

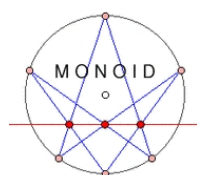
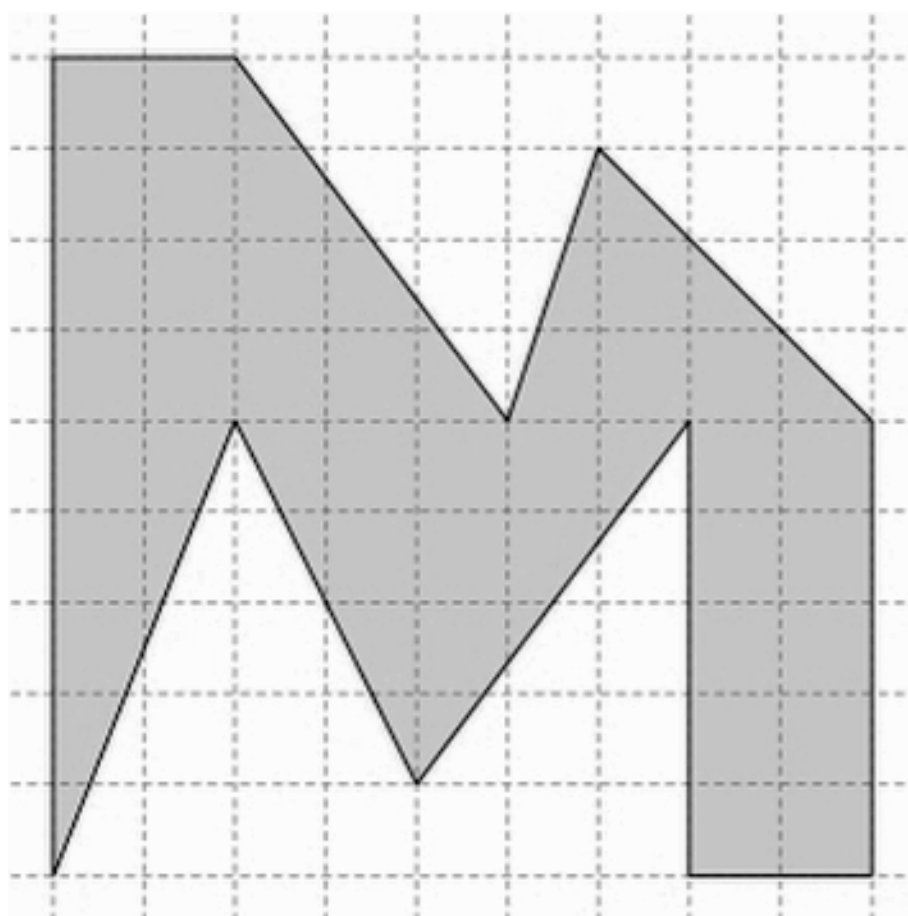
Jahrgang 33

Heft 118

Juni 2014

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15.08.2014.

**Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

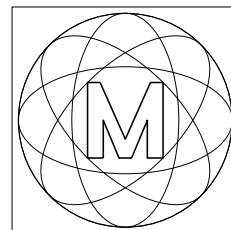
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Ein farbiger Beweis

von Hartwig Fuchs

Von mathematischen Beweisen erwartet man, dass sie eher nüchtern sind, weil Mathematiker formal-abstrakt arbeiten. Da ist es dann schon bemerkenswert, dass ihre Argumentation manchmal durchaus auch recht „farbig“ sein kann – wie etwa bei dem folgenden Problem*:

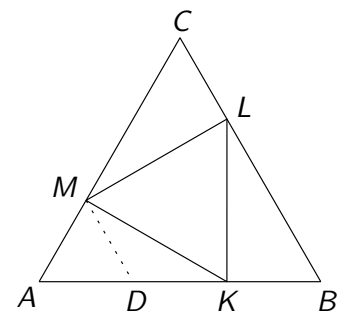
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck und U sei die Menge aller Punkte auf den Dreiecksseiten. Die Menge U sei nun in beliebiger Weise in zwei elementefremde Teilmengen R und S zerlegt. Gibt es dann stets in wenigstens einer der Mengen R und S drei Punkte, welche die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks bilden?

Die Untersuchung dieser Frage beginnt ganz traditionell-euklidisch. Auf den Seiten AB , BC , CA seien die Punkte K , L , M so gewählt, dass gilt:

$$|AK| = 2|KB|, |BL| = 2|LC| \text{ und } |CM| = 2|MA|.$$

Dann ist

- (1) $KM \perp AC$, $ML \perp BC$ und $LK \perp AB$.



Nachweis von $KM \perp AC$: Es sei D der Mittelpunkt der Strecke AK . Dann ist das Dreieck $\triangle ADM$ gleichseitig, weil $|AM| = |AD|$ und $|\sphericalangle DAM| = 60^\circ$, so dass $|\sphericalangle MDA| = |\sphericalangle AMD| = 60^\circ$ ist. Daraus folgt, dass im gleichschenkligen Dreieck $\triangle DKM$ mit $|DK| = |DM|$ ist $|\sphericalangle KDM| = 120^\circ$ und somit $|\sphericalangle MKD| = |\sphericalangle DMK| = 30^\circ$ sind. Also ist $|\sphericalangle AMK| = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ und daher $KM \perp AC$. Die beiden anderen Behauptungen $ML \perp BC$ und $LK \perp AB$ aus (1) zeigt man ganz analog.

Nun zur eigentlichen Frage: Der naheliegende Versuch, als Erstes einen Überblick über die möglichen Zerlegungen der Menge U gewinnen zu wollen, ist völlig aussichtslos. Aber mit einem genialen und doch ganz einfachen Trick lässt sich diese Schwierigkeit umgehen und man findet so einen Weg, auf dem man in elementarer und zugleich durchsichtiger Weise zu einer Lösung des Problems gelangt.

Der Farbentrick

Die Punktmenge U sei in zwei beliebige und elementefremde Teilmengen R und S zerlegt. Dann seien alle Punkte aus R rot und alle Punkte aus S schwarz gefärbt. Auf jeder Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ sei nun ein Punkt so gewählt, dass (1) gilt – etwa K auf AB , L auf BC und M auf CA .

Zwei der Punkte K, L, M müssen der gleichen Teilmenge von U angehören. Wir wollen annehmen, dass dies die Punkte K und L Elemente von R sind; K und L

* Dieses Problem war eine der sechs Aufgaben der Internationalen Mathematik-Olympiade 1983.

sind daher rote Punkte.

1. Fall: Auf der Strecke AB gebe es einen roten Punkt P , der von K verschieden ist. Dann sind die drei Punkte K, L, P rot und sie bilden die Ecken des bei K rechtwinkligen Dreiecks $\triangle KLP$.
2. Fall: Alle Punkte $\neq K$ von AB seien schwarz, also insbesondere A und B sind schwarz.
 - a) Auf AC oder BC gebe es einen von A, B und L verschiedenen schwarzen Punkt P .
Das Lot von P auf die Seite AB habe den Fusspunkt Q , wobei $Q \neq K$ ist – für $P \in AC$ ist das klar (vergleiche Abbildung) und für $P \in BC$ folgt das aus $P \neq L$. Dann sind die Punkte A, Q, P schwarz und das Dreieck $\triangle AQP$ ist rechtwinklig bei Q .
 - b) Die einzigen schwarzen Punkte auf AC und BC sind A und B .
Dann sind insbesondere M und C rote Punkte und das Dreieck $\triangle LCM$ ist bei L rechtwinklig.

In jedem Fall gibt es also drei gleichfarbige Punkte, welche die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks bilden – oder: Es gibt stets ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Eckpunkte entweder Elemente von R oder von S sind.

Und nun versuche es selbst. Wenn man die Gesamtheit der Punkte einer Ebene in drei beliebige aber elementefremde Teilmengen M_1, M_2 und M_3 zerlegt, dann gibt es in mindestens einer dieser Teilmengen zwei Punkte vom Abstand 1. Begründe das!

Eine „farbige“ Lösung findest Du auf Seite 35.

Eine Reise nach Palindromien

von Hartwig Fuchs

Palindromische Zahlen

Man nennt die Zahlen $1, 2, 3, \dots$ natürlich – und doch gehören sie zu den Objekten mit den kuriosesten Eigenschaften: Da gibt es welche, die sind gerade oder aber ungerade, andere sind quadratisch, perfekt, prim; manche sind befreundet oder sogar glücklich. Und von einer bestimmten Sorte von ihnen wird doch tatsächlich davon gesprochen, dass sie laufen können: Es sind dies die palindromischen* Zahlen.

Natürliche Zahlen** n und n' mit den Zifferndarstellungen $n = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$ und $n' = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1$, $k > 1$ heißen *Spiegelzahlen*. Man nennt sie *palindromische Zahlen*, wenn $n = n'$ ist.

* palin (griechisch): nochmal; dromos (griechisch): Lauf

** Im Folgenden schreiben wir Zahl, wenn eine natürliche Zahl gemeint ist.

Beispiel:

- a) 777 und 634436 sind palindromisch, nicht aber 333033.
 b) Die zweiziffrigen palindromischen Zahlen sind 11, 22, ..., 99; die dreiziffrigen palindromische Zahlen sind $1a1, 2a2, \dots, 9a9$, mit $a = 0, 1, \dots, 9$; die vierziffrigen palindromischen Zahlen sind $1aa1, 2aa2, \dots, 9aa9$ mit $a = 0, 1, \dots, 9$.

In diesem Beispiel deutet sich bereits das Muster an, nach dem palindromische Zahlen gebildet sind:

Anzahl der Ziffern	Bildungsmuster
2	$a_1 a_1$
3	$a_1 a_2 a_1$
4	$a_1 a_2 a_2 a_1$
5	$a_1 a_2 a_3 a_2 a_1$
6	$a_1 a_2 a_3 a_3 a_2 a_1$
$\vdots$	$\vdots$
$2n + 1$	$a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_n \dots a_2 a_1$
$2n + 2$	$a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+1} a_n \dots a_2 a_1$

Anzahl von palindromischen Zahlen

Es sei $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_n \dots a_2 a_1$ eine $(2n + 1)$ -ziffrige palindromische Zahl. Wegen $a_1 \neq 0$ gibt es die neun möglichen Werte 1, 2, ..., 9 für a_1 ; dagegen hat man zehn mögliche Werte 0, 1, ..., 9 für a_i mit $i \neq 1$. Daraus folgt:

- (1) Es gibt $9 \cdot 10^n$ palindromische Zahlen mit $2n + 1$ Ziffern, für $n = 1, 2, 3, \dots$

Aus dem Bildungsmuster für palindromische Zahlen erhält man damit unmittelbar:

- (2) Es gibt ebenso viele $(2n + 2)$ -ziffrige wie $(2n + 1)$ -ziffrige palindromische Zahlen, für $n = 1, 2, 3, \dots$

Damit gilt:

- (3) Es gibt $2 \cdot 10^{n+1} - 11$ palindromische Zahlen, die $< 10^{2n+1}$ sind.

Es gibt neun zweiziffrige palindromische Zahlen. Mit (1) und (2) folgt dann, dass es

$$\begin{aligned}
 & 9 + 2 \cdot 90 + 2 \cdot 900 + \dots + 2 \cdot 9 \cdot 10^n = 2 \cdot (9 + 90 + \dots + 9 \cdot 10^n) - 9 \\
 & = 2 \cdot (10^{n+1} - 1) - 9 = 2 \cdot 10^{n+1} - 11
 \end{aligned}$$

palindromische Zahlen kleiner als 10^{2n+2} gibt.

Je weiter man auf dem Zahlenstrahl nach rechts fortschreitet, umso seltener trifft man auf palindromische Zahlen. So etwa beträgt der Anteil der palindromischen Zahlen an den Zahlen mit $2n + 2$ Ziffern $\frac{1}{10^{n+1}}$, für $n = 1, 2, 3, \dots$. Denn es gibt $9 \cdot 10^{2n+1}$ Zahlen mit $2n + 2$ Ziffern und von diesen sind wegen (1) und (2)

genau $9 \cdot 10^n$ Zahlen palindromisch, sodass das Verhältnis ihrer Anzahlen $9 \cdot 10^n : 9 \cdot 20^{2n+1} = 1 : 10^{n+1}$ ist.

Obgleich also der Anteil der palindromischen Zahlen an den m -ziffrigen Zahlen mit wachsender Ziffernanzahl m immer kleiner wird, gilt dennoch – wie etwa die Folge der palindromischen Zahlen $a_1 a_1, a_1 a_2 a_1, a_1 a_2 a_3 a_2 a_1, \dots$ beweist:

- (4) Es gibt unendlich viele palindromische Zahlen.

Homogene palindromische Zahlen

Die einfachst gebauten palindromischen Zahlen sind solche, in deren Zifferndarstellung ausschließlich die gleiche Ziffer $a \neq 0$ vorkommt. Diese palindromischen Zahlen heißen *homogen* – wir bezeichnen sie kurz mit $n[a]$, wenn sie aus n Ziffern a bestehen; zum Beispiel ist $5[3] = 33333$.

Wegen ihrer einfachen Struktur besitzen homogene palindromische Zahlen einige recht elementare Eigenschaften.

- (5) Jede palindromische Zahl $n[a]$ mit $a = 2, 3, \dots, 9$ und $n \geq 2$ ist durch a teilbar, was unmittelbar aus $n[a] = a \cdot n[1]$ folgt – wie etwa $666 = 6 \cdot 111$.

Was lässt sich über die Teilbarkeit von Zahlen $n[a]$ mit $a = 1$ aussagen? Diese Frage ist im Fall einer nicht-primen Ziffernanzahl leicht beantwortbar.

- (6) Jede palindromische Zahl $n[1]$ mit $n = r \cdot s$, r und s beide > 1 , ist durch $r[1]$ und $s[1]$ teilbar.

Die Aussage (6) ergibt sich so: Man denke sich $n = rs[1]$ in s Ziffernblöcken $r[1]$ geschrieben. Dann ist $rs[1] = r[1] \cdot (10^{r(s-1)} + 10^{r(s-2)} + \dots + 10^r + 1)$ und $r[1]$ ist ein Teiler von $rs[1]$. Ganz entsprechend zeigt man, dass $s[1]$ ein Teiler von $rs[1]$ ist.

Beispiel: $12[1] = (3 \cdot 4)[1] = 3[1] \cdot (10^9 + 10^6 + 10^3 + 1) = 4[1] \cdot (10^8 + 10^4 + 1)$, sodass $3[1]$ und $4[1]$ Teiler von $12[1]$ sind.

