotens*.



Im Laufe der Zeit wurden immer bessere *Knoteninvarianten* entwickelt, um solche Knoten unterscheiden zu können. Eine Knoteninvariante ist eine Größe, zum Beispiel eine Zahl oder ein Polynom, die man anhand eines gegebenen Knotendiagramms berechnet, die aber nicht von der Wahl des Diagramms abhängt. Haben also zwei Knotendiagramme verschiedene Werte, so stellen sie auf keinen Fall den gleichen Knoten dar. Aber haben sie den gleichen Wert, so könnte es trotzdem sein, dass sie verschiedene Knoten repräsentieren. Unser Ziel ist es zu beweisen, dass die beiden Kleeblattknoten wirklich verschieden sind. Im Folgenden werden wir eine Reihe von Knoteninvarianten vorstellen. Die Invarianzbeweise würden den Rahmen des Artikels sprengen, aber wir werden zeigen, wie man mit ihrer Hilfe Knoten unterscheiden kann.



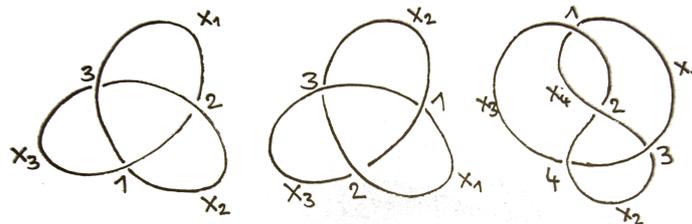
Die erste Knoteninvariante ist die *Färbbarkeit*. Man nennt ein Knotendiagramm *färbbar*, wenn man die Bögen so mit drei Farben einfärben kann, dass an jeder Kreuzung entweder nur eine oder alle drei Farben auftreten, man muss allerdings mindestens zwei Farben benutzen.

Die Abbildung links zeigt, dass beide Kleeblattknoten und auch die Knoten 6_1 und 7_4 (in Bezug auf die Anzahl der Kreuzungen) färbbar sind¹. Mit diesem Kriterium kann man also nicht beweisen, dass die oberen vier Knoten verschieden sind. Da man aber zeigen kann, dass die Färbbarkeit eine Invariante ist, so folgt, dass man die oberen vier Knoten nicht in einen der unteren Knoten umformen kann, da die unteren Knoten nicht färbbar sind.

Dieses Kriterium kann man verallgemeinern. Die oben genannten Bedingungen sind äquivalent dazu, dass man die Bögen mit den Zahlen 0, 1 und 2 etikettiert und dass an jeder Kreuzung dann gilt: $2x - y - z \equiv 0 \pmod 3$, wobei x den überkreuzenden und y und z die unterkreuzenden Bögen bezeichnet. Nun könnte man aber auch die Zahlen $0, 1, 2, \dots, p - 1$ (p sei eine Primzahl) benutzen. Kann man die Bögen mit diesen Zahlen so etikettieren, dass an jeder Kreuzung $2x - y - z \equiv 0 \pmod p$ gilt, so nennt man das Knotendiagramm *etikettierbar modulo p* . Um berechnen zu können, für welche Primzahlen p man ein Knotendiagramm etikettieren kann, geht man folgendermaßen vor: Zuerst bezeichnen wir die Bögen (sagen wir, es gibt n davon) mit den Variablen x_1, \dots, x_n und die Kreuzungen analog mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$. Dann stellen wir eine $n \times n$ Matrix auf. Die i -te Zeile stellt die i -te Kreuzung dar und wir gehen alle Kreuzungen durch. Ist an der i -ten Kreuzung der Bogen x_k oben und die Bögen x_l und x_j unten, so tragen wir in der i -ten Zeile an der k -ten Stelle eine 2, an der l -ten und j -ten Stelle eine -1 ein. Falls der Bogen x_k oben und unten ist (dies ist der Fall bei einer

¹ Leider sind die Einfärbungen in der Schwarz-Weiß-Abbildung nicht erkennbar, aber nimm Dir doch farbige Stifte und färbe die oberen vier Knoten ein.

Schlaufe), so tragen wir in die k -te Stelle eine 1 ein. Alle anderen Einträge der Matrix sind 0. In dieser Matrix streichen wir nun eine beliebige Zeile und Spalte und berechnen anschließend die Determinante. Der Betrag dieser Determinante heißt die *Determinante des Knotens*. Man kann beweisen, dass die Determinante des Knotens unabhängig von der Wahl der zu streichenden Zeile und Spalte ist. Als Beispiel dafür bestimmen wir die Determinante der beiden Kleeblattknoten und die des sogenannten Achterknotens.

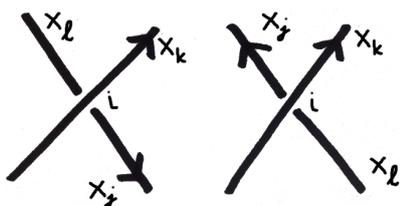


Dazu stellen wir nun die oben beschriebenen Matrizen zu den in der Abbildung gewählten Bezeichnungen auf:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Streichen einer Zeile und Spalte ergibt sich für die beiden Kleeblattknoten jeweils die Determinante 3, der Achterknoten hat die Determinante 5. Mit dieser Invariante kann man nun schon wesentlich mehr Knoten unterscheiden als mit dem Färbbarkeitskriterium, allerdings nicht die beiden Kleeblattknoten, da sie beide Determinante 3 haben.

Also auf zur nächsten Knoteninvariante, dem Alexander-Polynom, welches, wie der Name schon sagt, nicht eine Zahl, sondern ein Polynom ist. Hier müssen wir das Knotendiagramm zunächst orientieren, das heißt ihm einen Durchlaufsinne geben. Auch hier bilden wir wieder eine Matrix, aber jetzt kommt es auf die Art der Kreuzung an, was wir in die Matrix schreiben. Es gibt zwei Arten von Kreuzungen, einmal die rechtshändigen und einmal die linkshändigen Kreuzungen.



Es kommt darauf an, von welcher Seite der unterkreuzende Strang kommt, wenn man dem überkreuzenden Strang in seiner Orientierung folgt. Kommt er von links, so nennt man die Kreuzung linkshändig, kommt er von rechts, so heißt sie rechtshändig. Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht dies.

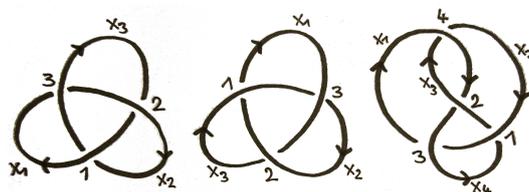
Im Fall der linkshändigen Kreuzung sind die Matrixeinträge wie folgt definiert:

$$a_{ik} := 1 - t, \quad a_{il} := t, \quad a_{ij} := -1.$$

Im anderen Fall vertauschen sich die Einträge der unterkreuzenden Bögen, also

$$a_{ik} := 1 - t, \quad a_{ij} := -1, \quad a_{jj} := t.$$

Falls $x_k = x_l$ oder $x_k = x_j$ (also wieder eine Schlaufe), so trägt man die Summe der beiden Einträge ein. In dieser Matrix streichen wir nun die letzte Zeile und letzte Spalte und berechnen wieder die Determinante. Da wir als Matrixeinträge diesmal Polynome haben, ist auch die Determinante ein Polynom und wird *Alexander-Polynom* genannt. Das Alexander-Polynom hängt allerdings von der Wahl der Bezeichnungen der Bögen und Kreuzungen, von der Wahl der Orientierung und von der Wahl des Diagramms ab, aber man kann zeigen, dass sich alle Polynome nur um den Faktor $\pm t^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ unterscheiden. Einigt man sich auf das Polynom mit der betragsmäßig kleinsten t -Potenz, so ist das Alexander-Polynom eindeutig. Als Beispiel dienen uns nun wieder die beiden Kleeblattschlingen und der Achterknoten.



Die Matrizen zu den in der Abbildung gewählten Bezeichnungen lauten:

$$\begin{pmatrix} 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \\ t & -1 & 1-t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t & -1 & 1-t \\ -1 & 1-t & t \\ 1-t & t & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1-t & -1 & t \\ -1 & 0 & 1-t & t \\ -1 & t & 0 & 1-t \\ 1-t & t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Streichen der letzten Zeile und Spalte ergeben sich folgende Determinanten

$$t^2 - t + 1, \quad -(t^2 - t + 1), \quad -(t^2 - 3t + 1)$$

und nach Normierung lauten die Alexander-Polynome dann

$$t^2 - t + 1, \quad t^2 - t + 1, \quad t^2 - 3t + 1.$$

Wie man allerdings sieht, haben die beiden Kleeblattknoten auch dasselbe Alexander-Polynom. Diese Invariante ist also immer noch nicht gut genug. Doch zum Glück entdeckte Vaughan F. R. Jones eine noch bessere Knoteninvariante, für die er 1990 die Fields-Medaille erhielt, das *Jones-Polynom*. Eine Vorstufe hiervon ist das *Klammerpolynom*, welches folgende Regeln erfüllt:

- I $\langle \times \rangle = a \langle \smile \rangle + a^{-1} \langle \smile \rangle$
- II $\langle \times \rangle = a \langle \smile \rangle + a^{-1} \langle \smile \rangle$
- III $\langle K \cup 0 \rangle = (-a^2 - a^{-2}) \langle K \rangle$
- IV $\langle 0 \rangle = 1$

Man hat ein Knotendiagramm gegeben und löst nach den ersten beiden Regeln nacheinander die Kreuzungen auf. Dabei kommt es vor, dass ein trivialer Knoten vom restlichen Knoten K abgespalten wird, dann kommt Regel III zum Einsatz. Am Ende bleibt immer der triviale Knoten übrig, für den wir dann Regel IV brauchen.

Doch am besten versteht man das Vorgehen anhand einiger Beispiele:

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= a \langle 00 \rangle + a^{-1} \langle \infty \rangle \\ &= a((-a^2 - a^{-2}) \langle 0 \rangle) + a^{-1} \\ &= -a^3 - a^{-1} + a^{-1} = -a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= a \langle \infty \rangle + a^{-1} \langle 00 \rangle \\ &= a + a^{-1}((-a^2 - a^{-2}) \langle 0 \rangle) \\ &= a - a - a^{-3} = -a^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= a \langle 0 \infty \rangle + a^{-1} \langle \infty \rangle \\ &= a((-a^2 - a^{-2}) \langle \infty \rangle) + a^{-1} \langle \infty \rangle \\ &= (-a^3 - a^{-1} + a^{-1}) \langle \infty \rangle \\ &= -a^3 (-a^3) = a^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= a \langle \infty \rangle + a^{-1} \langle 0 \infty \rangle \\ &= a \langle \infty \rangle + a^{-1}((-a^2 - a^{-2}) \langle \infty \rangle) \\ &= (a - a - a^{-3}) \langle \infty \rangle \\ &= -a^{-3} (-a^3) = a^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= a \langle \infty \rangle + a^{-1} \langle \infty \rangle \\ &= a(a \langle \infty \rangle + a^{-1} \langle \infty \rangle) + a^{-1}(-a^3) \\ &= a(a(-a^2 - a^{-2}) \langle 0 \rangle + a^{-1}) - a^{-4} \\ &= a(-a^3 - a^{-1} + a^{-1}) - a^{-4} \\ &= -a^4 - a^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= a \langle \infty \rangle + a^{-1} \langle \infty \rangle \\ &= a(-a^3) + a^{-1}(a \langle \infty \rangle + a^{-1} \langle \infty \rangle) \\ &= -a^4 + a^{-1}(a + a^{-1}(-a^2 - a^{-2})) \\ &= -a^4 + a^{-1}(a - a - a^{-3}) \\ &= -a^4 - a^{-4} \end{aligned}$$

Mit dieser Vorarbeit können wir nun die Klammerpolynome der Kleeblattknoten berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \text{Kleeblatt} \rangle &= a \langle \text{Kleeblatt} \rangle + a^{-1} \langle \text{Kleeblatt} \rangle \\ &= a(-a^4 - a^{-4}) + a^{-1}(a^6) \\ &= -a^5 - a^{-3} + a^{-7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Kleeblatt} \rangle &= a \langle \text{Kleeblatt} \rangle + a^{-1} \langle \text{Kleeblatt} \rangle \\ &= a(a^6) + a^{-1}(-a^4 - a^{-4}) \\ &= a^7 - a^3 - a^{-5} \end{aligned}$$

