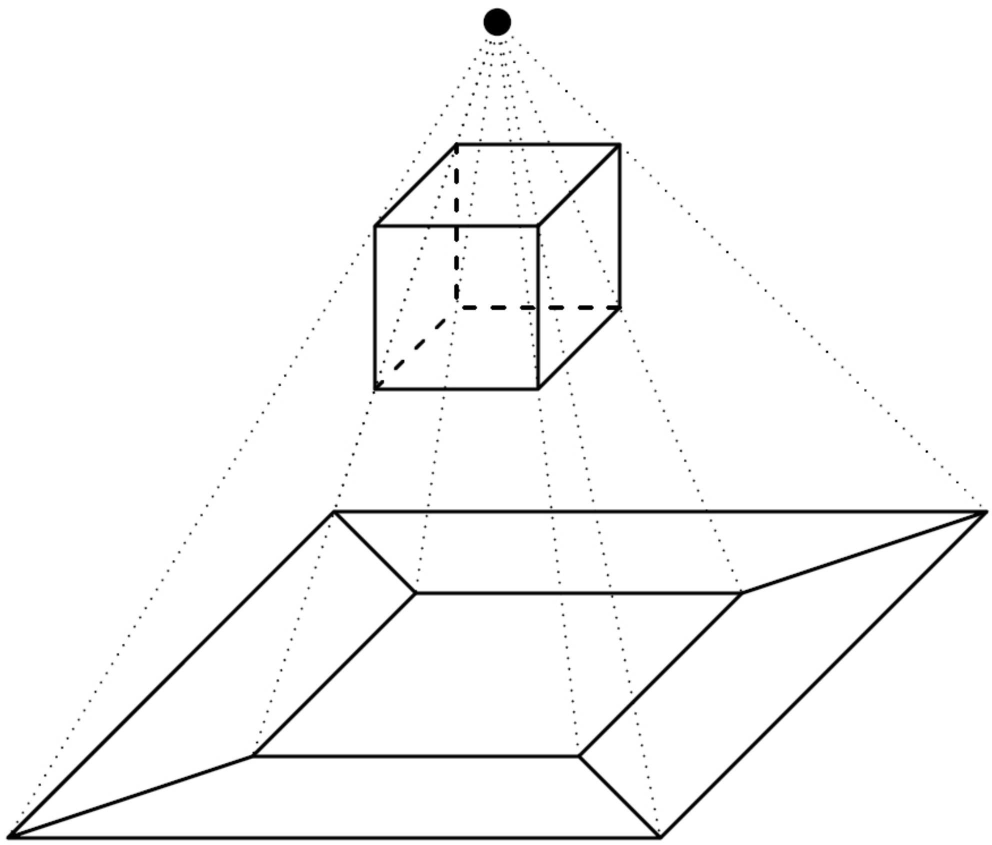
Jahrgang 34 | Heft 119 | September 2014

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan* und *Mathematische Entdeckungen* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.11.2014.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium in Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Irmtrud Niederle, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Eugen Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Die seltsame Anziehung, welche die Zahl 8 für Summen von Primzahlen besitzt

von Hartwig Fuchs

Mathematiker haben sich seit der Antike mit der Zerlegung natürlicher Zahlen in Faktoren oder Summanden befasst – etwa so: $15 = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ –, um auf diese Weise vielleicht auf bemerkenswerte Zahleigenschaften zu stoßen. So führte die Untersuchung von Faktorzerlegungen zur Entdeckung der Primzahlen 2, 3, 5, 7, ...; und bei der Beschäftigung mit Faktorisierung und anschließender Summenbildung fand man die perfekten Zahlen 6, 28, 496, 8128, ..., die so definiert sind:

(1) Eine natürliche Zahl n ist perfekt, wenn für die Summe ihrer Teiler $< n$ also $t_1 = 1$, t_2, t_3, ... gilt: $t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_r = n$.

Primzahlen und perfekte Zahlen sind heute noch Objekte großen mathematischen Interesses, weil es bei ihnen viele ungelöste Probleme gibt, darunter auch solche von grundlegender Bedeutung wie etwa:

Gibt es endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge?

Gibt es ungerade perfekte Zahlen?

Ein Zerlegungsproblem, das aus unserer Zeit stammt, ist dagegen vollständig gelöst und dabei auf so elementare Weise lösbar, dass wir es hier beschreiben wollen.

Wenn wir in (1) die Zahl $t_1 = 1$ durch die Zahl 2 und die „Teiler $< n$“ durch „Primteiler“ ersetzen, dann erhalten wir eine Variante der in (1) beschriebenen Summenbildung.

(2) Für die natürliche Zahl $n > 1$ mit der Produktdarstellung $n = p_1 p_2 ... p_r$ mit nicht notwendigerweise verschiedenen Primfaktoren p_i, $1 \leq i \leq r$, sei $S(n) = 2 + p_1 + p_2 + ... + p_r$ für $n > 1$ und $S(1) = 2$. Wir schreiben dafür kurz $n \to S(n)$.