Trotz ihrer einfachen Bauweise ist die Frage nach der Zerlegbarkeit von palindromischen Zahlen $n[1]$ mit primen n im Gegensatz zu (5) und (6) nicht mehr auf elementare Weise zu klären – vorläufig hilft nur der Computer weiter.

Es sei P_i die i -te Primzahl unter den Zahlen $n[1]$. Dann ist $P_1 = 2[1] = 11$ die kleinste prime homogene palindromische Zahl. Die nächsten 17 Zahlen $3[1], 4[1], \dots, 18[1]$ sind nicht prim – zum Beispiel ist $11[1] = 21649 \cdot 513239$. Die Zahlen $P_2 = 19[1]$ und $P_3 = 23[1]$ sind beide prim. Nun folgt eine große Primzahlenlücke. Erst $P_4 = 317[1]$ ist wieder eine Primzahl. Und 1993 hat unser Redaktionsmitglied Valentin Blomer gezeigt, dass die Zahl $P_5 = 1031[1]$ prim ist.

Die Primzahlen vom Typ $1[n]$ sind also ziemlich rar. Bis heute hat man aber noch nicht entscheiden können, ob es nur endliche viele palindromische Primzahlen vom Typ $n[1]$ gibt oder ob es unendlich viele sind.

Inhomogene palindromische Zahlen

Nicht-homogene palindromische Zahlen nennen wir inhomogen. Für solche Zahlen gilt:

- (7) Jede inhomogene palindromische Zahl mit geradzahlig vielen Ziffern ist durch 11 teilbar.

Dies folgt unmittelbar aus der bekannten Regel: Jede natürliche Zahl mit der Zifferndarstellung $a_1 a_2 \dots a_m$ ist durch 11 teilbar, wenn ihre „alternierende Quersumme“ $a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_m$ durch 11 teilbar ist. Wendet man dieses Kriterium auf eine palindromische Zahl $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+1} a_n \dots a_2 a_1$ mit gerader Ziffernanzahl an, dann ergibt sich $a_1 - a_2 + \dots \pm a_n \mp a_{n+1} \pm a_{n+1} \mp a_n \dots + a_2 - a_1 = 0$, woraus (7) folgt.

- (8) Jede palindromische Zahl (mit ungeradzahlig vielen Ziffern), deren erste Ziffer 2, 4, 5, 6 oder 8 ist, hat den Teiler 2 beziehungsweise 5.

Die Behauptung (8) folgt unmittelbar daraus, dass die erste und die letzte Ziffer einer palindromischen Zahl übereinstimmen.

Aus (7) ergibt sich, dass die Hälfte aller palindromischen Zahlen (abgesehen von 11) und aus (8), dass von der übrigen Hälfte der palindromischen Zahlen mindestens $\frac{5}{9}$ zerlegbar sind. Wegen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$ gilt also:

- (9) Mindestens $\frac{7}{9}$ aller palindromischen Zahlen sind zerlegbar.

Nach (9) sind höchstens $\frac{2}{9}$ aller palindromischen Zahlen prim. Dieser Wert kann sicher verbessert werden.

Beispiel: Es sei $A(n)$ die Anzahl der n -ziffrigen palindromischen Zahlen mit ungeradem n , $P(n)$ die Anzahl der n -ziffrigen palindromischen Primzahlen und $Q(n) = P(n) : A(n)$ sei der Anteil der primen an den n -ziffrigen palindromischen Zahlen. Es ist etwa $A(3) = 90$ wegen (1) und $P(3) = 15$, denn die dreiziffrigen primen palindromischen Zahlen sind:

101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929.

In der folgenden Tabelle ist $Q(n)$ für $n = 3, 5$ und 7 angegeben:

Anzahl n der Ziffern	3	5	7
$A(n)$	90	900	9000
$P(n)$	15	93	668
$Q(n)$	$\frac{15}{90} = \frac{1,5}{9}$	$\frac{93}{900} = \frac{0,93}{9}$	$\frac{668}{9000} = \frac{0,668}{9}$

In der Tabelle ist $Q(n)$ für $n = 3, 5, 7$ jeweils deutlich kleiner als $\frac{2}{9}$ und es hat den Anschein, dass $Q(n)$ mit wachsendem n immer kleiner wird. Aber man hat Argumente dafür gefunden, dass $Q(n) > 0$ für jedes ungerade n sein könnte. Das stützt die Vermutung:

Es gibt unendlich viele palindromischen Primzahlen.

Weitergabe (Vererbung) von Palindromie

Wenn eine palindromische Zahl n in eine andere Zahl n' transformiert wird, kurz $n \rightarrow n'$, dann kann es manchmal vorkommen, dass auf diese Weise mit n' eine palindromische Zahl erzeugt wird. Am Beispiel des Potenzierens von palindromischen Zahlen soll das veranschaulicht werden.

Unter den 90 palindromischen Zahlen n mit $10 < n < 1000$ gibt es Zahlen, für die gilt: palindromische Zahl $n \rightarrow$ palindromische Quadratzahl n^2 .

p-Zahl n	11	22	101	111	121	20	212	...	836
p-Zahl n^2	121	484	10201	12321	14641	40804	44944	...	698896

Die drei kleinsten palindromischen Zahlen n , für die palindromische Zahl $n \rightarrow$ palindromische Kubikzahl n^3 gilt sind 11, 101 und 111, denn: $11 \rightarrow 11^3 = 1331$, $101 \rightarrow 101^3 = 1030301$, $111 \rightarrow 111^3 = 1367631$. Für $n = 11$ gilt: palindromische Zahl $11 \rightarrow$ palindromische Biquadratzahl $11^4 = 14641$.

Unter den palindromischen Zahlen sind die palindromischen Quadratzahlen, die palindromischen Kubikzahlen und die palindromischen Biquadratzahlen scheinbar ziemlich spärlich vertreten. Tatsächlich aber ist ihr Vorrat unerschöpflich, wie wir zeigen wollen:

(10) Für jede palindromische Zahl n , $n = 11, 101, 1001, 10001, \dots$ gilt: 11^m , 101^m , 1001^m , 10001^m , ... mit $m = 2, 3$ und 4 sind sämtlich palindromische Zahlen.

Setzt man $n = 10^k + 1$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$, dann ergibt sich (10) unmittelbar aus den binomischen Formeln – wobei O_{k-1} einen Ziffernblock von $k - 1$ Nullen angibt:

$$\begin{aligned}
 (10^k + 1)^2 &= 10^{2k} + 2 \cdot 10^k + 1 = 1O_{k-1}2O_{k-1}1; \\
 (10^k + 1)^3 &= 10^{3k} + 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k + 1 = 1O_{k-1}3O_{k-1}3O_{k-1}1; \\
 (10^k + 1)^4 &= 10^{4k} + 4 \cdot 10^{3k} + 6 \cdot 10^{2k} + 4 \cdot 10^k + 1 \\
 &= 1O_{k-1}4O_{k-1}6O_{k-1}4O_{k-1}1.
 \end{aligned}$$

Übrigens: Warum gilt (10) nicht für $k \geq 5$?

Die Vermutung von Gustavus J. Simmons (1970 aufgestellt):

Es gibt keine Palindrome der Form n^k mit $k \geq 5$.

Die Transformationsmethode lässt sich auf vielerlei Arten variieren. Man kann statt nur einer palindromischen Zahl zum Beispiel zwei palindromische Zahlen transformieren, etwa durch Summen-, Differenz- oder Produkt-Bildung zweier palindromischen Zahlen n_1 und n_2 .

Beispiel: Für $n_1 = 4114$ und $n_2 = 1001$ gilt: $n_1 + n_2 = 4114 + 1001 = 5115$, $n_1 - n_2 = 4114 - 1001 = 3113$, $4114 \cdot 1001 = 4118114$.

Hier tut sich ein weites Feld für Zahlentüftler auf, das wir jedoch nicht beackern werden.

Erzeugung von Palindromie

Transformiert man zwei Spiegelzahlen n und n' an Stelle zweier palindromischen Zahlen, dann entsteht auch hierbei die Frage, von welchen Paaren n , n' jeweils palindromische Zahlen erzeugt werden.

Ein triviales Beispiel: Werden die Ziffern zweier Spiegelzahlen n und n' zusammengefügt zu einer neuen Zahl, so ist diese stets palindromisch: $n = a_1 a_2 \dots a_m$ und $n' = a_m \dots a_2 a_1$ werden so zu $a_1 a_2 \dots a_m a_m \dots a_2 a_1$ oder zu $a_m \dots a_2 a_1 a_1 a_2 \dots a_m$.

Ein weiteres Beispiel, das zunächst recht simpel daherkommt, das aber vielfältige Untersuchungen ausgelöst hat, soll nun kurz beschrieben werden.

Spiegelung und Addition

Eine Zahl n wird gespiegelt; dann addiert man n und die Spiegelzahl n' .

Beispiel: $n = 415$, $n' = 514 \rightarrow n + n' = 929$ und $n = 4156$, $n' = 6514 \rightarrow n + n' = 10670$.

Für welche Paare n , n' ist $n + n'$ eine palindromische Zahl? Es gilt:

(11) Wenn bei der Addition von n und n' keine Überträge stattfinden, dann ist $n + n'$ eine palindromische Zahl.

Nachweis: Es sei $n = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$. Dann ist $n' = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1$ und

$$\begin{array}{rcccccc} n + n' = & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ & + & a_k & a_{k-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & b_k \end{array}$$

Es sei nun k eine gerade Zahl. Dann gilt: $a_1 + a_k \leq 9$, $a_2 + a_{k-1} \leq 9$, ... sowie $b_1 = a_1 + a_k = b_k$, $b_2 = a_2 + a_{k-1} = b_{k-1}$, Also ist $n + n'$ eine palindromische Zahl.

Wenn k eine ungerade Zahl ist, dann sei a_m die mittlere Ziffer von n . Dann ist $2 \cdot a_m$ mit $2 \cdot a_m \leq 9$ die mittlere Ziffer von $n + n'$ und für die übrigen Ziffern von $n + n'$ gilt wie oben $b_1 = b_k$, $b_2 = b_{k-1}$,

Palindromische Prozesse

Auch wenn man durch Spiegelung und Addition nicht immer eine palindromische Zahl erhält, braucht man deshalb die Jagd nach palindromischen Zahlen nicht abblasen. Denn häufig kommt man zum Ziel, wenn man die Spiegelung und Addition mehrfach wiederholt. Eine solche Iteration von Spiegelung und Addition nennen wir einen *palindromischen Prozess*.

Beispiel: Zwei palindromische Prozesse, die zu palindromischen Zahlen führen:

$$\begin{array}{ccccccc} 317 & \rightarrow & 1030 & \rightarrow & 1331 & \text{ und } & 78 & \rightarrow & 165 & \rightarrow & 726 & \rightarrow & 1353 \\ 713 & \rightarrow & 0301 & & & & 87 & \rightarrow & 561 & \rightarrow & 627 & \rightarrow & 3531 \end{array} \rightarrow 4884.$$

Man nennt $\mathcal{O}(n)$ die palindromische Ordnung von n , wenn man Spiegelung und Addition $\mathcal{O}(n)$ -mal ausführen muss, um eine palindromische Zahl zu erhalten. Im Beispiel sind $\mathcal{O}(317) = 2$ und $\mathcal{O}(78) = 4$.

Die palindromischen Ordnungen der Zahlen mit zwei Ziffern sind:

		Einerziffer									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zehnerziffer	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
	3	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2
	4	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2
	5	1	1	1	1	1	2	1	2	2	3
	6	1	1	1	1	2	1	2	2	3	4
	7	1	1	1	2	1	2	2	2	4	6
	8	1	1	2	1	2	2	3	4	6	24
	9	1	2	1	2	2	3	4	6	24	6

Alle zweiziffrigen Zahlen sind palindromisierbar. Die Zahlen 89 und 98 haben die höchste palindromische Ordnung: Es ist $\mathcal{O}(89) = \mathcal{O}(98) = 24$ und die zugehörige palindromische Zahl am Ende des palindromischen Prozesses ist 8813200023188. Bei der Palindromisierung der dreiziffrigen Zahlen erlebt man eine Überraschung: Es gibt dreizehn sogenannte Ausreißer-Zahlen (runaway numbers), darunter zum Beispiel 196, 295, 394, 689, 788, 879, für die ein Endpalindrom bis heute nicht gefunden wurde — es hat sich zum Beispiel ergeben, dass $\mathcal{O}(196) > 2415836$ ist. Man vermutet:

Für Ausreißer-Zahlen n gilt: $\mathcal{O}(n) = \infty$.

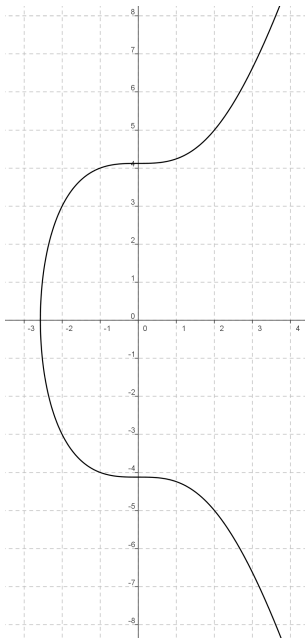
Das Phänomen der Ausreißer-Zahlen tritt auch bei k -ziffrigen Zahlen, $k = 4, 5, 6, \dots$, immer wieder auf. So gibt es unter den vierziffrigen Zahlen 236 Ausreißer, bei den fünfziffrigen Zahlen sind es bereits 5833 und allein unter den 100 Zahlen n mit $10^9 - 100 \leq n \leq 10^9 - 1$ sind es 72 Ausreißer.

Die palindromischen Prozesse führen unmittelbar zu vielen meist ungelösten Fragen. Etwa zu diesen: Welche Eigenschaften der Startzahlen werden auf die palindromischen Endzahlen eines palindromischen Prozesses übertragen? Was passiert, wenn man einen palindromischen Prozess nicht mit dem Erreichen einer palindromischen Zahl beendet, sondern ihn danach fortsetzt? Welche Ergebnisse liefert ein Prozess, der mit Spiegelung und Subtraktion an Stelle von Spiegelung und Addition arbeitet?

