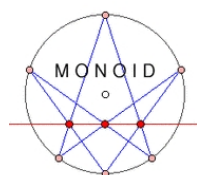
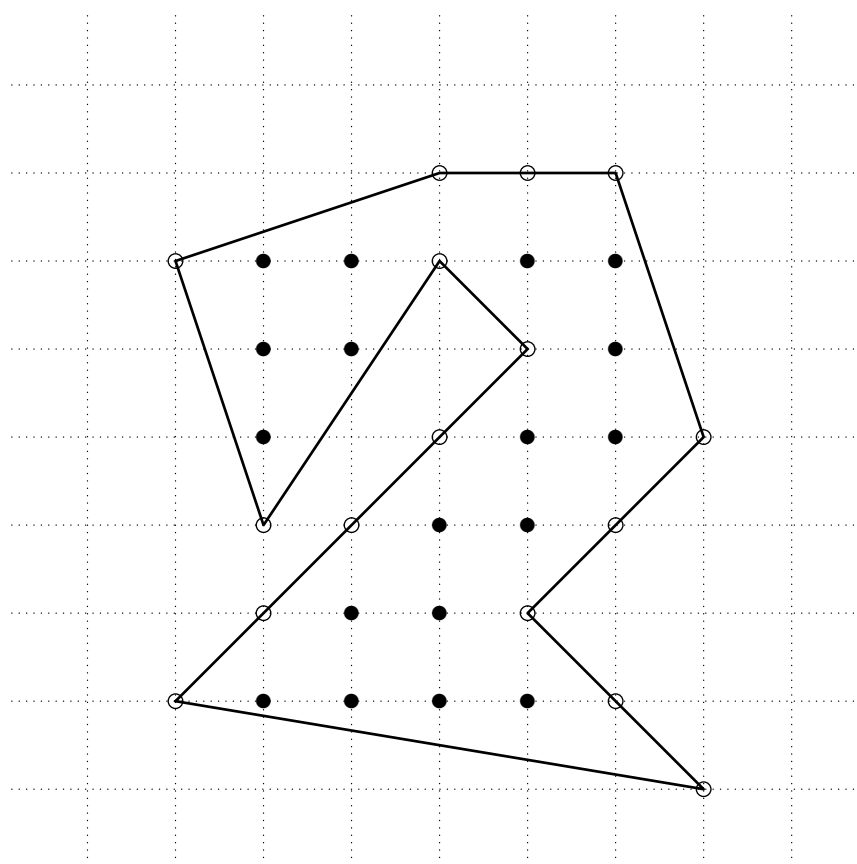


MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.05.2014.

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

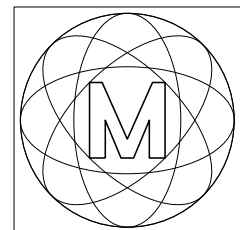
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die
Redaktion

Anschlüsse, Bahnhöfe, Fahrpreise: Optimierung im öffentlichen Verkehr

von Anita Schöbel

Zusammenfassung

Die Diskrete Optimierung ist ein Teilgebiet auf der Schnittstelle von Mathematik und Operations Research, das in den letzten Jahren immense Fortschritte in der Entwicklung und Anwendung von Algorithmen gemacht hat. Anhand der drei Beispiele Anschlusssicherung, Haltestellenplanung und Tarifplanung wurde in meinem Vortrag* aufgezeigt, wie Methoden der diskreten Optimierung helfen können, den öffentlichen Verkehr unter gleich bleibendem Budget für die Fahrgäste zu verbessern. Die drei vorgestellten Beispiele beziehen sich alle auf Projekte, die in Kooperation mit Verkehrsunternehmen ausgeführt wurden.

1. Warten oder nicht warten? Anschlusssicherung im öffentlichen Verkehr

„Meine Damen und Herren, unser Zug hat derzeit leider eine Verspätung von 15 Minuten, so dass wir Mannheim voraussichtlich um 17:16 erreichen werden. Über Ihre Anschlussverbindungen in Mannheim werden wir Sie noch rechtzeitig informieren.“ Ähnliche Durchsagen hat wohl jeder Bahnreisende schon einmal gehört. Ist Mannheim der Endbahnhof der Reise, ist so eine Verspätung lästig. Möchte ein Fahrgast aber noch in einen anderen Zug umsteigen, beginnt für ihn oft eine Zitterpartie: Wird mein Anschlusszug warten? Werde ich es schaffen, wenn ich schnell zum Abfahrtsgleis renne? Wie komme ich weiter, wenn ich den Zug nicht mehr erreiche?

Die Entscheidung, ob ein Zug auf einen verspäteten Zubringer warten soll oder nicht, wird derzeit in den Dispositionszentralen der Deutschen Bahn getroffen. Für die Pfalz zuständig ist die Dispositionszentrale in Karlsruhe. Bei ihren Entscheidungen greifen die Disponenten auf feste Wartezeitregeln (und ihre oft langjährigen Erfahrungen) zurück. Bei einem Gesamtumfang von täglich 33 000 Zügen auf mehr als 34 000 km Gleisen lässt sich aber leicht vorstellen, dass die Auswirkungen von (sich teils gegenseitig beeinflussenden) Dispositionsentscheidungen kaum überschaubar sind. Schon bei einem einzigen Anschluss mit einem verspäteten Zubringerzug und einem einzigen Abbringer müssen verschiedene Kundengruppen betrachtet werden: Wie viele Passagiere wollen umsteigen? Wann fährt der nächste Anschlusszug? Wie viel Verspätung muss der Abbringerzug in Kauf nehmen,

* Festvortrag auf der MONOID-Jahresfeier am 30. November 2013

wenn er wartet? Ist das nachfolgende Gleis zu der späteren Abfahrtszeit überhaupt frei? Wie viele Passagiere sitzen in dem Abbringer und werden sie wiederum nachfolgende Anschlüsse erreichen?

Um solch ein komplexes System mit allen seinen Einschränkungen und Übertragungen besser zu verstehen und darauf basierend „gute“ Dispositionsentscheidungen treffen zu können, wurde an der Universität Göttingen ein mathematisches Modell zur Anschlusssicherung für den Zugverkehr entwickelt.

Modell

Im Fall von (unvorhergesehenen) Quellverspätungen geht es darum, den geplanten Fahrplan online – also möglichst schnell – zu einem Dispositionsfahrplan anzupassen. Dieser soll die aus dem Quellverspätungen resultierenden Folgeverspätungen möglichst gering halten. Dazu müssen zwei grundsätzliche Typen von Entscheidungen getroffen werden:

- Warten oder nicht warten (Anschlusskonflikte): Soll ein Anschlusszug auf einen verspäteten Zubringerzug warten oder soll er pünktlich abfahren?
- Prioritätsentscheidung (Belegungskonflikte): Welcher Zug darf zuerst auf welches Gleis?

In dem in Göttingen erarbeiteten Optimierungsmodell werden diese beiden Entscheidungen aus Sicht der Passagiere betrachtet. Das Ziel besteht darin, einen Dispositionsfahrplan zu finden, bei dem die Auswirkungen von Quellverspätungen auf die Passagiere so gering wie möglich ausfallen. Konkret ist das Ziel dabei, die durchschnittliche Verspätung der Passagiere bei Ankunft an ihren Zielbahnhöfen zu minimieren.

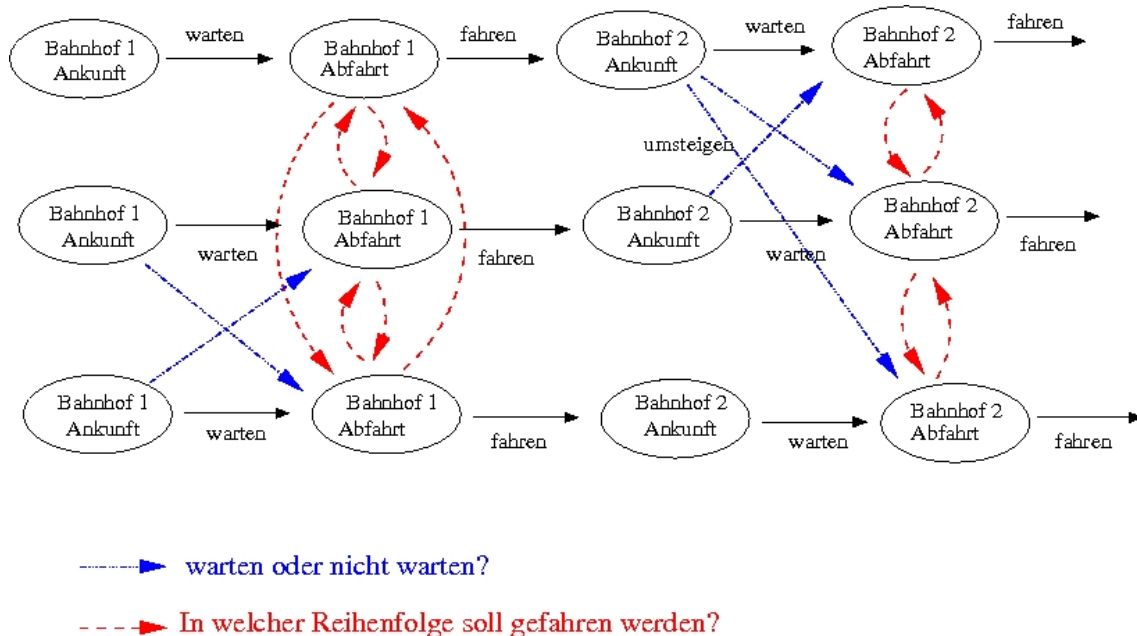


Abbildung 1: Ein Ereignis-Aktivitätsnetzwerk für drei Fahrzeuge an zwei Haltestellen

Um die wesentlichen Einflüsse von Zugverspätungen darzustellen, definiert man ein so genanntes *Ereignis-Netzwerk* (siehe Abbildung 1), in dem jede Abfahrt und jede Ankunft eines Fahrzeuges an einem Bahnhof als Knoten dargestellt wird.

Diese Ereignisse sind durch *Aktivitäten* miteinander verbunden. Sie stellen die Beziehungen zwischen den Ereignissen dar. Man unterscheidet verschiedene Typen von solchen Aktivitäten:

- *Fahraktivitäten* modellieren die Fahrt eines Zuges zwischen einer Abfahrt und einer Ankunft,
- *Warteaktivitäten* modellieren die Zeit am Bahnhof, die ein Zug zwischen seiner Ankunft und seiner Abfahrt dort verbringt und
- *Umsteigeaktivitäten* modellieren das Umsteigen der Fahrgäste. Sie verbinden also die Ankunft eines Fahrzeuges an einer Haltestelle mit der Abfahrt eines anderen Fahrzeuges an der selben Haltestelle.
- Um Kapazitätsrestriktionen zu modellieren sind *Zugfolgezeit-Aktivitäten* nötig, die sicherstellen, dass der Sicherheitsabstand zwischen aufeinander folgenden Zügen eingehalten wird und dass sich auf eingleisigen Strecken keine Züge begegnen.

Für jede Aktivität a bestimmt man ihre technisch minimale Zeitdauer L_a . Bei Fahraktivitäten ist das zum Beispiel die Zeit, die ein Fahrzeug mindestens braucht, um die Entfernung zwischen den Haltestellen zurückzulegen, bei Umsteigeaktivitäten ist es die Zeit, die die Passagiere zum Umsteigen benötigen.

Um nun das Anschlusssicherungsproblem in Formeln zu packen, definiert man drei Typen von Variablen: Die Variablen x_i werden für jedes Ereignis i definiert und geben die Zeit an, in der das Ereignis im zu bestimmenden Dispositionsfahrplan stattfinden soll. Um die Warten/Nicht-Warten Entscheidungen einzubeziehen, definiert man für jede Umsteigeaktivität a eine boolesche Variablen z_a , die den Wert 0 annimmt, wenn die Umsteigeverbindung gehalten wird und den Wert 1, wenn das nicht der Fall ist. Die dritte Klasse von Variablen stellt sicher, dass die Kapazitätsrestriktionen der Gleise berücksichtigt werden. Für je zwei Abfahrtsereignisse i, j definiert man $g_{ij} = 1$ falls Ereignis i vor Ereignis j stattfinden soll, 0 sonst. Das resultierende Modell lässt sich mit diesen Variablen wie folgt aufschreiben.

Minimiere $\sum_a w_a z_a + \sum_i w_i x_i$, sodass gilt:

- $x_i \geq t_i$ für alle Ereignisse i ;
- $x_j - x_i \geq L_a$ für alle Fahr- und Wartekanten $a = (i, j)$;
- $Mz_a + x_j - x_i \geq L_a$ für alle Umsteigekanten $a = (i, j)$;
- $Mg_{ij} + x_j - x_i \geq L_a$ für alle Zugfolgekanten $a = (i, j)$;
- $g_{ij} + g_{ji} = 1$ für alle Zugfolgekanten $a = (i, j)$;
- z_a, g_{ij} boolesch, x_i ganzzahlig.

Dabei bezeichnet t_i die laut Fahrplan geplante Zeit für Ereignis i und w_i und w_a sind Angaben darüber, wie viele Passagiere Ereignis i beziehungsweise Aktivität a benutzen möchten. Der Parameter M wird als eine Zahl gewählt, die mindestens so groß wie die größte auftretende Quellverspätung ist.

Lösungsverfahren

Bis zur Größe des Harzgebiets lässt sich das Problem in wenigen Minuten optimal lösen. Zum Lösen größerer Beispiele muss man Spezialverfahren entwickeln und schließlich auf Heuristiken zurückgreifen. Am besten hat sich ein speziell für das Anschlusssicherungsproblem entwickeltes Verzweigungsbaumverfahren bewährt, in dem die Struktur des Problems zum Auffinden von guten Schranken ausgenutzt wird. Es ist zu bemerken, dass das Ergebnis zunächst einen Dispositionsfahrplan in einem Makro-Modell berechnet. Anschließend müssen noch weitere Details einbezogen werden, um zum Beispiel sämtliche Sicherheitsrestriktionen zu gewährleisten.

Ausblick

In der Disposition bestehen nach wie vor viele aus praktischer Sicht wichtige und aus theoretischer Sicht spannende Forschungsfragen. Diese betreffen einerseits die Integration mit anderen Planungsschritten (wie zum Beispiel der Umlaufplanung oder der Gleisbelegung in Bahnhöfen), andererseits die Robustheit des Dispositionsfahrplans gegen erneute Störungen. Es wird auch daran gearbeitet, die Fahrpläne und die Linienpläne so anzulegen, dass Störungen nur wenig Auswirkungen haben und Schneeballeffekte vermieden werden.

2. Der richtige Standort: Das Bahnhofsplatzierungsproblem

Einladung zu einer Hochzeit in Niedersachsen! Wir feiern in Hessenau zwischen Friedland und Heilbad Heiligenstadt. Wie so oft stellt sich die Frage: Soll ich mit dem Auto oder mit dem öffentlichen Verkehr anreisen? Es stellt sich heraus, dass die Verbindung von Göttingen nach Friedland und von Göttingen nach Heilbad Heiligenstadt sehr gut ist. Leider hält der Zug in Hessenau aber nicht, so dass die verbleibenden 10km von Heiligenstadt nach Hessenau dazu führen, dass die Entscheidung zu Gunsten des eigenen Autos fällt ...

Solch eine Situation lässt sich häufig beobachten: Zwischen den Zentren von zwei Städten werden attraktive Bahnverbindungen angeboten, oft fehlt aber die Möglichkeit, von dort aus das endgültige Fahrtziel zu erreichen.

Bei der langfristigen Weiterentwicklung der Infrastruktur der Bahn werden solche Entscheidungen berücksichtigt. Neben den teuer zu bauenden und zu bewirtschaftenden Bahnhöfen stellt sich die Frage nach der Errichtung von einfachen Haltepunkten, die ausschließlich zum Ein- und Aussteigen in Regionalzüge dienen.

Der Vorteil solcher Haltepunkte liegt in einem verbesserten Zugang der Kunden zur Bahn; der Minuspunkt liegt aus Fahrgastsicht in dem zeitlichen Nachteil, der durch häufigeres Anhalten der Züge entsteht. Eine interessante Fragestellung besteht darin, zu untersuchen, ob sich eine (deutliche!) Erhöhung der Anzahl der Haltepunkte im Regionalverkehr positiv auf die Nachfrage auswirkt. Um dazu zusätzliche Haltepunkte im gesamten Gebiet der Bundesrepublik Deutschland geeignet zu platzieren, wurde das folgende mathematische Modell entwickelt.

Modell

Das Einführen neuer Haltepunkte im Regionalverkehr hat auf die Fahrgäste positive und negative Auswirkungen. Die positiven Auswirkungen bestehen in einem erleichterten Zugang zum Bahnverkehr. In wie weit sich ein verbesserter Zugang positiv auf die Nachfrage auswirkt, hängt unter anderem von psychologischen Faktoren ab. Das folgende Modell betrachtet daher zwei objektivierbare Faktoren: den Abdeckungsgrad der Bevölkerung und die durch neue Halte entstehende zusätzliche Reisezeit.

Dazu sei ein Radius r (in Kilometern) gegeben. In dem einfachsten Fall definiert man einen potentiellen Kunden als von der Bahn abgedeckt, falls seine Entfernung zum nächstgelegenen Bahnhof weniger als r Kilometer beträgt. Dabei wird im Bahnverkehr üblicherweise ein Radius von 2 Kilometern angesetzt.

Das Ziel des Modells besteht darin, mit möglichst wenigen (neuen) Bahnhöfen, möglichst viele (neue) Kunden abzudecken. Diese beiden Wünsche

- maximiere die Anzahl der abgedeckten Kunden und
- minimiere die Anzahl der zu errichtenden Haltestellen

widersprechen sich: Will man viele Kunden erreichen, so wird es nötig sein, auch viele Bahnhöfe zu errichten. Möchte man andererseits Kosten sparen und wenig Bahnhöfe bauen, so werden auch nur wenig neue Kunden erreicht. Man kann nun entweder ein Budget vorgeben und die neuen Bahnhöfe so verteilen, dass man möglichst viele Kunden erreicht, oder man gibt einen Abdeckungsgrad vor und versucht, diesen mit möglichst wenig zusätzlichen Bahnhöfen zu realisieren.