Und endlich scheinen wir es geschafft zu haben: Die beiden Knotenpolynome sind als verschieden erwiesen. Doch ist das Klammerpolynom wirklich eine Invariante? Wenn dies der Fall wäre, dann dürfte eine Verdrehung eines Bogens in eine Schlaufe das Klammerpolynom nicht verändern. Doch schauen wir uns an, was passiert:

$$\begin{aligned} \langle \text{Knoten} \rangle &= a \langle \text{Knoten} \rangle + a^{-1} \langle \text{Knoten} \rangle \\ &= a \langle \text{Knoten} \rangle + a^{-1}((-a^2 - a^{-2}) \langle \text{Knoten} \rangle) \\ &= -a^3 \langle \text{Knoten} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Knoten} \rangle &= a \langle \text{Knoten} \rangle + a^{-1} \langle \text{Knoten} \rangle \\ &= a((-a^2 - a^{-2}) \langle \text{Knoten} \rangle) + a^{-1} \langle \text{Knoten} \rangle \\ &= -a^3 \langle \text{Knoten} \rangle \end{aligned}$$

Das heißt, der Faktor $-a^3$ bzw. $-a^{-3}$ ist zu viel. War jetzt alles umsonst? Glücklicherweise nicht, denn eine kleine Modifikation rettet die Sache. Dazu brauchen wir die sogenannte *Windungszahl*. Diese ist definiert als die Differenz der Anzahl der rechtshändigen und linkshändigen Kreuzungen eines orientierten Diagramms

und man bezeichnet sie mit ω . Schaltet man nun den Faktor $(-a^3)^{-\omega(K)}$ vor das Klammerpolynom, so wird daraus eine Knoteninvariante. Als letztes setzt man noch $q := a^4$ und erhält damit das Jones-Polynom $X(K)$. Die Jones-Polynome der Kleeblattknoten lauten also:

$$\begin{aligned}
 \omega(\text{Kleeblatt}) &= 0 - 3 = -3 & \omega(\text{Kleeblatt}) &= 3 - 0 = 3 \\
 \Rightarrow X(\text{Kleeblatt}) &= (-a^3)^{-(-3)} \langle \text{Kleeblatt} \rangle & \Rightarrow X(\text{Kleeblatt}) &= (-a^3)^{-3} \langle \text{Kleeblatt} \rangle \\
 &= -a^9 (a^7 - a^3 - a^5) & &= -a^9 (a^7 - a^3 - a^5) \\
 &= -a^{16} + a^2 + a^4 = q^4 + q^3 + q & &= -a^{16} + a^{12} + a^4 = -q^4 + q^3 + q^{-1}
 \end{aligned}$$

Somit ist die Unterscheidung der beiden Kleeblattknoten mit Hilfe des Jones-Polynoms schließlich gelungen. Es gibt allerdings verschiedene Knoten, die dasselbe Jones-Polynom haben; es kann also nicht alle Knoten unterscheiden. Zumindest wurde noch kein nichttrivialer Knoten mit Jones-Polynom 1 gefunden. Das Auffinden weiterer allgemeiner Invarianten ist ein wichtiges Ziel der aktuellen Forschung.

Ein Blick hinter die Kulissen Erbsen zählen

von Hartwig Fuchs

Mathis und sein Freund Matheo sind auf einer mehrtägigen Fahrradtour unterwegs. An einem verregneten Morgen vertreiben sich die beiden die Wartezeit auf besseres Wetter mit folgendem Spiel:

In einer Schale befinden sich 53 Erbsen. Im Wechsel nehmen Mathis und Matheo mindestens eine und höchstens fünf Erbsen aus der Schale, bis diese leer ist. Dann zählt jeder seine Erbsen. Falls diese beiden Anzahlen einen gemeinsamen Teiler $\neq 1$ haben, dann hat Matheo gewonnen – andernfalls hat er verloren. Verblüffender Weise gewinnt Mathis jedes Spiel. Besitzt Mathis etwa eine Gewinn-Strategie? Finde das heraus! (H.F.)

Lösung

Die Erbsenzahlen von Mathis und Matheo seien m und n . Dann gilt $m + n = 53$. Angenommen, m und n haben den gemeinsamen Teiler $t \neq 1$, wobei $t < 53$ ist. Dann ist $m = x \cdot t$ und $n = y \cdot t$ mit positiven ganzen Zahlen x und y . Aus $m + n = (x + y) \cdot t = 53$ folgt, dass t ein Teiler von 53 ist. Da 53 eine Primzahl ist, muss $t = 1$ oder $t = 53$ sein – im Widerspruch zur Annahme.

Deshalb sind m und n stets teilerfremd – und zwar unabhängig davon, wie sich m und n aus dem Spielverlauf ergeben: Mathis muss also zwangsläufig – und zwar ohne Taktik – jedes Spiel gewinnen.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 115

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Geburtstag

Mein Geburtstag ist der 7. Februar. Das Jahr meiner Geburt war kein Schaltjahr und der Dezember hatte fünf Freitage, aber nur vier Samstage. An welchem Wochentag bin ich geboren? (WJB)

Lösung:

Fünf Freitage und vier Samstage im Dezember sind nur dann möglich, wenn der 31. Dezember ein Freitag ist. Da mein Geburtsjahr kein Schaltjahr war, war der 31. Dezember des Vorjahres ein Donnerstag. Von diesem bis zum 7. Februar sind es $31 + 7$ Tage = 5 Wochen + 3 Tage. Also bin ich ein Sonntagskind.

II. Eckenzahl eines Polygons

Die Summe der Innenwinkel eines Vielecks beträgt 3240° . Wie viele Ecken hat das Vieleck? (H.F.)

Hinweis: Es genügt, die Aussage für konvexe Vielecke zu zeigen, d.h. für Vielecke ohne ins Innengebiet einspringende Ecken.

Lösung:

Ein konvexes Viereck kann man durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Seine Winkelsumme beträgt daher $2 \cdot 180^\circ$. Fügt man nun 1, 2, 3, ... Dreiecke an das Viereck so an, dass die dabei entstehende Figur jeweils immer noch konvex ist, dann vergrößert sich die Winkelsumme des Vierecks um jeweils 180° , $2 \cdot 180^\circ$, $3 \cdot 180^\circ$, ... Die Winkelsumme im konvexen n -Eck ist daher $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Falls nun $(n - 2) \cdot 180^\circ = 3240^\circ$ ist, dann ist $n = 20$. Im konvexen 20-Eck beträgt die Winkelsumme 3240° .

III. Zahlensummen

Die fünf Kinder Arthur, Bettina, Cynthia, Duco und Ekkehard schreiben die Zahlen von 1 bis 10 auf zehn Zettel und werfen diese Zettel in einen Topf. Jedes Kind zieht nun je zwei Zettel aus dem Topf. Die Summen der von den Kindern jeweils gezogenen Zahlen betragen:

Arthur	Bettina	Cynthia	Duco	Ekkehard
17	16	11	7	4

Wer hat welche Zettel gezogen? Begründe. (gefunden: Susanne Lüning)

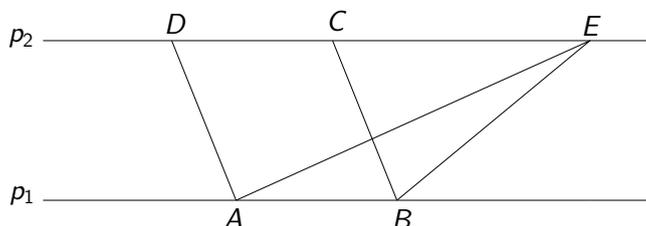
Lösung:

Mit Hilfe der Zahlen lässt sich die 4 nur auf eine Weise als Summe zweier Zahlen darstellen: $4 = 3 + 1$. Die 7 lässt sich dann auch nur darstellen als $7 = 5 + 2$. Von den verbleibenden Zahlen lässt sich die 11 nun eindeutig aufschreiben: $11 = 7 + 4$. Jetzt verbleiben nur noch die Zahlen 6, 8, 9 und 10, um 16 und 17 darzustellen. Da die 9 ungerade ist, muss sie bei der Darstellung der 17 verwendet werden, also $17 = 9 + 8$ und $16 = 10 + 6$.

Somit hat Arthur die Zettel mit der 9 und der 8 gezogen, Bettina die mit der 10 und 6, Cynthia die mit der 7 und 4, Duco die mit der 5 und 2 und Ekkehard die Zettel mit der 3 und 1.

IV. Flächenvergleich

Gegeben seien zwei Parallelen p_1 und p_2 sowie das Parallelogramm $ABCD$ mit den Ecken A und B auf p_1 und den Ecken C und D auf p_2 . Wähle nun auf p_2 einen beliebigen Punkt E und verbinde E mit A und B .



Vergleiche die Fläche des Dreiecks $\triangle ABE$ mit der Fläche des Parallelogramms $ABCD$. (H.F.)

Lösung:

In der Figur sei der Punkt A mit dem Punkt C verbunden. Die Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle ABC$ haben dieselbe Basis \overline{AB} und ihre Höhen sind gleich lang. Deshalb sind sie flächengleich:

$$(1) \quad |\triangle ABE| = |\triangle ABC|.$$

Die Strecke \overline{AC} ist eine Diagonale im Parallelogramm $ABCD$. Deshalb zerlegt sie es in die flächengleichen Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$, sodass jedes von ihnen die halbe Parallelogrammfläche besitzt:

$$(2) \quad |\triangle ABC| = \frac{1}{2} |\triangle ABCD|.$$

Aus (1) und (2) folgt: $|\triangle ABE| = \frac{1}{2} |\triangle ABCD|$.

V. Glaubensfrage

Die achten Klassen eines Mainzer Gymnasiums planen einen gemeinsamen Schulausflug. Der Busunternehmer Meyer bietet Busse mit 30 Plätzen und solche mit 45 Plätzen an. Drei Busse mit je 30 Plätzen reichen nicht aus, aber zwei Busse mit je 30 und einer mit 45 Plätzen ist genug. Von den Schülern ist ein Drittel katholisch und ein Viertel evangelisch. Wie viele der Schüler gehören keiner der beiden großen christlichen Konfessionen an? (WJB)

Lösung:

Die Zahl der Schüler sei s . Dann gilt: $90 < s \leq 105$ und es gibt $\frac{s}{3}$ Katholiken und $\frac{s}{4}$ Protestanten. Also ist die gesuchte Zahl $n = s - \frac{s}{3} - \frac{s}{4} = \frac{5}{12}s$. Da 5 und 12 keinen gemeinsamen Teiler besitzen, muss also s durch 12 teilbar sein. Unter den für s möglichen Zahlen zwischen 91 und 105 ist jedoch nur 96 durch 12 teilbar. Also ist $n = \frac{5}{12} \cdot 96 = 40$.

VI. Würfelbeschriftung

Auf jede der sechs Seitenflächen eines Würfels wurde eine positive ganze Zahl geschrieben. Für jede Ecke des Würfels berechnen wir das Produkt der Zahlen auf den drei angrenzenden Flächen. Die Summe dieser Produkte beträgt 2013. Welchen Wert hat die Summe der Zahlen auf den sechs Würfelflächen?

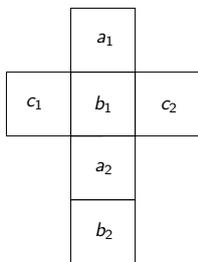
(gefunden von Kevin Mours, Karolinen-Gymnasium Frankenthal)

Hinweis: Die einzelnen Zahlen auf den Würfelflächen müssen nicht bestimmt werden.

Lösung:

Addieren wir mit den Bezeichnungen aus der Skizze alle Produkte der an die Ecken grenzenden Flächen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & a_1c_1b_2 + a_1b_1c_1 + b_1c_1a_2 + b_2c_1a_2 + b_1a_2c_2 + b_2a_2c_2 + a_1b_2c_2 + a_1b_1c_2 \\ &= (a_1c_1(b_1 + b_2)) + (a_2c_1(b_1 + b_2)) + (a_2c_2(b_1 + b_2)) + (a_1c_2(b_1 + b_2)) \\ &= (a_1c_1 + a_2c_1 + a_2c_2 + a_1c_2)(b_1 + b_2) \\ &= ((a_1 + a_2)c_1 + (a_1 + a_2)c_2)(b_1 + b_2) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) \end{aligned}$$



Also muss $2013 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)$ gelten. Ohne Einschränkung sei dabei $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2$. Nun ist $2013 = 61 \cdot 11 \cdot 3$ die Primfaktorzerlegung von 2013. Da die ganzen Zahlen auf den Seitenflächen jeweils positiv, also ≥ 1 , sind, muss also $a_1 + a_2 = 61$, $b_1 + b_2 = 11$ und $c_1 + c_2 = 3$ gelten. Die Summe aller Zahlen auf den Seitenfläche ist also $61 + 11 + 3 = 75$.