Solche Fragen zeigen: Es sind nur die ersten Schritte, die wir zu einer Reise nach Palindromien getan haben.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf einer kubischen Kurve



Bei bestimmten mathematischen Untersuchungen spielt oft die Frage eine Rolle, ob es auf einer vorgegebenen Kurve Punkte gibt, deren Koordinaten ganzzahlig sind. Beispielsweise können wir uns fragen, ob auf der durch die Gleichung $y^2 - x^3 = 17$ definierten kubischen Kurve Punkte liegen, deren Koordinaten ganze Zahlen sind. Untersuche dazu den Bereich $|x| < 10000$. (nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2014 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 116

Ein offenes Problem

Gibt es eine natürliche n -ziffrige Zahl $z_1 z_2 \dots z_n$ mit $n \geq 2$ die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $z_1 z_2 \dots z_n$ hat drei zweiziffrige Teiler $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$;
2. die gespiegelte Zahl $z_n \dots z_2 z_1$ hat die drei zweiziffrigen Teiler $y_1 x_1$, $y_2 x_2$, $y_3 x_3$ (H.F.)

Ergebnisse

Die Antwort lautet schlichtweg: Ja! Man braucht sich ja nur Zahlen anzuschauen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen und drei zweiziffrige Teiler besitzen, die jeweils ebenfalls lauter gleiche Ziffern aufweisen, wie zum Beispiel 44 mit den Teilern 11 und 22 und 44 oder die Zahl 88 mit den Teilern 11, 22 und 44. Aber auch nicht so einfache Beispiele lassen sich schnell (und ohne Computer) finden

wie die Zahl 48 mit den Teilern 12, 24 und 48, die nach Spiegelung auf die Zahl 84 mit den gespiegelten Teilern 21, 42 und 84 führt.

Mit diesen einfachen Beispielen haben sich Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langässer-Gymnasium in Alzey (Klasse 6) und Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal (Klasse 10) nicht begnügt, sondern sind jeweils mit Python-Programmen systematisch der Ermittlung solcher Zahlen nachgegangen. Dabei hat Maximilian den Bereich bis 100 000 untersucht und als größte Zahl mit den geforderten Eigenschaften die Zahl 99 552 mit den Teilern 12, 32 und 96 herausgefunden. Marcel ist in seinem Forscherdrang noch weiter gegangen, nämlich bis 100 Millionen, und hat auch die Verteilung dieser „besonderen“ Zahlen ermittelt:

Bis 100 gibt es sechs der gesuchten Zahlen, nämlich die Zahlen 44, 48, 66, 84, 88 und 99, bis 1000 sind es 42. Hier seine tabellarische Übersicht:

n	Anzahl der Lösungen $< n$	n : Anzahl der Lösungen
100	6	16,67
1000	42	23,81
10000	278	35,97
100000	2699	37,05
1000000	26644	37,53
10000000	264745	37,77
100000000	2635569	37,94

Während n in der Tabelle mit dem Faktor 10 wächst (1. Spalte), vergrößert sich die Anzahl der Lösungen unterhalb n (2. Spalte) ab 10 000 mit einem Faktor, der sich 10 anzunähern scheint: Von 9,71 über 9,87 und 9,94 auf 9,96 – jeweils auf zwei Nachkommastellen gerundet. Entsprechend wächst das Verhältnis n : Anzahl der Lösungen (3. Spalte): Ab $n > 10\,000$ erfüllt in dem untersuchten Bereich etwa jede 37-te Zahl die Bedingungen.

Stochastik mit zwei Ziegen

Wie man mit Hilfe der Mathematik ein Auto gewinnt

von Marcel Barth

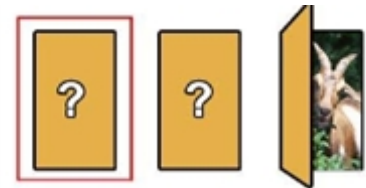
„Können wir unseren Instinkten immer vertrauen?“ Die meisten Menschen würden diese Frage wohl mit „Ja“ beantworten. Die Mathematik zeigt uns aber, dass wir damit nicht immer richtig liegen. Dazu betrachten wir uns im Folgenden das *Ziegenproblem*. Es ist berühmt geworden, da dieses Problem lange Zeit die Gemüter erhitzt und ganze Scharen von Mathematikern an den Rand der Verzweiflung gebracht hat.



Stell Dir vor, Du bist Kandidat in einer Quizshow und stehst vor drei verschlossenen Türen. Hinter einer Tür befindet sich ein Auto, welches Du gewinnen möchtest, hinter den beiden anderen Türen befindet sich jeweils eine Ziege. Deshalb ist das Problem auch unter dem Namen *Ziegenproblem* bekannt geworden.

Du möchtest natürlich den Hauptpreis gewinnen und wählst eine der drei Türen aus. Wir nehmen an, Du entscheidest Dich für Tür 1. Diese bleibt vorerst verschlossen, denn der Moderator, der weiß hinter welcher Tür sich das Auto befindet, gibt Dir noch eine Hilfestellung. Er öffnet eine Tür, hinter der sich eine Ziege befindet – sagen wir Tür 3. Es befindet sich also noch das Auto und eine Ziege im Spiel.

Anschließend fragt Dich der Moderator: „Möchtest Du Deine Wahl nochmals überdenken und die Tür wechseln oder möchtest Du bei Deiner Wahl bleiben?“



Genau hier stellt sich die Frage, die wir im Folgenden beantworten möchten: Ist es sinnvoll zu wechseln oder ist es nicht völlig egal, für welche Tür Du Dich entscheidest?

Wie solltest Du Dich entscheiden, um Deine Gewinnchancen zu maximieren?

Die Wochenzeitung „Die Zeit“ hatte folgende Zahlen einer Umfrage veröffentlicht: Circa 99% der Befragten sind der Meinung, dass die Chance auf das Auto für jede der beide noch verbliebenen Türen bei 50% liege und es demnach egal sei, ob man nun wechsele oder nicht.

Eine mögliche Strategie, für die wir nun die Gewinn-Wahrscheinlichkeit ermitteln wollen, ist die „Wechsel-Strategie“. Dazu betrachten wir jeweils die drei möglichen Fälle getrennt voneinander. Dabei nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass hinter Tür 1 und 2 jeweils eine Ziege und hinter Tür 3 das Auto ist.

1. Fall:



Angenommen, Du hast Dich für Tür 1 entschieden. Dann würdest Du den Moderator zwingen, Tür 2 zu öffnen, hinter der sich eine Ziege befindet. Das heißt, Du gewinnst durch einen Wechsel von Tür 1 auf Tür 3 das Auto.

2. Fall:

Angenommen, Du hast Dich für Tür 2 entschieden. Ganz entsprechend zum ersten Fall zwingst Du den Moderator, Tür 1 zu öffnen. Das heißt, Du gewinnst wiederum durch einen Wechsel von Tür 2 auf Tür 3 das Auto.



3. Fall:



Angenommen, Du hast Dich für Tür 3 entschieden. Nun kann der Moderator entscheiden, ob er Tür 1 oder Tür 2 öffnet, da sich hinter beiden jeweils eine Ziege befindet. Das heißt, bei einem Wechsel von Tür 3 auf die verbliebene Tür (1 oder 2, je nach Wahl des Moderators) verlierst Du das Auto.

Wir fassen zusammen, dass Du also bei der „Wechsel-Strategie“ in einem von drei Fällen (und zwar genau dann, wenn man zu Beginn die Tür mit dem Auto gewählt hat) verlierst und in zwei von drei Fällen gewinnt.

Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, beträgt $\frac{2}{3}$, also circa 66,7%, falls Du dich dazu entscheidest, die Tür zu wechseln.

Die besondere Aufgabe Der Käfer auf dem Gummiband

von Hans-Peter Heinz

Aufgabe

Ein (punktförmiger) Käfer befindet sich an einem Ende eines 1 m langen, unendlich dehnbaren Gummis und versucht, an das andere Ende zu gelangen. Es wird ihm aber nicht leicht gemacht: Stets, wenn er einen Schritt (von jeweils 1 cm Länge) auf das andere Ende zu gemacht hat, wird das ganze Gummi gleichmäßig um 1 m ausgedehnt. Nach dem ersten Schritt und der ersten Dehnung hat der Käfer also 2 cm von insgesamt 2 m zurückgelegt.

Bestimme, ob (und ggf. nach etwa wie vielen Schritten) der Käfer jemals das andere Ende erreicht. (Peter van Dongen, Mainz)

Lösung

Die zurückgelegte Strecke des Käfers lässt sich angeben durch eine Folge (a_n) mit der Folgenrechtsvorschrift

$$a_0 = 0 \text{ und } a_n = (1 + a_{n-1}) \cdot \frac{n+1}{n} \text{ für } n \geq 1.$$

Zugleich hat das Gummiband eine Länge von

$$b_0 = 100 \text{ und } b_n = b_{n-1} + 100 \quad (\text{jeweils in cm}).$$

Dies ergibt sofort die explizite Formel

$$b_n = 100(n+1) \quad \text{für } n \geq 0,$$

aber auch die Beziehung

$$b_n = b_{n-1} \frac{n+1}{n} \quad \text{für } n \geq 1,$$

die sich gleich als nützlich erweisen wird. Wir wollen nämlich die Verhältnisse $v_n := \frac{a_n}{b_n}$ betrachten, an denen man das Schicksal des Käfers ebenfalls ablesen kann: Der Käfer erreicht das andere Ende dann und nur dann, wenn $v_n \geq 1$ wird für ein genügend großes n , und die erste Zahl n , für die das passiert, ist die Anzahl der Schritte, die er benötigt.

Für diese Verhältnisse gilt nun $v_0 = 0$ sowie

$$v_n = \frac{(1 + a_{n-1}) \frac{n+1}{n}}{b_{n-1} \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{b_{n-1}} + v_{n-1} = v_{n-1} + \frac{1}{100n}$$

für $n \geq 1$. Mittels Induktion ergibt sich hieraus sofort (ebenfalls für $n \geq 1$)

$$v_n = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \cdots + \frac{1}{100n} = \frac{1}{100} s_n,$$

wobei

$$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

die Teilsummen der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

sind. Diese Reihe divergiert gegen $+\infty$, und das bedeutet gerade, dass die s_n beliebig groß werden, wenn man nur n hoch genug wählt. Dasselbe geschieht auch mit den v_n , und der Käfer wird sein Ziel erreichen.

Wer nun die Divergenz der harmonischen Reihe noch nicht kennt und sie beweisen möchte, dem sei der Artikel „Die harmonische Reihe und einige ihrer Verwandten“ von Hartwig Fuchs in MONOID 117 empfohlen. Man kann sich aber auch mit etwas Integralrechnung behelfen (vorausgesetzt natürlich, man beherrscht diesen Oberstufenstoff schon), und das ermöglicht auch die gewünschte Abschätzung für die Anzahl der Schritte: Für $1 \leq k < x \leq k+1$ ist $\frac{1}{k} > \frac{1}{x}$, also auch

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln(k+1) - \ln k.$$

Aufsummieren dieser Ungleichungen für $k = 1, \dots, n$ ergibt

$$s_n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n).$$

Aber $\ln 1 = 0$, und zwischendrin heben sich hier alle Terme weg bis auf den vorletzten, das heißt bis auf den Term $\ln(n+1)$. Wir finden also

$$s_n > \ln(n+1) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$ zeigt dies zunächst mal die Divergenz der harmonischen Reihe. Was unseren Käfer betrifft, so finden wir

$$v_n \geq 1 \iff s_n \geq 100.$$

Für $n \geq e^{100} - 1$ ist also $\ln(n+1) \geq 100$ und somit $s_n > 100$. Nach dieser Anzahl von Schritten ist der Käfer also schon angekommen. Viel schneller schafft er es aber auch nicht, denn genauso wie eben kann man auch beweisen, dass

$$s_n < 1 + \ln n$$

ist. Dazu vergleicht man einfach die Integrale von $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{x}$ zwischen den Grenzen von $k-1$ bis k (für $k \geq 2$). Im Fall $n \leq e^{99}$ ist also $s_n < 100$, und der arme Käfer ist noch nicht angekommen.

Nach ungefähr e^{100} Schritten erreicht der Käfer also das andere Ende des Gummibandes. Vermutlich dürfte er (sogar, wenn er sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegte) bis heute noch nicht dort angelangt sein, selbst wenn er bereits beim Urknall aufgebrochen ist – und ob es damals schon Gummibänder gab?

Mathematische Lese-Ecke

– Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

Simon Singh:

„Homers Letzter Satz – Die Simpsons und die Mathematik“

Nicht nur was den Titel angeht knüpft Simon Singh mit „Homers letzter Satz“ an seinen 1998 erschienenen Bestseller „Fermats letzter Satz“ an. Der Autor – seines Zeichens Physiker und Wissenschaftsjournalist – untersucht in seinem neuen Buch die in den USA seit 1989 (in Deutschland seit 1991) laufende Fernsehserie „Die Simpsons“ auf Bezüge zur Mathematik. Auch wenn dieses Unterfangen auf den ersten Blick etwas seltsam anmuten mag, so wird man spätestens beim Lesen des Prologs und des ersten Kapitels eines besseren belehrt. Dort erfährt man einiges über einige Autoren der Serie und darüber welche Universitätsabschlüsse in Mathematik, Physik oder Informatik dabei vorkommen.

Singh bleibt jedoch nicht bei den Machern stehen, sondern wendet sich dann vor allem den in der Serie versteckt oder offen auftauchenden mathematischen Inhalten zu und liefert dem Leser oder der Leserin dabei interessante Einblicke in die Geschichte der Mathematik. Im Kapitel „Homers letzter Satz“ erläutert der Autor kurz die Geschichte der Fermatschen Vermutung – im englischen Sprachraum „Fermats last theorem“ und zitiert sich dabei auch selbst aus seinem gleichnamigen Buch. Als eine Auswahl weiterer anregend dargestellter Inhalte seien die Kreiszahl π , die Eulersche Zahl e , die Lösungsmöglichkeiten des Zauberwürfels, das Galtonbrett, Mersenne-Primzahlen und Hilberts-Hotel genannt. Auch Anekdoten und Witze über Mathematik und Mathematiker kommen nicht zu kurz.

Nachdem in dreizehn Kapitel „Die Simpsons“ untersucht wurden, folgen weitere vier Kapitel über die Trickserie „Futurama“, in welcher die Mathematik eine noch größere Rolle spielt.

Im Anhang folgen nach einer Danksagung fünf kurze Erläuterungen über im Buch vorkommende mathematische Inhalte (wie die Euler'sche Formel oder Fraktale) und Internet-Links zum Thema.

Fazit: Simon Singh ist wieder ein Buch gelungen, das man gerne zur Hand nimmt und in dem man durch den angenehmen Schreibstil des Autors gerne schmökert. Auch wenn man – wie der Rezensent – bisher (noch) kein Fan der „Simpsons“ ist und sie nur rudimentär kennt, liest man mit steigender Begeisterung die Erläuterungen, die von den konkret in der Serie geschilderten Inhalten ausgehend, in die Geschichte und Gegenwart der Mathematik eintauchen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Singh, Simon: Homers Letzter Satz – Die Simpsons und die Mathematik, Hanser 2013, ISBN 978-3-446-43773-9, gebunden 318 Seiten, 21,50 €.