Eine andere Schwierigkeit bei der Modellierung liegt darin, dass man a priori die neuen Haltestellen überall entlang der bestehenden Gleise errichten darf. Um zu einer endlichen Kandidatenmenge zu kommen, fasst man die potentiellen Standorte, von denen aus man die gleichen Kunden erreichen kann, zu Intervallen zusammen. Man kann dann beweisen, dass es reicht, einen repräsentativen Punkt s aus jedem Intervall zu betrachten. Sei S die Menge dieser repräsentativen Punkte. Für jeden solchen Punkt s aus S und jeden Kunden i setzt man a_{is} auf 1 falls der Punkt s dichter als r an i liegt; anderenfalls setzt man $a_{is} = 0$. Mit Hilfe dieser Daten kann man nun das Problem folgendermaßen modellieren: Man definiert dazu zwei Klassen boolescher Entscheidungsvariablen: Einmal benötigt man Variablen x_s , die den Wert 1 annehmen, wenn der Punkt s als Haltestelle eingerichtet wird, 0

sonst. Weiterhin benötigt man Variablen y_i , die auf 1 gesetzt werden, wenn Kunde i abgedeckt ist, 0 sonst. Das resultierende Modell ergibt sich dann als:

Minimiere $\sum_s w_s x_s$ und maximiere $\sum_i w_i y_i$, sodass $\sum a_{is} x_s \geq y_i$ für alle Kunden i , x_s, y_i boolesch.

In einem erweiterten Modell kann die Entwicklung der *Tür-zu-Tür-Reisezeit* der Kunden in Abhängigkeit der neu einzurichtenden Haltestellen optimiert werden. Dieser Ansatz berücksichtigt sowohl die von der Haustür bis zum Bahnhof benötigte Zeit wie auch die durch die zusätzlichen Halte verlorene Fahrzeit („Stop-and-Go“) auf der Strecke. Um die Reisezeit bis zum Bahnhof zu bestimmen, wurde zunächst der nächste Bahnhof für einen Kunden, der in i wohnt und zu seinem Ziel in j reisen will, bestimmt. Je nach Entfernung wurde dann angenommen, dass der Kunde zu Fuß, per Fahrrad/Bus oder mit dem Auto zu dem Bahnhof kommt und daraus die Reisezeit bis zum Bahnhof geschätzt.

Lösungsverfahren

Das Modell lässt sich entlang einer einzigen Linie effizient durch kürzeste Wege-Verfahren lösen, ist für beliebige Netze aber sehr schwierig. Für dieses Problem und für die Minimierung der Tür-zu-Tür Reisezeit wurden neben exakten Verfahren daher auch Heuristiken entwickelt. Im Rahmen eines Projektes mit der DB AG kam ein genetisches Verfahren zum Einsatz. Das Ergebnis ergab eine Verbesserung der Tür-zu-Tür-Reisezeit, wenn man die neuen Haltestellen geschickt platziert.

Ausblick

Im Rahmen der praktischen Implementation des Ansatzes wurde auch eine Variante entwickelt, bei der verschiedene Abdeckungsradien mit unterschiedlichen (psychologischen) Effekten betrachtet werden können. Weiterhin wurde die bisher verwendete Vereinfachung, dass die Kunden als punktförmig angenommen wurden, relaxiert. Anstatt Siedlungsflächen als Punkte zu repräsentieren wurden erste Ansätze entwickelt, die erlauben, sie als echte Flächen zu behandeln. Weitere Forschungsthemen sind die Entwicklung weiterer Heuristiken für das bikriterielle Problem sowie die Integration mit der Linienplanung.

3. Gerechte Fahrpreise: Wabenplanung im ÖPNV

Geschafft – der Zug ist pünktlich in Stuttgart angekommen! Weiter geht es mit der Stadtbahn U6 bis nach Degerloch und anschließend mit Bus 74 bis zum vereinbarten Treffen an der Universität Hohenheim. Die Haltestelle der Stadtbahn ist schnell gefunden, jetzt fehlt nur noch die Fahrkarte aus dem Automaten. Erfreulicherweise ist es möglich, direkt eine Fahrkarte für zwei Zonen zu lösen, die für die gesamte Fahrt mit Stadtbahn und Bus gültig ist.

In Zeiten erhöhter Mobilitätsansprüche versuchen sich auch die Anbieter von öffentlichem Personennahverkehr miteinander zu vernetzen. So entstehen insbeson-

dere in Deutschland immer mehr Verkehrsverbünde, die sich als Ziele unter anderem abgestimmte Fahrpläne und attraktive Fahrpreise auf die Fahnen schreiben. Um das Umsteigen wie in obigem Beispiel in Stuttgart zu erleichtern, soll ein Tarifsystem angeboten werden, in dem die Fahrgäste mit nur einer Fahrkarte mehrere Verkehrsunternehmen nutzen dürfen. Neben der Tarifiergiebigkeit soll dabei auch der Wunsch der Fahrgäste nach einem fairen und nachvollziehbaren Tarifsystem berücksichtigt werden. Die bekanntesten Tarifsysteme sind

- der Entfernungstarif, bei dem sich der Fahrpreis an der zurückgelegten Entfernung orientiert. Dieser gilt als fair, ist aber unübersichtlich.
- Dagegen kosten bei einem Einheitstarif alle Fahrten gleich viel. Das ist sehr übersichtlich, aber leider nicht sonderlich fair.
- Als Mittelweg bieten die meisten Verkehrsverbünde so genannte *Waben- oder Zonentarife* an. Bei einem solchen Tarifsystem wird das gesamte Verbundgebiet in Waben (oder Zonen) eingeteilt. Der Fahrpreis hängt ausschließlich von der Anzahl der befahrenen Waben ab und ist insbesondere unabhängig von den benutzten Verkehrsunternehmen. Der Fahrgast kann selbst zählen, durch wie viele Waben er fährt und damit seinen Fahrpreis leicht nachvollziehen. Zusätzlich kann man Wabentarife durch geschickte Wahl der Waben sehr flexibel gestalten.

Die Einführung eines Wabentarifes ist allerdings nicht einfach. Das Tarifgebiet muss in Waben eingeteilt werden und es müssen die Preise für das Durchfahren von 1, 2, 3, ... Waben definiert werden. Die Verkehrsunternehmen möchten dabei keine Einbußen bei ihren Fahrgeldeinnahmen hinnehmen, den Kunden andererseits aber auch keine großen Preiserhöhungen zumuten. Dabei sind die Auswirkungen der räumlichen Einteilung der Waben unübersichtlich: Die Verschiebung einer einzelnen Haltestelle von einer Wabe in ihre Nachbarwabe kann große Auswirkungen auf die Fahrgeldeinnahmen haben, da so eine Verschiebung nicht nur die ein- und aussteigenden Fahrgäste betrifft, sondern auch solche, die die Haltestelle nur passieren.

Modell

Wir setzen voraus, dass das bestehende Verkehrsnetzwerk bekannt ist und beschreiben es durch einen Graphen $G = (V, E)$, in dem V die Menge aller Haltestellen ist und eine Kante $\{i, j\}$ zwischen zwei Haltestellen i und j besteht, wenn die Haltestellen entlang einer Bus- beziehungsweise Bahnlinie direkt miteinander benachbart sind.

Ein Wabentarif wird durch seine Waben und die Preise $c(n)$ für das Befahren von $n = 1, 2, 3, \dots$ Waben definiert. Wir partitionieren also die Menge der Haltestellen in Teilmengen, die den Waben entsprechen. Daraus definiert man ein neues Netzwerk, den so genannten Wabengraphen (siehe Abbildung 2):

- Jede Wabe wird als Knoten aufgefasst.

- Zwei dieser Waben-Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn man direkt von der einen Wabe in die andere fahren kann.

Die Fahrpreise im zukünftigen Wabensystem können nun durch *kürzeste-Wege-Verfahren* in diesem Wabengraphen effizient bestimmt werden.

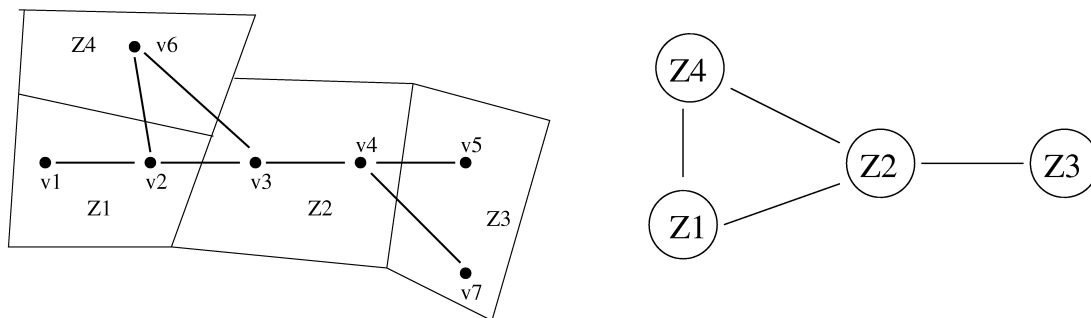


Abbildung 2: Ein Verkehrsnetz mit vier Waben und der zugehörige Wabengraph

Um einen Wabentarif zu beurteilen, betrachtet man die absoluten Abweichungen zwischen den neuen Fahrpreisen und den bisher bestehenden (oder gewünschten) Preisen der beteiligten Verkehrsunternehmen für jede einzelne Fahrt durch das Tarifgebiet. Die sich ergebenden Histogramme erlauben eine fundierte Beurteilung der Qualität des Wabensystems. Als einfache Kennzahlen können die durchschnittliche absolute Abweichung oder die maximale absolute Abweichung herangezogen werden. Bei diesen Kennzahlen sollten Abweichungen nach oben und nach unten gleich behandelt werden, so dass das Modell die Interessen der Verkehrsunternehmen und der Fahrgäste gleichermaßen wiedergibt.

Lösungsverfahren

Das Problem, eine optimale Wabeneinteilung zu finden, gehört erneut zu den besonders schwierigen Optimierungsproblemen, so dass mit einem effizienten exakten Verfahren derzeit nicht zu rechnen ist. Sind die Waben aber schon vorgegeben (zum Beispiel aus politischen Gründen), so ist das Teilproblem, bei gegebenen Waben die optimalen Preise für das Durchfahren von 1, 2, 3, ... Waben zu finden, sehr leicht lösbar. Für dieses Problem können Formeln angegeben werden, mit denen diese Wabenpreise bestimmt werden können. Aus diesem Ergebnis lassen sich außerdem untere Schranken für eine optimale Wabeneinteilung ableiten.

Um in annehmbarer Rechenzeit eine möglichst gute Wabeneinteilung zu bestimmen, muss man auf heuristische Ansätze zurückgreifen. Dabei kann man Algorithmen aus der Clustering-Theorie einsetzen, bei denen man im ersten Schritt mit so vielen Waben startet, wie es Haltestellen gibt. In den folgenden Schritten werden nach bestimmten Kriterien jeweils zwei Waben zusammengefasst, bis schließlich die gewünschte Wabenanzahl erreicht ist. Im Gegensatz dazu ist es auch möglich, zunächst einen aufspannenden Baum maximalen Gewichtes zu bestimmen und aus

diesem so viele Kanten zu entfernen, bis die Anzahl der entstehenden Zusammenhangskomponenten der gewünschten Wabenanzahl entspricht. Die erstgenannte Klasse führt bei einem Greedy-Kriterium, bei dem jeweils die Waben zusammengefasst werden, die die kleinste Verschlechterung der Zielfunktion erzielen, in der Regel zu besseren Lösungen.

Ausblick

In der Praxis muss das bisher behandelte Wabenproblem durch weitere Restriktionen ergänzt werden. Hierunter fallen Bedingungen an die Preistabelle, politische Restriktionen in der Wabeneinteilung und Sonderregelungen wie zum Beispiel leere Waben, so genannte Zählwaben, Haltestellen, die zu mehreren Waben gehören (so genannte *Überlappungsbereiche*), Kurzstreckentarife, Sonderpreisstufen oder Großwaben. Während das Einbeziehen solcher Nebenbedingungen in der Theorie kaum untersucht ist, wurde zur Planung und Evaluierung von Wabentarifen eine Software entwickelt, die in der Praxis bereits mehrmals erfolgreich eingesetzt wurde.

Die harmonische Reihe und einige ihrer Verwandten

von Hartwig Fuchs

David Hilbert (1862–1943), der wohl bedeutendste Mathematiker in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts beendete einen Brief vom 1.8.1890 an seinen Kollegen Adolf Hurwitz (1859–1919) mit dem Satz:

„... und seien Sie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ Mal begrüßt.“

Die von Hilbert angegebene nicht abbrechende „Summe“ heißt die *harmonische Reihe* H^1 , also

$$H: \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Bei der Namensgebung der Reihe H hat man vermutlich eine Anleihe bei der Musik gemacht. Jedem Ton entspricht eine bestimmte Schwingungszahl der Luft. Den Zusammenhang zweier Töne gewisser ganzzahliger Schwingungszahlen empfinden Musiker als harmonisch oder als disharmonisch je nachdem, in welchem Verhältnis V ihre Schwingungszahlen zueinander stehen. So werden musikalische Akkorde stufenweise von der Oktave ($V = 2 : 1$) über die Quinte ($V = 3 : 2$), die Quarte ($V = 4 : 3$), die große Terz ($V = 5 : 4$) und so weiter als immer weniger harmonisch gehört. Wenn man nun in H die Verhältnisse benachbarter Summanden berechnet, dann findet man für die ersten von ihnen:

$$\frac{1}{1} : \frac{1}{2} = 2 : 1; \quad \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2; \quad \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 4 : 3; \quad \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 5 : 4; \quad \dots$$

¹ siehe auch MONOID 94 (2008): Das Baseler Problem

und das sind gerade die Verhältniszahlen, die in der Musik die harmonischen Akkorde Oktave, Quinte und so weiter festlegen.

Anfangsstücke der harmonischen Reihe

Als Ausgangspunkt einer Untersuchung von H bieten sich ihre endlichen Teilsummen $H(n)$ an:

$$H(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \text{ mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Es gilt:

- (1) Die Teilsummen $H(1), H(2), H(3), \dots$ bilden eine (streng) monoton wachsende Zahlenfolge, denn $H(n+1) = H(n) + \frac{1}{n+1} > H(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Die Werte der ersten Zahlen $H(n)$ zeigen kein auffälliges Wachstumsverhalten (auf zwei Nachkommastellen genau):

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$H(n)$	1,00	1,50	1,83	2,08	2,28	2,45	2,59	2,72

Um daher einen zutreffenderen Eindruck vom Wachstumstempo der Folge H zu erhalten, berechnen wir $H(n)$ näherungsweise für einige größere Werte n (vergleiche unten (2)).

n	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	...	10^{10}	...	10^{100}
$H(n)$	2,9	5,2	7,5	9,8	12,0	14,4	16,7	...	23,6	...	230,8

Diese Liste lässt erkennen, dass die Teilsummen $H(n)$ der Folge H in einem zähen „Schneckentempo“ größer werden. Das wirft einige Fragen auf; etwa diese:

- Da kein Computer die riesigen Datenmengen zur Berechnung von beispielsweise $H(10^{10})$ bewältigen kann, wie kann man dann $H(n)$ zumindest näherungsweise für sehr große n bestimmen?
- Könnte es sein, dass für sehr große n die zugehörigen Zahlen $H(n)$ nur noch so geringfügig anwachsen, dass es für sie eine Barriere gibt, die sie nicht mehr „übersteigen“?

Eine Antwort auf die erste Frage hat Leonhard Euler², der kreativste und produktivste Mathematiker nicht nur des 18. Jahrhunderts, im Jahre 1781 mit einer Näherungsformel gegeben. Er bewies:

- (2) $H(n) - \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$, wobei $\gamma = 0,5772156649 \dots$ die sogenannte eulersche (manchmal auch mascheronische³) Konstante ist, welche Euler ohne Hilfe eines elektronischen Rechenknechts auf 16 Nachkommastellen berechnete!

² Leonhard Euler (1707–1783), schweizer Mathematiker, Physiker und Astronom

³ Lorenzo Mascheroni (1750–1800), italienischer Mathematiker

Ein Beispiel für die Güte der Euler-Formel (2): Für $n = 272\,400\,600$ und $\ln n = 19,422\,784\,335$ ist $\gamma + \ln n = 19,999\,999\,999$, während der mit einem Computer auf zehn Nachkommastellen berechnete Wert $H(n) = 20,000\,000\,0016$ ist.

Für die zweite Frage wurde bereits im Mittelalter von Nicole Oresme⁴ eine Antwort gefunden.

- (3) Die Glieder der Folge $H(n)$ wachsen über jede beliebig groß vorgegebene positive Schranke hinaus.

Oresme bewies diese Aussage, indem er zeigte:

$$(4) \quad H(2^n) \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot n \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

(4) gilt für $n = 1$ und $n = 2$. Es sei daher $n \geq 3$.

Dann ist

$$\begin{aligned} H(2^n) &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \frac{1}{2^{n-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1} + 2^{n-1}}\right) \\ &> \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2 \cdot 2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2}n. \end{aligned}$$

Aus der Monotonie (1) und der Abschätzung (4) folgt unmittelbar die Divergenz (3), denn für eine beliebig große positive Zahl s gilt:

$$\dots > H(2^{2s} + 2) > H(2^{2s} + 1) > H(2^{2s}) > 1 + \frac{1}{2} \cdot 2s > s.$$

Die harmonische Reihe

Weil es nach (3) zu jeder beliebig groß gewählten Schranke s stets einen Anfang $H(n)$ von H gibt so, dass $H(n)$ und die auf $H(n)$ folgenden Anfänge $H(n + 1)$, $H(n + 2)$, \dots , sämtlich $> s$ sind, übertrifft auch der „Wert“ von H jede solche Schranke s . Daher kann H keinen endlichen Wert besitzen. Man sagt:

- (5) Die harmonische Reihe divergiert gegen ∞ .