VII. Minimum gesucht

Bestimme den kleinsten Wert von $S = x^2 + y^2 - 4x + 6y$. (H.F.)

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 6y &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 \\ &= (x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 13. \end{aligned}$$

S nimmt seinen kleinsten Wert an, falls $(x - 2)^2$ und $(y + 3)^2$ beide minimal sind, und das ist der Fall für $(x - 2)^2 = 0$ und $(y + 3)^2 = 0$, also für $x = 2$ und $y = -3$. Der Minimalwert von S ist daher -13 .

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Schokolade brechen

Konrad hat sich eine 5×6 -Schokolade gekauft. Täglich möchte er ein 1×1 -Stück essen. Deshalb bricht er seine Schokolade in 1×1 -Stücke, ohne abgebrochene übereinander zu legen und dann zu brechen. Als er fertig ist hat er 30 Stückchen und freut sich. „Ich habe 29-mal gebrochen und jetzt die 5×6 -Tafel in 30 kleine 1×1 -Stücke verwandelt“, meint Konrad stolz. Aber er gleich darauf fragt er sich, ob man es auch in weniger als 29 Brechungen machen kann. „Nein“, glaubt er, „ich hatte doch die beste Brechtaktik.“

Hat Konrad Recht oder geht es doch mit weniger Brechungen?

(Lukas Nießen, Klasse 6, Gymnasium Nonnenwerth, Remagen)

II. Dreistellige Zahlen

- Wie viele verschiedene Zahlen lassen sich aus der dreistelligen Zahl 314 durch Umstellungen ihrer Ziffern bilden?
- Zeige, dass die Summe aller dieser Zahlen durch 37 teilbar ist.
- Entscheide und begründe, ob die Summe aller Umstellungen einer allgemeinen dreistelligen Zahl abc , wobei a , b und c alle verschieden sind, immer durch 37 teilbar ist. (WJB)

III. Zahlenknobelei

Verbinde die zwölf Zahlen durch einen sich nicht selbst überquerenden Linienzug, in dem jede Zahl genau einmal vorkommt! Schreibe dann die zwölf Zahlen in der Reihenfolge, in der sie der Linienzug durchläuft, nebeneinander, sodass eine 15-stellige Zahl entsteht. Der Linienzug ist so zu wählen, dass die 15-stellige Zahl durch 2, 3, 5 und 11 teilbar ist. (H.F.)

1	2	3
	4	7
5	6	8
	9	
10	11	24

IV. Drei Zahlen gesucht

- Multipliziert man die Summe von drei natürlichen Zahlen jeweils mit einer der Zahlen, so erhält man 210, 330 und 360. Bestimme die drei Zahlen.

- b) Multipliziert man die Summe von drei natürlichen Zahlen jeweils mit der Summe zweier dieser Zahlen, so erhält man 240, 260 und 300. Bestimme die drei Zahlen. (WJB)

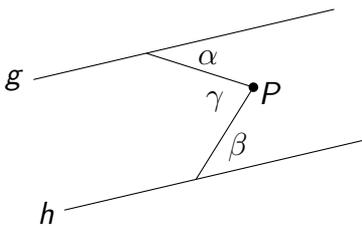
V. Wo liegt der Fehler?

Es seien x , y und z Zahlen mit $x = y$ und $z \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \ x^2 = xy, & (2) \ x^2 = y^2, & (3) \ xz = yz. \\
 \text{Aus (1) folgt} & x^2 - xy = xy - x^2, & \\
 \text{danach mit (2)} & x^2 - xy = xy - y^2 & \\
 \text{und mit (3)} & x^2 - xy = xy - y^2 + (xz - yz) & \\
 \text{und schließlich} & (4) \ x(x - y) = (y + z)(x - y). & \\
 \text{Somit ist} & (5) \ x = y + z. &
 \end{array}$$

Wegen $z \neq 0$ steht die Gleichung (5) im Widerspruch zur Voraussetzung $x = y$. Wie ist dieser Trugschluss entstanden? (H.F.)

VI. Winkelbestimmung



Es seien g und h parallele Geraden und p sei ein Punkt zwischen g und h . Die Winkel α und β (siehe nebenstehende Figur) seien bekannt.

- Es seien $\alpha = 33^\circ$ und $\beta = 45^\circ$. Wie groß ist der Winkel γ ?
- Die Winkel α und β seien nun allgemein. Wie groß ist der Winkel γ in Abhängigkeit von α und β ? (H.F.)

VII. Suchalgorithmus

Die 24. Auflage des Duden enthält rund 130 000 Stichwörter. Klassenprimus Anton behauptet, er könne ein von Dir beliebig ausgewähltes Wort finden, wenn Du ihm erlaubst, zwanzig Fragen zu stellen die Du mit „ja“ oder „nein“ beantwortest.

Hat Anton Recht? (WJB)



Fröhliche Weihnachten und
ein glückliches und gesundes Neues Jahr 2014
wünscht die MONOID-Redaktion
allen L(o)eserinnen und L(o)esern!



Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1085: Pause beim Kartenspiel

Das Kartenspiel „Wizards“ läuft so ab: In der ersten Runde erhält jeder Spieler eine Karte in die Hand, eine sogenannte Handkarte, in der zweiten Runde zwei, in der dritten Runde drei usw. bis zur letzten Runde 15, in der jeder Spieler 15 Karten erhält. In jeder Runde spielen die Teilnehmer reihum jeweils eine Karte aus (ein sogenannter „Stich“), bis alle Handkarten aufgebraucht sind. Die erste Runde besteht also aus einem Stich, die letzte Runde aus 15 Stichen. Wenn die Kartenspieler bei der Hälfte der Stiche Pause machen wollen, nach welcher Runde müssen sie diese dann einlegen?

(Bettina Diller, Städtische Berufsschule für Informationstechnik München)

Aufgabe 1086: Verkalktes Rohr

In einem Rohrstück mit kreisförmigem Querschnitt von 65cm Innendurchmesser und 1m Länge hat sich an der Wandfläche eine 5mm dicke Kalkschicht abgesetzt. Wieviel Prozent des Rohrvolumens geht dadurch verloren? (WJB)

Aufgabe 1087: 100 gewinnt

Ein Spiel beginnt bei 0. Danach wählen zwei Spieler jeweils eine der Zahlen 1, 2, ..., 9. Diese wird zur bisher erreichten Summe addiert. Gewonnen hat, wer als erster die Summe 100 (oder mehr) erreicht.

Kann einer der beiden Spieler bei geschickter Wahl seiner Zahlen sicher sein zu gewinnen? (WJB)

Aufgabe 1088: Gleichungssystem

Bestimme die Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x - y &= 65 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 13\end{aligned}$$

(H.F.)

Aufgabe 1089: Größter gemeinsamer Teiler

Jasmin untersucht die Folge der Zahlen $p^4 - 1$, wobei p eine Primzahl ≥ 5 ist.

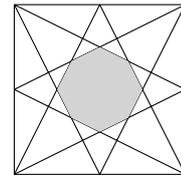
a) Gib die ersten vier Folgenglieder an.

b) Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT) aller Zahlen dieser Folge. (H.F.)

Aufgabe 1090: Regelmäßiges Achteck im Quadrat

Verbindet man die Seitenmitten eines Quadrates jeweils mit den gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein regelmäßiges Achteck, siehe Skizze.

Bestimme den Flächenanteil des Achtecks. (AK)



Aufgabe 1091: Ein Näherungsverfahren für \sqrt{n}

Seit etwa 500 v. Chr. wusste man, dass zumindest für kleine natürliche Zahlen n die Wurzeln \sqrt{n} immer dann keine Bruchzahlen sind, wenn n keine Quadratzahl ist. Man musste sich daher mit rationalen Näherungswerten von \sqrt{n} begnügen.

Theon von Smyrna (um 100 n. Chr.), von dem die Schrift „Expositio rerum mathematicum ...“ (etwa: „Erklärung mathematischer Sachen“) überliefert ist, beschreibt ein Verfahren zur Approximation von $\sqrt{2}$, das in einer auf \sqrt{n} , $n \geq 2$, verallgemeinerten Form lautet:

Es sei $\frac{a}{b}$ ein Näherungswert von \sqrt{n} , wobei a , b , n natürliche Zahlen, n keine Quadratzahl, sind. Dann ist $\frac{a+nb}{a+b}$ ein besserer Näherungswert für \sqrt{n} .

- Berechne mit diesem Verfahren einen auf vier Stellen nach dem Komma genauen Näherungswert für $\sqrt{2}$, ausgehend von $\frac{7}{5}$.
- Begründe Theons Näherungsverfahren für $n \geq 2$. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 115

Klassen 9–13

Aufgabe 1078: Lösungsmenge einer Gleichung

Hat die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 2013$ keine, endlich viele oder unendlich viele ganzzahlige Lösungen? (H.F.)

Lösung:

Um die Lösungsmenge der angegebenen Gleichung zu bestimmen, kann man die Gleichung in x^2 und $y^2 - z^2$ aufteilen. Es ist bekannt, dass man jede ungerade Zahl mit der Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen darstellen kann. Man kann nun eine beliebige gerade Quadratzahl für x^2 einsetzen. Dann ist $2013 - x^2$ ungerade, lässt sich also als Differenz $y^2 - z^2$ darstellen und es existiert eine Lösung. Beispielsweise sei $x^2 = 4$; berechne dann die Differenz $2013 - x^2 = 2009$. Dann ist $y^2 = 1005^2$ und $z^2 = 1004^2$, also $(x, y, z) = (2, 1005, 1004)$ eine Lösung. Man kann auch jede negative ungerade Zahl als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen, wenn $z^2 > y^2$ ist. Daher kann man für x^2 auch jede gerade Quadratzahl einsetzen, die größer als 2013 ist. Da es unendlich viele gerade Quadratzahlen gibt, hat die Gleichung also unendlich viele Lösungen.

(Janina Vogl, 12. Klasse, Rhein-Wied-Gymnasium, Neuwied)

Aufgabe 1079: Durchschnittsgeschwindigkeit

Aldo und Baldo fahren mit gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Autobahn. Aldo braucht eine Stunde länger für 400km als Baldo für 320km. Wie lange und mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit waren die beiden unterwegs? (H.F.)

Lösung:

Es seien x die Fahrtzeit von Baldo (in Stunden) und $x + 1$ die Fahrtzeit von Aldo (in Stunden). Aus der Formel $\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ erhält man: $\frac{320}{x} = \frac{400}{x+1} \Leftrightarrow x = 4$. Aldo ist also 5 Stunden und Baldo 4 Stunden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ unterwegs.

Alternative Lösung:

Aldo benötigt eine Stunde für die im Vergleich zu Baldo gefahrene Strecke von $400\text{km} - 320\text{km} = 80\text{km}$. Also fährt er (und damit auch Baldo) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 1080: Würfel-Ergebnisse

Wenn man mit einem Würfel sechsmal würfelt, welches Ergebnis ist dann wahrscheinlicher: Man würfelt sechsmal die Eins oder aber man würfelt sechs verschiedene Zahlen? (H.F.)

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, eine Eins zu würfeln, ist bei jedem der sechs Würfe gleich, nämlich $\frac{1}{6}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, sechsmal die Eins zu würfeln gleich $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \dots \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^6$.

Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{5}{6}$, dass beim zweiten Wurf eine andere Zahl als beim ersten Wurf gewürfelt wird. Beim dritten Wurf wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{6}$ eine Zahl geworfen, die bei den beiden vorangegangenen Würfeln nicht vorkam. Und beim vierten Wurf ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{6}$, keine der bisher aufgetretenen Zahlen zu würfeln; usw. Die Wahrscheinlichkeit, sechs verschiedene Zahlen zu würfeln, beträgt dann $\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{720}{6^6}$.