Art des Buches: Mathematische Plaudereien

Mathematisches Niveau: verständlich

Altersempfehlung: ab 14 Jahren

An alle L(o)eser von MONOID:

Wir haben noch einige nicht vergriffene Ausgaben älterer MONOID-Hefte auf Lager, deren Artikel und Aufgaben auch heute noch l(o)esenswert sind.

Diese können bequem über die MONOID-Internetseite

www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

bestellt werden. Dort findest Du auch eine Liste der noch verfügbaren Hefte.

Dabei berechnen wir pro Einzelheft 2,50 €. Von den antiquarischen Ausgaben (Hefte 27–64) bieten wir jeweils zwei Exemplare zum Porto-Preis von 1 € an.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 117

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Lichtspiele

Von den Schülern, die morgens in den Klassenraum kommen, drücken manche den Lichtschalter, andere nicht. Wir wissen, dass der erste Schüler das Licht einschaltet und dass die Schalterstellung nach dem vierten Schüler anders ist als nach dem zweiten. Der sechste und siebte Schüler gehen achtlos am Lichtschalter vorbei. Nach dem siebten Schüler brennt das Licht.

Wie viele Schüler haben die Lichtschalter betätigt?

(WJB)

Lösung:

Damit das Licht brennt, ist eine ungerade Anzahl von Schaltungen erforderlich. Der erste Schüler hat geschaltet. Von den Schülern 3 und 4 hat einer geschaltet. Haben die Schüler 2 und 5 beide geschaltet oder beide nicht geschaltet, so ist die Gesamtzahl der Schaltungen 4 oder 2, also gerade. Es muss daher genau einer von ihnen geschaltet haben. Dies ergibt insgesamt drei Schaltungen.

II. Betriebsratwahl – Teil I

Der Betriebsrat ist sozusagen die „SV“ einer Firma. Vielleicht haben Deine Eltern auf ihrer Arbeit ja auch einen Betriebsrat oder sind sogar gewählte Betriebsräte – frag mal nach. Es gibt ein eigenes Gesetz, das die Rechte und Pflichten eines Betriebsrates regelt, das Betriebsverfassungsgesetz (BetrVG). Im § 15 finden sich Vorgaben zur „Zusammensetzung nach Beschäftigungsarten und Geschlechtern“. In Absatz 2 heißt es: „Das Geschlecht, das in der Belegschaft in der Minderheit ist, muss mindestens entsprechend seinem zahlenmäßigen Verhältnis im Betriebsrat vertreten sein, wenn dieser aus mindestens drei Mitgliedern besteht.“ (Die Mitgliederzahl wird in einem anderen Paragraphen vorgeschrieben und richtet sich nach der Gesamtzahl der wahlberechtigten Arbeitnehmer.)

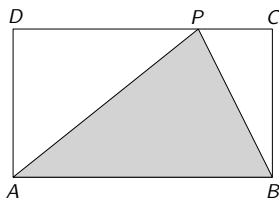
- a) Berechne jeweils die gesetzlich garantierte Mindestzahl der Mitglieder des Geschlechts, das in der Minderheit ist, wenn der § 15, so wie er formuliert ist, wörtlich und mathematisch korrekt angewendet wird:
- 1 Mann und 20 Frauen (drei Mitglieder)
 - 17 Männer und 33 Frauen (drei Mitglieder)
 - 49 Frauen und 50 Männer (fünf Mitglieder)
- b) Kommentiere kurz: Sind diese Zahlen im Sinne dessen, was der Gesetzgeber bei dieser Vorschrift beabsichtigt hat? Begründe und mache gegebenenfalls einen Vorschlag, wie sich das Problem lösen lässt. (MG)

Lösung:

- a) Als gesetzlich garantierte Mindestzahl ergeben sich bei wörtlicher Auslegung des § 15:
- $\frac{1}{1+20} \cdot 3 = \frac{1}{21} \cdot 3 = \frac{1}{7} \approx 0,14$, da diese Zahl mindestens zugesprochen wird, erhielten die Männer (beziehungsweise erhielt der Mann) mindestens ein Mitglied im Betriebsrat zugesprochen ($\approx 33,3\%$ der Mitglieder) – und wäre automatisch gewählt.
 - Es müssten mindestens $\frac{17}{17+33} \cdot 3 = \frac{17}{50} \cdot 3 = 0,34 \cdot 3 = 1,02$ Plätze den Männern zugesprochen werden. Da 1 nicht die Bedingung „mindestens“ erfüllt, kämen also zwei Männer ($\approx 66,7\%$) in den Betriebsrat.
 - Es müssten mindestens $\frac{49}{49+50} \cdot 5 = \frac{49}{99} \cdot 5 \approx 2,47$ Plätze den Frauen zugesprochen werden. Da dies die Mindestzahl wäre, kämen also drei Frauen (60 %) in den Betriebsrat.

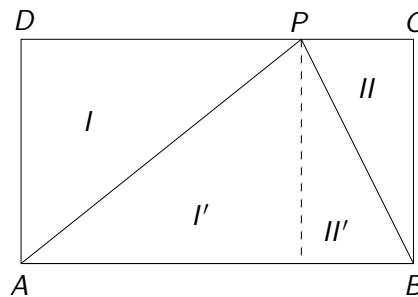
- b) Die drei Beispiele zeigen, dass bei einer wörtlichen und mathematisch korrekten Anwendung bei bestimmten Verhältnissen das Geschlecht, das in der Belegschaft in der Minderheit ist, überproportional vertreten wäre ($\approx 33,3\%$ der Mitglieder bei $\approx 4,8\%$ der Belegschaft) oder sich sogar die Verhältnisse verkehren würden ($\approx 66,7\%$ der Mitglieder statt 34% der Belegschaft beziehungsweise 60% der Mitglieder statt $\approx 49,5\%$ der Belegschaft). Dies kann nicht im Sinne dessen, was der Gesetzgeber bei dieser Vorschrift beabsichtigt hat, sein. Daher ist ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Mitglieder- verhältnisses nötig. Tatsächlich wird das Verhältnis nach dem d'hondtschen Höchstzahlverfahren* bestimmt (§ 5 der Wahlordnung).

III. Beweis ohne Worte



In einem Rechteck $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt der Seite CD . Begründe anschaulich, dass die Fläche des Dreiecks $\triangle PAB$ halb so groß ist wie die Fläche des Rechtecks $ABCD$. (Rechnen mit Formeln ist hier nicht erlaubt.) (H.F.)

Lösung:



IV. Wahr oder falsch?

Bildet man von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen jeweils die Quersumme (= Summe ihrer Ziffern), so ist immer eine dieser Quersummen durch 4 teilbar. (WJB)

Lösung:

Falsch. Die ersten Gegenbeispiele sind 9, 10, 11, 12 mit den Quersummen 9, 1, 2, 3 und 18, 19, 20, 21 mit den Quersummen 9, 10, 2, 3.

V. Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

Stelle die...

- Aufgabennummer,
- Seitenzahl 26,
- aktuelle Heftnummer 117 sowie
- aktuelle Jahreszahl 2014

* nach Victor D'Hondt, * 20.11.1841, †30.05.1901; belgischer Jurist

jeweils als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sowohl mit möglichst wenig (jedoch mindestens zwei) als auch mit möglichst vielen Summanden dar.

Bemerkung: Es genügt hier, die Darstellungen anzugeben. Eine Begründung, dass es keine Darstellungen mit weniger beziehungsweise mehr Summanden gibt, wird nicht verlangt. (MG)

Lösung:

Die gesuchten Darstellungen sind:

- a) $5 = 2 + 3$ (nur mit zwei Summanden möglich),
- b) $26 = 5 + 6 + 7 + 8$ (nur mit vier Summanden möglich),
- c) $117 = 58 + 59 = 3 + 4 + 5 + \dots + 15$ (zwei beziehungsweise 13 Summanden) sowie
- d) $2014 = 502 + 503 + 504 + 505 = 12 + 13 + 14 + \dots + 64$ (vier beziehungsweise 53 Summanden).

VI. Zahl und Ziffernprodukt

Gibt es eine Zahl, deren Ziffernprodukt 8610 ist? (H.F.)

Lösung:

Aus der Primfaktorzerlegung $8610 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41$ folgt, dass die Ziffern der gesuchten Zahl 2, 3, 5, 7 und 41 (oder Produkte dieser Zahlen) sein müssten; 41 (und damit auch jedes Vielfache größer 0) ist jedoch keine Ziffer. Eine Zahl mit dem Ziffernprodukt 8610 gibt es also nicht.

VII. Die Sehen-und-Sagen-Folge

Mathis' Mathematiklehrer meint: „Ich werde jetzt die ersten sechs Glieder einer Folge anschreiben:“ 1; 11; 21; 1211; 111221; 312211. „So. Mathis, kannst du mir sagen, wie man auf das nächste Glied der Sehen-und-Sagen-Folge kommt?“

- a) Kannst Du Mathis helfen?
- b) Berechne das achte Glied der Folge!

Hinweis: Der Name „Sehen-und-Sagen-Folge“ gibt einen Hinweis!

(Lukas Nießen, Klasse 6, Gymnasium Nonnenwerth, Remagen)

Lösung:

- a) Sei die Folge mit a_n bezeichnet. Also ist: $a_1 = 1$ (ich sehe: 1-mal die 1), $a_2 = 11$ (2-mal die 1), $a_3 = 21$ (1-mal die 2 und 1-mal die 1), $a_4 = 1211$ usw. Das erste Folgenglied ist 1, was man als „eine 1“ (1-mal die 1) lesen kann. Deshalb ist das nächste Glied 11. Das kann man als „zwei 1(-er)“ lesen, also ist das dritte Glied 21.
- b) $a_6 = 312211$ (1-mal die 3, 1-mal die 1, 2-mal die 2, 2-mal die 1), also ist $a_7 = 13112221$.
 $a_7 = 13112221$ (1 mal die 1, 1-mal die 3, 2-mal die 1, 3-mal die 2, 1-mal die 1), also ist $a_8 = 1113213211$.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Teilbar durch 12

Auf wie viele Arten kannst Du an 2014 vorne und hinten je eine Ziffer anfügen, sodass das Ergebnis durch 12 teilbar ist? (WJB)

II. Folgenglied?

In der arithmetischen Folge 4, 71, 138, 205, ... ist die Differenz zweier benachbarter Zahlen stets gleich. Untersuche, ob die Zahl 2014 in der Folge vorkommt und wenn ja, das wievielte Element der Folge sie ist. Begründe Deine Antwort! (H.F.)

III. Betriebsratwahl – Teil II

Im ersten Teil der Aufgabe (siehe Lösung auf Seite 18) hatten wir gesehen, dass bei einer wörtlichen und mathematisch korrekten Anwendung des § 15 des Betriebsverfassungsgesetzes ungewollte Effekte auftreten können. Deshalb ist in der Verordnung zur Durchführung des Betriebsverfassungsgesetzes (Wahlordnung – WO) ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Mindestsitze für das Geschlecht in der Minderheit festgelegt. Statt den Anteil proportional auszurechnen (und aufzurunden) wird das d'hontsche Höchstzahlverfahren angewendet.

Dazu werden die beiden Anzahlen der wahlberechtigten Arbeitnehmer eines jeden der beiden Geschlechter nebeneinander geschrieben. Anschließend werden die Zahlen der Reihe nach durch 1, 2, 3 und so weiter bis zur Anzahl n der zu wählenden Betriebsratmitglieder dividiert und unter die Anzahlen geschrieben. Nun werden die n größten Zahlen in diesen Reihen gesucht. Das Geschlecht in der Minderheit erhält dann so viele Betriebsräte, wie ihm nach der Verteilung der n größten Zahlen zustehen (siehe Beispiel rechts).

Div.	47 Frauen	38 Männer
1	47	38
2	23,5	19,0
3	15,6	12,6
4	11,75	9,5
5	9,4	7,6

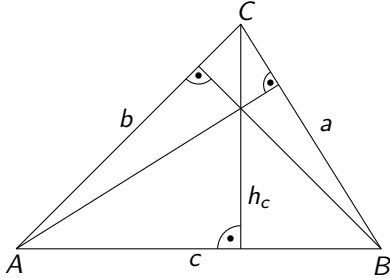
Den Männern stehen mindestens zwei Mitglieder zu.

- a) Bestimme nach dem d'hontschen Höchstzahlverfahren die dem Geschlecht in der Minderheit zustehenden Mitgliederanzahlen im Betriebsrat bei
- 1 Mann und 20 Frauen (drei Mitglieder)
 - 17 Männer und 33 Frauen (drei Mitglieder)
 - 49 Frauen und 50 Männer (fünf Mitglieder)
- b) Entscheide kurz: Sind die Probleme die sich bei wörtlicher und mathematisch korrekter Anwendung des § 15, BetrVG, ergeben hatten, nun behoben? (MG)

IV. Keine Quadratzahl

Zeige, dass die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen keine Quadratzahl sein kann. (WJB)

V. Eine Ungleichung für Dreieckshöhen



In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien a, b, c die Seitenlängen und h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen auf A , auf B , auf C .

Zeige: Aus $a < b < c$ folgt $h_a > h_b > h_c$. (H.F.)

VI. Sechsendfünfzig

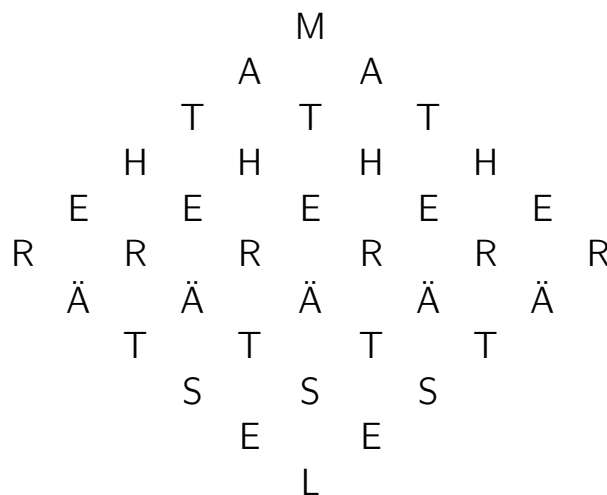
Untersuche, ob man die Zahl 56 so als Summe zweier Zahlen schreiben kann, dass

- jede der beiden Zahlen durch 7 teilbar ist,
- genau eine der beiden Zahlen durch 7 teilbar ist beziehungsweise
- keine der beiden Zahlen durch 7 teilbar ist.