Bemerkenswerte Verwandte der harmonische Reihe

Aus der Reihe H lassen sich leicht neue Reihen erzeugen, indem man aus H bestimmte – und damit es interessant bleibt – unendliche viele Summanden herausnimmt.

Die Reihe H'

Streicht man in der Reihe H sämtliche Brüche weg, deren Nenner kein Vielfaches von 100 ist, dann erhält man eine Reihe, die mit H' und deren Anfänge mit $H'(n)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ bezeichnet seien:

⁴ Nicole Oresme (um 1323–1382), französischer Theologe und Mathematiker

$$H': \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots \text{ und } H'(n) = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{n \cdot 100}.$$

Zwischen den Anfängen von H' und von H besteht die Beziehung

$$(6) \quad H'(n) = \frac{1}{100} \cdot H(n).$$

Aus (6) folgt, dass (1) und (3) auch für die Anfänge von H' gelten und daraus ergibt sich wie bei der harmonischen Reihe H :

(7) Die Reihe H' divergiert gegen ∞ .

Ein bemerkenswertes Ergebnis: Wenn man aus der enorm langsam divergierenden Reihe H 99% aller Brüche herausstreicht, dann ist die Reihe H' immer noch divergent.

Die Reihe H^*

Wenn man aus der Reihe H sämtliche Brüche weglässt, in deren Nenner die Ziffer 9 vorkommt, dann sei H^* die so erhaltene Reihe:

$$H^*: \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{88} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{888} + \dots$$

Wir bezeichnen mit $H^*(n)$ die Summe der Brüche mit jeweils n -ziffrigen Nennern, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist, und mit $A(n)$ die Anzahl der Summanden in $H^*(n)$.

Dann sind

$$H^*(1) = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{8}$$

$$H^*(2) = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{18} \right) + \dots + \frac{1}{80} + \left(\frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{88} \right)$$

$$H^*(3) = \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{188} \right) + \dots + \frac{1}{800} + \left(\frac{1}{801} + \dots + \frac{1}{888} \right),$$

und so weiter mit $A(1) = 8$, $A(2) = 8 \cdot (1 + A(1))$ und $A(3) = 8 \cdot (1 + A(1) + A(2))$.

Ganz entsprechend geht es weiter, also $A(4) = 8 \cdot (1 + A(1) + A(2) + A(3))$ und so weiter (Beweis durch vollständige Induktion).

Nun gelten für $A(n)$ die Abschätzungen:

$$A(1) < 9; \quad A(2) = 8 \cdot 9 < 9^2; \quad A(3) = 8(1 + 8 + 8 \cdot 9) < 8(1 + 9 + 9^2) < 9^3 \\ \text{(hier wird } (9 - 1) \cdot (1 + 9 + 9^2) = 9^3 - 1 \text{ benutzt); } A(4) < 9^4 \text{ und so weiter} \\ \text{für } A(5), A(6), \dots$$

Aus diesen Abschätzungen folgt für $H^*(n)$:

$$H^*(1) < 9 \cdot \frac{1}{1} = 9$$

$$H^*(2) < 9^2 \cdot \frac{1}{10} = 9 \cdot \frac{9}{10}$$

$$H^*(3) < 9^3 \cdot \frac{1}{100} = 9 \cdot \frac{9^2}{10^2} \text{ und so weiter.}$$

Damit gilt für die Reihe H^* die wir durch $H^*(1) + H^*(2) + H^*(3) + \dots$ darstellen und abschätzen:

$$(8) \quad H^*: H^*(1) + H^*(2) + H^*(3) + \dots < 9 \cdot (1 + \frac{9}{10} + (\frac{9}{10})^2 + \dots) = 90.$$

Hier wurde die Summenformel für die geometrische Reihe $1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$ mit $x = \frac{9}{10}$ benutzt. Die Abschätzung besagt:

(9) Die Reihe H^* ist nicht divergent – sie besitzt einen endlichen Wert.

Historische Verwandte der harmonischen Reihe

Aus der harmonischen Reihe H lassen sich durch Weglassen von Summanden beliebig viele neue Reihen erzeugen. Von diesen seien hier nur zwei Typen historisch sehr interessanter Reihen angegeben.

Zeta-Reihen

Mit einem berühmten Beweis hat Leonhard Euler 1736 gezeigt, dass die sogenannte Zeta-Reihe $\zeta(2)$ der reziproken Quadratzahlen

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

konvergent ist und dass $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ist.

Bernhard Riemann⁵ hat die Reihe $\zeta(2)$ verallgemeinert zu den Zeta-Reihen

$$\zeta(s): \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \text{ mit reellen } s,$$

und sie zu einem wichtigen Werkzeug der Zahlentheorie gemacht.

Die Reihen $\zeta(s)$ sind für jedes $s > 1$ konvergent; insbesondere gilt zum Beispiel:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \dots$$

Reihen reziproker Primzahlen

Als Leonhard Euler aus der Reihe H sämtliche Summanden mit nicht primen Nennern entfernte, erhielt er eine von uns mit H_p bezeichnete Reihe,

$$H_p: \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots,$$

die noch viel langsamer als die harmonische Reihe H wächst, die aber erstaunlicherweise dennoch divergiert, wie er 1737 herausfand.

Dagegen konnte Viggo Brun⁶ 1920 zeigen, dass die hier H_z genannte Reihe der reziproken Primzahlen-Zwillinge

$$H_z: \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \dots$$

konvergent ist.

Aus der Divergenz der Reihe H_p leitete Leonhard Euler einen neuen Beweis her, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Ganz entsprechend hätte man mit der Divergenz von H_z leicht zeigen können, dass es unendlich viele Primzahlen-Zwillinge gibt. Und damit hätte Brun das schon lange in der Mathematik schwelende und

⁵ Bernhard Riemann (1826–1866), deutscher Mathematiker

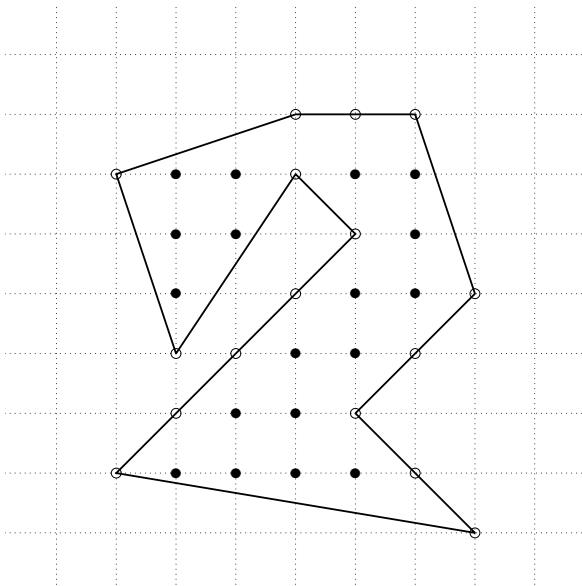
⁶ Viggo Brun (1885–1978), norwegischer Mathematiker

bis heute noch nicht gelöste Problem entschieden, ob die Anzahl der Primzahlen-Zwillinge endlich oder unendlich ist. Leider ist es aber nicht möglich, aus der Konvergenz der Reihe auf die Endlichkeit der Primzahlzwillinge zu schließen.

Der Satz von Pick

von Laura Biroth

Die Fläche eines so komplizierten Vielecks (Polygons) wie auf dem nebenstehenden Bild zu berechnen, sieht auf den ersten Blick wie eine ziemlich schwierigen Aufgabe aus. Wenn aber alle Ecken auf den Punkten eines Quadratgitters liegen (wir sprechen dann auch von einem Gittervieleck), kann man leicht berechnen, wie viele Kästchen das Polygon enthält. Nach dem Satz von Pick¹ muss man dazu nur die Anzahl I der Gitterpunkte im Inneren und die Anzahl K der Gitterpunkte auf den Kanten des Polygons (einschließlich der Ecken) zählen und erhält dann die Fläche F des Polygons nach der Formel



$$F = I + \frac{K}{2} - 1.$$

Auf dem Bild ist $I = 18$ (schwarze Punkte) und $K = 16$ (hohle Punkte), also $F = 25$. Kannst Du das durch geschicktes Unterteilen der Form nachrechnen?

Damit die Formel gilt, muss das Polygon nicht unbedingt konvex sein, es darf auch nach innen zeigende Ecken haben. Es ist aber nicht erlaubt, dass der Umriss der Figur sich selber schneidet, oder dass die Figur Löcher hat.

Um den obigen Satz zu beweisen, gehen wir in mehreren Schritten vor.

Zusammenkleben

Zuerst überlegt man sich folgende Aussage: Wenn die oben angegebene Formel für zwei Polygone gilt, dann auch für das Polygon, das entsteht, wenn man die beiden entlang eines Teiles Ihrer Kanten zusammenklebt. Dabei ist es egal, ob die verklebten Kanten Ecken enthalten oder nicht. Es darf aber nur ein zusammenhängendes Stück Kante sein und nicht mehrere.

¹ Georg Alexander Pick, 1859–1942

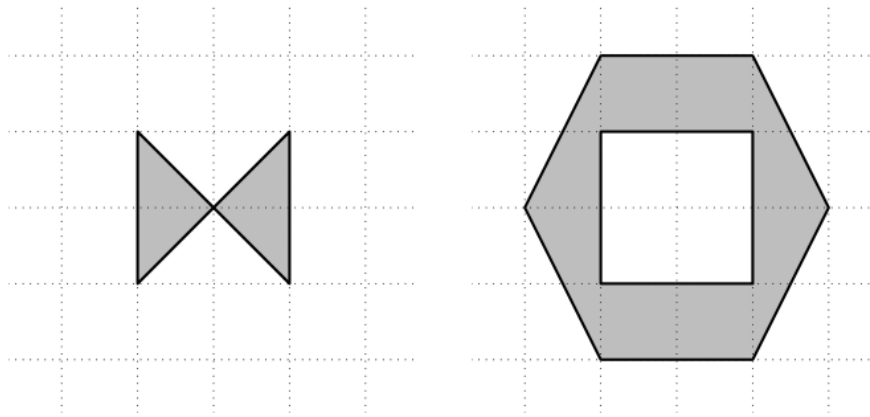


Abbildung 1: Für diese Polygone gilt die Formel nicht.

Beweis: Wir bezeichnen die Anzahl der Punkte im Inneren des ersten Polygons mit I_1 , die Anzahl der Randpunkte mit K_1 . Das zweite Polygon habe I_2 Gitterpunkte im Inneren und K_2 auf dem Rand. Die Anzahl der (auf dem Bild schwarz markierten) Punkte auf der Klebekante (ohne den Anfangs- und Endpunkt) nennen wir n .

Die inneren Punkte des neuen Polygons setzen sich dann zusammen aus den I_1 inneren Punkten des ersten und den I_2 inneren Punkten des zweiten Polygons. Dazu kommen noch n innere Punkte, die vorher auf dem Rand lagen. Es gilt also:

$$I_{neu} = I_1 + I_2 + n.$$

Vom ersten Polygon bleiben nach dem Zusammenkleben noch $K_1 - n$ Randpunkte übrig, vom zweiten Polygon $K_2 - n$. Rechnet man beides zusammen, so hat man aber die beiden Punkte am Anfang und Ende der Klebekanten, die auf dem Bild eingekringelt sind, doppelt gezählt, muss also noch 2 abziehen. Also ist

$$K_{neu} = (K_1 - n) + (K_2 - n) - 2 = K_1 + K_2 - 2n - 2.$$

Für die Fläche des neuen Polygons gilt natürlich $F_{neu} = F_1 + F_2$.

Wir nehmen jetzt noch an, dass für die beiden einzelnen Polygone die oben genannte Formel gilt, also

$$F_1 = I_1 + \frac{K_1}{2} - 1 \text{ und } F_2 = I_2 + \frac{K_2}{2} - 1$$

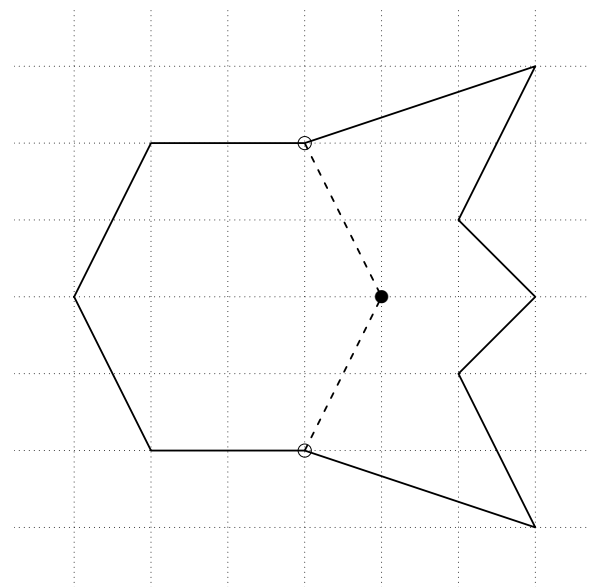


Abbildung 2: Hier ist $n = 1$.

und rechnen nach

$$\begin{aligned}
 I_{neu} + \frac{K_{neu}}{2} - 1 &= I_1 + I_2 + n + \frac{K_1 + K_2 - 2n - 2}{2} - 1 \\
 &= I_1 + I_2 + n + \frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2} - n - 1 - 1 \\
 &= I_1 + I_2 + \frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2} - 1 - 1 \\
 &= \left(I_1 + \frac{K_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{K_2}{2} - 1\right) \\
 &= F_1 + F_2 \\
 &= F_{neu}.
 \end{aligned}$$

Die Formel gilt dann also auch für das neue Polygon.

Es genügt also, wenn wir die Formel nur für ein geeignetes „Puzzleteil“ beweisen, aus dem wir jedes Polygon zusammensetzen können.

Abschneiden

Fast genauso kann man sich überlegen:

Wenn man von einem Polygon, für das die oben angegebene Formel gilt, durch einen einzigen Schnitt (mit oder ohne Ecken) ein Polygon abschneidet, für das die Formel ebenfalls gilt, dann gilt sie auch für den Rest.

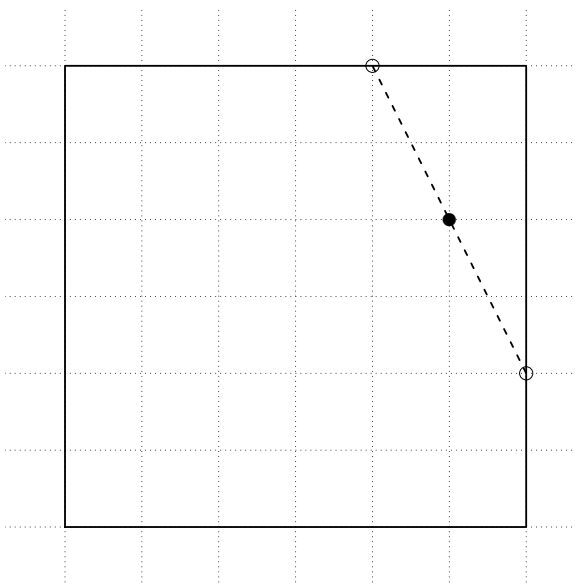
Beweis: Wenn wir mit I_1 bzw. K_1 die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren bzw. auf den Kanten des ursprünglichen Polygons bezeichnen, mit I_2 bzw. K_2 die entsprechenden Punktzahlen des abgeschnittenen Polygons und mit n die Anzahl der Gitterpunkte auf der Schnittkante (ohne Anfang und Ende), dann gilt:

Von den ursprünglich I_1 inneren Punkten werden I_2 entfernt und weitere n (im Bild schwarz markierte) verwandeln sich in Randpunkte.

$$I_{neu} = I_1 - I_2 - n.$$

Von den ursprünglich K_1 Randpunkten fallen $K_2 - n - 2$ weg, dafür entstehen entlang der Schnittkante n neue Randpunkte.

$$K_{neu} = K_1 - (K_2 - n - 2) + n = K_1 - K_2 + 2n + 2.$$



$$\begin{aligned}
I_{neu} + \frac{K_{neu}}{2} - 1 &= I_1 - I_2 - n + \frac{K_1 - K_2 + 2n + 2}{2} - 1 \\
&= I_1 - I_2 - n + \frac{K_1}{2} - \frac{K_2}{2} + n + 1 - 1 \\
&= I_1 - I_2 + \frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2} + 1 - 1 \\
&= \left(I_1 + \frac{K_1}{2} - 1\right) - \left(I_2 + \frac{K_2}{2} - 1\right) \\
&= F_1 - F_2 \\
&= F_{neu}.
\end{aligned}$$

Rechtwinklige Dreiecke

Jetzt kommen wir zur Sache und zeigen, dass die Formel für ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten beide parallel zu den Koordinatenachsen sind, richtig ist.

Seien a und b die Längen der beiden Katheten. Dann beträgt die Fläche des Dreiecks

$$F = \frac{ab}{2}.$$

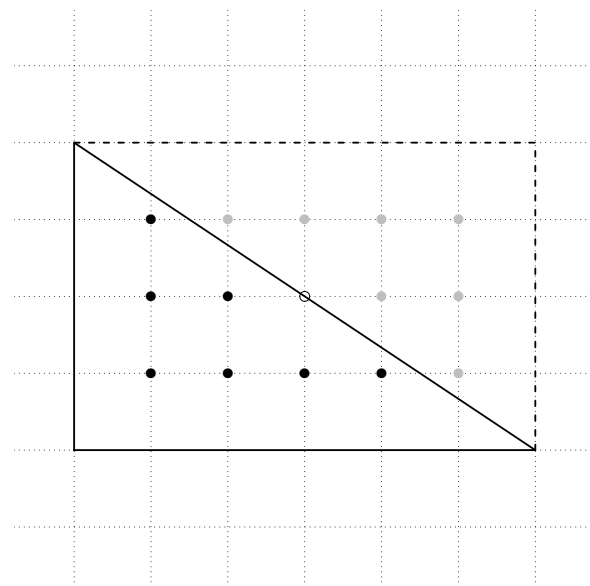
Sei n die Anzahl der Gitterpunkte auf der Hypotenuse (ohne die beiden Ecken gezählt). n lässt sich in Abhängigkeit von a und b ausrechnen, aber das ist etwas komplizierter und für unser Problem hier gar nicht notwendig.