Danach ist es wahrscheinlicher sechs verschiedene Zahlen zu würfeln als sechsmal die Eins.

Aufgabe 1081: Primzahl-Suche

Bilde aus den neun Ziffern 1, 2, 3, ..., 9 höchstens zweistellige Primzahlen, sodass jede Ziffer genau einmal verwendet wird und

- die Anzahl der Primzahlen minimal ist,
- die Summe der Primzahlen minimal ist. (H.F.)

Lösung:

Die Ziffern 4, 6, und 8 müssen als Zehnerziffern verwendet werden. Es gibt bei a) und bei b) jeweils mehr als eine Lösung; wir geben eine davon an:

a) 2, 43, 59, 61, 87;

b) $2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89 = 207$.

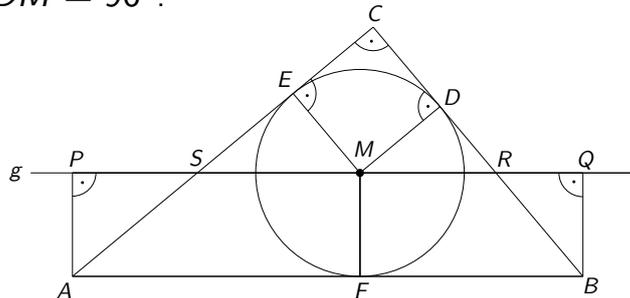
Aufgabe 1082: Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks

In einem rechtwinkligen Dreieck sei G der Flächeninhalt, r der Inkreisradius und c die Länge der Hypotenuse. Man beweise $G = r(r + c)$.

(Robin Fritsch, Gymnasium Lehrte)

Lösung:

Wir betrachten ein bei C rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$. Die Längen der Dreiecksseiten seien a , b und c . Die Berührungspunkte des Inkreises, dessen Mittelpunkt wir M nennen, mit \overline{BC} , \overline{AC} und \overline{AB} seien mit D , E und F bezeichnet. Damit gilt also $\sphericalangle MEC = \sphericalangle CDM = 90^\circ$.



Sei nun g die Parallele zu \overline{AB} durch M . Die Lotfußpunkte von A und B auf g seien mit P und Q , die Schnittpunkte von g mit \overline{BC} und \overline{AC} mit R und S bezeichnet. Wegen $|\overline{MD}| = |\overline{BQ}| = r$ und der Winkelgleichheit sind die Dreiecke $\triangle MRD$ und $\triangle BQR$ sowie analog auch $\triangle MES$ und $\triangle ASP$ kongruent. Somit ergibt sich G als Summe der Flächen des Quadrats $MDCE$ und des Rechtecks $ABQP$ und es gilt $G = r^2 + rc$.

Alternative Lösung:

Da $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C ist, ist $MDCE$ ein Quadrat. Somit gilt $|\overline{CD}| = |\overline{CE}| = r$ und weiter $|\overline{AE}| = b - r$ und $|\overline{BD}| = a - r$.

Wegen $\sphericalangle AEM = \sphericalangle MFA = 90^\circ$, $|\overline{ME}| = |\overline{MF}| = r$ und weil die Dreiecke $\triangle AME$ und $\triangle AFM$ die Seite AM gemeinsam haben, sind diese Dreiecke kongruent. Also gilt $|\overline{AE}| = |\overline{AF}|$ und analog $|\overline{BD}| = |\overline{BF}|$. Schließlich folgt also:

$$(*) \quad c = |\overline{AF}| + |\overline{BF}| = |\overline{AE}| + |\overline{BD}| = (b - r) + (a - r) = a + b - 2r \\ \iff a + b = 2r + c.$$

Nun setzt sich der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ aber aus den Flächeninhalten der Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ und $\triangle AMC$ zusammen. Das heißt mit $(*)$ folgt:

$$G = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot \frac{(2r+c)+c}{2} = r(r + c).$$

Aufgabe 1083: Die Quadratur von n-Ecken

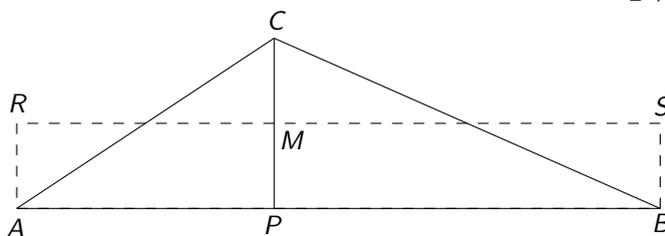
Wie wir wissen, ist es unmöglich einen Kreis durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Auch die Umkehrung gilt.

Wie sieht es aber bei den Vielecken aus?

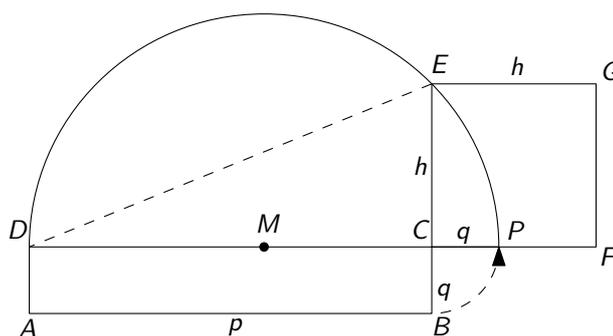
- Zeige, dass sich durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal jedes Dreieck in ein flächengleiches Viereck (sogar Rechteck) umwandeln lässt.
- Zeige, dass sich durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal jedes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat umwandeln lässt.
- Zeige, dass sich durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal jedes n -Eck, $n \geq 4$, in ein flächengleiches Quadrat umwandeln lässt. (AK)

Lösung:

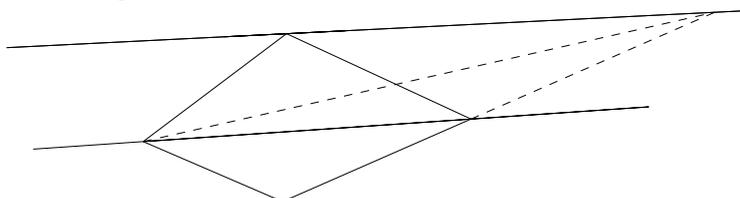
- Es sei das Dreieck $\triangle ABC$ gegeben. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Seite \overline{AB} die längste des Dreiecks ist und somit der Lotfußpunkt P von C auf die Gerade durch A und B auf der Strecke \overline{AB} liegt. M sei der Mittelpunkt der Strecke CP . Sind nun, wie in der Skizze, R und S die Lotfußpunkte von A und B auf die Parallele zu AB durch M , so haben sowohl das Dreieck $\triangle ABC$ als auch das Rechteck $ABSR$ die Fläche $\frac{1}{2} |\overline{CP}| \cdot |\overline{AB}|$.



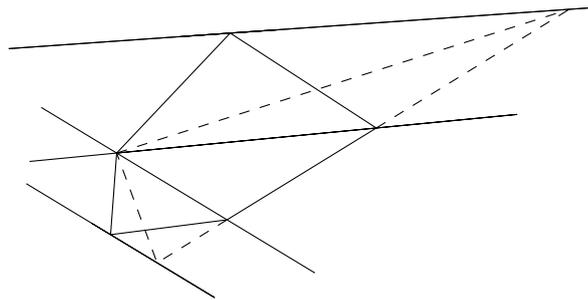
- Es sei das Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|\overline{AB}| = p$ und $|\overline{BC}| = q$ gegeben. Verlängern wir, wie in der Skizze, die Seite \overline{CD} um q bis zum Punkt P und bezeichnen wir mit M den Mittelpunkt der Strecke DP , so ist das Dreieck $\triangle DPE$ nach dem Satz des Thales rechtwinklig. Nach dem Höhensatz gilt nun $h^2 = p \cdot q$, sodass das Quadrat $CFGE$ ebenso wie das Rechteck $ABCD$ die Fläche $h^2 = p \cdot q$ besitzt.



- Wir betrachten zunächst den Fall $n = 4$: Durch Scherung lässt sich jedes Viereck in ein flächengleiches Dreieck umwandeln.



Fünfecke lassen sich analog durch zweifache Scherung in ein flächengleiches Dreieck überführen:



Für $n > 5$ führen $n - 3$ Scherungen zu einem flächengleichem Dreieck. Mit (a) und (b) lässt sich dann das jeweils entstehende Dreieck in ein flächengleiches Quadrat umwandeln.

Aufgabe 1084: Bemerkenswerte Eigenschaft einer Folge

Gegeben sei die Folge $a_1 = \sqrt{1}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{1}}$, $a_3 = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}$, ...
 Zeige: In jedem Intervall $(\sqrt{n}, \sqrt{2n})$, $n = 2, 3, 4, \dots$, liegt stets ein Element der Folge. (H.F.)

Lösung:

Das Bildungsgesetz der Folge lautet $a_1 = \sqrt{1}$, $a_n = \sqrt{n + a_{n-1}}$. Die Behauptung besagt: Zu jedem $n \geq 2$ gibt es ein Folgenglied a_i mit $\sqrt{n} < a_i < \sqrt{2n}$. Nun gilt für $n = 2$ und $n = 3$: $\sqrt{2} < a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{1}} < \sqrt{2 \cdot 2}$ und $\sqrt{3} < a_3 = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}} < \sqrt{3 + \sqrt{2 \cdot 2}} < \sqrt{2 \cdot 3}$. Deshalb wird man vermuten, dass gilt:

$$(1) \quad \sqrt{n} < a_n < \sqrt{2n} \text{ für } n = 2, 3, 4, \dots$$

Die Ungleichung $\sqrt{n} < a_n$ gilt für alle $n \geq 2$ wegen $a_n = \sqrt{n + a_{n-1}}$ und $a_{n-1} \geq 1$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$(2) \quad a_n < \sqrt{2n} \text{ für } n = 2, 3, 4, \dots$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ gilt (2). Für ein $n \geq 3$ sei (2) bewiesen. Dann ist $a_{n+1} = \sqrt{n + a_n} < \sqrt{n + \sqrt{2n}} < \sqrt{n + n}$, weil $\sqrt{2n} < n$ für $n \geq 3$ ist wegen $2 < n \Leftrightarrow 2n < n^2 \Leftrightarrow \sqrt{2n} < n$.

Mathematische Entdeckungen

Neue Aufgabe

Die letzte Ziffer einer Quadratzahl n^2 ist bestimmt durch die letzte Ziffer von n . So erhält man folgende Tabelle:

Letzte Ziffer von n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Letzte Ziffer von n^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Bei n^2 kommen nicht alle Ziffern vor und die Liste ist symmetrisch – warum?
 Wir ersetzen die Basis 10 des Dezimalsystems durch eine andere Basis B . Ist das dann im B -System auch so? Wir betrachten die entsprechenden Listen (jeweils für $n = 1, 2, \dots, B - 1$):

B	
3	1 1
4	1 0 1
5	1 4 4 1
⋮	⋮
11	1 4 9 5 3 3 5 9 4 1
12	1 4 9 4 1 0 1 4 9 4 1
13	1 4 9 3 (12) (10) (10) (12) 3 9 4 1
⋮	⋮

Dabei schreiben wir im Fall $B > 10$ die Ziffern mit Werten 10, 11, ... in der Form (10), (11),

Welche Regelmäßigkeiten vermutest Du? Welche davon kannst Du beweisen? Wo tritt in der Liste die Ziffer 0 auf?

Wie verhält es sich, wenn wir die letzten zwei (oder noch mehr) Ziffern betrachten? Kannst Du auch für n^3, n^4, \dots etwas aussagen?

Zum Beispiel erhält man für n^3 die Tabelle (im Dezimalsystem):

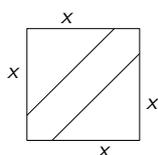
Letzte Ziffer von n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Letzte Ziffer von n^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Hier gibt es eine andere Symmetrie als bei n^2 , nämlich erhält man jeweils bei der Addition der ersten und letzten Zahl, der zweiten und vorletzten Zahl usw. die gleiche Zahl. Siehst Du warum? (WJB)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. März 2014 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 115

In Heft 114 stellten wir Euch folgende Aufgabe:



$$\frac{1}{2}x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{6}$$

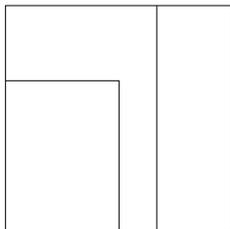
Untersuche, wie man ein Quadrat der Seitenlänge 3 durch n Strecken, $n = 2, 3, 4, \dots$ in drei flächengleiche Figuren zerlegen kann und ob dies auf mehrere Arten möglich ist.