(WJB)

VII. Matherätsel

Auf wie vielen Wegen lässt sich das Wort „MATHERÄTSEL“ in der Abbildung lesen? Beginne beim Ablesen mit dem oberen Buchstaben M und gehe dann immer schräg nach unten links oder unten rechts, bis Du zu dem ganz unten stehenden Buchstaben L gelangst. (SL)



Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1099: Pythagoras' Schüler

Auf die Frage, wie viele Schüler er habe, soll Pythagoras geantwortet haben: „Die Hälfte der Schüler studiert Mathematik und ein Viertel Musik. Außerdem gibt es noch ein Siebtel, die schweigen und drei Frauen.“ Wenn wir annehmen, dass auch die Hälfte der Schweigsamen und ein Drittel der Mathematiker und Musiker weiblich waren, wie viele Frauen waren es dann insgesamt? (WJB)

Aufgabe 1100: 5-Zahlen

Eine fünfstellige Zahl, die die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 jeweils genau einmal enthält, nennen wir 5-Zahl. Wie viele 5-Zahlen sind

a) Primzahlen?

b) Quadratzahlen?

(LB)

Aufgabe 1101: Zahl plus Quersumme

Bestimme alle natürlichen Zahlen, für die gilt:

$$n + Z(n) = 2014.$$

Dabei bezeichnet $Z(n)$ die Summe der Ziffern von n .

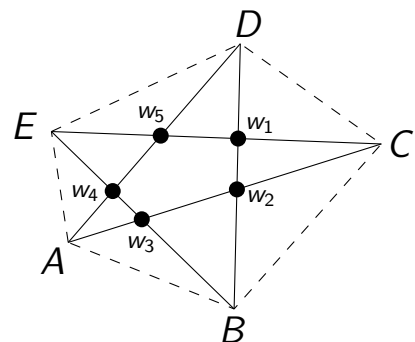
(H.F.)

Aufgabe 1102: Gerade oder ungerade?

Die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n sei mit $A(n)$ bezeichnet. So ist etwa $A(48) = 10$. Ist dann die Summe $S = A(1) + A(2) + \dots + A(2014)$ eine gerade oder ungerade Zahl? (H.F.)

Aufgabe 1103: Außenwinkel eines Sterns

In einem beliebigen konvexen Fünfeck $ABCDE$ – das also keine einspringenden Ecken besitzt – verbinde man jede Ecke mit ihren beiden jeweils nicht benachbarten Ecken. Man erhält man so einen fünfzackigen Stern – vergleiche die nebenstehende Figur. Bestimme die Summe der fünf Außenwinkel $w_1, w_2, \dots, w_5$ des Sterns. (H.F.)



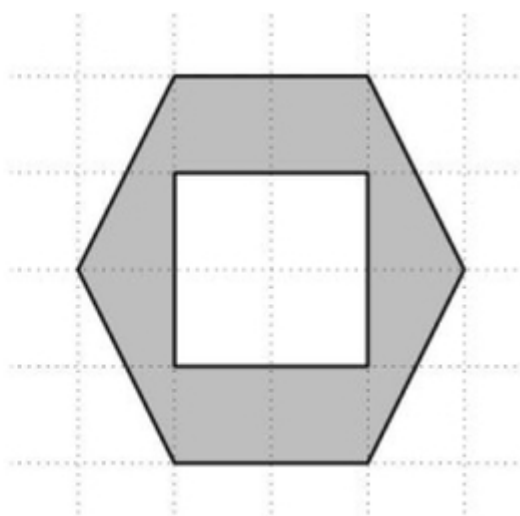
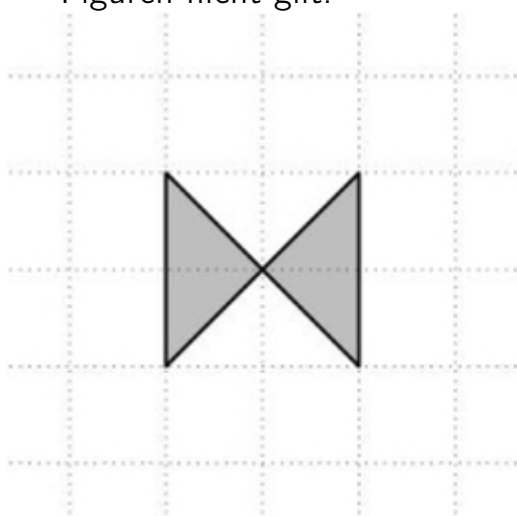
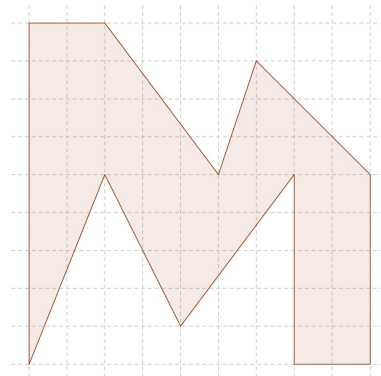
Aufgabe 1104: Zerlegung eines Vierecks

Lässt sich ein Viereck durch zwei gerade Schnitte in mehr als vier Teile zerlegen? (H.F.)

Aufgabe 1105: Satz von Pick

In Monoid-Heft 117 auf den Seite 16ff konntet Ihr über den Satz von Pick (samt Beweis) lesen.

- Berechne den Flächeninhalt der nebenstehenden Figur mithilfe des Satzes von Pick (1 Kästchen = 1 LE = 1 Längeneinheit).
- Berechne den Flächeninhalt der nebenstehenden Figur ohne Verwendung des Satzes von Pick, sondern über Flächenzerlegung (1 Kästchen $\hat{=}$ 1 cm²).
- Zeige, dass der Satz von Pick für die folgenden Figuren nicht gilt.



(MG)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 117

Klassen 9–13

Aufgabe 1092: Summe aufeinanderfolgender Zahlen

Verena hat ein wenig mit Zahlen „experimentiert“ und festgestellt, dass sich 2013 beispielsweise als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen schreiben lässt, nämlich $1006 + 1007 = 2013$, oder auch von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, nämlich $670 + 671 + 672$. Sie erkennt aber auch schnell, dass beides für 2014 nicht möglich ist.

- Begründe, warum sich 2014 nicht als Summe von zwei oder drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt.
- Verena findet aber eine Darstellung von 2014 als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Gib diese Summendarstellung an.
- Welche Blöcke von $n \geq 2$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen haben als Summe 2014?

(MG)

Lösung:

- a) Von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets die eine gerade und die andere ungerade und deshalb die Summe immer ungerade. Deshalb lässt sich eine gerade Zahl, wie 2014, niemals als eine solche Summe darstellen. Wenn sich eine Zahl N als Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt, so ist $N = m + (m + 1) + (m + 2) = 3m + 3$ für eine natürliche Zahl m . Also ist N durch 3 teilbar. Da 2014 jedoch nicht durch 3 teilbar ist, existiert keine solche Darstellung.
- b) Es ist $2014 : 4 = 503,5$. Somit ist die gesuchte Darstellung

$$502 + 503 + 504 + 505 = 2014.$$

- c) Für die n Zahlen $m, m + 1, m + 2, \dots, m + n - 1$ eines solchen Blocks beträgt die Summe

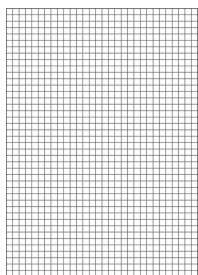
$$\begin{aligned} S &= m + (m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + n - 1) \\ &= nm + 1 + 2 + \dots + (n - 1) \stackrel{(*)}{=} nm + \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n(n + 2m - 1)}{2}, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle (*) die gaußsche Summenformel verwendet wurde. Aus der Summe folgt hier, dass $nk := n(n + 2m - 1) = 2S = 4028 = 2 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ ist. Jede Zerlegung $2S = nk$ mit $n < k$, wobei wegen $k = n + 2m - 1$ genau eine der beiden Zahlen n und k gerade und die andere ungerade sein muss, führt zu einer Darstellung der Zahl S als Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Für 2014 ergeben sich die folgenden gültigen Darstellungen:

- wegen $4028 = 4 \cdot 1007$ der 4-er Block aus Teil (b): $502 + 503 + 504 + 505 = 2014$,
- wegen $4028 = 19 \cdot 212$ der 19-er Block $97 + 98 + 99 + \dots + 115 = 2014$ und
- wegen $4028 = 53 \cdot 76$ der 53-er Block $12 + 13 + 14 + \dots + 64 = 2014$.

Aufgabe 1093: Prozentrechnung



David sitzt an seinen Mathematik-Hausaufgaben. Prozentrechnung! Während er rechnet fragt er sich: „Wieviel Prozent des karierten Papiers ist eigentlich schwarz?“

Er misst nach: Das Blatt (vergleiche nebenstehende Abbildung) ist 210 mm breit und (etwas vereinfacht) 300 mm hoch, die Karokästchen sind vom linken Rand zum linken Rand des benachbarten Kästchens 5 mm breit, die Linien 0,4 mm dick.

- a) Löse Davids Aufgabe: Wieviel Prozent des karierten Papiers ist wegen der Linien schwarz gefärbt?
- b) Gib das Verhältnis der schwarz gefärbten Fläche zur weißen Fläche an. (MG)

Lösung:

Da genau 42 Karokästchen nebeneinander und (mit der getroffenen Vereinfachung) 60 übereinander auf dem Blatt sind, genügt es, die Fragen für ein Kästchen zu beantworten. Anteil und Verhältnis gelten dann auch für das gesamte Blatt.

- a) Auf jedem $5\text{ mm} \times 5\text{ mm}$ großen Quadrat sind jeweils eine horizontale und eine vertikale Linie der Dicke $0,4\text{ mm}$. Die weiße Quadratfläche selbst hat also die Größe $4,6\text{ mm} \times 4,6\text{ mm}$.

Der Schwarzanteil beträgt also

$$5\text{ mm} \cdot 5\text{ mm} - 4,6\text{ mm} \cdot 4,6\text{ mm} = 25\text{ mm}^2 - 21,16\text{ mm}^2 = 3,84\text{ mm}^2.$$

Somit ergibt sich der Prozentsatz zu

$$\frac{\text{schwarze Fläche}}{\text{Kästchenfläche}} = \frac{3,84\text{ mm}^2}{25\text{ mm}^2} = 0,1536 = 15,36\%.$$

- b) Das Verhältnis ist folglich

$$\frac{\text{schwarze Fläche}}{\text{weiße Fläche}} = \frac{15,36\%}{84,64\%} = \frac{15,36}{84,64} = \frac{96}{529}.$$

Aufgabe 1094: Konstruierbare Winkel

Gib möglichst viele ganzzahlige Winkel an (zwischen 0° und 90°), die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

Bemerkung: Gib jeweils an, wie sich die Winkel konstruieren lassen. Ein Beweis für die Nichtkonstruierbarkeit der übrigen Winkel ist nicht nötig.

Hinweis: Denke an das regelmäßige Fünfeck.

(Stefan Krause, Saarbrücken)

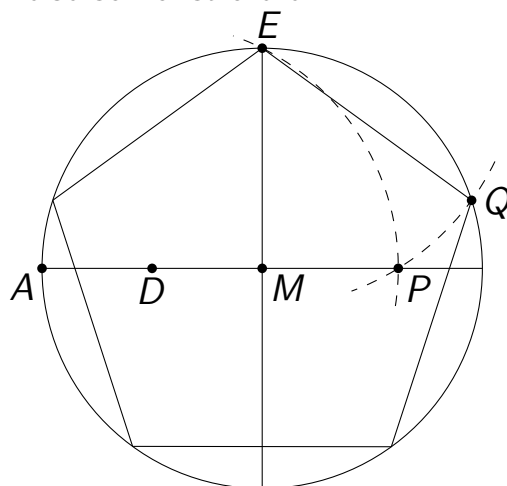
Lösung:

Alle Vielfachen von 3° lassen sich konstruieren: Man kann 60° konstruieren (regelmäßiges Dreieck), 72° (regelmäßiges Fünfeck), die Differenz davon ($72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$), und Halbierungen $\left(\frac{12^\circ}{2} = \frac{12^\circ}{4} = 3^\circ\right)$.

Bemerkung:

Ein regelmäßiges Fünfeck kann man beispielsweise so konstruieren:

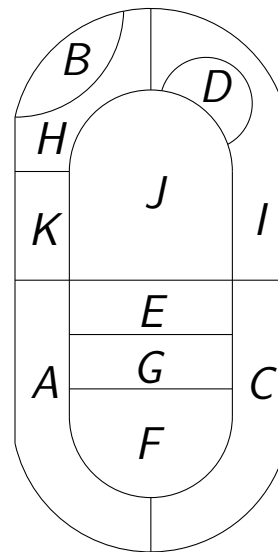
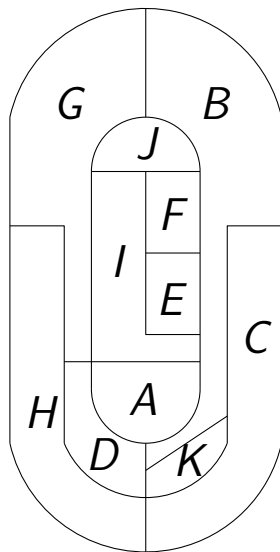
Starte mit einem Kreis mit Mittelpunkt M und beliebigem Radius. Konstruiere anschließend zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Kreises. Halbiere nun die Strecke $\overline{AM}$, um den Punkt D zu erhalten. Der Kreis mit Mittelpunkt D und Radius $|\overline{DE}|$ schneidet die Gerade AM im Punkt P . Trage nun fünfmal die Streckenlänge $|\overline{EP}|$ auf dem Kreis ab, um ein regelmäßiges Fünfeck zu erhalten.



Aufgabe 1095: Phantasia und Ypsilon

Der Planet Phantasia hat einen Mond Ypsilon. Auf Phantasia gibt es elf Länder: A-Land, B-Land, ..., K-Land. Jedes dieser Länder besitzt eine Kolonie auf Ypsilon. In der Abbildung findest Du eine Karte von Phantasia (links) sowie von Ypsilon (rechts).