Auf den beiden Katheten liegen $a - 1$ bzw. $b - 1$ Gitterpunkte. Dazu kommen noch die drei Ecken. Somit gilt:

$$K = (a - 1) + (b - 1) + n + 3 = a + b + n + 1.$$

Um die Gitterpunkte im Inneren zu zählen, stellt man sich vor, dass man das Dreieck durch ein zweites identisches Dreieck zu einem Rechteck ergänzt. Das Rechteck enthält $(a - 1) \cdot (b - 1)$ innere Punkte. Davon liegen aber n (eingekringelte) tatsächlich auf der Hypotenuse des Dreiecks. Die Übrigen verteilen sich zu gleichen Teilen auf die beiden Dreiecke (schwarz bzw. grau). Für die Anzahl der inneren Punkte ergibt sich also:

$$I = \frac{(a - 1) \cdot (b - 1) - n}{2}.$$



Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
 I + \frac{K}{2} - 1 &= \frac{(a-1) \cdot (b-1) - n}{2} + \frac{a+b+n+1}{2} - 1 \\
 &= \frac{(a-1) \cdot (b-1) + 1 + a + b}{2} - 1 \\
 &= \frac{ab - a - b + 1 + 1 + a + b}{2} - 1 \\
 &= \frac{ab + 2}{2} - 1 \\
 &= \frac{ab}{2} \\
 &= F.
 \end{aligned}$$

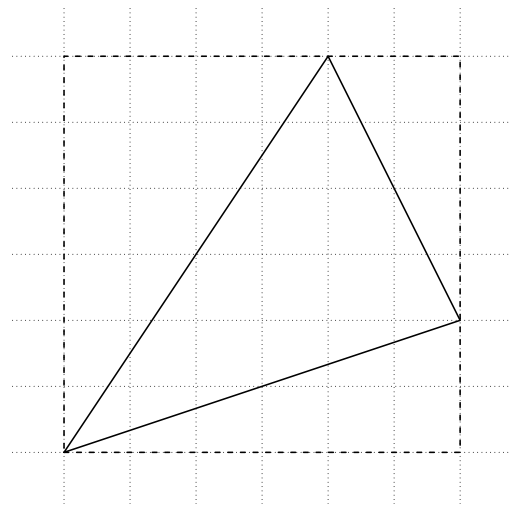
Rechtecke

Ab jetzt zählen wir keine Punkte mehr, sondern benutzen die Formel für rechtwinklige Dreiecke und die Abschneide- und Anklebe-Regeln von oben.

Damit gilt die Formel auch für Rechtecke, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind, denn ein Rechteck lässt sich immer wie auf der Abbildung des Dreiecks angedeutet aus zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen.

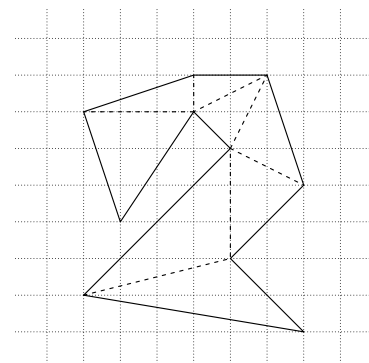
Dreiecke

Jetzt betrachten wir ein beliebiges Dreieck. Darum herum kann man immer ein achsenparalleles Rechteck legen, das das Dreieck mit allen drei Ecken berührt. Man erhält dann das gewünschte Dreieck, indem man von dem Rechteck zwei oder drei rechtwinklige Dreiecke abschneidet. Weil wir die Formel bereits für Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke bewiesen haben und die Abschneideregelt gilt, stimmt die Formel auch für beliebig schiefe Dreiecke.



Vielecke

Ein beliebiges Polygon lässt sich immer in Dreiecke zerlegen. Das Dreieck ist also unser gesuchtes Puzzleteil. Da wir die Formel für Dreiecke bereits bewiesen haben und die Ankleberegelt gilt, muss sie also für beliebige Gittervielecke stimmen.



Mitteilung



Herzlichen Glückwunsch!

MONOID,
das Mathematikblatt für
Mitdenkerinnen und Mitdenker,
belegt den 1. Platz des Aufgabenwettbewerbs
„Mathe im Advent 2013“.

Die Aufgabe „Glück in den Sternen“ wurde zur
beliebtesten eingereichten Aufgabe der
Klassenstufen 7-9 gewählt.



Im Namen des gesamten
Mathe-im-Advent-Teams gratuliert

Professor Dr. Jürg Kramer
Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung



„Alle Jahre wieder...“ bietet die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) mathematische Adventskalender im Internet an. Jeden Tag vom 1. bis 24. Dezember können mathematikinteressierte Schüler eine Tür des Kalenders öffnen und eine interessante Knobelaufgaben lösen. Wie jedes Jahr haben wir von der Monoid-Redaktion auch 2013 Aufgaben für den Kalender eingereicht und tatsächlich wurde eine dieser Aufgaben von den Lösern zur beliebtesten Aufgabe gewählt. Über diese Auszeichnung freuen wir uns sehr und bedanken uns bei allen, die sich bei der Wahl beteiligt haben. Wir werden auch dieses Jahr wieder Vorschläge einreichen.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 116

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Schokolade brechen

Konrad hat sich eine 5×6 -Schokolade gekauft. Täglich möchte er ein 1×1 -Stück essen. Deshalb bricht er seine Schokolade in 1×1 -Stücke, ohne abgebrochene übereinander zu legen und dann zu brechen. Als er fertig ist hat er 30 Stückchen und freut sich. „Ich habe 29-mal gebrochen und jetzt die 5×6 -Tafel in 30 kleine 1×1 -Stücke verwandelt“, meint Konrad stolz. Aber gleich darauf fragt er sich, ob man es auch in weniger als 29 Brechungen machen kann. „Nein“, glaubt er, „ich hatte doch die beste Brechtaktik.“

Hat Konrad Recht oder geht es doch mit weniger Brechungen?

(Lukas Nießen, Klasse 6, Gymnasium Nonnenwerth, Remagen)

Lösung:

Zerteilt Konrad eine Tafel Schokolade irgendwo, so hat er zwei Teile und einmal gebrochen. Teilt er dann eines dieser Stücke, so hat er insgesamt drei Teile und zweimal gebrochen. Das geht immer so weiter. Er hat also immer ein Stück mehr als er Brechungen durchgeführt hat.

Also kann es weder mit mehr noch mit weniger Brechungen schaffen.

II. Dreistellige Zahlen

- Wie viele verschiedene Zahlen lassen sich aus der dreistelligen Zahl 314 durch Umstellungen ihrer Ziffern bilden?
- Zeige, dass die Summe aller dieser Zahlen durch 37 teilbar ist.
- Entscheide und begründe, ob die Summe aller Umstellungen einer allgemeinen dreistelligen Zahl abc , wobei a , b und c alle verschieden sind, immer durch 37 teilbar ist. (WJB)

Lösung:

- Da die drei Ziffern 3, 1 und 4 alle verschieden sind, gibt es die $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten 314, 341, 134, 143, 431 und 413.
- Es sei $S = 314 + 341 + \dots + 413 = (100 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 4) + (100 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 1) + \dots + (100 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 3) = 222 \cdot 3 + 222 \cdot 1 + 222 \cdot 4 = 37 \cdot 6 \cdot (3 + 1 + 4) = 37 \cdot 48$. Die Summe ist also durch 37 teilbar.
- Genau wie in b) können wir die Summe der Umstellungen schreiben als: $S = abc + acb + \dots + cba = \dots = 222a + 222b + 222c = 37 \cdot 6 \cdot (a + b + c)$. Die Summe ist also immer durch 37 teilbar.

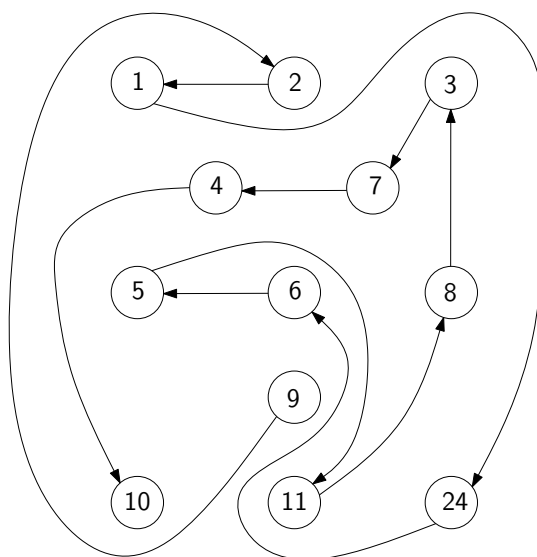
III. Zahlenknochelei

Verbinde die zwölf Zahlen durch einen sich nicht selbst überquerenden Linienzug, in dem jede Zahl genau einmal vorkommt! Schreibe dann die zwölf Zahlen in der Reihenfolge, in der sie der Linienzug durchläuft, nebeneinander, sodass eine 15-stellige Zahl entsteht. Der Linienzug ist so zu wählen, dass die 15-stellige Zahl durch 2, 3, 5 und 11 teilbar ist. (H.F.)

1	2	3
	4	7
5	6	8
	9	
10	11	24

Lösung:

Es gibt mehr als eine Lösungszahl; 921246511837410 ist eine mögliche Lösungszahl.



Für alle möglichen Anordnungen der zwölf Zahlen ist die Quersumme gleich 54, die entstehende 15-stellige Zahl ist also in jedem Fall durch 3 teilbar. Damit die Zahl durch 2 und 5 teilbar ist, muss die Einerziffer gleich 0 sein, die 10 muss also am Ende des Linienzugs stehen. Für die Teilbarkeit durch 11 muss man die Zahlen so anordnen, dass die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist (im Beispiel ist die alternierende Quersumme gleich $27 - 27 = 0$, also durch 11 teilbar).

IV. Drei Zahlen gesucht

- Multipliziert man die Summe von drei natürlichen Zahlen jeweils mit einer der Zahlen, so erhält man 210, 330 und 360. Bestimme die drei Zahlen.
- Multipliziert man die Summe von drei natürlichen Zahlen jeweils mit der Summe zweier dieser Zahlen, so erhält man 240, 260 und 300. Bestimme die drei Zahlen. (WJB)

Lösung:

- Wir nennen die drei Zahlen a , b und c . Dann gilt: $a(a + b + c) = 210$, $b(a + b + c) = 330$ und $c(a + b + c) = 360$. Addition dieser drei Gleichungen

ergibt: $(a + b + c)^2 = 900$, also $a + b + c = 30$ und somit $a = \frac{210}{30} = 7$,
 $b = \frac{330}{30} = 11$ und $c = \frac{360}{30} = 12$.

b) Wir nennen erneut die drei Zahlen a , b und c und erhalten die drei Gleichungen:
 $(a+b)(a+b+c) = 240$, $(b+c)(a+b+c) = 260$ und $(a+c)(a+b+c) = 300$.
 Addition dieser Gleichungen ergibt $2(a+b+c)^2 = 800$, also $(a+b+c)^2 = 400$
 und damit $a + b + c = 20$. Wir erhalten also $a + b = 12$, $b + c = 13$ und
 $a + c = 15$. $c - a = (c + b) - (a + b) = 13 - 12 = 1$ zusammen mit
 $a + c = 15$ ergibt $c = 8$, $a = 7$ und schließlich $b = 20 - a - c = 5$.

V. Wo liegt der Fehler?

Es seien x , y und z Zahlen mit $x = y$ und $z \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} (1) \ x^2 = xy, & (2) \ x^2 = y^2, & (3) \ xz = yz. \\ \text{Aus (1) folgt} & x^2 - xy = xy - x^2, & \\ \text{danach mit (2)} & x^2 - xy = xy - y^2 & \\ \text{und mit (3)} & x^2 - xy = xy - y^2 + (xz - yz) & \\ \text{und schließlich} & (4) \ x(x - y) = (y + z)(x - y). & \\ \text{Somit ist} & (5) \ x = y + z. & \end{array}$$

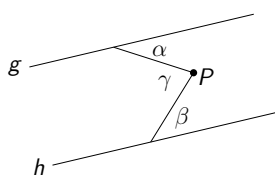
Wegen $z \neq 0$ steht die Gleichung (5) im Widerspruch zur Voraussetzung $x = y$.
 Wie ist dieser Trugschluss entstanden? (H.F.)

Lösung:

Ein Verstoß gegen eine mathematische Regel innerhalb einer Kette von Schlüssen führt zu einem Trugschluss. Tatsächlich findet sich in der Kette (1) bis (5) eine Missachtung der Divisionsregel, dass man nicht durch 0 dividieren darf. Beim Übergang von (4) nach (5) wird durch $x - y$ und deshalb wegen $x = y$ durch 0 dividiert.

VI. Winkelbestimmung

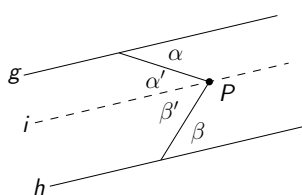
Es seien g und h parallele Geraden und P sei ein Punkt zwischen g und h . Die Winkel α und β (siehe nebenstehende Figur) seien bekannt.



a) Es seien $\alpha = 33^\circ$ und $\beta = 45^\circ$. Wie groß ist der Winkel γ ?

b) Die Winkel α und β seien nun allgemein. Wie groß ist der Winkel γ in Abhängigkeit von α und β ? (H.F.)

Lösung:



Es sei i die Parallele zu g und h durch den Punkt P . Mit den Bezeichnungen der Figur gilt dann $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ (Wechselwinkel an Parallelen). Wegen $\gamma = \alpha' + \beta'$ gilt daher $\gamma = \alpha + \beta$. Für Aufgabenteil a) erhalten wir also $\gamma = 78^\circ$.

VII. Suchalgorithmus

Die 24. Auflage des Duden enthält rund 130 000 Stichwörter. Klassenprimus Anton behauptet, er könne ein von Dir beliebig ausgewähltes Wort finden, wenn Du ihm erlaubst, zwanzig Fragen zu stellen die Du mit „ja“ oder „nein“ beantwortest.

Hat Anton Recht? (WJB)

Lösung:

Anton beginnt mit der Frage: „Ist es ein Wort aus der ersten Hälfte des Duden?“ Danach fragt er nach, ob es in der ersten Hälfte des Teils, der sich aus der Antwort ergibt, enthalten ist. So halbiert er mit jeder Frage die Anzahl der verbliebenen Möglichkeiten. Da $2^{17} \approx 130000 < 2^{18}$, reichen ihm sogar 18 Fragen aus.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Lichtspiele

Von den Schülern, die morgens in den Klassenraum kommen, drücken manche den Lichtschalter, andere nicht. Wir wissen, dass der erste Schüler das Licht einschaltet und dass die Schalterstellung nach dem vierten Schüler anders ist als nach dem zweiten. Der sechste und siebte Schüler gehen achtlos am Lichtschalter vorbei. Nach dem siebten Schüler brennt das Licht.

Wie viele Schüler haben die Lichtschalter betätigt? (WJB)

II. Betriebsratwahl – Teil I

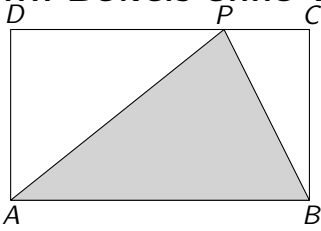
Der Betriebsrat ist sozusagen die „SV“ einer Firma. Vielleicht haben Deine Eltern auf ihrer Arbeit ja auch einen Betriebsrat oder sind sogar gewählte Betriebsräte – frag mal nach. Es gibt ein eigenes Gesetz, das die Rechte und Pflichten eines Betriebsrates regelt, das Betriebsverfassungsgesetz (BetrVG). Im § 15 finden sich Vorgaben zur „Zusammensetzung nach Beschäftigungsarten und Geschlechtern“. In Absatz 2 heißt es: „Das Geschlecht, das in der Belegschaft in der Minderheit ist, muss mindestens entsprechend seinem zahlenmäßigen Verhältnis im Betriebsrat vertreten sein, wenn dieser aus mindestens drei Mitgliedern besteht.“ (Die Mitgliederzahl wird in einem anderen Paragraphen vorgeschrieben und richtet sich nach der Gesamtzahl der wahlberechtigten Arbeitnehmer.)

a) Berechne jeweils die gesetzlich garantierte Mindestzahl der Mitglieder des Geschlechts, das in der Minderheit ist, wenn der § 15, so wie er formuliert ist, wörtlich und mathematisch korrekt angewendet wird:

- 1 Mann und 20 Frauen (drei Mitglieder)
- 17 Männer und 33 Frauen (drei Mitglieder)
- 49 Frauen und 50 Männer (fünf Mitglieder)

- b) Kommentiere kurz: Sind diese Zahlen im Sinne dessen, was der Gesetzgeber bei dieser Vorschrift beabsichtigt hat? Begründe und mache gegebenenfalls einen Vorschlag, wie sich das Problem lösen lässt. (MG)

III. Beweis ohne Worte



In einem Rechteck $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt der Seite CD . Begründe anschaulich, dass die Fläche des Dreiecks $\triangle PAB$ halb so groß ist wie die Fläche des Rechtecks $ABCD$. (Rechnen mit Formeln ist hier nicht erlaubt.) (H.F.)

IV. Wahr oder falsch?

Bildet man von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen jeweils die Quersumme (= Summe ihrer Ziffern), so ist immer eine dieser Quersummen durch 4 teilbar. (WJB)

V. Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

Stelle die...