Gib zu jeder Zerlegung eine Zeichnung mit Längenangaben (diese jeweils mit Begründung) an – so wie im nebenstehenden Beispiel. (H.F.)

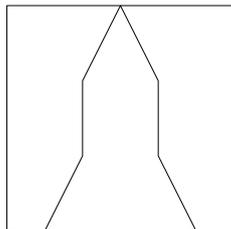
Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Kevin Mours, 10. Klasse des Karolinen-Gymnasiums Frankenthal, und Bettina Diller, 12. Klasse der städtische Berufsschule für Informationstechnik, München.

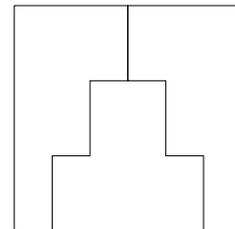
Bettina betrachtet die Fälle $n = 2, 3, 4, 6, 7, 9$, Kevin $n = 2, 3, 4, 5, 8$. Dabei benutzt Bettina vielfach Strecken, die so zu den Linien des Kästchenpapiers verlaufen, dass man durch Zählen direkt den Flächeninhalt verifizieren kann.



$n = 3$

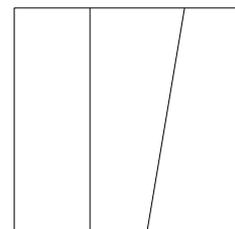
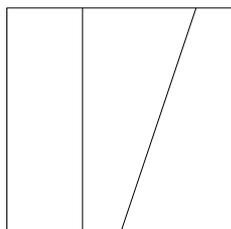
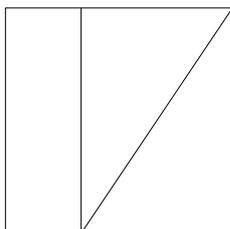


$n = 6$



$n = 8$

Kevin gibt zu seinen Zerlegungen farbenprächtige Bilder und untersucht die Frage, was mit der Zusatzbedingung, dass zwei der drei Flächenstücke kongruent sein sollen, noch an Möglichkeiten verbleibt. Auch gibt er für $n = 2$ eine Folge von Zerlegungen an, die auf unendlich viele Möglichkeiten führt; drei dieser Möglichkeiten sind:



Die Aufgabe für den Computer-Fan

Ein offenes Problem

Gibt es eine natürliche n -ziffrige Zahl $z_1 z_2 \dots z_n$, $n \geq 2$, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $z_1 z_2 \dots z_n$ hat drei zweiziffrige Teiler $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$;
2. die gespiegelte Zahl $z_n \dots z_2 z_1$ hat die drei zweiziffrigen Teiler $y_1 x_1$, $y_2 x_2$, $y_3 x_3$
(H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. März 2014 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 114

Zahlendarstellungen

Überprüfe für alle natürlichen Zahlen n mit $6 \leq n \leq 10^4$ die folgende Vermutung auf ihre Richtigkeit:

Jedes n ist die Summe aus einer Primzahl und einer Potenz, das heißt n besitzt mindestens eine Darstellung der Form $n = p + b^k$ mit einer Primzahl p und natürlichen Zahlen $b \geq 1$ und $k \geq 2$.

Beispiele: $6 = 2 + 2^2 = 5 + 1^2$, $7 = 3 + 2^2$, $8 = 7 + 1^2$, $9 = 5 + 2^2$, $10 = 2 + 2^3$,
 $11 = 2 + 3^2 = 3 + 2^3 = 7 + 2^2$, $12 = 3 + 3^2 = 11 + 1^2$, ... (H.F.)

Ergebnisse

Bettina Diller von der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik in München mit einem eigenen Java-Programm und Robin Fritsch, Gymnasium Lehrte, mit einem eigenen Programm in Python stellen übereinstimmend fest, dass sich tatsächlich alle natürlichen Zahlen $6 \leq n \leq 10000$ in der beschriebenen Form, nämlich als $n = p + b^k$ mit einer Primzahl p , einer Basiszahl $b \geq 1$ und einem Exponenten $k \geq 2$ darstellen lassen – mit einer einzigen (!) Ausnahme: Für die Zahl 1540 gibt es keine solche Darstellung!

Ergänzend hat Robin Fritsch mit seinem Programm für jede Zahl (außer 1540) alle möglichen Darstellungen explizit ermittelt und darüber hinaus alle Zahlen bis 100000 untersucht und keine weiteren nicht darstellbaren Zahlen gefunden. (E.K.)

Wie lange scheint heute die Sonne?

von Friedrich Kayser

„Das hängt ganz vom Wetter ab!“, wäre eine schnelle und unbestreitbar zutreffende Antwort auf diese Frage. Aber unabhängig vom Wetter steht fest: Die Sonne geht jeden Tag zu einer bestimmten Uhrzeit auf und abends wieder unter - dazwischen ist sie „im Prinzip“ zu sehen, auch wenn uns die Sicht von Wolken verstellt sein mag. Aus Erfahrung wissen wir, dass die Dauer des täglichen Sonnenscheins sowohl von der Jahreszeit als auch vom Standort des Beobachters abhängig ist.

In diesem Artikel soll nun gezeigt werden, wie man bereits mit relativ einfachen geometrischen Überlegungen die Länge dieser Zeit in Abhängigkeit von Jahreszeit und geografischer Position abschätzen kann. Für eine detailliertere Betrachtung wären darüber hinaus zwar noch eine ganze Reihe weiterer Effekte zu bedenken, aber es lohnt sich dennoch, zunächst einmal ein einfaches Modell zu entwickeln.

Bereits damit lassen sich nämlich die grundlegenden Zusammenhänge recht gut verstehen; zusätzliche Effekte lassen sich dann darauf aufbauend berücksichtigen, indem man das Modell nach und nach verfeinert.

Um im folgenden kurz und treffend formulieren zu können, verabreden wir: Die Zeit zwischen Auf- und Untergang der Sonne bezeichnen wir als „Hellzeit“, die Zeit von Untergang bis Aufgang entsprechend als „Dunkelzeit“. In der Alltagssprache würde man einfach von „Tag“ und „Nacht“ sprechen. Andererseits wird aber auch der Zeitraum von Mitternacht bis Mitternacht als „ein Tag“ bezeichnet. Daher hat das Wort „Tag“ eine Doppeldeutigkeit, die wir hier der Klarheit willen vermeiden wollen.

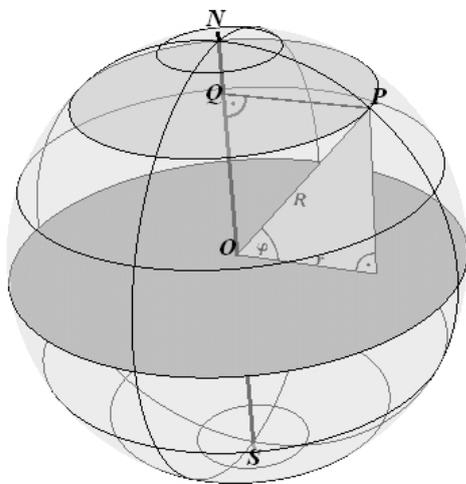


Abbildung 1: Zur Definition der geografischen Breite

Ursache für den täglichen Wechsel von Hell- und Dunkelzeit ist natürlich die Drehung der Erde um ihre eigene Achse. Obwohl uns diese Aussage wohlvertraut erscheint, ist es doch bemerkenswert, dass es überhaupt so etwas wie eine feste Achse für diese Drehbewegung gibt. Diese Stabilität einer Drehachse können wir allerdings an jedem Kreisel beobachten - und die Erde ist eben auch ein Kreisel. Stabil ist eine solche Drehachse jedoch nur, solange keine äußeren Kräfte (oder korrekter: Drehmomente) auf den Kreisel wirken. Infolge der auf die Erde (durch Sonne, Mond und Planeten) wirkenden Kräfte ist die Erdachse tat-

sächlich nicht wirklich stabil, sondern ändert ihre Lage im Raum - man spricht von der sogenannten Präzession der Erdachse. Die macht sich jedoch nur über längere Zeiträume (einige hundert Jahre) hinweg bemerkbar. Für unsere Zwecke können wir daher vereinfachend annehmen, dass die Erdkugel sich um eine raumfeste Achse dreht.

Apropos *Erdkugel*: Die Erde ist zwar nicht exakt kugelförmig, aber für unsere Zwecke reicht es völlig aus, die Erde als Kugel zu beschreiben und alle Abweichungen von dieser Idealform zu ignorieren. Durch die Erdachse, um die sich die ganze Kugel beständig dreht, ist eine Raumrichtung festgelegt, auf die man sich beziehen kann, um die Lage von Punkten auf der Erdoberfläche zu bezeichnen. Wir beginnen mit den Schnittpunkten der Erdachse mit der Erdoberfläche, die als Nordpol (*N*) und Südpol (*S*) bekannt sind. Zu jedem anderen Punkt *P* der Erdoberfläche kann man sich eine senkrecht zur Erdachse liegende Ebene denken, deren Schnittkreis mit der Erdoberfläche als *Breitenkreis* von *P* bezeichnet wird. Alle auf dem gleichen Breitenkreis liegenden Punkte haben gewissermaßen „die

gleiche Lage", weil es infolge der Erdrotation nur eine Frage der Zeit ist, bis einer dieser Punkte dort angekommen ist, wo ein anderer schon vorher war (jedenfalls solange man von der Bahnbewegung der Erde um die Sonne absieht).

Ein besonderer Breitenkreis ist der *Äquator*, dessen Ebene durch den Erdmittelpunkt O verläuft; sein Radius ist natürlich gleich dem Radius R der Erdkugel und damit größer als der eines jeden anderen Breitenkreises. Den Winkel, den die Gerade durch O und P mit der Äquatorebene bildet, bezeichnet man als geografische Breite φ von P . Der Radius r des Breitenkreises von P ist damit – wie man aus Abbildung 1 abliest:

$$r = R \cdot \cos \varphi$$

Das auf die Erde einfallende Sonnenlicht können wir als paralleles Strahlenbündel beschreiben. Das stimmt zwar auch nicht ganz exakt, aber doch in sehr guter Näherung, weil der Durchmesser der Sonne (und damit erst recht der der Erde) verschwindend klein ist im Vergleich zum Abstand Erde-Sonne. Die Richtung dieses Lichtbündels ist gegeben durch den Verbindungsstrahl vom Erdmittelpunkt zu dem der Sonne. Man kann diese Richtung angeben, indem man die geografische Position bezeichnet, auf die der Schnittpunkt des Verbindungsstrahls mit der Erdoberfläche (der sogenannte *Bildpunkt* B der Sonne) fällt; die geografische Breite des Bildpunkts wird als *Deklination* δ der Sonne bezeichnet.

Der Verbindungsstrahl zwischen Erd- und Sonnenmittelpunkt liegt naturgemäß in der Ebene, in der sich die Erde bei ihrem jährlichen Umlauf um die Sonne bewegt, der sogenannten *Eklip-tik*. Der Schnitt dieser Ebene mit der Erdoberfläche definiert einen Kreis, den der Bildpunkt der Sonne im Laufe eines Jahres durchwandert; wir wollen diesen Kreis hier als „Jahreskreis“ bezeichnen. Da Ekliptik und Äquatorebene miteinander einen gewissen Winkel ε ($\approx 23,5^\circ$) bilden, hängt die Deklination der Sonne von der Lage des Bildpunkts auf dem Jahreskreis – also von der Jahreszeit – ab.