Beispiel:
$630 \to 22$ wegen $630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ und $S(630) = 2 + 2 + 3 + 3 + 5 + 7$.
$631 \to 633$, da 631 eine Primzahl und daher $S(631) = 2 + 631$ ist.

Um einigen Eigenschaften des Operators S auf die Spur zu kommen, sollen nun die Werte von $S(n)$, $n = 1, 2, ..., 15$ bestimmt werden:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 9 \arrow[dl] & 10 \arrow[l] & 15 \arrow[l] & 13 \arrow[l] & 11 \arrow[l] & 14 \arrow[l] \\
 & & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[ur] & 8 \arrow[loop below] & & 12 \arrow[ul] & & & &
\end{tikzcd}$$

Figur 1

Daraus entnehmen wir die ersten Eigenschaften des Operators S. Es gibt natürliche Zahlen n, für die gilt:

(3) $S(n) = n$, etwa für $n = 8$;

(4) $S(n) > n$, zum Beispiel für die Primzahlen $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13$;

(5) $S(n) < n$, etwa für die nichtprimen Zahlen $n = 9, 10, 12, 14, 15$.

Die Aussage (4) gilt für jede Primzahl n wegen $S(n) = 2 + n > n$.
Wie steht es mit der Aussage (5) für nichtprime Zahlen $n \geq 15$? Erweitert man die Figur 1 etwa bis zur Zahl 40, so könnte man vermuten:

Für jede nichtprime Zahl $n \geq 15$ gilt sogar: $S(n) < n - 4$.

Beweis:
Es sei $n \geq 15$, n nichtprim und $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ mit $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$, $r \geq 2$.
Dann ist $p_1 \geq 2$ und $p_2 p_3 \ldots p_r > 3$.
Nun ist $p_2 + p_3 + \ldots + p_r \leq p_2 p_3 \ldots p_r$. Damit erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} S(n) &= 2 + p_1 + (p_2 + p_3 + \ldots + p_r) \leq 2 + p_1 + p_2 p_3 \ldots p_r \\ &= 2 + \frac{n}{p_2 p_3 \ldots p_r} + \frac{n}{p_1} < 2 + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} = 2 + \frac{5}{6} n \end{aligned}$$

Für $n \geq 36$ ist $2 + \frac{5}{6} n < n - 4$, sodass dann $S(n) < n - 4$ ist. Tatsächlich gilt dies auch für nichtprime n mit $15 \leq n \leq 36$. Überprüfe dies selbst!

Zusammenfassung:

(6) Für jede Primzahl n gilt: $S(n) = n + 2 > n$.
Für jede nichtprime Zahl $n \geq 15$ gilt $S(n) < n - 4$.
Die einzige Zahl mit $S(n) = n$ ist $n = 8$.

Die Zahl 8 spielt wegen (6) eine ganz besondere Rolle bei den S-Prozessen. Das wird deutlicher, wenn man die Figur 1 so liest:

$1 \rightarrow S(1) \rightarrow S(S(1)) \rightarrow S(S(S(1))) \rightarrow \ldots.$

Definiert man nun $S^1(n) = S(n)$ und $S^{i+1}(n) = S(S^i(n))$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$, so ergibt sich aus Figur 1 die folgende Liste:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
i, sodass $S^i(n) = 8$	6	5	4	4	3	3	2	1	...

Damit ahnt man schon, was mit der Anziehungskraft der Zahl 8 wohl gemeint ist, nämlich:

(7) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Zahl $i \geq 1$, sodass gilt: $S^i(n) = 8$ und $S^{i+l}(n) = S^i(n) = 8$ für alle $l = 1, 2, 3, \ldots$.

In (7) wird also behauptet:
Für jedes n führt der Prozess $n \rightarrow S(n) \rightarrow S^2(n) \rightarrow \ldots$ nach endlich vielen

Schritten stets in die gleiche Zahl – in den Attraktor 8 –, die dann nicht mehr „verlassen“ wird.

Ein erster Schritt zum Nachweis von (7):

(8) Für jeden dreistufigen Prozess $n \to S(n) \to S^2(n) \to S^3(n)$ gilt $S^3(n) < n$, falls $n \geq 15$ ist.

Zunächst gilt:

(9) Höchstens zwei der drei Zahlen n, $S(n)$ und $S^2(n)$ sind Primzahlen.

Wären sie nämlich sämtlich prim, dann wären also n und wegen $S(n) = n + 2$, $S^2(n + 2) = n + 4$ gemäß (6) auch $n + 2$ und $n + 4$ prim.

Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen n, $n + 1$ und $n + 2$ ist die mittlere ein Vielfaches von 3. Daher ist dann auch $(n+1)+3 = n+4 = S^2(n)$ ein Vielfaches von 3 – ein Widerspruch.

Aus (9) und (6) folgt für den dreistufigen Prozess in (8):
Man erhält die Endzahl $S^3(n)$, indem man die Startzahl n höchstens zweimal um 2 vergrößert und mindestens einmal um mindestens 5 verkleinert, sodass $S^3(n) \leq n + 2 + 2 - 5$ ist – womit (8) gezeigt ist.