- Aufgabennummer,
- Seitenzahl 26,
- aktuelle Heftnummer 117 sowie
- aktuelle Jahreszahl 2014

jeweils als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sowohl mit möglichst wenig (jedoch mindestens zwei) als auch mit möglichst vielen Summanden dar.

Bemerkung: Es genügt hier, die Darstellungen anzugeben. Eine Begründung, dass es keine Darstellungen mit weniger beziehungsweise mehr Summanden gibt, wird nicht verlangt. (MG)

VI. Zahl und Ziffernprodukt

Gibt es eine Zahl, deren Ziffernprodukt 8610 ist? (H.F.)

VII. Die Sehen-und-Sagen-Folge

Mathis' Mathematiklehrer meint: „Ich werde jetzt die ersten sechs Glieder einer Folge anschreiben:“ 1; 11; 21; 1211; 111221; 312211. „So. Mathis, kannst du mir sagen, wie man auf das nächste Glied der Sehen-und-Sagen-Folge kommt?“

- Kannst Du Mathis helfen?
- Berechne das achte Glied der Folge!

Hinweis: Der Name „Sehen-und-Sagen-Folge“ gibt einen Hinweis!

(Lukas Nießen, Klasse 6, Gymnasium Nonnenwerth, Remagen)

Neue Aufgaben

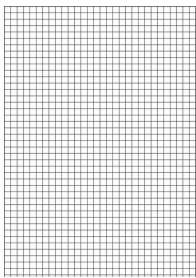
Klassen 9–13

Aufgabe 1092: Summe aufeinanderfolgender Zahlen

Verena hat ein wenig mit Zahlen „experimentiert“ und festgestellt, dass sich 2013 beispielsweise als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen schreiben lässt, nämlich $1006 + 1007 = 2013$, oder auch von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, nämlich $670 + 671 + 672$. Sie erkennt aber auch schnell, dass beides für 2014 nicht möglich ist.

- Begründe, warum sich 2014 nicht als Summe von zwei oder drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt.
- Verena findet aber eine Darstellung von 2014 als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Gib diese Summendarstellung an.
- Welche Blöcke von $n \geq 2$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen haben als Summe 2014? (MG)

Aufgabe 1093: Prozentrechnung



David sitzt an seinen Mathematik-Hausaufgaben. Prozentrechnung! Während er rechnet fragt er sich: „Wieviel Prozent des karierten Papiers ist eigentlich schwarz?“

Er misst nach: Das Blatt (vergleiche nebenstehende Abbildung) ist 210 mm breit und (etwas vereinfacht) 300 mm hoch, die Karokästchen sind vom linken Rand zum linken Rand des benachbarten Kästchens 5 mm breit, die Linien 0,4 mm dick.

- Löse Davids Aufgabe: Wieviel Prozent des karierten Papiers ist wegen der Linien schwarz gefärbt?
- Gib das Verhältnis der schwarz gefärbten Fläche zur weißen Fläche an. (MG)

Aufgabe 1094: Konstruierbare Winkel

Gib möglichst viele ganzzahlige Winkel an (zwischen 0° und 90°), die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

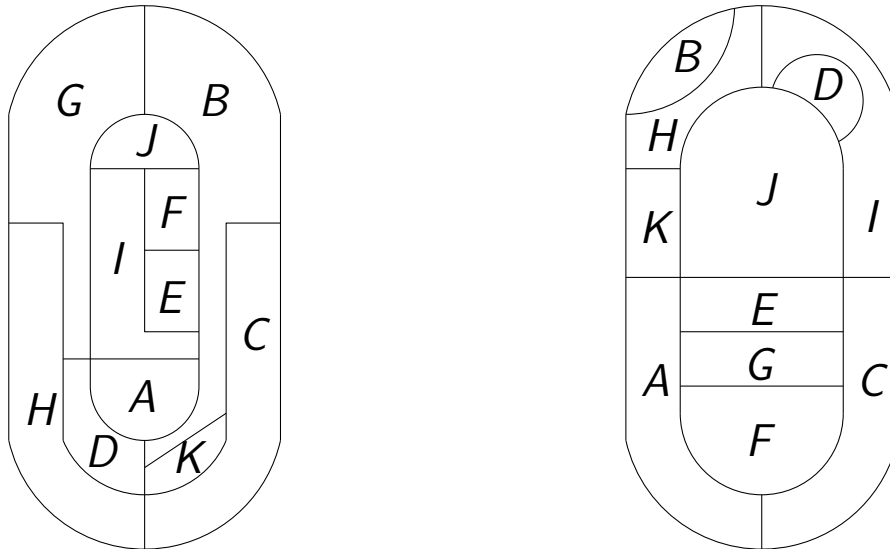
Bemerkung: Gib jeweils an, wie sich die Winkel konstruieren lassen. Ein Beweis für die Nichtkonstruierbarkeit der übrigen Winkel ist nicht nötig.

Hinweis: Denke an das regelmäßige Fünfeck. (Stefan Krause, Saarbrücken)

Aufgabe 1095: Phantasia und Ypsilon

Der Planet Phantasia hat einen Mond Ypsilon. Auf Phantasia gibt es elf Länder: A-Land, B-Land, . . . , K-Land. Jedes dieser Länder besitzt eine Kolonie auf Ypsilon. In der Abbildung findest Du eine Karte von Phantasia (links) sowie von Ypsilon (rechts).

- a) Kannst Du die beiden Karten so mit acht Farben einfärben, dass auf keiner Karte zwei Länder der gleichen Farbe an einer Karten zusammenstoßen (einander berührende Ecken sind erlaubt)?
- b) Ist das auch mit weniger Farben möglich? Wenn ja, wie? Wenn nicht, warum nicht? (LB)



Aufgabe 1096: Zufällig richtig?

Wenn Du zur Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Deine Antwort richtig?“ eine der folgenden Antwortmöglichkeiten rein zufällig ankreuzt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Deine Antwort dann richtig?

- a) 25%
 b) 50%
 c) 75%
 d) 25%

(gefunden in der Aachener Zeitung von WJB)

Aufgabe 1097: Quadrate-Siebtel

Zeige: Teilt man eine Quadratzahl durch 7, so bleibt niemals der Rest 3, 5 oder 6. (WJB)

Aufgabe 1098: Produkt und Summe zweier Zahlen

Zeige: Wenn das Produkt zweier positiver Zahlen 1 ist, dann ist ihre Summe ≥ 2 . (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 116

Klassen 9–13

Aufgabe 1085: Pause beim Kartenspiel

Das Kartenspiel „Wizards“ läuft so ab: In der ersten Runde erhält jeder Spieler eine Karte in die Hand, eine sogenannte Handkarte, in der zweiten Runde zwei,

in der dritten Runde drei usw. bis zur letzten Runde 15, in der jeder Spieler 15 Karten erhält. In jeder Runde spielen die Teilnehmer reihum jeweils eine Karte aus (ein sogenannter „Stich“), bis alle Handkarten aufgebraucht sind. Die erste Runde besteht also aus einem Stich, die letzte Runde aus 15 Stichen. Wenn die Kartenspieler bei der Hälfte der Stiche Pause machen wollen, nach welcher Runde müssen sie diese dann einlegen?

(Bettina Diller, Städtische Berufsschule für Informationstechnik München)

Lösung:

Sei x die Anzahl der Runden, so lässt sich die Anzahl der Stiche n mit der Formel $n = \frac{1}{2}(x+1) \cdot x$ berechnen. Für 15 Runden erhält man somit $\frac{1}{2}(15+1) \cdot 15 = 120$ Stiche. Die Hälfte ist also bei 60 Stichen erreicht, nun muss man nur noch die Anzahl der Runden x mit obiger Formel für $n = 60$ berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+1) \cdot x &= 60 \\ \frac{x^2 + x}{2} &= 60 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 60 &= 0. \end{aligned}$$

Mit der quadratischen Lösungsformel erhält man nun für x näherungsweise die möglichen Lösungen $x_1 \approx -11,47$ und $x_2 \approx 10,47$. Dabei entfällt x_2 , da $x > 0$. Die Spieler sollten also nach 10 oder 11 Runden ihre Pause einlegen.

Aufgabe 1086: Verkalktes Rohr

In einem Rohrstück mit kreisförmigem Querschnitt von 65cm Innendurchmesser und 1m Länge hat sich an der Wandfläche eine 5mm dicke Kalkschicht abgesetzt. Wieviel Prozent des Rohrvolumens geht dadurch verloren? (WJB)

Lösung:

Das ursprüngliche Volumen ist (in cm^3 gerechnet) $32,5^2 \cdot \pi \cdot 100 = 105625 \cdot \pi$. Das verbleibende Volumen (ebenfalls in cm^3) ist $32^2 \cdot \pi \cdot 100 = 102400 \cdot \pi$. Als Verhältnis der beiden Volumina erhalten wir daher $\frac{102400\pi}{105625\pi} = \frac{102400}{105625} \approx 0,97$. Also beträgt das neue Volumen ungefähr 97% des ursprünglichen Volumens und circa 3% sind verloren gegangen.

Aufgabe 1087: 100 gewinnt

Ein Spiel beginnt bei 0. Danach wählen zwei Spieler jeweils eine der Zahlen 1, 2, ..., 9. Diese wird zur bisher erreichten Summe addiert. Gewonnen hat, wer als erster die Summe 100 (oder mehr) erreicht.

Kann einer der beiden Spieler bei geschickter Wahl seiner Zahlen sicher sein zu gewinnen? (WJB)

Lösung:

Der zweite Spieler hat eine Erfolgsmethode. Er ergänzt jedes Mal die vom ersten Spieler gewählte Zahl zu 10 und erreicht damit nacheinander die Summen 10, 20, ..., 100.

Aufgabe 1088: Gleichungssystem

Bestimme die Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x - y &= 65 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 13\end{aligned}$$

(H.F.)

Lösung:

Es ist $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 65$. Mit $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 13$ folgt daraus $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{65}{13} = 5$. Damit haben wir ein neues Gleichungssystem $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 13$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5$. Durch Addition ergibt sich $2\sqrt{x} = 18$, also $x = 81$ und durch Subtraktion $2\sqrt{y} = 8$, also $y = 16$.

Aufgabe 1089: Größter gemeinsamer Teiler

Jasmin untersucht die Folge der Zahlen $p^4 - 1$, wobei p eine Primzahl ≥ 5 ist.

- Gib die ersten vier Folgenglieder an.
- Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT) aller Zahlen dieser Folge.
(H.F.)

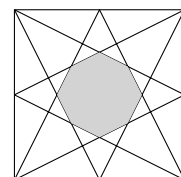
Lösung:

- 624, 2400, 14640, 28560.
- Es ist $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$, p eine Primzahl ≥ 5 . Für die drei aufeinander folgenden Zahlen $p - 1$, p , $p + 1$ gilt: Da p ungerade ist, muss eine der Zahlen $p - 1$, $p + 1$ ein Vielfaches von 4 und die andere ein Vielfaches von 2 sein, und, weil p eine Primzahl > 3 ist, ist entweder $p - 1$ oder $p + 1$ ein Vielfaches von 3. Also ist $(p - 1)(p + 1)$ ein Vielfaches von $2 \cdot 4 \cdot 3$. Weiter ist $p^2 + 1$ ein Vielfaches von 2, da p^2 ungerade ist. Folglich ist $p^4 - 1$ für jedes $p \geq 5$ ein Vielfaches von $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$. Da $624 = 48 \cdot 13$ und $2400 = 48 \cdot 50$ ist, ist 48 bereits der ggT von 624 und 2400 und damit aller Folgenglieder.

Aufgabe 1090: Achteck im Quadrat

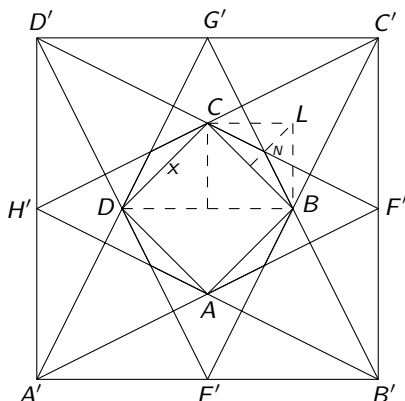
Verbindet man die Seitenmitten eines Quadrates jeweils mit den gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein Achteck, siehe Skizze.

Bestimme den Flächenanteil des Achtecks. (AK)



Lösung:

Das Quadrat habe die Seitenlänge a . Um den Flächeninhalt des Achtecks zu bestimmen, zerlegen wir es in ein Quadrat und vier gleichschenklige Dreiecke:



1. Berechnung des Flächeninhalts des Quadrates $ABCD$:

Die Strecke DB ist die Diagonale des Quadrates. Wir behaupten: $|DB| = \frac{a}{2}$.

Beweis: Nach dem Strahlensatz ist

$$\frac{|DB|}{|E'B|} = \frac{|D'C'|}{|C'E'|}, \text{ also } |DB| = \frac{|D'C'| \cdot |E'B|}{|C'E'|}.$$

Mit $|C'E'| = 2|E'B|$ ist dann $|DB| = \frac{a \cdot |E'B|}{2 \cdot |E'B|} = \frac{a}{2}$. Mit Hilfe der Länge der Diagonalen lässt sich nun die Seitenlänge x des Quadrates $ABCD$ berechnen. Allgemein gilt für die Länge d der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge x : $d = \sqrt{2}x$. Also ist in unserem Fall $\frac{a}{2} = \sqrt{2}x$ beziehungsweise $x = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Die Fläche A_1 des Quadrates $ABCD$ ist also

$$A_1 = x^2 = \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{8}a^2.$$

2. Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle CBN$:

Wir betrachten das Dreieck $\triangle CBL$. Die Seitenhalbierenden des Dreiecks schneiden sich im Punkt N . N teilt daher die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1. Damit ist die Höhe h des Dreiecks $\triangle CBN$ genau ein Drittel der Höhe des Dreiecks $\triangle CBL$. Andererseits beträgt die Höhe des Dreiecks $\triangle CBL$ die Hälfte der Seitenlänge x des Quadrates $ABCD$. Damit folgt:

$$h = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{6} = \frac{a}{24}\sqrt{2}$$

und somit ist die Fläche A_2 des Dreiecks $\triangle CBN$:

$$A_2 = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{24}}{2} = \frac{1}{96}a^2.$$

3. Berechnung des Flächeninhalts A_3 des Achtecks:

$$A_3 = A_1 + 4A_2 = \frac{1}{8}a^2 + 4 \cdot \frac{1}{96}a^2 = \frac{1}{6}a^2.$$

Der Flächeninhalt des Achtecks ist also $\frac{1}{6}$ des Flächeninhalts des Quadrates $A'B'C'D'$.

Aufgabe 1091: Ein Näherungsverfahren für \sqrt{n}

Seit etwa 500 v. Chr. wusste man, dass zumindest für kleine natürliche Zahlen n die Wurzeln \sqrt{n} immer dann keine Bruchzahlen sind, wenn n keine Quadratzahl ist. Man musste sich daher mit rationalen Näherungswerten von \sqrt{n} begnügen. Theon von Smyrna (um 100 n. Chr.), von dem die Schrift „Expositio rerum mathematicum ...“ (etwa: „Erklärung mathematischer Sachen“) überliefert ist, beschreibt ein Verfahren zur Approximation von $\sqrt{2}$, das in einer auf \sqrt{n} , $n \geq 2$, verallgemeinerten Form lautet:

Es sei $\frac{a}{b}$ ein Näherungswert von \sqrt{n} , wobei a, b, n natürliche Zahlen, n keine Quadratzahl, sind. Dann ist $\frac{a+nb}{a+b}$ ein besserer Näherungswert für \sqrt{n} .

- Berechne mit diesem Verfahren einen auf vier Stellen nach dem Komma genauen Näherungswert für $\sqrt{2}$, ausgehend von $\frac{7}{5}$.
- Begründe Theons Näherungsverfahren für $n \geq 2$. (H.F.)

Lösung:

a) $n_1 = \frac{7}{5}$, $n_2 = \frac{17}{12}$, $n_3 = \frac{41}{29}$, $n_4 = \frac{99}{70} \approx 1,41429$, $n_5 = \frac{239}{169} \approx 1,41420$.

b) Es sei $\frac{a}{b}$ eine Näherung für \sqrt{n} , sobald $\frac{a}{b}$ einen Abstand < 2 von \sqrt{n} hat.

1. Fall: Es sei $\frac{a}{b} < \sqrt{n}$ und $\sqrt{n} - \frac{a}{b} = \varepsilon$, $\varepsilon < 2$.

Dann wollen wir zeigen, dass gilt:

$$\frac{a+bn}{a+b} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \frac{a}{b} \text{ und deshalb}$$

$$(1) \quad \frac{a+bn}{a+b} + \frac{a}{b} < 2\sqrt{n}.$$

Es ist $\frac{a+bn}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}+n}{\frac{a}{b}+1}$. Setzt man nun $\frac{a}{b} = x$, so beweisen wir

$$(2) \quad \frac{x+n}{x+1} + x < 2\sqrt{n}.$$

Aus $x < \sqrt{n}$ folgt

$$(3) \quad x + 1 - \sqrt{n} < 1.$$

Annahme: Es gelte

$$(4) \quad x + 1 - \sqrt{n} \leq -1.$$

Dann ist nach Voraussetzung $\sqrt{n} - x = \varepsilon$ mit $\varepsilon \leq 2$. Aus (4) ergibt sich damit $\sqrt{n} - \varepsilon + 1 - \sqrt{n} \leq -1$, also ist $-\varepsilon \leq -2$ und daher $\varepsilon \geq 2$ – ein Widerspruch. Die Annahme ist falsch – es gilt:

$$(5) \quad -1 < x + 1 - \sqrt{n}.$$

Wir fassen (3) und (5) zusammen zu $(x + 1 - \sqrt{n})^2 < 1$. Daraus folgt $(x + 1)^2 - 2\sqrt{n}(x + 1) + n < 1$, also

$$(6) \quad x + n + x^2 + x < 2\sqrt{n}(x + 1).$$

Aus (6) ergibt sich durch Division durch $x + 1$ die Behauptung (2).