Der Jahreskreis schneidet den Äquator in zwei (diametral zueinander liegenden) Punkten. Fällt der Bildpunkt auf einen dieser Punkte, so ist natürlich $\delta = 0$. Das entspricht der Situation zu Frühjahrs- bzw. Herbstbeginn. Der maximal mögliche Wert der Deklination ist offenbar ε ;

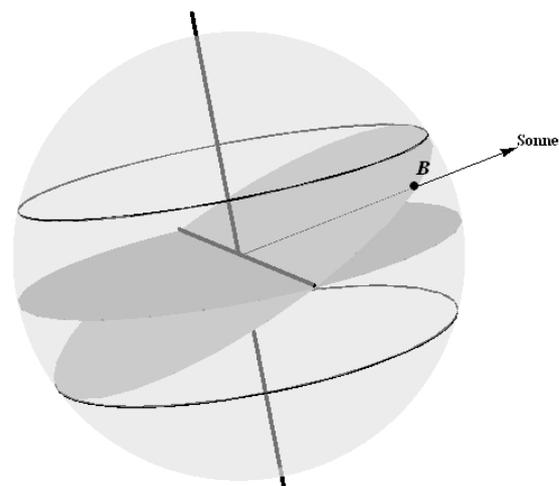


Abbildung 2: Die Ekliptik bildet mit der Äquatorebene einen Winkel von $23,5^\circ$. Infolge der Bahnbewegung der Erde um die Sonne durchläuft ihr Bildpunkt B den Jahreskreis; je nach Jahreszeit variiert die geografische Breite von B dabei zwischen $-23,5^\circ$ und $+23,5^\circ$.

der Bildpunkt liegt dann auf dem nördlichen Wendekreis und das markiert den Sommeranfang (auf der nördlichen Halbkugel). Entsprechend wird zu Winterbeginn der Minimalwert der Deklination ($-\varepsilon$) erreicht; der Bildpunkt liegt dann auf dem südlichen Wendekreis (vergleiche Abbildung 2).

Im Laufe des Frühlings wächst die Deklination somit von 0 bis ε an, geht dann während des Sommers auf 0 zurück und fällt im Herbst weiter bis $-\varepsilon$ ab; im Winter schließt sich dann der Kreis mit dem Anstieg auf 0. Um die Zeitabhängigkeit von δ näher zu untersuchen, müsste man nun berücksichtigen, dass die Umlaufgeschwindigkeit der Erde um die Sonne (und damit auch die des Bildpunkts auf dem Jahreskreis) nicht konstant ist. Wir wollen uns darauf hier nicht einlassen (das wäre Stoff für einen weiteren Artikel), sondern einfach davon ausgehen, dass zu jedem Datum ein bestimmter Wert der Deklination gehört, den man in entsprechenden Tabellen oder auch im Internet (z.B. <http://ephemeriden.com/sun.py>) nachschlagen kann. Pro Tag ändert sich die Deklination übrigens nur wenig (nämlich im Mittel um rund $\frac{2\varepsilon}{365} = 0,13^\circ$), sodass eine Tabelle mit einem Wert pro Datum völlig ausreicht.

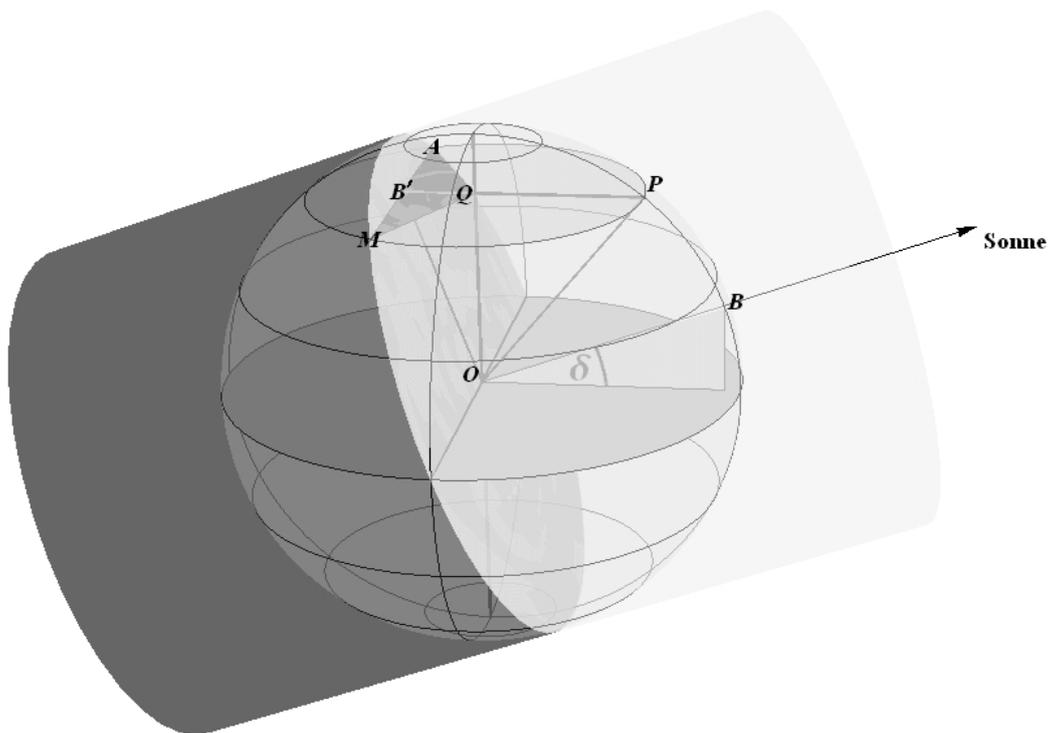


Abbildung 3: Die Grenze zwischen beleuchtetem und beschattetem Teil der Erde wird durch eine Ebene markiert, die senkrecht auf dem zur Sonne weisenden Strahl steht.

Abbildung 3 zeigt nun die von der Sonne beleuchtete Erde. Die Grenze zwischen der beleuchteten und der beschatteten Halbkugel wird markiert durch die senkrecht auf dem Strahl \vec{OB} stehende Ebene durch den Erdmittelpunkt O . Infolge der täglichen Rotation der Erde beschreibt ein fest auf der Erde (zum Beispiel im Punkt P) positionierter Beobachter eine (seinem Breitenkreis entsprechende) Kreisbahn.

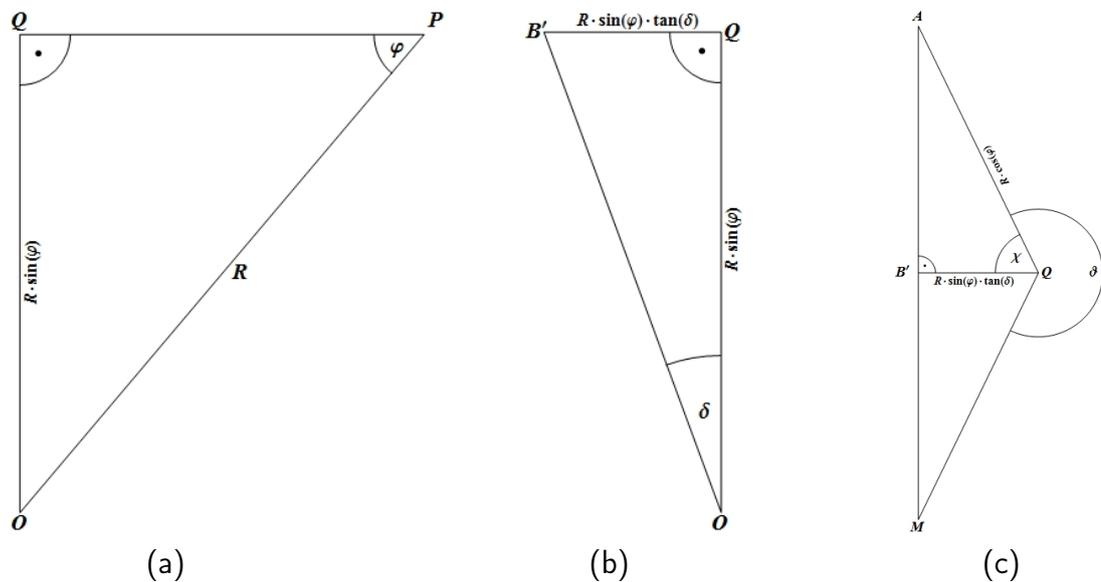


Abbildung 4: Die Bestimmungsdreiecke (Erläuterungen im Text)

Beim Übertritt vom beschatteten in den beleuchteten Teil (im Punkt M) erlebt er den Aufgang der Sonne, im Punkt A ihren Untergang. In der in der Zeichnung dargestellten Situation (P liegt in der durch Erdachse und \overrightarrow{OB} definierten Ebene) hat die Sonne für P ihren Höchststand (für diesen Tag) erreicht - es ist Mittag (an diesem Ort).

Um nun unsere Frage zu beantworten, müssen wir uns also überlegen, wie lange es dauert, bis der Beobachter sich (infolge der Erddrehung) von M nach A bewegt hat. Da wir wissen, dass die Erde für eine volle Umdrehung (360°) gerade einen Tag (24 h) benötigt, brauchen wir dazu nur den Winkel $\vartheta = \angle MQA$ zu bestimmen. Die Dauer der Hellzeit ergibt sich daraus dann durch einfache Umrechnung:

$$h = \frac{\vartheta}{360^\circ} \cdot 24\text{h} = \frac{\vartheta}{15^\circ} \cdot 1\text{h}$$

Den Winkel ϑ kann man - wie wir uns jetzt überlegen werden - ermitteln, indem man der Reihe nach die Dreiecke OPQ , OQB' und schließlich MQA näher betrachtet. Im Dreieck OPQ kennen wir den Abstand $\overline{OP} = R$, den Winkel $\angle OPQ = \varphi$ und natürlich auch den rechten Winkel bei Q . Damit wissen wir auch (vgl. Abbildung 4a), dass $\overline{OQ} = R \cdot \sin \varphi$ sein muss.

Daher kennen wir jetzt eine Seitenlänge im - ebenfalls rechtwinkligen - Dreieck OQB' , von dem wir außerdem wissen, dass $\angle B'OQ = \delta$ ist (da ja $\overrightarrow{OB'}$ senkrecht auf \overrightarrow{OB} und die Erdachse senkrecht auf der Äquatorebene steht).

Infolgedessen ist uns jetzt klar (vgl. Abbildung 4b), dass $\overline{B'Q} = R \cdot \sin \varphi \cdot \tan \delta$ sein muss. Diese Strecke ist Höhe im Dreieck MQA . Da wir den Abstand $\overline{QA} = \overline{QM} = R \cdot \cos \varphi$ kennen (Radius des Breitenkreises!), können wir damit den Winkel $\chi = \angle B'QA$ (vgl. Abb. 4c) ermitteln: $\cos \chi = \frac{R \cdot \sin \varphi \cdot \tan \delta}{R \cdot \cos \varphi} = \tan \varphi \cdot \tan \delta$; der „Tageswinkel“ ϑ ergibt sich dann als Ergänzung von 2χ zu 360° : $\vartheta = 360^\circ - 2 \cdot \chi$.

Aus unserem Ergebnis

$$\cos \chi = \tan \varphi \cdot \tan \delta \quad (1)$$

ergeben sich folgende Konsequenzen (die sich mit Blick auf Abbildung 3 auch leicht nachvollziehen lassen):

- Da zu Frühlings- und Herbstbeginn der Bildpunkt der Sonne auf den Äquator fällt ($\delta = 0$), ergibt sich für diese Tage $\cos \chi = 0$ und damit $2\chi = \vartheta = 180^\circ$ – und zwar unabhängig von φ , also für beliebige Breiten. An diesen Tagen sind also Hellzeit und Dunkelzeit überall auf der Erde gleichlang (jeweils 12 h). Man spricht daher auch von der „Tag- und Nachtgleiche“ (oder – etwas gelehrter – vom Äquinoktium).
- Am Äquator (also für $\varphi = 0$) sind Hell- und Dunkelzeit immer gleichlang – unabhängig von der Jahreszeit (also von der Sonnendeklination δ).
- Da der Kosinus auf der linken Seite von (1) maximal den Betrag 1 haben kann, funktioniert die Formel nicht, falls $|\tan \varphi \cdot \tan \delta| > 1$, was der Fall ist, wenn $|\varphi| > 90^\circ - |\delta|$, denn: $\frac{1}{\tan \delta} = \cot \delta = \tan (90^\circ - \delta)$. Da δ zwischen $-23,5^\circ$ und $+23,5^\circ$ variiert, beschreibt diese Bedingung Zonen in der Nähe der Pole. Zu Winter- bzw. Sommerbeginn ($\delta = \pm 23,5^\circ$) werden die Grenzen dieser Zonen durch die Polarkreise markiert, zur Tag- und Nachtgleiche liegen nur noch die Pole selbst außerhalb des Gültigkeitsbereichs von (1). Das „Versagen“ von (1) in der Nähe der Pole zeigt uns, dass dort die Trennebene zwischen beleuchtetem und beschattetem Bereich der Erde (die Ebene *OAM* in Abbildung 3) nicht von den Breitenkreisen geschnitten wird. In diesen Breiten ist es also – je nach Jahreszeit – entweder ganztags hell („Polarsommer“) oder ganztags dunkel („Polarnacht“).
- Zu Sommer- bzw. Winteranfang ist die Abhängigkeit der Hellzeitlänge von der geographischen Breite am deutlichsten ausgeprägt. Abbildung 5 zeigt den Graphen für diese Funktion zu unserem Sommerbeginn. Wie man daraus abliest, muss man sich in dieser Jahreszeit in unseren Breiten (zum Beispiel von Mainz ($\varphi = 50^\circ$) aus) nur wenig nach Norden bewegen, um sich über einen deutlichen Zuwachs der Hellzeit freuen zu können. Allerdings muss man dafür dann in Kauf nehmen, dass die Sonne nicht ganz so hoch wie bei uns am Himmel steht.