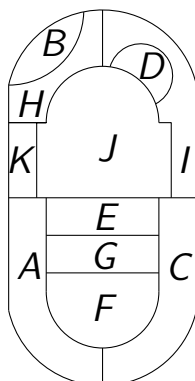
- Kannst Du die beiden Karten so mit acht Farben einfärben, dass auf keiner Karte zwei Länder der gleichen Farbe an einer Kante zusammenstoßen (einander berührende Ecken sind erlaubt)?
- Ist das auch mit weniger Farben möglich? Wenn ja, wie? Wenn nicht, warum nicht? (LB)



Lösung:

- Eine mögliche Lösung ist: Färbe A-, B-, C-, E-, F-, G-, I- und J-Land in acht verschiedenen Farben, D-Land in der gleichen Farbe wie C-Land, H-Land in der gleichen Farbe wie A-Land und K-Land in der gleichen Farbe wie G-Land.
- Man kann die angegebene Karte auch mit sieben Farben einfärben, zum Beispiel, indem man in der Färbung aus a) die Farbe von A-Land durch die Farbe von J-Land ersetzt.

Leider hat sich bei dieser Aufgabe im letzten Heft der Fehlerteufel eingeschlichen. Die Karte von Ypsilon sollte eigentlich so aussehen:



Die Lösung von Aufgabenteil a) ist dann auch für diese Karte richtig, die zu b) allerdings nicht: Es ist nicht möglich, die Karte mit weniger als acht Farben einzufärben. Jedes der Länder A-, B-, C-, E-, F-, G-, I- und J-Land grenzt auf mindestens einer der Karten an jedes andere dieser acht Länder. Diese acht Länder müssen also in acht verschiedenen Farben gefärbt werden.

Aufgabe 1096: Zufällig richtig?

Wenn Du zur Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Deine Antwort richtig?“ eine der folgenden Antwortmöglichkeiten rein zufällig ankreuzt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Deine Antwort dann richtig?

- a) 25%
- b) 50%
- c) 75%
- d) 25%

(gefunden in der Aachener Zeitung von WJB)

Lösung:

Wäre 25% richtig, so würde sie mit Wahrscheinlichkeit $2 \cdot 25\% = 50\%$ angekreuzt. Umgekehrt trifft auch 50% nicht zu, da dann nur die Ankreuzmöglichkeit b) richtig wäre. Ebenso trifft auch offensichtlich c) nicht zu.

Also trifft keine der vier Ankreuzmöglichkeiten das richtige Ergebnis. Die Wahrscheinlichkeit ist also 0 durch zufälliges Ankreuzen einer dieser vier Möglichkeiten richtig zu liegen.

Aufgabe 1097: Quadrate-Siebtel

Zeige: Teilt man eine Quadratzahl durch 7, so bleibt niemals der Rest 3, 5 oder 6. (WJB)

Lösung:

Jede natürliche Zahl n lässt sich schreiben als $n = 7m + s$ mit $0 \leq s \leq 6$. Teilt man nun $n^2 = 49m^2 + 14ms + s^2$ durch 7, so hängt der Rest r nur von s ab, und zwar so:

s	0	1	2	3	4	5	6
s^2	0	1	4	9	16	25	36
r	0	1	4	2	2	4	1

Die Werte 3, 5 und 6 kommen also in der Tat nicht vor.

Aufgabe 1098: Produkt und Summe zweier Zahlen

Zeige: Wenn das Produkt zweier positiver Zahlen 1 ist, dann ist ihre Summe ≥ 2 . (H.F.)

Lösung:

Es seien $a > 0$ und $b > 0$ zwei Zahlen, für die $ab = 1$ ist. Wenn $a = b = 1$, so ist $ab = 1$ und $a + b = 2$, die Behauptung stimmt also.

Für $a \neq b$ sei $a < 1$. Dann folgt aus $a = \frac{1}{b}$, dass $b > 1$ ist. Sei daher $a = 1 - r$ und $b = 1 + s$ mit $0 < r < 1$, $s > 0$. Dann ist $a + b - ab = (1 - r) + (1 + s) - (1 - r)(1 + s) = 1 + rs > 1$. Wegen $ab = 1$ ist daher $a + b - 1 > 1$, sodass $a + b = 2 + rs > 2$ gilt. (Für den Fall, dass $b < 1$, $a > 1$ gilt, vertausche man a und b .)

Alternative Lösung:

Es seien $a > 0$ und $b > 0$ zwei Zahlen, für die $ab = 1$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \\ &= a - 2 + b, \end{aligned}$$

also $a + b \geq 2$, wie behauptet.

Alternative Schülerlösung:

Betrachte die Funktion $S(a, b) = a + b$. Nach Voraussetzung gilt die Bedingung $ab = 1$, also $a = \frac{1}{b}$. Damit folgt $S(b) := S(\frac{1}{b}, b) = \frac{1}{b} + b$.

Berechnen des Extremums dieser Funktion:

$$S'(b) = -\frac{1}{b^2} + 1 \stackrel{!}{=} 0 \iff b = \pm 1,$$

also (da die Zahlen positiv sein sollen) $b = 1$.

Mit der zweiten Ableitung $S''(b) = \frac{2}{b^3}$ folgt $S''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$, also hat die Funktion bei $x = 1$ ein Minimum mit dem Wert $S(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$.

Das kleinste mögliche Produkt ist also 2 und damit ist die Behauptung gezeigt.

(nach Daniel Fink, Klasse 11, Rhein-Wied-Gymnasium, Neuwied;
Miriam Gerharz, Klasse 11, Goethe-Gymnasium, Bad Ems)

Der Zwei-Quadrate-Satz von Fermat

von Marcel Hilfrich

Welche natürlichen Zahlen lassen sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen?

$1 = 1^2 + 0^2$	$7 =$	$13 = 3^2 + 2^2$
$2 = 1^2 + 1^2$	$8 = 2^2 + 2^2$	$14 =$
$3 =$	$9 = 3^2 + 0^2$	$15 =$
$4 = 2^2 + 0^2$	$10 = 3^2 + 1^2$	$16 = 4^2 + 0^2$
$5 = 2^2 + 1^2$	$11 =$	$17 = 4^2 + 1^2$
$6 =$	$12 =$	$\dots$

Diese Frage ist so alt wie die Zahlentheorie selbst und hat viele Mathematiker beschäftigt. Als erster hat Pierre de Fermat¹ die Antwort als Satz formuliert:

Eine natürliche Zahl n ist genau dann als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar, wenn jeder Primfaktor der Form $p = 4m + 3$ in der Primfaktorzerlegung von n mit geradem Exponenten auftritt.

Der erste Beweis dieses Satzes stammt von Leonhard Euler². Wir wollen hier eine übersichtlichere Beweisvariante vorstellen.

¹ französischer Mathematiker und Jurist, 1607–1665

² Schweizer Mathematiker, 1707–1783

Eine Zahl n soll darstellbar heißen, wenn ganze Zahlen x und y existieren mit $x^2 + y^2 = n$.

Darstellbarkeit zusammengesetzter Zahlen

Man erkennt leicht, dass das Produkt zweier darstellbarer Zahlen $n_1 = a^2 + b^2$ und $n_2 = c^2 + d^2$ wieder darstellbar ist, denn $n_1 n_2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 = a^2 c^2 - 2abcd + b^2 d^2 + a^2 d^2 + 2abcd + b^2 c^2 = (ac - bd)^2 + (ad + cb)^2$.

Weiter gilt für alle ganzen Zahlen z : Ist n darstellbar, so ist auch $z^2 n$ darstellbar. Betrachte dazu $n = x^2 + y^2$. Dann ist $z^2 n = z^2 x^2 + z^2 y^2 = (zx)^2 + (zy)^2$.

Darstellbarkeit von Primzahlen

Alle Primzahlen $p \neq 2$ sind entweder von der Form $p = 4m + 1$ oder $p = 4m + 3$ mit $m = 0, 1, 2, \dots$

Das Quadrat einer geraden Zahl hat die Form $(2k)^2 = 4k^2$, das einer ungeraden Zahl die Form $(2k+1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$. Teilt man Quadratzahlen durch 4, bleibt als Rest also immer 0 oder 1, bei einer Summe von zwei Quadratzahlen folglich einer der Reste 0, 1 oder 2 – niemals 3! Daher gilt:

Eine Zahl der Form $n = 4m + 3$ ist nicht darstellbar.

Umgekehrt gilt außerdem:

Teilt eine Primzahl p der Form $p = 4m + 3$ eine darstellbare Zahl $n = x^2 + y^2$, dann ist auch p^2 ein Teiler von n und $\frac{n}{p^2}$ ist darstellbar,

denn: Wenn eine Primzahl p dieser Form n teilt, muss es auch x und y teilen³. Sei $x = x'p$, $y = y'p$, und damit $n = (x'p)^2 + (y'p)^2 = x'^2 p^2 + y'^2 p^2 = (x'^2 + y'^2) p^2$ und $\frac{n}{p^2} = x'^2 + y'^2$.

Nun fehlt uns nur noch ein Bestandteil, um den Beweis des Satzes führen zu können:

Jede Primzahl der Form $p = 4m + 1$ ist darstellbar.

Diese am schwierigsten zu zeigende Behauptung beweisen wir nach der Variante von Roger Heath-Brown⁴ mit Hilfe dreier Involutionen.

Drei Involutionen

Eine Involution ist eine Funktion f , die ihre eigene Umkehrfunktion ist (das heißt für alle a aus dem Definitionsbereich, der gleichzeitig der Zielbereich ist, gilt $f(f(a)) = a$).

Betrachte für eine feste Primzahl der Form $p = 4m + 1$ die Menge $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 4xy + z^2 = p \text{ mit } x > 0, y > 0\}$. S ist endlich, denn aus $x \geq 1, y \geq 1$ folgen $x \leq \frac{p}{4}, y \leq \frac{p}{4}$. Also gibt es nur endlich viele Werte für x und y und für gegebenes x und y gibt es höchstens zwei Werte für z .

³ Es ist recht langwierig, das zu beweisen – wir verzichten an dieser Stelle darauf.

⁴ britischer Mathematiker, geb. 1952, der Beweis stammt aus dem Jahr 1971 und wurde 1984 veröffentlicht

Erste Involution: $f : S \rightarrow S, (x, y, z) \mapsto (y, x, -z)$

- f hat keine Fixpunkte (das heißt Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden), denn $z = -z \Rightarrow z = 0 \Rightarrow p = 4xy$, aber p kann als Primzahl nicht durch 4 teilbar sein.
- f bildet die Lösungen in $T := \{(x, y, z) \in S : z > 0\}$ auf die Lösungen in $S \setminus T$ ab, die alle $z < 0$ erfüllen.
- f vertauscht nicht nur das Vorzeichen von z , sondern auch das von $x - y$, bildet somit auch die Lösungen in $U := \{(x, y, z) \in S : (x - y) + z > 0\}$ auf die Lösungen in $S \setminus U$ ab, die alle $(x - y) + z < 0$ erfüllen.
(Es gibt keine Lösung mit $(x - y) + z = 0$, denn dann würde $p = 4xy + z^2 = 4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2$ folgen, was für p als Primzahl natürlich nicht möglich ist.)

Da f jeden Punkt aus T beziehungsweise U umkehrbar eindeutig auf je einen Punkt in $S \setminus T$ beziehungsweise $S \setminus U$ abbildet und dabei alle Elemente von S erfasst werden, müssen T und U jeweils die halbe Kardinalität⁵ von S haben. Insbesondere gilt:

T und U haben dieselbe Kardinalität.

Zweite Involution: $g : U \rightarrow U, (x, y, z) \mapsto (x - y + z, y, 2y - z)$ (Dass es sich tatsächlich um eine wohldefinierte Involution handelt, kann man leicht nachrechnen.)

Die Funktion g hat für $p = 4m + 1$ genau einen Fixpunkt: $(x, y, z) = g(x, y, z) \Leftrightarrow y = z \Rightarrow p = 4xy + y^2 = (4x + y)y \Rightarrow y = 1 = z, x = \frac{p-1}{4}$. Einsetzen dieser Werte für x, y, z zeigt, dass dies tatsächlich ein Fixpunkt von g ist. Daher gilt:

U hat ungerade Kardinalität,

denn ansonsten bestünde U aus Paaren von Punkten, die jeweils aufeinander abgebildet werden.

Dritte Involution: $h : T \rightarrow T, (x, y, z) \mapsto (y, x, z)$

Aus der Betrachtung der ersten beiden Involutionen folgt, dass T ungerade Kardinalität hat. Folglich muss auch h einen Fixpunkt haben – es existiert also ein Punkt $(x, y, z) \in T$ mit $x = y$, und damit eine Lösung von $p = 4xy + z^2 = 4x^2 + z^2 = (2x)^2 + z^2$. Somit haben wir eine Darstellung von $p = 4m + 1$ gefunden.

⁵ Die Kardinalität einer Menge ist die Anzahl der in ihr enthaltenen Elemente.

Schlussfolgerung (Fermats Satz)

Eine natürliche Zahl n ist genau dann darstellbar, wenn jeder Primfaktor der Form $p = 4m + 3$ in der Primfaktorzerlegung von n mit geradem Exponenten auftritt.

Dieser Satz hat zwei Richtungen, die wir nun beide beweisen wollen.

Die Hinrichtung (Ist eine natürliche Zahl n darstellbar, so tritt jeder Primfaktor der Form $p = 4m + 3$ in der Primfaktorzerlegung von n mit geradem Exponenten auf.) folgt induktiv aus einer unserer vorab bewiesenen Teilbehauptungen (Teilt eine Primzahl p der Form $p = 4m + 3$ eine darstellbare Zahl n , dann ist auch p^2 ein Teiler von n und $\frac{n}{p^2}$ ist darstellbar.), denn ein p mit geradem Exponenten tritt immer als eine Potenz von p^2 auf und bei wiederholtem Teilen durch p^2 bleibt die Darstellbarkeit von n immer erhalten. Da 0 ebenfalls eine gerade Zahl ist und $p^0 = 1$, sind natürlich auch Zahlen n ohne einen solchen Faktor p abgedeckt.

Betrachten wir die Rückrichtung (Tritt jeder Primfaktor der Form $p = 4m + 3$ in der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl n mit geradem Exponenten auf, so ist n darstellbar.). $1 = 1^2 + 0^2$ ist darstellbar. Alle anderen natürlichen Zahlen sind entweder Primzahlen oder Produkte von Primzahlen. Die Primzahl 2 und alle Primzahlen der Form $p = 4m + 1$ sind darstellbar und somit auch ihre Produkte (Das Produkt zweier darstellbarer Zahlen ist wieder darstellbar.). Bleiben also nur noch die Primzahlen der Form $p = 4m + 3$. Diese sind zwar selbst nicht darstellbar, sollen aber nur mit geradem Exponenten, also insbesondere als Quadratzahlen, auftreten und beeinflussen daher die Darstellbarkeit von n nicht, denn wir haben gezeigt, dass das Produkt aus einer Quadratzahl und einer darstellbaren Zahl wieder darstellbar ist. Folglich sind alle Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung die Primzahlen der Form $p = 4m + 3$ mit geradem Exponenten auftreten, darstellbar, was zu zeigen war.