2. Fall: Es sei $\frac{a}{b} > \sqrt{n}$.

Dann beweist man mit $\frac{a}{b} = x$ die Ungleichung $\frac{x+n}{x+1} + x > 2\sqrt{n}$ ganz entsprechend wie im 1. Fall, woraus dann die Behauptung $\frac{a}{b} - \sqrt{n} > \frac{a+nb}{a+b}$ folgt.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik – von Martin Mattheis

Marcus du Sautoy: „Eine mathematische Mystery Tour durch unser Leben“

Marcus du Sautoy, Autor des Mathematik-Bestsellers „Die Musik der Primzahlen“ und Professor für Mathematik an der Universität Oxford nimmt seine Leser – wie im Titel angegeben – mit durch eine mathematische Mystery-Tour durch unser Leben. Was muss man sich unter einer solchen Tour vorstellen? Das erste Kapitel beginnt mit der Betrachtung von Zahlen, die unser Leben allgegenwärtig begleiten. Dabei kommt man sehr schnell mit den Primzahlen in Berührung, die dann im restlichen Kapitel 1 (nach heutiger Auffassung keine Primzahl) eingehend untersucht werden.

Kapitel 2 widmet sich der mathematischen Grundidee Form: Von Kugeln, den fünf platonischen Körper, deren Abwandlung zu archimedischen Körpern über Schneeflocken bis hin zu Fraktalen und vierdimensionalen Würfeln reichen die von du Sautoy lebendig und durch viele Bilder veranschaulichten Themen.

In Kapitel drei geht es darum seinen Erfolg bei Glücksspielen vorherzusagen, also um die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

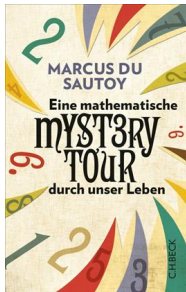
Kapitel vier widmet sich der Kryptographie, die nicht nur im eigenen DNA-Code allgegenwärtig ist. Auch die Musik im MP3-Player, die Balkencodes auf Waren im Supermarkt sind verschlüsselt. Eine spannendere Anwendung der Kryptographie ist die Verschlüsselung von Botschaften, damit sie kein Unbefugter Lesen kann. Der Autor bringt hier dem Leser verschiedene historische Verfahren von der griechischen Antike über die Vigenère-Code bis zur Entschlüsselung der ENIGMA im zweiten Weltkrieg kurz vorstellt. In Kapitel fünf versucht der Autor auf Grund von mathematischen Formeln und Analysen einen Blick in die Zukunft zu werfen, um Ergebnisse von Experimenten oder Ereignisse – ganz ohne Wahrsagerei – vorherzusagen.

Als Zusatzmaterial gibt es auf der Verlagshomepage pdf-Dateien zu den im Buch angesprochenen Spielen, Adressen externer Internetseiten sowie QR-Codes zum

Einscannen, die darauf verweisen.

Fazit: Alles in allem ist Marcus du Sautoy ein sehr schönes Buch gelungen, das alle, die verstehen und erkennen wollen „was die Welt im Innersten zusammenhält“ mit Freude lesen werden.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Sautoy, Marcus du: Eine mathematische Mystery Tour durch unser Leben. C.H. Beck 2011, ISBN 978-3406621925, gebunden 318 Seiten, 19,95 €.

Art des Buches: Mathematisches Sachbuch

Mathematisches Niveau: verständlich

Altersempfehlung: ab 16 Jahren

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Wahr oder falsch?

Wenn man bei der folgenden 24-ziffrigen Primzahl

357 686 312 646 216 567 629 137

von links beginnend nacheinander immer wieder eine Ziffer wegstreicht, dann erhält man 23 Zahlen, die sämtlich wieder Primzahlen sind. (H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Juni 2014 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 115

Niemals eine Quadratzahl?

Es sei n eine natürliche Zahl. Dann ist $n^2 + 1$ keine Quadratzahl, wie Du leicht mittels eines Widerspruchsbeweises zeigen kannst. Anders verhält sich die Situation, wenn wir einen Faktor $a \geq 2$ vor das n^2 setzen und fragen, für welche n die Zahl $a \cdot n^2 + 1$ eine Quadratzahl ist. Wenn Du mal die Fälle $a = 2, 3, 5, 6, 7, 8$ testest, wirst Du sicher schnell Antworten finden.

Der Test kann aber auch zu einer harten Nuss werden wie im Beispiel $a = 991$. Also stellt sich die Frage: Gibt es eine natürliche Zahl n , sodass $911n^2 + 1$ eine Quadratzahl ist? (nach H.F.)

Ergebnisse

Tatsächlich gibt es ein solches n , nämlich

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Damit ist

$$991 \cdot n^2 + 1 = (379\,516\,400\,906\,811\,930\,638\,014\,896\,080)^2.$$

Das Problem liegt in der Größe von $n > 10^{28}$. Immerhin haben sich vier mutige MONOID-Leser mit unterschiedlichen Programmen (Python, Lazarus und andere) daran versucht, nämlich Niklas Gerling vom Clara-Schumann-Gymnasium in Holzwickede (9. Klasse), Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alezy (6. Klasse), Sandra Wingender vom Rhein-Wied-Gymnasium in Neuwied (11. Klasse) und Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal (10. Klasse).

Die chromatische Zahl von Flächen

von Tanja Euler

In MONOID-Heft 116 haben wir gesehen, dass fünf Farben stets reichen, um jede Landkarte auf der Ebene oder einer Kugel einzufärben, ohne dass zwei benachbarte Länder die gleiche Farbe erhalten. Tatsächlich genügen schon vier Farben, aber dies zu beweisen bemühte man sich lange Zeit vergebens. Erst 1976 schafften es Wolfgang Haken, Kenneth Appel und später John Koch mit Hilfe eines Computers. In diesem Beitrag wird untersucht, wie viele Farben benötigt werden, um Landkarten auf beliebigen Flächen zu färben.

Zunächst soll erklärt werden, was das *Geschlecht* einer Fläche und ihre *chromatische Zahl* sind.

Es werden hier nur orientierbare Flächen behandelt (nicht orientierbar ist zum Beispiel das Möbiusband, denn es hat nur eine Seite). Eine Kugel hat per Definition Geschlecht 0. Setzen wir an diese Kugel einen Henkel, so erhalten wir eine Fläche vom Geschlecht 1 und so weiter (vergleiche Abbildung 1). Das Geschlecht ist also die Henkelzahl. Es lässt sich beweisen, dass jede Fläche vom Geschlecht g in eine Kugel mit g Henkeln verformt werden kann. Wir bezeichnen eine Fläche F vom Geschlecht g mit F_g .



Abbildung 1: Fläche vom Geschlecht 3

Die chromatische Zahl $c(L)$ einer Landkarte L ist die kleinstmögliche Anzahl von Farben, mit der L gefärbt werden kann. Wir definieren die chromatische Zahl $c(F)$

<http://scienceblogs.de/mathlog/2011/05/13/topologie-von-flaechen-clxvii/>

einer Fläche F als das Maximum der chromatischer Zahlen aller Landkarten auf dieser Fläche $c(F) = \max_{L \subset F} c(L)$.

Bereits 1890 stellte P. J. Heawood die nach ihm benannte *Heawoodsche Schranke* für die chromatische Zahl von Flächen vom Geschlecht $g \geq 1$ auf. Er vermutete, dass sogar Gleichheit gilt. Der vollständige Beweis hierfür wurde aber erst 78 Jahre später abgeschlossen.

Die Heawoodsche Schranke lautet: $c(F_g) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$ für $g \geq 1$.

Für $g = 0$ ist dies das in MONOID 116 diskutierte Vier-Farben-Problem, daher beschränken wir uns auf den Fall $g \geq 1$. Interessanterweise lässt sich hierfür die Gültigkeit der Heawoodschen Ungleichung elementar – insbesondere ohne Computereinsatz – beweisen, was für $g = 0$ bis heute nicht gelungen ist.

Für den Beweis betrachten wir Graphen auf Flächen. Ein Graph besteht aus Ecken und Kanten. Wir bezeichnen die Eckenzahl mit E , die Kantenzahl mit K und die entstehende Flächenzahl mit F . Jeder Landkarte ist ein *dualer Graph* zugeordnet, den wir erhalten, indem wir in jedes Land eine Hauptstadt (Ecke) legen und diese Ecken genau dann durch eine Kante verbinden, wenn die zugehörigen Länder eine gemeinsame Grenze haben. Eine Färbung einer Landkarte übersetzt sich in eine Färbung der Ecken des dualen Graphen, derart, dass die beiden Randpunkte einer Kante stets verschieden gefärbt sein müssen.

Ein Graph H ist ein *Teilgraph* eines Graphen G , wenn jede Ecke und jede Kante von H auch in G enthalten sind. Ein Graph G heißt *kritisch*, wenn jeder Teilgraph, der nicht G selbst ist, eine kleinere chromatische Zahl als G hat.

Für einen kritischen Graphen G mit chromatischer Zahl c gilt:

$$(1) \quad (c - 1)E \leq 2K$$

Hierzu stellen wir zunächst fest, dass an jeder Ecke mindestens $c - 1$ Kanten zusammentreffen, denn sonst würden wir den Graphen, der aus G durch Weglassen einer solchen Ecke und aller angrenzenden Kanten entsteht, mit $c - 1$ Farben färben und könnten diese Färbung auf die letzte Ecke fortsetzen im Widerspruch zu $c(G) = c$. Hieraus folgt (1).

Wir sagen, ein Graph ist *einbettbar* in eine Fläche F_g , wenn er sich ohne Überschneidung seiner Kanten dort einzeichnen lässt. Ist ein Graph G einbettbar in eine Fläche F_g , so gilt:

$$(2) \quad K \leq 3E + 6g - 6.$$

Denn die Euler-Charakteristik $\chi(F_g) = 2 - 2g$ der orientierbaren Fläche F_g ist nach oben beschränkt durch $E - K + F$ und da G keine 1- und 2-Ecke enthält, gilt überdies $3F \leq 2K$, woraus man durch Umformen die Ungleichung (2) gewinnt.

Mit diesen Vorüberlegungen können wir jetzt die Heawoodsche Ungleichung $c(F_g) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$ beweisen:

Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ für eine reelle Zahl x die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Der Graph G enthält einen kritischen Teilgraphen G' mit $E' \leq E$ und $K' \leq K$. Da G einbettbar in F_g ist, ist auch G' einbettbar und mit (1) und (2) gilt:

$$\begin{aligned} (c-1)E' &\leq 6E' + 12g - 12 \iff c-1 \leq 6 + \frac{12g-12}{E'} \\ \xrightarrow[g \geq 1]{E' \geq c} c-1 &\leq 6 + \frac{12g-12}{c} \iff c^2 - c \leq 6c + 12g - 12 \\ &\iff c^2 - 7c + 12 - 12g \leq 0 \\ &\iff \left(c - \frac{7 + \sqrt{1+48g}}{2}\right) \left(c - \frac{7 - \sqrt{1+48g}}{2}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Da der rechte Faktor für $g \geq 1$ größer als Null ist, folgt $c \leq \frac{7 + \sqrt{1+48g}}{2}$, da weiter c eine natürliche Zahl ist, runden wir ab und erhalten die Heawood-Ungleichung.

Die umgekehrte Ungleichung führen wir zurück auf ein anderes Problem, das sogenannte „Fadenproblem“: Hierbei soll die kleinste Henkelzahl $\gamma(n)$ bestimmt werden, sodass man auf der Fläche $F_{\gamma(n)}$ mindestens n Punkte auswählen und paarweise miteinander verbinden kann, ohne dass sich die Verbindungslinien schneiden, zum Beispiel $\gamma(4) = 0$.

Ein Graph heißt *vollständig*, wenn jede Ecke mit jeder anderen Ecke verbunden ist. Wir bezeichnen vollständige Graphen mit K_n , wobei n die Anzahl der Ecken ist; K_n hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten. Es gilt $\gamma(G) = g$, wenn der Graph G sich auf F_g , jedoch nicht auf F_{g-1} einbetten lässt.

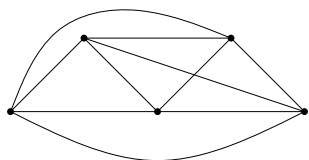


Abbildung 2: Der vollständige Graph K_5

In der Abbildung sieht man, dass wir den Graphen auf der Kugel nicht ohne Überschneidung einzeichnen können. Setzen wir jedoch an diese Kreuzung einen Henkel, so kann die eine Kante über und die andere unter dem Henkel laufen und sie schneiden sich nicht mehr. Daher gilt $\gamma(K_5) = 1$.

Die allgemeine Formel für die Henkelzahl des vollständigen Graphen mit $n \geq 3$ lautet:

$$(3) \quad \gamma(n) := \gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

Hieraus ergibt sich die (leichtere) der beiden Ungleichung aus (2) wie folgt:

$$\begin{aligned} K &\leq 3E + 6\gamma(n) - 6 \iff 6\gamma(n) \geq K - 3E + 6 \\ \xrightarrow[K = \binom{n}{2}]{E = n} 12\gamma(n) &\geq n(n-1) - 6n + 12 = n^2 - 7n + 12 = (n-3)(n-4) \\ &\iff \gamma(n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}. \end{aligned}$$

Durch Aufrunden ergibt sich die behauptete Ungleichung.

Dabei ist $\lceil x \rceil$ für eine reelle Zahl x die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist.

G. Ringel und J. W. T. Youngs haben (3) 1968 für alle natürlichen Zahlen n bewiesen.

Wir zeigen hier noch, dass aus (3) die Gleichheit in der Heawoodschen Ungleichung folgt. Sei $g \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Aus (3) erhalten wir ein n so, dass gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \frac{(n-3)(n-4)}{12} \leq g < \frac{(n-2)(n-3)}{12} = \gamma(n+1) \\ \Rightarrow 12g &< (n-2)(n-3) \Rightarrow 0 < n^2 - 5n + 6 - 12g \\ \Rightarrow 0 &< \left(n - \frac{5 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right) \left(n - \frac{5 - \sqrt{1 + 48g}}{2} \right). \end{aligned}$$

Der rechte Faktor ist positiv, da $g \geq 1$; also gilt

$$0 < n - \frac{5 + \sqrt{1 + 48g}}{2} = n - \frac{7 + \sqrt{1 + 48g} - 2}{2} \Rightarrow n > \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} - 1.$$

Da wir n so gewählt haben, dass $\gamma(n) \leq g$ ist, kann man den Graphen K_n auf die Fläche F_g zeichnen. Um K_n einzufärben, benötigt man aber n Farben. Daraus folgt $c(F_g) \geq n$, also:

$$\frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} - 1 < c(F_g) \leq \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2}.$$

Was uns so über den Weg gelaufen ist

von Hans-Jürgen Schuh

Betrachte $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$ und vergleiche diese mit den ersten Zeilen des Pascalschen Dreiecks:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \\ 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 5 \ 1 \end{array}$$

Was fällt Dir auf? Kannst Du das erklären?

Betrachte nun $11^5 = 161051$. Was ist hier schief gelaufen?

Berechne stattdessen $101^5!$

Kannst Du nun 101^6 hinschreiben, **ohne** zu rechnen?

Mathematische Entdeckungen

Neue Aufgabe

Die Menge aller natürlichen Zahlen $\geq n$ bezeichnen wir mit M_n , M_n , $n \geq 1$. Also ist $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Es sei nun S eine Teilmenge von M_n , in der kein Element kleiner ist als die Anzahl der Elemente von S . Wir nennen dann S eine **starke Teilmenge** von M_n .

Beispiel:

Die Menge $M_3 = \{1, 2, 3\}$ hat 5 starke Teilmengen: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2, 3\}$ und die leere Menge $\{\}$ – sie enthält ja keine Elemente, also auch kein Element, das kleiner als 0 ist. Dagegen sind $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$ keine starken Teilmengen von M_3 .

Es sei nun A_n die Anzahl der starken Teilmengen von M_n . Im Beispiel gilt für die Menge M_3 , dass $A_3 = 5$ ist.

- Bestimme die Anzahlen A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 und A_6 .
- Versuche eine Formel zu finden, mit deren Hilfe es möglich sein sollte, A_n für ein gegebenes n zu berechnen. (Deine vermutete Formel brauchst du aber nicht zu beweisen!) (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum an die MONOID-Redaktion einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 115

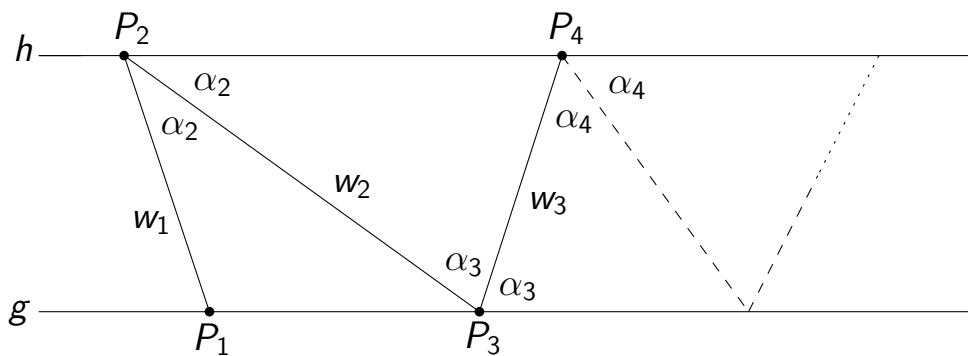
In Heft 115 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Konstruktion einer Zickzack-Linie

Man konstruiert zwei Parallelen g und h . Auf g wählt man einen Punkt P_1 und auf h einen Punkt P_2 und verbindet die beiden Punkte durch eine Strecke w_1 . Einer der beiden Winkel, den w_1 mit g bildet, sei α_1 und der Winkel zwischen w_1 und h sei $2\alpha_2$.