Obwohl man schon mit den hier dargestellten Überlegungen einige interessante Einsichten gewinnen kann, bleibt natürlich noch viel Raum für weitergehende Fragen. So könnte man beispielsweise nicht nur nach der Dauer der Hellzeit fragen, sondern nach den Zeitpunkten für Sonnenauf- bzw. Untergang. Diese Zeiten hängen natürlich nicht nur von der geographischen Breite, sondern ganz entscheidend von der geographischen Länge des Beobachters ab. Außerdem sind dabei viele

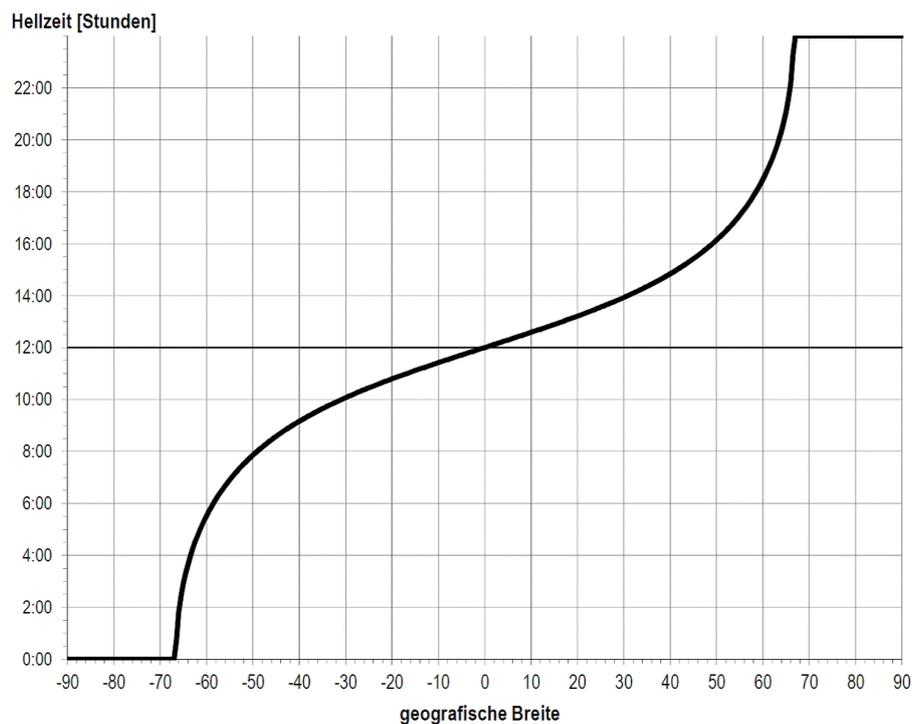


Abbildung 5: Hellzeitlänge in Abhängigkeit von geografischer Breite zu Beginn des Nordsommers

der hier bewusst ausgeblendeten Aspekte von Belang, wie beispielsweise die (zwar kleine, aber hier doch nicht ganz unwesentliche) Änderung der Sonnendeklination während eines Tages. Aber das wäre dann ein weiteres Kapitel.

Mitteilungen

- Ab diesem Heft erhalten die Schüler/innen der Klassen 5–8 für die Bearbeitung der Neuen Aufgaben keine 1,5-fache Punktzahl mehr, sondern ebenso wie die Schüler/innen der Klassen 9–13 die einfache Punktzahl, um die Chancengleichheit auf das Erreichen hoher Punktzahlen für Schüler aller Klassenstufen zu erhöhen.
- Dr. Friedrich Kayser, der Autor des Artikels zur Tageslänge, ist Akademischer Direktor am Institut für Physik der Johannes Gutenberg Universität Mainz und engagiert sich dort unter anderem in der Lehramtsausbildung.
- Zum Mathe-im-Advent-Wettbewerb sind die zwei Bücher *Die Mathe-Wichtel Band 1* (ISBN 978-3658030728) und *Band 2* (ISBN 978-3658030742, jeweils 17,99 €) beim Verlag Springer-Spektrum erschienen. Die Bände enthalten, nach Klassenstufen getrennt, eine Auswahl schöner Aufgaben mit Lösungen aus dem beliebten Schülerwettbewerb. Band 1 enthält auch eine von Monoid eingereichte Aufgabe. Beide Bücher könnt Ihr im örtlichen Buchhandel erwerben.

- Die nächste Mainzer Mathematik-Akademie (MMA) findet vom 1. bis 5. Oktober 2014 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:

<http://www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie>.

Impressionen der MONOID-Jahresfeier 2013



Die Preisträger des Goldenes M (oben links), des Forscherpreises (oben rechts) sowie der ersten Preise (unten).

Die MONOID-Preisträger 2013

Das Goldene M: Lukas Nießen (Gymnasium Nonnenwerth, Remagen).

Forscherpreis: Bettina Diller (Städtische Berufsschule für Informationstechnik, München).

1. Preise:

Henning Ballweber, Tillmann Ballweber, Maximilian Hauck, Tobias Heinze, Iolante Köcher, Heiko Kötzsche, David Michel, Kevin Mours, Frank Schindler, David Storzer, Marcel Wittmann.

2. Preise:

Lara Braun, Robin Fritsch, Jasmin Hallyburton, Robert Kowallek, Fabian Liepach, Dennis Mayle, Nils Prepens, Verena Rüsing, Jamico Schade, Melanie Schuy, Jakob Sussmann, Janina Vogl.

3. Preise:

Jonas Ahlfeld, Shaima'a Ahmed Doma, Elisa Dernier, Bettina Diller, Jonas Glückmann, Jara Müller-Kästner, Andreas Pitsch, Lina Renger, Helen Richter, Patrick Riebe, Katharina Rößler, Marvin Weisbender.

MONOID-Jahresabonnements 2014:

Lucas Bühler, Andreas Dernier, Jonas Drake, Martha Friederich, Maximilian Groke, Carolin Heidt, Leah Heil, Denise Kadri, Lukas Kieninger, Annika Koch, Sven Michel, Beatrice Popescu, Leonie Rößler, Adriana Stenger, Agnes Valenti, Katharina Weber, Anja Wingender, Sandra Wingender, Nick Wittig, Manuel Wolf, Ella Zwermann.

Die MONOID-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgern des Schuljahres 2012/2013 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die ersten, zweiten und dritten Preise wurden ebenso wie der Preis für den Träger des Goldenen M vom Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz gestiftet, der Forscherpreis von Herrn Dr. Genannt. Die MONOID-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr von Seite 3

Anordnung

Aus (4) folgt

$$(5) \quad z - u < y - x.$$

Damit ist $(z - u) - (x + y) < (y - x) - (x + y)$. Nach (2) ist

$$(6) \quad x + y = u + z.$$

Daher ist $(z - u) - (x + y) < (y - x) - (u + z)$, also $2z < 2y$. Mit (3) folgt

$$(7) \quad z < y < x.$$

Aus (5) und (6) folgt $(z - u) + (x + y) < (y - x) + (u + z)$, sodass $2x < 2u$. Mit (7) gilt

$$(8) \quad z < y < x < u.$$

Aus (1) folgt $(2014 - x) + x = (u - y) + x$. Wegen (3) ergibt sich $2014 > (u - y) + y$ und $2014 > u$.

Schließlich gilt also mit (8): $z < y < x < u < 2014$.

Differenz zweier Quadratzahlen

a) $x^2 - y^2 = 2014$ für zwei natürliche Zahlen x, y bedeutet: $(x + y)(x - y) = 2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Insbesondere ist die Summe der beiden Faktoren $(x + y) + (x - y) = 2x$ gerade. Aber die Faktorzerlegungen $1 \cdot 2014, 2 \cdot 1007, 19 \cdot 106, 38 \cdot 53$ erfüllen alle nicht, dass die Summe der Faktoren gerade ist. Also gibt es keine Darstellung von 2014 als Differenz zweier Quadratzahlen.

b) $x^2 - y^2 = 2013$ bedeutet $(x + y)(x - y) = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Für die Zerlegung kommen also die folgenden Fälle in Frage:

$$x + y = 61, x - y = 33, \text{ also } 2x = 94, 2y = 28, x = 47, y = 14$$

$$x + y = 183, x - y = 11, \text{ also } 2x = 194, 2y = 172, x = 97, y = 86$$

$$x + y = 671, x - y = 3, \text{ also } 2x = 674, 2y = 668, x = 337, y = 334$$

$$x + y = 2013, x - y = 1, \text{ also } 2x = 2014, 2y = 2012, x = 1007, y = 1006$$

In allen vier Fällen ist tatsächlich $x^2 - y^2 = 2013$.

Primzahl oder Quadratzahl?

Die Zahlen zwischen 2014 und $2014 + n$ sind 2015, 2016, ..., $2013 + n$. Setze $2015 = x$. Dann ist $2013 + n = x + n - 2$. Ferner ist

$$S = x + (x + 1) + \dots + (x + n - 2) = (n - 1)x + (1 + 2 + \dots + (n - 2)).$$

Mit der Formel $1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 1)$ folgt:

$$(1) \quad S = (n - 1)\left(x - 1 + \frac{n}{2}\right).$$

Für $n = 2$ ist $S = 2015$ und S ist weder Primzahl noch Quadratzahl.

Für $n = 3$ ist $S = 2015 + 2016 = 4031 = 29 \cdot 139$; S ist daher keine Primzahl und keine Quadratzahl.

Daher sei im Folgenden $n \geq 4$ vorausgesetzt.

a) Falls n gerade ist, folgt: $x - 1 + \frac{n}{2}$ ist ganzzahlig und > 2014 . Wegen $n - 1 \geq 3$ ist also S ein Produkt zweier Zahlen > 1 . Also ist S nicht prim.

Sei n ungerade, also $n \geq 5$ und somit $n - 1 \geq 4$ und gerade. Weil dann $(n - 1)(x - 1 + \frac{n}{2})$ ganzzahlig ist, folgt mit (1): S ist nicht prim.

Es gibt also keine natürliche Zahl $n > 1$, für die S eine Primzahl ist.

- b) Wenn in (1) gilt: $n - 1 = x - 1 + \frac{n}{2}$, dann ist S eine Quadratzahl. Die Gleichung gilt nun für $n = 2x$. Daher ist tatsächlich $S = (2x - 1)(x - 1 + x) = (2x - 1)^2 = 4029^2$, falls $n = 2x$ ist.

Summe von Brüchen

Mit dem obigen Hinweis ist: $w_n = \frac{2(u_n - v_n)}{u_n^3 - v_n^3}$; aus $u_n^3 - v_n^3 = (n + 1) - (n - 1) = 2$ folgt: $W_n = u_n - v_n$.

Also gilt: $w_n = \sqrt[3]{n + 1} - \sqrt[3]{n - 1}$. Somit ist

$$S_n = \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0}\right) + \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\right) + \dots + \left(\sqrt[3]{n + 1} - \sqrt[3]{n - 1}\right) = \sqrt[3]{n + 1}.$$

Für $n = 8\,169\,178\,743$ ist daher $S_n = 2014$.

Zahlenfolgen

Zunächst bestimmt man für einige kleine n die Werte von $A(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A(n)$	1	2	4	7	13	24	44	81	> 81

Zum Beispiel gibt es sieben Folgen $F(4)$: $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$.