Primzahlen-Wüsten aus natürlichen Zahlen

von Edgar Höniger

Auf unserem Planeten gibt es Sandwüsten, Felswüsten, Eiswüsten, Dort stehen weder Baum noch Strauch. Im Gefilde der natürlichen Zahlen gibt es für den Primzahlensucher ganz ähnlich Bereiche aus unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Wüsten ohne Primzahlen, die also aus lauter in Faktoren zerlegbaren Zahlen bestehen.

Beispiel: $\{1460, 1461, \dots, 1469, 1470\}$.

Weil unsere Erdoberfläche begrenzt ist, können Gebiete ohne Flora nicht beliebig ausufern. Wüsten ohne Primzahlen sind dagegen an solche physischen Unzuläng-

lichkeiten nicht gebunden. Man wird sich also fragen:

Gibt es beliebig große primzahlfreie Wüsten aus unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen?

Wenn wir beispielsweise die Verteilung der ersten hundert Zahlen auf dem Zahlenstrahl betrachten, so ist die Ausdehnung der Wüsten, die uns primzahlfreie Bereiche anzeigen, recht klein. Könnte es wohl im „Außenbereich“ anders zugehen?

Wir konstruieren die Folge $a(i) = i + (n_0 + 1)!$ mit einer festen natürlichen Zahl n_0 . Durchläuft i nun die Menge $\{2, 3, \dots, n_0 + 1\}$, so erhalten wir eine Folge unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen, und es gilt:

$$\begin{aligned} a(i) &= i + 2 \cdot 3 \cdot \dots (i - 1) \cdot i \cdot (i + 1) \cdot \dots \cdot (n_0 + 1) \\ &= i \cdot (1 + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (i - 1) \cdot (i + 1) \cdot \dots \cdot (n_0 + 1)). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass kein Element der Folge eine Primzahl ist. Zwischen $1 + (n_0 + 1)!$ und $n_0 + 1 + (n_0 + 1)!$ gibt es also eine große Primzahlen-Wüste, wenn nur n_0 eine genügend große Zahl ist. Auf der Suche nach primzahlfreien Gebieten erwartet uns also eine lange, lange Reise: Wenn wir auch nur 1000 unmittelbar aufeinander folgende zusammengesetzte natürliche Zahlen aufstöbern wollen, liegt unser Startpunkt bei $2 + 1001!$. Diese Zahl besteht aus 2571 Stellen, während die Anzahl aller Atome im Universum auf nur 10^{80} geschätzt wird, wobei wir darauf hinweisen, dass die „dunkle Materie“ dabei nicht mit einberechnet ist. Die Zahlen $i + (n_0 + 1)!$ mit $i = 2, 3, \dots, n_0 + 1$ sind bei großen n_0 jedenfalls so gigantisch, dass ihre Größe unsere Vorstellungskraft sprengt – wobei nicht ausgeschlossen ist, dass es in ihrem Vorfeld noch weitere unentdeckte weiße Flecken gibt, über die wir mit Riesenschritten hinweggegangen sind.

Mathematische Entdeckungen

Neue Aufgabe

Das pythagoräische Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 hat eine Hypotenusenlänge, die gleichzeitig Kathetenlänge eines pythagoräischen Dreiecks mit den Seitenlängen 5, 12, 13 ist – skizziere die beiden Dreiecke!

Schon Euklid wusste, dass pythagoräische Tripel die Form $(n^2 - m^2, 2mn, n^2 + m^2)$ für $m, n = 1, 2, 3, \dots$ haben.

- Gib weitere solche „Hypo-Katheten“ an.
 - Zeige, dass für $n := m(m + 1)$, $m' = m + 1$, $n' = n + 1$ die Hypotenusenlänge des Tripels zu (m, n) gleich einer Kathetenlänge des Tripels zu (m', n') ist.
 - Findest Du weitere m, n, m', n' -Beziehungen, die zu „Hypo-Katheten“ führen?
- (Roland Schröder)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. August 2014 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 116

In Heft 116 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Die letzte Ziffer einer Quadratzahl n^2 ist bestimmt durch die letzte Ziffer von n . So erhält man folgende Tabelle:

Letzte Ziffer von n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Letzte Ziffer von n^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Bei n^2 kommen nicht alle Ziffern vor und die Liste ist symmetrisch – warum? Wir ersetzen die Basis 10 des Dezimalsystems durch eine andere Basis B . Ist das dann im B -System auch so? Wir betrachten die entsprechenden Listen (jeweils für $n = 1, 2, \dots, B - 1$):

B	
3	1 1
4	1 0 1
5	1 4 4 1
$\vdots$	$\vdots$
11	1 4 9 5 3 3 5 9 4 1
12	1 4 9 4 1 0 1 4 9 4 1
13	1 4 9 3 (12) (10) (10) (12) 3 9 4 1
$\vdots$	$\vdots$

Dabei schreiben wir im Fall $B > 10$ die Ziffern mit Werten 10, 11, ... in der Form (10), (11),

Welche Regelmäßigkeiten vermutest Du? Welche davon kannst Du beweisen? Wo tritt in der Liste die Ziffer 0 auf?

Wie verhält es sich, wenn wir die letzten zwei (oder noch mehr) Ziffern betrachten? Kannst Du auch für n^3 , n^4 , ... etwas aussagen?

Zum Beispiel erhält man für n^3 die Tabelle (im Dezimalsystem):

Letzte Ziffer von n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Letzte Ziffer von n^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Hier gibt es eine andere Symmetrie als bei n^2 , nämlich erhält man jeweils bei der Addition der ersten und letzten Zahl, der zweiten und vorletzten Zahl usw. die gleiche Zahl. Siehst Du warum? (WJB)

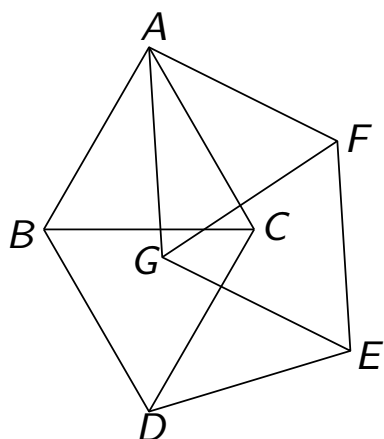
Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe hat sich Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal beschäftigt. Er hat herausgefunden:

1. Die Liste der Quadrate (sogar: der geradzahligten Potenzen) mit Basis B ist symmetrisch für alle B , denn $n^2 \equiv (-1)^2 n^2 \equiv (-n)^2 \equiv (B-n)^2 \pmod{B}$. Der Beweis funktioniert analog für geradzahligte Exponenten.
2. In der Liste der Kubikzahlen (sogar: der ungeradzahligten Exponenten) addiert sich die erste Ziffer mit der letzten, die zweite mit der vorletzten und so weiter stets zu $0 \pmod{B}$, denn $n^3 + (B-n)^3 \equiv n^3 + (-n)^3 \equiv n^3 - n^3 \equiv 0 \pmod{B}$. Auch dieser Beweis funktioniert analog für alle ungeradzahligten Exponenten.
3. Die 0 kommt in einer Liste k -ter Potenzen genau dann vor, wenn in der Primfaktorzerlegung von B mindestens ein Exponent ≥ 2 ist.

Beweis: Ist p ein Primteiler von B mit $p^2 | B$, so setze $n := \frac{B}{p}$. Dann gilt $p^{2k} | B^k$ und deswegen ist B Teiler von $\frac{B^k}{p^k} = n^k$. Es folgt $n^k \equiv 0 \pmod{B}$. Wenn aber $B = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$ mit paarweise verschiedenen p_i ist, dann können in der Primfaktorzerlegung von n und somit auch der von n^k wegen $n < B$ nicht alle p_i vorkommen, das heißt B kann nicht Teiler von n^k sein.

Lösungen zur farbigen Aufgabe von Seite 4



Die nebenstehende Figur sei ein Fünfeck mit den Seitenlängen 1, sodass die vier Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle AGF$ und $\triangle FGE$ gleichseitig mit ebenfalls den Seitenlängen 1 sind. Diese Figur ist konstruierbar (überlege Dir wie!) – und das heißt: In der Ebene gibt es solche geometrischen Figuren.

Nun zum Nachweis der Behauptung:

Man denke sich alle Punkte der Menge M_1 blau gefärbt, der Menge M_2 grün und der Menge M_3 rot gefärbt.

Annahme: Es gibt keine zwei Punkte gleicher Farbe vom Abstand 1.

Es sei A ein blauer Punkt. Nach Annahme sind B und C beide nicht blau aber auch nicht von gleicher Farbe. Folglich ist einer der Punkte B, C grün und der andere ist rot. Wieder nach Annahme muss daher D blau sein.

Ganz ebenso zeigt man: Ist A ein blauer Punkt, dann folgt aus der Annahme, dass auch E ein blauer Punkt ist.

Nach Konstruktion ist $|DE| = 1$, so dass D und E die Annahme widerlegen – es gilt also die Behauptung, denn es ist $D \in M_1$ und $E \in M_1$.

Ein Carrollsches Problem

von Hartwig Fuchs

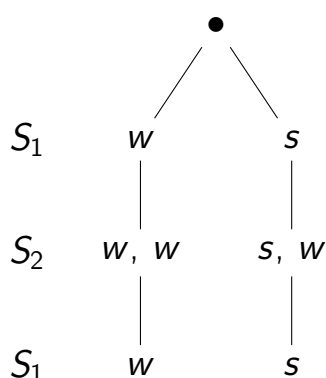
Als Mathematiker ist Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898) heute fast vergessen. Aber unter seinem Pseudonym Lewis Carroll ist er weltbekannt als Autor mehrerer märchenhafter Kinderbücher wie „Alice im Wunderland“. Hin und wieder hat er jedoch seine literarischen Phantasiewelten verlassen und seinen Lesern in spielerischer Form einen Einblick in seine Realität als Dozent der Mathematik gewährt – etwa in dem Büchlein „Pillow Problems Thought Out During Sleepless Nights“*, das eine Sammlung von 72 logischen und mathematischen Rätseln und Aufgaben ist.

Einige dieser Probleme sind nicht ohne Anspruch. Seine Aufgabe 5 ist so ein Fall: Sie ist zwar leicht zu formulieren, aber ihre Lösung erfordert schon eine subtilere Überlegung.

Problem 5**

In einer Schale liegt eine Kugel, von der man nicht weiß, ob sie weiß oder schwarz ist. Eine zweite Kugel, die weiß ist, wird in die Schale gelegt und dann werden die beiden Kugeln durcheinander gewirbelt. Danach entnimmt man der Schale – ohne hinzusehen – eine Kugel. Es stellt sich heraus: Sie ist weiß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die in der Schale verbliebene Kugel weiß ist?

Naheliegender Lösungsversuch



Man darf davon ausgehen, dass die anfangs allein in der Schale liegende Kugel (Situation S_1) mit gleicher Wahrscheinlichkeit (P) entweder weiß (w) oder schwarz (s) ist, dass also gilt:

$$(1) \quad P(w) = P(s) = \frac{1}{2}.$$

Legt man nun eine weiße Kugel in die Schale, so befinden sich dort entweder zwei weiße Kugeln oder eine schwarze und eine weiße Kugel (Situation S_2), und es gilt dann sicherlich:

$$(2) \quad P(w, w) = P(s, w) = \frac{1}{2}.$$

Wird nun der Schale eine weiße Kugel entnommen, dann gelangt man wieder in die Situation S_1 und es gilt daher erneut (1). Also ist $P(w) = \frac{1}{2}$.

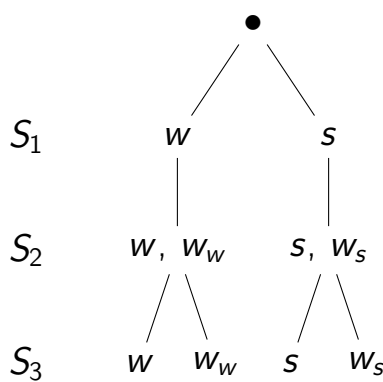
Carroll zeigt, dass dieser scheinbar plausible Lösungsversuch fehlerhaft ist und dass man bei korrekter Überlegung einen von $\frac{1}{2}$ verschiedenen Wert für $P(w)$ erhält.

* Kopfkissen-Probleme, erdacht in schlaflosen Nächten (1893)

** Der Carrollsche Aufgabentext ist hier nur inhaltlich ins Deutsche übertragen.

Carrolls Lösung

Zunächst befindet sich entweder eine weiße Kugel w oder eine schwarze Kugel s in der Schale (Situation S_1). Legt man nun eine weiße Kugel w_w zur weißen Kugel w oder eine weiße Kugel w_s zur schwarzen Kugel s , dann befindet sich entweder das Paar w, w_w oder das Paar s, w_s in der Schale (Situation S_2).



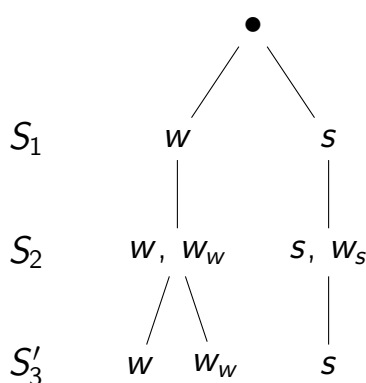
Wenn man nun durch Zufallsauswahl der Schale eine Kugel entnimmt (Situation S_3), dann hat dabei jede der vier Möglichkeiten – für die in der Schale verbliebene Kugel – die gleiche Wahrscheinlichkeit. Es gilt also:

$$(3) \quad P(w) = P(w_w) = P(s) = P(w_s) = \frac{1}{4}.$$

Nun hat man eine weiße Kugel aus der Schale genommen. Welche Möglichkeiten bestehen dann für die in der Schale zurückbleibende Kugel?

Annahme: In der Schale bleibt die Kugel w_s zurück. Dann waren in der Situation davor – also in S_2 – die Kugeln s und w_s in der Schale. Weil danach eine dieser beiden Kugeln aus der Schale genommen wird, müsste es nach Annahme die Kugel s gewesen sein. Da wir wissen, dass das nicht der Fall ist, kann die Annahme nicht zutreffen. Daraus folgt:

Nach der Entnahme einer weißen Kugel bleiben für die Kugeln in der Schale nur noch drei Möglichkeiten, nämlich w, w_w und s (Situation S'_3).