Nun konstruiert man die Winkelhalbierende w_2 des Winkels $2\alpha_2$, die g in P_3 unter dem Winkel $2\alpha_3$ schneidet – vergleiche die Figur; sodann konstruiert man die Winkelhalbierende w_3 von $2\alpha_3$, die h unter dem Winkel $2\alpha_4$ im Punkt P_4 schneidet.

Auf diese Weise kann man eine beliebig lange Zickzack-Linie $P_1P_2P_3 \dots$ konstruieren.



Experimente mit Zickzack-Linien

Konstruiere nun selbst einige nicht zu kurze Zickzack-Linien $P_1P_2P_3 \dots P_{n+1}$ mit jeweils verschiedenen Startwinkeln α_1 und miss dann die auftretenden Winkel $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ sowie die Längen der Strecken $w_2 = P_2P_3, w_3 = P_3P_4, \dots, w_n = P_nP_{n+1}$.

Was fällt dir dabei auf? (H.F.)

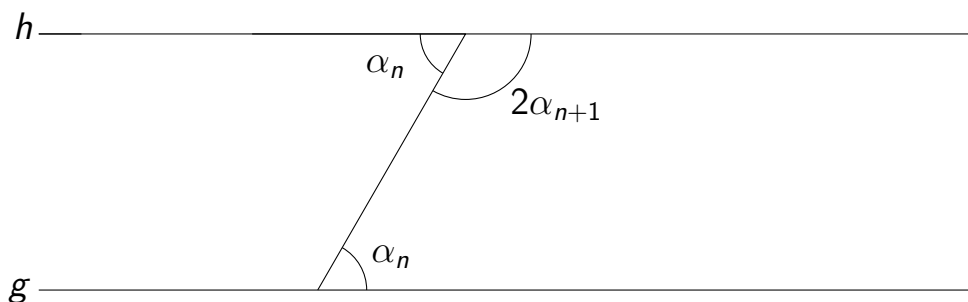
Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt:

Bettina Diller, 12. Klasse der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik München und Kevin Mours, 10. Klasse des Karolinen-Gymnasiums Frankenthal.

Bettina wählt für α_1 nacheinander die Werte $100^\circ, 45^\circ$ und 190° und konstruiert die zugehörige Zickzack-Linien über acht und mehr Zacken. Sie stellt fest, dass in allen Fällen eine Annäherung an gleichseitige Dreiecke erfolgt.

Kevin kommt zum selben Ergebnis. Er leitet her:



$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha_n) = 90^\circ - \frac{\alpha_n}{2}.$$

Aufgrund der Vermutung $\alpha_n \approx 60^\circ$ für hinreichend große n machen wir den Ansatz $\alpha_1 = 60^\circ + \beta$.

Wir erhalten mit Induktion:

$$\alpha_2 = 90^\circ - \frac{\alpha_1}{2} = 60^\circ + \frac{1}{2}\beta, \quad \alpha_3 = 90^\circ - \frac{\alpha_2}{2} = 60^\circ - \frac{1}{4}\beta,$$

$$\alpha_4 = 90^\circ - \frac{\alpha_3}{2} = 60^\circ + \frac{1}{8}\beta, \quad \dots, \quad \alpha_n = 90^\circ - \frac{\alpha_{n-1}}{2} = 60^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \beta.$$

Da $(-\frac{1}{2})^{n-1}$ mit wachsendem n gegen 0 strebt, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 60^\circ$:

- (1) Mit wachsendem n streben die Winkel einer jeden Zickzack-Linie gegen 60° – wie auch immer der Startwinkel α_1 gewählt ist.

Alle drei aufeinander folgenden Ecken P_n, P_{n+1} und $P_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$ einer Zickzack-Linie bilden ein Dreieck mit den Innenwinkeln α_n, α_{n+1} und $180^\circ - (\alpha_n + \alpha_{n+1})$. Mit α_n und α_{n+1} strebt auch $(180^\circ - (\alpha_n + \alpha_{n+1}))$ gegen 60° . Daher gilt:

- (2) Mit wachsendem n nehmen die Dreiecke $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ immer genauer die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks an.

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe a hat die Seitenlänge $s = \frac{2}{3}\sqrt{3}a$, weil nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = a^2 + (\frac{1}{2}s)^2$ gilt.

Wenn nun die parallelen Begrenzungsgeraden g und h einer Zickzack-Linie den Abstand a haben, so gilt für die Dreiecke $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}, n \geq 1$, einer Zickzack-Linie.

- (3) Mit wachsendem n streben die Längen $w_n, n = 1, 2, 3, \dots$ einer jeden Zickzack-Linie mit parallelen Begrenzungsgeraden g und h von Abstand a gegen den Wert $\frac{2}{3}\sqrt{3}a$, welche Länge auch immer die Startstrecke besitzt.

Die besondere Aufgabe

Beweis ohne Worte

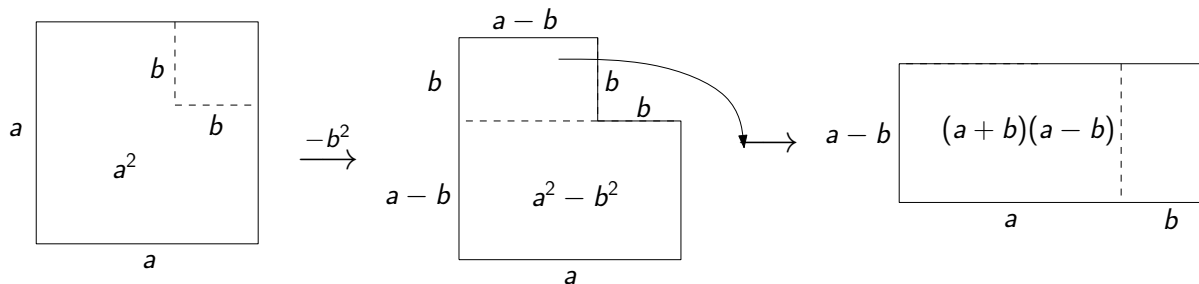
von Hartwig Fuchs

Aufgabe

Beweise: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

(gefunden: H.F.)

Beweis ohne Worte:



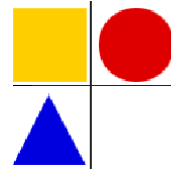
„Den mathematisch Ungebildeten erkennt man an seiner maßlosen Genauigkeit im Zahlenrechnen.“

Carl Friedrich Gauß

177–1855

deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker

Bundeswettbewerb Mathematik 2014



Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Anja soll 2014 ganze Zahlen an die Tafel schreiben und dabei erreichen, dass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetisches Mittel eine der 2014 Zahlen ist. Beweise, dass dies nur gelingt, wenn sie lauter gleiche Zahlen schreibt.

Beweis: Wir ordnen die 2014 Zahlen mit der Eigenschaft der Aufgabenstellung, die Anja an die Tafel schreibt, in aufsteigender Größe in eine Liste.

Wir beweisen zunächst, dass alle benachbarten Zahlen der Liste denselben Abstand voneinander haben, indem wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führen: Sind für die drei in Anjas Liste benachbarten Zahlen a, b, c mit $a \leq b \leq c$ die beiden nichtnegativen Zahlen $b - a$ und $c - b$ unterschiedlich, so folgt $c - a = (c - b) + (b - a) > 0$, also $a < c$. Somit ist

$$a = \frac{1}{3} \cdot 3a < \frac{1}{3} \cdot (a + b + c) < \frac{1}{3} \cdot 3c = c. \quad (1.1)$$

Da a, b, c die Eigenschaft der Aufgabenstellung besitzen, steht ihr arithmetisches Mittel $\frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$ ebenfalls in der Liste, und es liegt wegen (1.1) strikt zwischen a und c . Gälten $a = b < c$ oder $a < b = c$, so gehörte das arithmetische Mittel von a, b, c jedoch nicht zu den 2014 Zahlen, die Anja notiert hat; es muss also $a < b < c$ und $b = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$ gelten. Dies lässt sich äquivalent umformen zu

$$b = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c) \Leftrightarrow 2b = a + c \Leftrightarrow b - a = c - b;$$

Widerspruch zur Annahme $b - a \neq c - b$.

Es gibt also eine ganze Zahl a und ein $x \geq 0$, so dass Anjas Liste die Form $a, a + x, a + 2x, \dots, a + 2013x$ hat. Wir führen abschließend die Annahme $x > 0$ zum Widerspruch: Wählen wir etwa die drei Zahlen $a, a + x, a + 3x$ aus Anjas Liste, so müsste auch ihr arithmetisches Mittel $\frac{1}{3} \cdot (a + (a + x) + (a + 3x))$ in der Liste stehen, was jedoch wegen

$$a + x < \frac{1}{3} \cdot (a + (a + x) + (a + 3x)) = a + \frac{4}{3} \cdot x < a + 2x$$

nicht der Fall ist — Widerspruch zur Annahme $x > 0$. Es muss also $x = 0$ gelten, und alle Zahlen von Anjas Liste sind gleich. \square

Bemerkung:

Es spielt in unserem Beweis eine Rolle, dass Anja mehr als drei Zahlen an die Tafel schreibt. Beschränkt sie sich beispielsweise auf die drei verschiedenen Zahlen 0, 3, 6, so haben diese die in der Aufgabenstellung geforderte Eigenschaft. Für vier oder mehr Zahlen führt der Beweis die Annahme verschiedener Zahlen zum Widerspruch.

Aufgabe 2

Die 100 Ecken eines Prismas, dessen Grundfläche ein 50-Eck ist, werden in beliebiger Reihenfolge mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 100 nummeriert.

Beweise, dass es zwei Ecken gibt, die durch eine Kante des Prismas verbunden sind und deren Nummern sich höchstens um 48 unterscheiden.

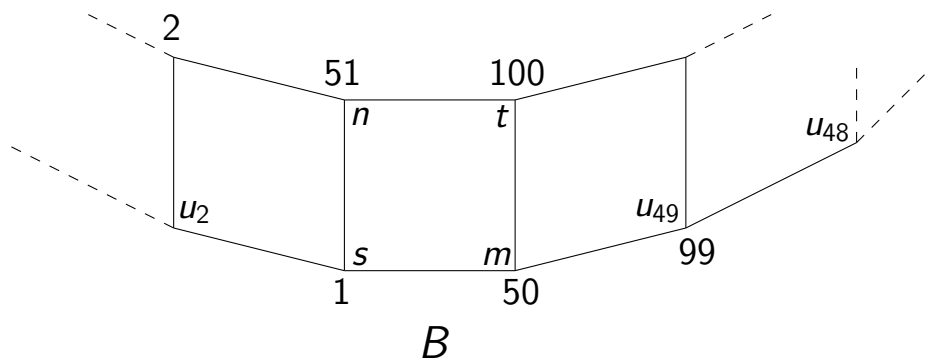
Beweis (durch Widerspruch): Wir führen die gegenteilige Annahme zum Widerspruch: Es gebe also eine Nummerierung der Ecken, so dass sich für alle Ecken, die durch eine Kante des Prismas verbunden sind, deren Nummern um mindestens 49 unterscheiden. Diese Nummerierung betrachten wir im Folgenden. Wir führen die folgenden Bezeichnungen für die Ecken und Kanten des Prismas ein: Es sei E die Menge aller Ecken des Prismas, K sei die Menge aller Kanten des Prismas. Für zwei Ecken $u, v \in E$ schreiben wir $uv \in K$ genau dann, wenn u und v durch eine Kante verbunden sind. Für die gegebene Nummerierung der Prisma-Ecken mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 100 sei die der Ecke $u \in E$ zugeordnete Zahl mit $z(u)$ bezeichnet.

Im Prisma gehen von jeder Ecke genau drei Kanten aus. Wir betrachten zunächst die beiden Ecken m beziehungsweise n , die in der betrachteten Nummerierung die Nummern $z(m) = 50$ beziehungsweise $z(n) = 51$ tragen. Für $z \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ gilt

$$|50 - z| \geq 49 \Leftrightarrow z \in \{1, 99, 100\} \text{ und } |51 - z| \geq 49 \Leftrightarrow z \in \{1, 2, 100\}. \quad (2.1)$$

Daher müssen in der betrachteten Nummerierung die drei von der Ecke m ausgehenden Kanten zu den Ecken führen, die die Nummern 1, 99, 100 tragen, und analog müssen die drei von der Ecke n ausgehenden Kanten zu den Ecken führen, die die Nummern 1, 2, 100 tragen.

Wenn wir mit s, t die beiden Ecken mit den Nummern $z(s) = 1$ beziehungsweise $z(t) = 100$ bezeichnen, so existieren demnach im Prisma die vier Kanten $sm, mt, tn, ns \in K$, das heißt eine Folge von vier Kanten mit je einer gemeinsamen Ecke, die zum Ausgangsknoten s zurückführt. In einem Prisma, dessen Grundfläche ein 50-Eck ist, müssen diese vier Kanten (bis auf Vertauschungen von oben/unten oder links/rechts) wie in der untenstehenden Skizze angeordnet sein.



Auf Grund der Beobachtung in (2.1) muss weiterhin die von m ausgehende Kante, die nicht zu s , t führt, zum Knoten u_{49} mit $z(u_{49}) = 99$ führen. Damit liegen die Ecken s , m , u_{49} in einer Grundfläche des Prismas, die wir B („Boden“) nennen.

Wir unterteilen die Ecken ungleich m , n gemäß ihrer Nummerierung in zwei Teilmengen $E_* := \{u \in E; 1 \leq z(u) \leq 49\}$ und $E^* := \{u \in E; 52 \leq z(u) \leq 100\}$. Weil in der hier betrachteten Nummerierung für alle Kanten $uv \in K$ die Ungleichung $|z(u) - z(v)| \geq 49$ gilt, können weder zwei Knoten in E_* noch zwei Knoten in E^* durch eine Kante verbunden sein, denn die Nummern in beiden Teilmengen unterscheiden sich um höchstens 48. Jede Kante des Prismas, die nicht von den Ecken m , n ausgeht, verbindet also eine Ecke in E_* mit einer Ecke in E^* .

Ausgehend von der Ecke s mit $z(s) = 1$ durchlaufen wir im Uhrzeigersinn, also beginnend mit $su_2 \in K$, die Kanten der Grundfläche B , deren Ecken nach unserer Beobachtung im vorigen Abschnitt abwechselnd in E_* und E^* liegen: $s \in E_*$, $u_2 \in E^*$, ..., schließlich $u_{48} \in E^*$. Wegen $z(u_{49}) = 99$, also auch $u_{49} \in E^*$, folgt $|z(u_{48}) - z(u_{49})| \leq 47$ — ein Widerspruch zur Existenz der angenommenen Nummerierung. \square

Bemerkung: Tatsächlich kann man die folgende Verallgemeinerung der Aufgabe für beliebige ganze Zahlen $n \geq 3$ beweisen. Die $2n$ Ecken eines Prismas, dessen Grundfläche ein n -Eck ist, werden mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2n$ nummeriert. Ist n gerade, so gibt es für jede beliebige Nummerierung zwei Ecken, die durch eine Kante des Prismas verbunden sind und deren Nummern sich um höchstens $n - 2$ unterscheiden. Ist n ungerade, dann existiert eine Nummerierung, so dass sich für alle Ecken, die durch eine Kante des Prismas verbunden sind, deren Nummern um mindestens $n - 1$ unterscheiden.

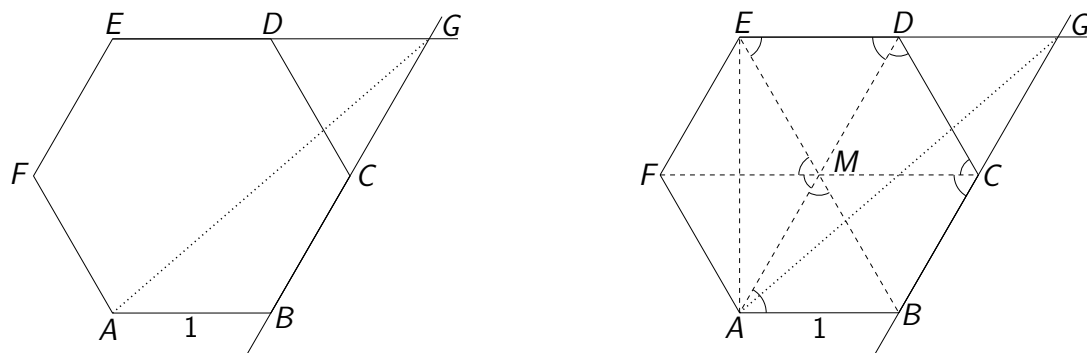
Aufgabe 3

Gegeben sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Seiten die Länge 1 haben. Konstruiere hieraus allein mit dem Lineal weitere Punkte mit dem Ziel, dass es unter den vorgegebenen und konstruierten Punkten zwei solche gibt, die den Abstand $\sqrt{7}$ haben.

Anmerkung: „Konstruiere hieraus allein mit dem Lineal ...“ bedeutet: Neu konstruierte Punkte entstehen nur als Schnitt von Verbindungsgeraden zweier Punkte, die gegeben oder schon

konstruiert sind. Insbesondere kann mit dem Lineal keine Länge gemessen werden.
Die Konstruktion ist zu beschreiben und ihre Richtigkeit zu beweisen.

Lösung: Es genügt die Konstruktion eines weiteren Punktes. Die Ecken des regelmäßigen Sechsecks seien wie in der linken Skizze mit A, B, C, D, E und F bezeichnet. Wir konstruieren den Punkt G als Schnittpunkt der (nicht parallelen) Verbindungsgeraden (BC) und (ED) . Es ist dann $\overline{AG} = \sqrt{7}$.



Beweis: Es sei wie in der rechten Skizze mit M zusätzlich der Umkreismittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ bezeichnet. Im regelmäßigen Sechseck haben die sechs Dreiecke $\triangle ABM, \dots, \triangle EFM$ und $\triangle FAM$, die benachbarte Umkreisradien als Schenkel und die Kanten des Sechsecks als Basis haben, in M denselben Winkel von

$$\sphericalangle AMB = \dots = \sphericalangle EMF = \sphericalangle FMA = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ.$$

Auf Grund der Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck sind auch die Basiswinkel der Dreiecke jeweils $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$ groß, also sind die sechs Dreiecke tatsächlich gleichseitig mit Seitenlänge 1. Alle in der Skizze markierten Winkel sind 60° groß. Die Geraden (BC) und (ED) sind nicht parallel, weil $\sphericalangle EDC + \sphericalangle DCB = 2 \cdot 120^\circ \neq 180^\circ$.