Zur Bestimmung von $A(n)$ für ein $n \geq 4$ definiert man: $A_i(n)$ sei die Anzahl der Folgen $F(n)$ mit dem letzten Glied $a_m = i$, wobei $i = 1$ oder 2 oder 3 ist.

Ein Folge $F(n)$ mit dem letzten Glied $a_m = 1$ erhält man, indem man an einer der $(n - 1)$ Folgen $F(n - 1)$ die Zahl 1 anfügt. Also ist $A_1(n) = A(n - 1)$.

Ebenso ergibt sich eine Folge $F(n)$ mit dem letzten Glied $a_m = 2$ durch Anfügen der Zahl 2 an eine der $A(n - 2)$ Folgen $F(n - 2)$. Somit ist $A_2(n) = A(n - 2)$.

Ganz entsprechend zeigt man, dass $A_3(n) = A(n - 3)$ ist.

Wegen $A(n) = A_1(n) + A_2(n) + A_3(n)$ gilt daher

$$(2) \quad A(n) = A(n - 1) + A(n - 2) + A(n - 3) \text{ sowie } A(n) > A(n - 1) \text{ für } n \geq 4.$$

Durch die Tabelle gelangt man zu der Vermutung

$$(3) \quad A(3k) > 3^k \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Beweis von (3) durch vollständige Induktion:

(3) gilt nach der Tabelle für $k = 1, 2, 3$.

Es gelte (3) für $k - 1$, also sei $A(3(k - 1)) > 3^{k-1}$. Dann ist mit (2):

$$\begin{aligned} A(3k) &= A(3k - 1) + A(3k - 2) + A(3k - 3) > 3A(3k - 3) = 3A(3(k - 1)) \\ &> 3 \cdot 3^{k-1} = 3^k. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorüberlegungen nun zu der anfangs gestellten Frage: Es ist $10 \cdot 2014 = 6713 \cdot 3 + 1$ und $A(6713 \cdot 3) > 3^{6713}$. Wegen $A(n) > A(n-1)$ folgt: $A(10 \cdot 2014) = A(6713 \cdot 3 + 1) > A(6713 \cdot 3) > 3^{6713}$. Nun ist $\log 3^{6713} > 3202$, sodass $3^{6713} > 10^{3202}$ ist.

Also gilt: $A(10 \cdot 2014) > 10^{2014}$, was zu entscheiden war.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 113

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 6: Luca Bühler 20.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Lünning):

Kl. 5: Jan Gubi 8, Maximilian Hauck 75, Eileen Kirchner 7, Pia Richter 3, Manuel Wolf 26, Anna Wullmann 8, Rabea Zimmermann 6;

Kl. 6: Jan-Hendrik Schloo 11;

Kl. 7: Philip Eisenhuth 19;

Kl. 8: Nick Wittig 27;

Kl. 9: Sebastian Maak 17, Niclas Mayer 14, Katharina Rößler 39;

Kl. 12: Valma Kuuslampi 5, Andreas Pitsch 31.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler): **Kl. 5:** Sarah Bergfeld 2, Bastian Elzer 3, Paul Kruse 3, Aimée Lange 2, Annalena Schimbol 5;

Kl. 12: Mitja Roeder 7.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 12: Frank Schindler 81.

Berlin, Katholische Theresienschule: Kl. 5: Emma Weiß 17.

Bonn, Carl-von-Ossietzky-Gymnasium: Kl. 5: Lorenzo Conti 16.

Bottrop, Josef-Albers-Gymnasium: Kl. 8: Malte Schürks 14.

Brannenburg, Gymnasium Raubling: Kl. 8: Jakob Sussman 54.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:

Kl. 10: Jamico Schade 58.

Calw, Hermann-Hesse-Gymnasium: Kl. 7: Iolanthe Köcher 106.

Edenkoben, Gymnasium: Kl. 8: Theresa Paulus 14.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

Kl. 5: Guiseppina Alfano 2, Christoph Behrens 2, Anna Grenz 2, Annika Koch 25, Cornelius Martin 2, Leonie Marton 16, Mark Neumaier 2, Katharina Scholl 5;

Kl. 6: Gina Bader 3, Leon-Maurice Bähr 4, Samuel Bentz 2, Leonie Groll 2, Peter Hadasch 3, Anna-Lena Hartmann 7, Selina Kuralay 2, Florian Leutz 8, Arlind Murtezaj 2, Ruth Nagel 3, Rebecca Rech 2, Albion Syla 2;

Kl. 7: Michelle Bader 3, Denise Baum 4, Sophie Bruchmann 2, Jule Koob 6, Nina Kummer 4, Pia Neumaier 2, Emilia Sobotzki 6;

Kl. 8: Tillmann Ballweber 101, Carolin Heidt 26;

Kl. 9: Kevin Mours 84, Adriana Stenger 23, Marcel Wittmann 104;

Kl. 10: Tamara Fischer 5;

Kl. 12: Henning Ballweber 78.

Frankenthal, Robert-Schuhmann-Schule: Kl. 7: Patrick Riebe 38.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze):

Kl. 2: Annika Franke 5, Jacob Huck 5, Olivia Kern 5, Elisabeth Korzilius 5, Lara Sachs 5;

Kl. 3: Fritz Albus 4, Ridh Choudhury 18, Merlin Kolrep 15, Thies Koster 16, Ella Zwermann 24;

Kl. 4: Nicholas Becker 6, Franco Dorsch 13, Maike Dürr 13, Liam Eitner 2, Kimberly Frahm 9, Martha Friederich 26, Christian Ickstadt 4, Maxim Leheta 10, Sean Panreck 14, Lina Renger 30, Franziska Schlüter 6, Vrishab Wittagondana 19;

Kl. 6: Sebastian Schneider 13.

Grünstadt, Leininger Gymnasium: Kl. 9: Annika Gold 11.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):

Kl. 4: Leonie Orth 2, Tobias Streichhardt 5;

Kl. 5: Hatice Nur Devecioglu 10, Philipp Emer 8, Jakob French 13, Mauritz Pötz 8, Burak Sadic 11, Julian Ständeke 2, Paul Steinhauer 11, David Weißer 10;

Kl. 6: Konrad Grasse 2, Luana Jäger 12, Luca Kloft 9, Melanie Shuy 52;

Kl. 7: David Storzer 108, Nils Prepens 54;

Kl. 8: Sven Gombitzka 4, Marvin Weisbener 48, Emily Zollmann 19.

Hangelsberg, Montessorischule: Kl. 3: Joris Witte 4.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen:

Kl. 11: Shaima'a Ahmed Doma 48.

Karben, Kurt-Schuhmacher-Schule: Kl. 5: Leonie Rößler 20.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 5: Nick Bäumken 1, Dennis Mayle 54, Beatrice Popescu 29; Daniel Simon 2;

Kl. 7: Nils Müller 5;

Kl. 8: Björn Stanischewski 15.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 12: Robin Fritsch 64.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):

Kl. 5: Catharina Dümmer 4, Paula Roderer 2, Tim Schüler 4, Roy Seifert 4;

Kl. 6: Katharina Weber 25, Konstantin Unterkeller 3;

Kl. 7: Jason Beck 8, Lincoln Bui 12, Sebastian Hospice 8, Lucas Koenen 6, Gianluca Padalina 7, Sebastian Trapp 17;

Kl. 8: Ngoc Vi Tran 17.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim:

Kl. 13: Niklas Bockius 11.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium:

Kl. 5: David Menzel 8.

München, Max-Planck-Gymnasium:

Kl. 8: Josef Sandor 10.

München, Michaeli-Gymnasium:

Kl. 11: Axel Krafft 16.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:

Kl. 11: Bettina Diller 40.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):

Kl. 5: Amiv Camdzic 6, Kevin Gren 6;

Kl. 6: Chantal Cornely 3, Kevin Cornely 7, Alina Hasani 4, Alexandra Hoffmann 7, Victoria Mogwitz 5, Celina Simon 10, Nico Stanic 9;

Kl. 7: Jonas Ahlfeld 34, Anja Wingender 24;

Kl. 8: Jasmin Hallyburton 56, Denise Kadri 20, Verena Rüsing 57;

Kl. 9: Philipp Lehmann 2;

Kl. 10: Mirjam Bourgett 3, Sandra Wingender 28;

Kl. 11: Janina Vogl 50;

Kl. 12: David Michel 74.

Neuwied, Wemer-Heisenberg Gymnasium:

Kl. 11: Robert Kowallek 62.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

Kl. 5: Jonas Blumenroth 7, Jonas Glückmann 32;

Kl. 6: Lara Braun 50, Tobias Heinze 74, Fabian Liepach 59, Jara Müller-Kästner 43, Helen Richter 34;

Kl. 10: Heiko Kötzsche 80;

Kl. 11: Agnes Valenti 23.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner):

Kl. 5: Vera Apel 1, Antonia Emmeler 2, Niklas Hesselbein 3, Joel Jansen 4, Lara Loosen 2, Lukas Nießen 138, Hanah Pasternak 8, Ella Pesau 2, Julia Schmitz 3;

Kl. 6: Wiebke Buhmann 3, Emil Faust 4, Natalie Kotsch 4, Hannah Langer 3, Max Leiwig 4, Anna Riese 1, Lea Schikalla 4, Fabian Staffel 8, Johannes Stähler 6, Lena Seifert 4, Kilian Wolf 4, Nadine Wolf 4;

Kl. 11: Frederik Bartl 4, Alexander Knoop 4, Anna Monschau 4, Lisa Plag 4, Sären Rauert 4, Marlon Schröter 1.

Schwalbach, Albert-Einstein-Schule:

Kl. 6: Alexander Martin 12.

Tübingen, Geschwister-Scholl-Schule:

Kl. 6: Bilal Abbanb 10, Benjamin Baumann 10, Rick Bilge 18, Paul Bohnet 12, Helmuth Büchle 18, Richard Dammnik 9, Jonas Drake 23, Louis Edel 8, Janne Eisenmann 10, Leonie Felger 11, Max Häcker 7 Leon Hennes 13, Carina Janning 13, David K. 10, Lukas Kieninger 25, Sanja König 11, Sophie Kunle 7, Elias Lachenmann 19, Cedric Linder 2, Mariam Maas 7, Paul Mallot 9, Sven Michel 20, Julian Müller 7, Rasmus Müller 6, Lennart Nagel 6, Pia Neuwirth 13, Nicolai Potengoaski Jonas Prandl 14, Charlotte Raible 13, Charlotte Rath 11, Kilian Redl 15, Max Reng 6, Julian Riethmüller 15, Johannes Rilling 14, Theresa Schwan 8, Colin Sperrfechter 6, Elinor Stahl 7, Clara Stenzl 11, Emely Stock 5, Lisa-Marie Straka 13, Raphael Unser 12.

Wiesbaden, Leibnizschule:

Kl. 7: Andreas Dernier 26;

Kl. 8: Elisa Dernier 39.

Wildeshausen, Gymnasium Wildeshausen:

Kl. 7: Leah Heil 27, Wiebke Schneider 8, Greta Wobse 4;

Kl. 8: Maximilian Groke 24.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)

Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe

Betreuung der Abonnements und Versand: Anita Pfeffer-Kohl mit freundlicher Unterstützung von Dr. Ekkehard Kroll

Inhalt

Aufgaben zum neuen Jahr	3
B. Diller: Informatische Lese-Ecke – Lesetipps zur Informatik	4
H. Fuchs: Das Urteil des Richters F. I. Bonacci	5
H. Fuchs: Geometrie mit der Schere – 2. Teil	7
L. Biroth: Einfärben von Landkarten	11
D. Müller: Entsteht beim Schuhebinden immer der gleiche Knoten?	15
H. Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen	19
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 115	20
Neue Mathespielereien	23
Neue Aufgaben	26
Gelöste Aufgaben aus MONOID 115	27
Mathematische Entdeckungen	31
Die Aufgabe für den Computer-Fan	33
F. Kayser: Wie lange scheint heute die Sonne?	34
Mitteilungen	40
Impressionen der MONOID-Jahresfeier 2013	40
Die MONOID-Preisträger 2013	41
Lösungen zu den Aufgaben zum neuen Jahr	42
Rubrik der Löser und Löserinnen	45
Impressum	49

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>