Da ursprünglich die Fälle w, w_w und s gleich wahrscheinlich waren – vergleiche (1) – sind die Möglichkeiten w, w_w und s für die in der Schale zurückgebliebene Kugel immer noch gleich wahrscheinlich. Aus der für S'_3 gültigen Gleichung

$$P(w) + P(w_w) + P(s) = 1$$

folgt daher:

$$(4) \quad P(w) = P(w_w) = P(s) = \frac{1}{3}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann so:

$$(5) \quad \begin{aligned} P(\text{in der Schale verbliebene Kugel ist weiß}) &= P(w \text{ oder } w_w) \\ &= P(w) + P(w_w) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit formuliert man (5) unter Rückgang auf die Situation S_3 und der dort geltenden Gleichung (1) – als Beispiel für

den Satz von Bayes – heute so:

$$\begin{aligned}
 & P(\text{die verbliebene Kugel ist weiß} \mid \text{die entnommene Kugel ist weiß}) \\
 &= \frac{P((\text{die verbliebene Kugel ist weiß}) \text{ und } (\text{die entnommene Kugel ist weiß}))}{P(\text{die entnommene Kugel ist weiß})} \\
 &= \frac{P(w) + P(w_w)}{P(w) + P(w_w) + P(s)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Mitteilung

- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 10 € für das Schuljahr 2014/15 auf das MONOID-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen).
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Errata

In MONOID 117 sind uns leider in der Lösung zur Aufgabe 1091 auf den Seiten 32 und 33 zwei Fehler unterlaufen.

- So muss es im letzten Satz lauten:

Dann beweist man mit $\frac{a}{b} = x$ die Ungleichung $\frac{x+n}{x+1} + x > 2\sqrt{n}$ wie im 1. Fall, wobei die zu (4) und (5) analogen Teile nicht auftreten, woraus dann die Behauptung $\frac{a}{b} - \sqrt{n} > \sqrt{n} - \frac{a+bn}{a+b}$ folgt.

- Des Weiteren ist im ersten Fall zunächst zu zeigen, dass aus $\frac{a}{b} < \sqrt{n}$ sofort $\frac{a+bn}{a+b} > \sqrt{n}$ folgt, denn nur dann ist die Ungleichung $\frac{a+bn}{a+b} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \frac{a}{b}$ gleichbedeutend mit $|\frac{a+bn}{a+b} - \sqrt{n}| < |\sqrt{n} - \frac{a}{b}|$ und $\frac{a+bn}{a+b}$ also eine bessere Näherung für $\sqrt{n}$ als $\frac{a}{b}$.

Diese Ungleichung sieht man mit $x = \frac{a}{b}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{a+bn}{a+b} = \frac{\frac{a}{b} + n}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{x+n}{x+1} &> \sqrt{n} \iff \frac{x^2 + 2xn + n^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+n)^2}{(x+1)^2} > n \\
 \iff x^2 + 2xn + n^2 &> nx^2 + 2xn + n \iff n^2 - n > nx^2 - x^2 \\
 \iff (n-1)n > (n-1)x^2 &\iff n > x^2.
 \end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Umformung $n \geq 2$ benutzt.

Im zweiten Fall folgt aus $\frac{a}{b} > \sqrt{n}$ entsprechend $\frac{a+bn}{a+b} < \sqrt{n}$.

Bemerkung zur Aufgabe:

Die Äquivalenz $c = \sqrt{n} \Leftrightarrow c^2 - 1 = n - 1 \Leftrightarrow (c - 1)(c + 1) = n - 1$ motiviert die Rekursionsformel $(n_{k+1} - 1)(n_k + 1) = n - 1 \Leftrightarrow n_{k+1} = \frac{n_k + n}{n_k + 1}$ für die Folge der Näherungswerte n_k , $k = 1, 2, 3, \dots$

Schreibt man nun $n_k = \frac{a}{b}$, so folgt daraus $n_{k+1} = \frac{a+nb}{a+b}$.

Man kann nun immer mit $n_1 = \frac{a}{b}$ so beginnen, dass $n_1 < \sqrt{n} < n_1 + 1$ gilt. Nach Fall 1 erhält man $n_2 = \frac{n_1+n}{n_1+1}$ mit $0 < n_2 - \sqrt{n} < \sqrt{n} - n_1 < 1$. Nach Fall 2 erhält man dann $n_3 = \frac{n_2+n}{n_2+1}$ mit $0 < \sqrt{n} - n_3 < n_2 - \sqrt{n}$. Alternierende Anwendung der beiden Fälle liefert so eine aufsteigende Folge $n_1, n_3, n_5, \dots$ und eine absteigende Folge $n_2, n_4, n_6, \dots$ mit $\sqrt{n}$ als gemeinsamen Grenzwert und $0 < \dots < n_4 - \sqrt{n} < \sqrt{n} - n_3 < n_2 - \sqrt{n} < \sqrt{n} - n_1 < 1$.

Eine alternative Lösung ohne Fallunterscheidung in aller Kürze:

Mit den bisher verwendeten Abkürzungen ist

$$\frac{x+n}{x+1} - \sqrt{n} = \frac{x+n-\sqrt{n}(x+1)}{x+1} = -\frac{\sqrt{n}-1}{x+1} \cdot (x - \sqrt{n}).$$

Hieraus folgt, dass x und $\frac{x+n}{x+1}$ auf verschiedenen Seiten von $\sqrt{n}$ liegen und schließlich, dass $\left| \frac{x+n}{x+1} - \sqrt{n} \right| < |x - \sqrt{n}|$ genau dann gilt, wenn $\frac{\sqrt{n}-1}{x+1} < 1$, das heißt $x > \sqrt{n} - 2$ ist.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 116

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 7: Luca Bühler 43.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Lünning):

Kl. 5: Janik Fritzsche 33, Timo Wolff 12;

Kl. 6: Jan Gubi 14, Maximilian Hauck 69;

Kl. 9: Victoria Fox 24;

Kl. 10: Katharina Rößler 30;

Kl. 13: Andreas Pitsch 32.

Bad Ems, Goethe-Gymnasium:

Kl. 11: Miriam Gerharz 50.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler):

Kl. 5: Niels Bauer 4, Laura Krause 15;

Kl. 6: Paul Kruse 3, Sophie Loreen Kuß 1, Annalena Schimbold 3.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:

Kl. 13: Frank Schindler 44.

Berlin, Katholische Theresienschule:

Kl. 6: Emma Weiß 17.

Bonn, Carl-von-Ossietzky-Gymnasium: Kl. 6: Lorenzo Conti 14.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:

Kl. 11: Jamico Schade 28.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:

Kl. 8: Iolanthe Köcher 58.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

Kl. 6: Annika Koch 9, Leonie Marton 4;

Kl. 10: Kevin Mours 5, Adriana Stenger 16, Marcel Wittmann 25;

Kl. 11: Tamara Fischer 5.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 8: Patrick Riebe 48.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze):

Kl. 3: Jacob Huck 5, Olivia Kern 5, Elizabeth Korzilius 5, Thies Koster 2, Lara Sachs 2;

Kl. 4: Fritz Albus 5, Ridh Choudhury 5, Merlin Kolrep 3, Ella Zwermann 26.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):

Kl. 5: Tobias Streichhardt 9;

Kl. 6: Burak Sadic 6;

Kl. 7: Melanie Schuy 29;

Kl. 8: David Storzer 84;

Kl. 9: Marvin Weisbener 34.

Holzwickede, Clara-Schumann-Gymnasium:

Kl. 9: Niklas Gerling 7.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 5: Görkem Balci 2, Daria Hartwig 6, Zineb El Hhoual 8, Tabea Stamm 22, Giuliana Wustrack 5.

Kl. 6: Lukas Bonn 25, Nils Grandien 13, Nico Lick 8, Dennis Mayle 31.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:

Kl. 6: Beatrice Popescu 29;

Kl. 7: Philipp Kirschner 5.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):

Kl. 5: Lea Weißenfels 20;

Kl. 6: Paula Roderer 3, Ivan Savic 3;

Kl. 7: Valentina Jung 15, Linda Thelen 5, Katharina Weber 8;

Kl. 8: Jason Beck 2, Lincoln Bui 11, Marc Hoffmann 7, Elias Röscher 8, Sebastian Trapp 8;

Kl. 11: Theresa Schöche 34.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:

Kl. 12: Bettina Diller 30.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):

Kl. 6: Duy Kha Pham 6;

Kl. 8: Jonas Ahlfeld 60, Liana Bergen 11, Lena Christmann 17, Anja Wingender 32;

Kl. 9: Matthias Bergen 18, Denise Kadri 14, Jasmin Hallyburton 31, Verena Rüsing 31;

Kl. 10: Yentl Deuster 16, Philipp Lehmann 12;

Kl. 11: Mirjam Bourgett 25, Alexander Göbel Sandra Wingender 35;

Kl. 12: Janina Vogl 52;

Kl. 13: David Michel 42.

Neuwied, Wemer-Heisenberg Gymnasium: Kl. 12: Robert Kowallek 50.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

Kl. 6: Jonas Glückmann 16;

Kl. 7: Maximilian Göbel 12, Tobias Heinze 16, Philipp Karn 38, Fabian Liepach 21, Jara Müller-Kästner 28;

Kl. 11: Heiko Kötzsche 47.

Regensburg, Albertus Magnus Gymnasium: Kl. 5: Johannes Plöchl 6.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner):

Kl. 6: Lukas Arends 3, Nele-Sophie Arenz 1, Johannes Bahne 1, Stella Batzella 4, Clara Hiller 1, Lara Jungheim 3, Nele Küter 3, Anna-Lisa Landsrath 5, Anna McBrien-Martin 3. Lukas Nießen 99, Franziska Schamel 2, Leona Scheibe 3, Alina Schmidt 3;

Kl. 11: Lars Horak 1;

Kl. 12: Simon Löhr 9.

St. Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:

Kl. 6: Anastasia Kaletchits 3.

Wiesbaden, Leibnizschule:

Kl. 8: Andreas Dernier 37;

Kl. 9: Elisa Dernier 33.

Wildeshausen, Gymnasium Wildeshausen:

Kl. 7: Lara Kalbach 6;

Kl. 8: Wiebke Schneider 9;

Kl. 9: Maximilian Grohe 19.

Mainzer Mathematik-Akademie

1.–5. Oktober 2014

Bei der Mainzer Mathematik-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochaabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathematik-Akademie anzumelden, die vom 01.–05.10. an der Universität Mainz stattfindet.

Ablauf der Akademie

- Mi., 01.10. Anreise (bis 18 Uhr) und Kennenlernabend
Do.-Sa., 02.10.–05.10. Kurse in Arbeitsgruppen; Rahmenprogramm, betreut von Studierenden (zum Beispiel: Stadtführung, Improtheater)
So., 05.10. Präsentation und Abreise (ab 14 Uhr)
Ein genauerer Terminplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben.

Kurse

- **Ein Zweipersonenspiel und die Dynamik von Kurven** (Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois)
Wir stellen ein faszinierendes Zweipersonenspiel vor, für das lediglich ein Blatt Papier, ein Bleistift und ein Geodreieck benötigt werden. Anhand dieses Spieles diskutieren wir Fragen nach Existenz (und Form) einer Gewinnstrategie und stellen einen überraschenden Bezug zu aktuellen mathematischen Forschungsfragen aus der Analysis her, dem sogenannten Krümmungsfluss einer geschlossenen Kurve. Unter diesem Krümmungsfluss versteht man eine Bewegung, bei der sich jeder Punkt einer Kurve senkrecht zu deren Tangente nach innen bewegt, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die durch den Betrag der Krümmung der Kurve in diesem Punkt gegeben ist. Erst 1986 haben Gage und Hamilton bewiesen, dass diese Dynamik eine vorgegebene glatte konvexe geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenschrumpfen lässt.
- **Polynome und Symmetrien - eine Einführung in die Galoistheorie** (Prof. Dr. Manfred Lehn)
In dieser Arbeitsgruppe wollen wir untersuchen, wie man Gleichungen dritten und vierten Grades löst und warum man andererseits Gleichungen fünften und höheren Grades algebraisch grundsätzlich nicht auflösen kann. Dies hängt eng mit klassischen geometrischen Fragen zusammen: Warum ist es zum Beispiel nicht möglich, mit Zirkel und Lineal einen gegebenen Winkel in drei gleiche

Teile zu teilen oder einen Würfel zu verdoppeln? Und warum kann man zwar ein regelmäßiges 5-Eck und ein 17-Eck konstruieren, aber kein 7-Eck?

- **Strahlengeometrie** (Prof. Dr. Duco van Straten)

Die Reflektion und Brechung von Lichtstrahlen ist verantwortlich für eine Reihe von interessanten optischen Phänomenen. Typisch dabei ist das Auftreten von Kaustiken oder Brennkurven, wo sich das Licht konzentriert. Die bemerkenswerten Lichtmuster, die durch Spiegelung in einer Teetasse oder einem Weinglas zu beobachten sind, dürften jedem schon mal aufgefallen sein. Und auch den Regenbogen kann man als eine Kaustik auffassen. In der Arbeitsgruppe wollen wir uns mathematisch mit Hüllkurven von Strahlensystemen auseinandersetzen und uns genauer mit der mathematischen Beschreibung des Regenbogens beschäftigen.

Unterbringung

Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:

[www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/
mainzermatheakademie](http://www.mathematik.uni-mainz.de/freunde-der-mathematik/mainzermatheakademie)

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)

Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margaritha Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe

Betreuung der Abonnements und Versand: Anita Pfeffer-Kohl mit freundlicher Unterstützung von Dr. Ekkehard Kroll

Inhalt

H. Fuchs: Ein farbiger Beweis	3
H. Fuchs: Eine Reise nach Palindromien	4
Die Aufgabe für den Computer-Fan	11
M. Barth: Stochastik mit zwei Ziegen	12
H.-P. Heinz: Die besondere Aufgabe – Der Käfer auf dem Gummiband	14
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik	16
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 117	17
Neue Mathespielereien	21
Neue Aufgaben	23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 117	24
M. Hilfrich: Der Zwei-Quadrate-Satz von Fermat	29
E. Höniger: Primzahlen-Wüsten aus natürlichen Zahlen	32
Mathematische Entdeckungen	33
Lösung der farbigen Aufgabe	35
H. Fuchs: Ein Carrollsches Problem	36
Mitteilung	38
Errata	38
Rubrik der Löser und Löserinnen	39
Einladung zur Mainzer Mathematik-Akademie 2014	42
Redaktion	43
Impressum	44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55.

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>