Wir betrachten zunächst das Dreieck $\triangle BEA$. Die Strecke BE verläuft durch M , weil $\sphericalangle EMF + \sphericalangle FMA + \sphericalangle AMB = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$; es ist also $\overline{BE} = \overline{BM} + \overline{ME} = 2$. Außerdem ist $\sphericalangle BAE = 90^\circ$, denn $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAE = 60^\circ + \sphericalangle MAE$, und im gleichschenkligen Dreieck $\triangle EAM$ sind die Basiswinkel

$$\sphericalangle MAE = \sphericalangle AEM = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ \quad (3.1)$$

groß. Nach dem Satz von Pythagoras folgt

$$\overline{AB}^2 + \overline{EA}^2 = \overline{BE}^2 \Leftrightarrow \overline{EA}^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow \overline{EA} = \sqrt{3}, \quad (3.2)$$

weil $\overline{EA} > 0$. Nun betrachten wir das Dreieck $\triangle DCG$, das sich durch die Konstruktion von G ergibt. Die Winkel $\sphericalangle CDG$ und $\sphericalangle GCD$ sind Nebenwinkel der Sechseck-Innenwinkel $\sphericalangle EDC = \sphericalangle DCB = 120^\circ$, also gilt $\sphericalangle CDG = \sphericalangle GCD = 60^\circ$ und damit auch $\sphericalangle DGC = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$. Das Dreieck $\triangle DCG$ ist also

gleichseitig mit

$$\overline{GD} = \overline{CG} = \overline{CD} = 1. \quad (3.3)$$

Abschließend untersuchen wir das Dreieck $\triangle AGE$. Der Winkel mit Scheitel E ist ein rechter, denn $\sphericalangle AEG = \sphericalangle AEM + \sphericalangle MED = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ wegen (3.1). Für seine Seiten \overline{GE} und \overline{EA} gilt $\overline{GE} = \overline{GD} + \overline{DE} = 1 + 1 = 2$ wegen (3.3) und $\overline{EA} = \sqrt{3}$ nach (3.2). Aus dem Satz von Pythagoras folgt also

$$\overline{AG}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{EA}^2 = 4 + 3 = 7 \Leftrightarrow \overline{AG} = \sqrt{7},$$

weil $\overline{AG} > 0$, und das war zu beweisen. \square

Aufgabe 4

Für welche positiven ganzen Zahlen n besitzt die Zahl $\frac{4n+1}{n(2n-1)}$ eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung: Der Term der Aufgabenstellung hat genau dann eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung, wenn n eine der drei positiven ganzen Zahlen 1, 2 oder 8 ist.

Beweis: Beim Einsetzen von 1, 2 beziehungsweise 8 an Stelle von n in den Term der Aufgabenstellung ergeben sich die Zahlen $\frac{5}{1} = 5$ beziehungsweise $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$ beziehungsweise $\frac{33}{120} = \frac{11}{40} = 0,275$, die alle eine abbrechende Dezimalentwicklung haben. Hingegen ergibt sich beispielweise für $n = 4$ die Zahl $\frac{17}{28} = 0,60\overline{714285}$, die keine abbrechende Dezimalentwicklung besitzt. Es bleibt zu zeigen, dass sich auch beim Einsetzen aller anderen positiven ganzen Zahlen n in den Term der Aufgabenstellung eine Zahl ergibt, deren Dezimalbruchentwicklung nicht abbricht. Eine positive Zahl c hat (nach Definition) eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung, wenn es eine nichtnegative ganze Zahl k und positive ganze Zahlen $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k$ gibt, so dass sich c in der Form

$$\begin{aligned} c &= c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + c_2 \cdot 10^{-2} + \dots + c_k \cdot 10^{-k} \\ &= \frac{c_0 \cdot 10^k + c_1 \cdot 10^{k-1} + c_2 \cdot 10^{k-2} + \dots + c_k}{2^k \cdot 5^k} \end{aligned} \quad (4.1)$$

schreiben lässt. Nach Kürzen eventueller gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner des Bruchs in der zweiten Zeile von (4.1) stellen wir fest, dass sich c als $c = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden positiven ganzen Zahlen a, b schreiben lässt, wobei der Nenner b nur die Primteiler 2 und 5 besitzt. Ist umgekehrt $c = \frac{a}{b}$ ein Bruch mit teilerfremden positiven ganzen Zahlen a, b , in dem $b = 2^m \cdot 5^n$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen m, n , so sieht man durch die Erweiterung $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 2^n \cdot 5^m}{10^{m+n}}$ wie in (4.1), dass die Dezimalbruchentwicklung von c abbricht. Wir haben damit den folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 1: Ist $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, in der die positiven ganzen Zahlen a und b teilerfremd sind, so bricht ihre Dezimalbruchentwicklung genau dann ab, wenn b nur die Primteiler 2 und 5 besitzt.

Für alle positiven ganzen Zahlen n ist $z_n := \frac{4n+1}{n(2n-1)}$ eine positive rationale Zahl, da alle Terme n , $4n+1$ und $2n-1$ stets positive ganze Zahlen sind. Wir können also Hilfssatz 1 anwenden. Der Hilfssatz legt nahe, die beiden Terme im Nenner von z_n ausführlicher zu untersuchen.

Hilfssatz 2: Für positive ganzen Zahlen n bricht die Dezimalentwicklung von z_n nicht ab, wenn

- a) n einen ungeraden Primteiler besitzt oder
- b) $2n-1$ nicht von der Form 5^m oder $3^1 \cdot 5^m$ mit einer nichtnegativen ganzen Zahl m ist.

Beweis von Hilfssatz 2: Wir beweisen zunächst die Aussage unter b). Für alle positiven ganzen Zahlen n sind die beiden Zahlen $2n-1$ und $4n+1$ ungerade, besitzen also nur ungerade Primteiler. Sie haben höchstens den Primteiler 3 gemeinsam, denn jeder ihrer gemeinsamen Primteiler muss auch $3 = 4n+1 - 2(2n-1)$ teilen. Wenn $2n-1$ also nicht von der Form 5^m oder $3^1 \cdot 5^m$ mit $m \geq 0$ ist, so enthält der Nenner von z_n , auch nach Kürzen, bereits durch die Zahl $2n-1$ ungerade Primteiler, die von 5 verschieden sind. Die Dezimalbruchentwicklung von z_n bricht dann gemäß Hilfssatz 1 nicht ab.

Zum Beweis der Aussage unter a) betrachten wir zwei Fälle: Besitzt n einen Primteiler $p \geq 3$, der von 5 verschieden ist, so kann p kein Teiler von $4n+1$ sein, denn n und $4n+1$ sind wegen $1 = 4n+1 - 4 \cdot n$ teilerfremd. Auch nach Kürzen besitzt der Nenner von z_n dann stets einen ungeraden Primteiler $p \neq 5$. Ist 5 ein Primteiler von n , also $n = 5r$ mit einer positiven ganzen Zahl r , so endet die Dezimaldarstellung der Zahl $2n-1 = 10r-1$ auf 9, sie ist also nicht von der Form 5^m oder $3^1 \cdot 5^m$ mit einer nicht negativen ganzen Zahl m , denn Zahlen dieser Form enden auf 5 oder 3. In beiden Fällen bricht, gemäß Hilfssatz 1 beziehungsweise gemäß der Aussage unter b), die Dezimalbruchentwicklung von z_n nicht ab. \diamond

Die Aussage unter a) in Hilfssatz 2 besagt insbesondere, dass die Dezimalbruchentwicklung von z_n nur dann abbrechen kann, wenn n eine Zweierpotenz ist. Da wir die Fälle $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ bereits durch Einsetzen überprüft haben, können wir uns im Folgenden auf den Fall beschränken, dass $n = 2^s$ mit einer ganzen Zahl $s \geq 4$ ist.

Hilfssatz 3: Es sei $n = 2^s$ mit einer ganzen Zahl $s \geq 4$. Dann bricht die Dezimalbruchentwicklung von z_n nicht ab.

Beweis von Hilfssatz 3: Wir betrachten zunächst die Zweierpotenzen $n = 2^s$, $s \geq 4$, deren Dezimaldarstellung auf 6, 2 oder 4 enden; die Dezimaldarstellung von $2n-1$ endet in diesen Fällen auf 1, 3 oder 7. Die Zahl $2n-1 \geq 31$ kann

dann nicht von der Form 5^{m+1} oder $3^1 \cdot 5^m$ mit einer ganzen Zahl $m \geq 2$ sein, da deren Dezimaldarstellungen auf 5 enden. Damit folgt aus der Aussage unter b) in Hilfssatz 2, dass in diesen Fällen die Dezimalbruchentwicklung von z_n nicht abbricht.

Die Dezimaldarstellungen aller anderen Zweierpotenzen $n \geq 16$ enden auf 8; dies sind genau die Zweierpotenzen $n = 2^{3+4t}$ mit einer positiven ganzen Zahl $t \geq 1$. Für sie ist

$$2n - 1 = 2 \cdot 2^{3+4t} - 1 = 4^{2(t+1)} - 1 = (4^{t+1} - 1)(4^{t+1} + 1). \quad (4.2)$$

Wir betrachten die beiden Terme auf der rechten Seite von (4.2). Die Zahl $4^{t+1} - 1$ ist stets durch $3 = 4 - 1$ teilbar, denn $4^{t+1} - 1 = (4 - 1)(4^t + 4^{t-1} + \dots + 4 + 1)$. Für ungerade $t \geq 1$ endet die Dezimaldarstellung von $4^{t+1} - 1$ auf 5; für gerade $t \geq 2$ endet die Dezimaldarstellung von $4^{t+1} + 1$ auf 5. Wegen $2 = (4^{t+1} + 1) - (4^{t+1} - 1)$ ist genau eine der beiden Zahlen $4^{t+1} \pm 1$ durch 3 und genau eine durch 5 teilbar: Für ungerade $t \geq 1$ ist $4^{t+1} + 1 \geq 17$ demnach weder durch 3 noch durch 5 teilbar, und für gerade $t \geq 2$ ist $\frac{1}{3}(4^{t+1} - 1) \geq 21$ demnach nicht durch 5 teilbar. Für alle $t \geq 1$ ist also $2n - 1 = (4^{t+1} - 1)(4^{t+1} + 1) = 3 \cdot 5 \cdot q$ mit einer (ungeraden) Zahl $q \geq 3$, die keine Potenz von 5 ist. Damit folgt wiederum aus der Aussage unter b) in Hilfssatz 2, dass auch für $n = 2^{3+4t}$, $t \geq 1$, die Dezimalbruchentwicklung von z_n nicht abbricht. \diamond

Die Hilfssätze 2 und 3 beweisen zusammen mit dem Einsetzen am Beginn der Lösung, dass die Dezimaldarstellung von z_n genau dann abbricht, wenn n eine der drei positiven ganzen Zahlen 1, 2 oder 8 ist. \square

Wir danken Herrn Prof. Quaisser und Herrn StD Fegert für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Mainzer Mathematik-Akademie 1.–5. Oktober 2014

Das Institut für Mathematik der Universität Mainz veranstaltet vom 1. bis zum 5. Oktober 2014 die fünfte Mainzer Mathematik-Akademie für alle Mathematik-Begeisterte ab 15 Jahren.

In Fachvorträgen, Gruppen- und Projektarbeit mit anschließender Präsentation werden Themen aus (wahlweise) drei Bereichen mit Professoren und wissenschaftlichen Mitarbeitern der Universität Mainz bearbeitet.

Der Workshop findet im Institut für Mathematik statt; wohnen werden wir im Haus Don Bosco, mittags essen wir in der Mensa. Für die Unterbringung (Übernachtung, Frühstück, Abendessen) wird eine Eigenleistung von 50 Euro erhoben, den Restbetrag trägt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz. Anreise ist am Mittwochnachmittag, Abreise am Sonntagmittag.

Falls zur Beurlaubung vom Unterricht eine persönliche Einladung benötigt wird, können wir eine solche gerne zusenden. Für Informationen zur Mainzer Mathematik-Akademie der vergangenen Jahre (zum Beispiel Kursthemen) siehe

[www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/
mainzermatheakademie](http://www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie)

Im nächsten Heft gibt es genauere Informationen zur fünften *Mainzer Mathematik-Akademie* und den Link zum Anmeldeformular; Rückfragen unter:
freunde@mathematik.uni-mainz.de.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 115

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 7: Luca Bühler 20.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 5: Janik Fritzsche 16, Timo Wolff 12;

Kl. 6: Maximilian Hauck 25;

Kl. 9: Victoria Fox 13;

Kl. 10: Katharina Rößler 10;

Kl. 13: Andreas Pitsch 9.

Bad Ems, Goethe-Gymnasium:

Kl. 11: Miriam Gerharz 25.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler): **Kl. 5:** Niels Bauer 4, Laura Krause 9;

Kl. 6: Paul Kruse 3, Sophie Loreen Kuß 1, Annalena Schibold 3;

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 13: Frank Schindler 20.

Berlin, Katholische Theresienschule:

Kl. 6: Emma Weiß 11.

Bonn, Carl-von-Ossietzky-Gymnasium: Kl. 6: Lorenzo Conti 14.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:

Kl. 11: Jamico Schade 10.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:

Kl. 8: Iolanthe Köcher 32.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

Kl. 6: Annika Koch 9, Leonie Marton 4;

Kl. 10: Kevin Mours 5, Adriana Stenger 16, Marcel Wittmann 25;

Kl. 11: Tamara Fischer 5.

Frankenthal, Robert-Schumann-Schule: Kl. 8: Patrick Riebe 18.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze):

Kl. 3: Jacob Huck 3, Olivia Kern 3, Elizabeth Korzilius 3;

Kl. 4: Fritz Albus 3, Ridh Choudhury 3, Merlin Kolrep 3, Ella Zwermann 6.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):

Kl. 5: Tobias Streichhardt 9;

Kl. 6: Burak Sadic 6;

Kl. 7: Melanie Schuy 13;

Kl. 8: David Storzer 40;

Kl. 9: Marvin Weisbener 12.

Holzwickede, Clara-Schumann-Gymnasium:

Kl. 9: Niklas Gerling 7.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 5: Görkem Balci 2, Daria Hartwig 3, Zineb El Hhoual 2, Tabea Stamm 8, Giuliana Wustrack 3.

Kl. 6: Lukas Bonn 11, Nils Grandien 8, Nico Lick 4, Dennis Mayle 12.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:

Kl. 6: Beatrice Popescu 8.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):

Kl. 5: Lea Weißenfels 9;

Kl. 6: Paula Roderer 3, Ivan Savic 3;

Kl. 7: Katharina Weber 8;

Kl. 8: Lincoln Bui 11, Marc Hoffmann 7, Elias Röscher 8, Sebastian Trapp 8;

Kl. 11: Theresa Schöche 14.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:

Kl. 12: Bettina Diller 13.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):

Kl. 6: Duy Kha Pham 6;

Kl. 8: Jonas Ahlfeld 23, Liana Bergen 11, Anja Wingender 16;

Kl. 9: Matthias Bergen 18, Denise Kadri 14, Jasmin Hallyburton 15, Verena Rüsing 16;

Kl. 10: Yentl Deuster 7, Philipp Lehmann 12;

Kl. 11: Sandra Wingender 18;

Kl. 12: Janina Vogl 25;

Kl. 13: David Michel 15.

Neuwied, Wemer-Heisenberg Gymnasium: Kl. 12: Robert Kowallek 25.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

Kl. 7: Tobias Heinze 9, Philipp Karn 21, Fabian Liepach 9, Jara Müller-Kästner 14;

Kl. 11: Heiko Kötzsche 24.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner):

Kl. 6: Lukas Arends 3, Nele-Sophie Arenz 1, Johannes Bahne 1, Stella Batzella 4, Clara Hiller 1, Lara Jungheim 3, Nele Küter 3, Anna-Lisa Landsrath 5, Anna McBrien-Martin 3. Lukas Nießen 51, Franziska Schamel 2, Leona Scheibe 3, Alina Schmidt 3;

Kl. 11: Lars Horak 1;

Kl. 12: Simon Löhr 9.

Sankt-Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:

Kl. 6: Anastasia Kaletchits 3.

Wiesbaden, Leibnizschule:

Kl. 8: Andreas Dernier 18;

Kl. 9: Elisa Dernier 15.

Wildeshausen, Gymnasium Wildeshausen: Kl. 7: Lara Kalbach 6;

Kl. 8: Wiebke Schneider 9;

Kl. 9: Maximilian Grohe 19.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)

Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe

Betreuung der Abonnements und Versand: Anita Pfeffer-Kohl mit freundlicher Unterstützung von Dr. Ekkehard Kroll

Inhalt

A. Schöbel: Anschlüsse, Bahnhöfe, Fahrpreise: Optimierung im öffentlichen Verkehr	3
H. Fuchs: Die harmonische Reihe und einige ihrer Verwandten	11
L. Biroth: Der Satz von Pick	16
Mitteilung	21
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 116	22
Neue Mathespielereien	25
Neue Aufgaben	27
Gelöste Aufgaben aus MONOID 116	28
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	33
Die Aufgabe für den Computer-Fan	34
T. Euler: Die chromatische Zahl von Flächen	35
H.-J. Schuh: Was uns so über den Weg gelaufen ist	38
Mathematische Entdeckungen	39
H. Fuchs: Die besondere Aufgabe – Beweis ohne Worte	41
Bundeswettbewerb Mathematik 2014, Runde 1	42
Einladung zur Mainzer Mathematik-Akademie	48
Rubrik der Löser und Löserinnen	49
Impressum	52

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>