Nun zum Beweis von Satz (7):
Eine beliebige Zahl $n_0 \geq 15$ sei Startzahl eines dreistufigen Prozesses wie in (8) mit der Endzahl $S^3(n_0) = n_1$, wobei $n_1 < n_0$ ist. Falls nun $n_1 \geq 15$ ist, starten wir von n_1 aus erneut einen dreistufigen Prozess, der dann zu der Endzahl $S^3(n_1) = n_2$ führt, wobei $n_2 < n_1$ und $n_2 = S^3(S^3(n_0)) = S^6(n_0)$ ist.
Diese dreistufigen Prozesse wiederholen wir so lange, bis wir zu einer Zahl $n_{k-1} \geq 15$ gelangen, für die $S^3(n_{k-1}) = n_k < 15$ gilt. Wir erhalten so für $n_o \geq 15$ eine Zahlenfolge:

$n_0,\ n_1 = S^3(n_0),\ n_2 = S^{3 \cdot 2}(n_0),\ \ldots,\ n_{k-1} = S^{3(k-1)}(n_0),\ n_k = S^{3k}(n_0)$ mit $n_0 > n_1 > n_2 > ... > n_{k-1} \geq 15 > n_k$.

Damit ist gezeigt:

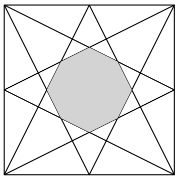
Für jede Zahl $n \geq 15$ gibt es eine Zahl $k \geq 1$, sodass $S^{3k}(n) < 15$ gilt.

Das ist schon fast der Satz (7). Jetzt brauchen wir nur noch der Figur 1 zu entnehmen, dass es zu jeder der Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots, 14$ ein j mit $1 \leq j \leq 6$ gibt, sodass $S^j(n) = 8$ ist. Daher gilt $S^{3k+j}(n) = 8$ mit einem $k \geq 0$. Setzen wir nun $3k + j = i$ und beachten, dass $S^{i+l}(n) = 8$ ist für $l = 1, 2, 3, \ldots$, so ist (7) vollständig bewiesen.

(7) kann man so interpretieren: Durch den Operator S und seine Iterierten wird das gesamte Zahlenuniversum $\{1, 2, 3, \ldots\}$ in die Zahl 8 transformiert.

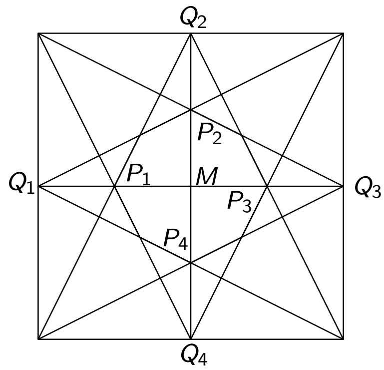
Innenwinkel eines Achtecks im Quadrat

von Frank Schindler



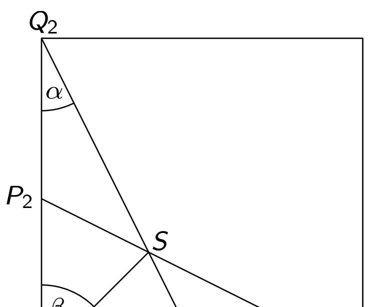
Monoid 116 enthielt die folgende Aufgabe:
Verbindet man die Seitenmitten eines Quadrates jeweils mit den gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein regelmäßiges Achteck, siehe Skizze. Bestimme den Flächenanteil des Achtecks. (AK)

Die Anmerkung, dass es sich dabei um ein regelmäßiges Achteck handelt, ist jedoch falsch (dies hat jedoch keinen Einfluß auf die Richtigkeit der Lösung in Monoid 117). Im Folgenden möchte ich die tatsächlich auftretenden Winkel berechnen.



Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 seien die Mittelpunkte der vier Quadratseiten, sodass die Geraden Q_1Q_3 und Q_2Q_4 die Mittelsenkrechten auf den Quadratseiten sind. M sei der Schnittpunkt von Q_1Q_3 und Q_2Q_4. Dann teilen die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 der Mittelsenkrechten mit dem Achteck die Strecken $\overline{Q_1M}$, $\overline{Q_2M}$, $\overline{Q_3M}$ und $\overline{Q_4M}$ in der Hälfte.

Um dies zu zeigen, betrachte ich exemplarisch den folgenden Ausschnitt.



Die Dreiecke $\triangle MQ_3P_2$ und $\triangle MP_3Q_2$ sind kongruent, da sie in zwei Seiten und dem Winkel zwischen den beiden Seiten (rechter Winkel bei M) übereinstimmen. Aufgrund der Kongruenz und der Innenwinkelsumme im Dreieck erhält man für $\alpha = \sphericalangle SQ_3P_3 = \sphericalangle P_2Q_2S$:

$\sphericalangle MP_2Q_3 = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle SP_3M$ sowie
$\sphericalangle SP_2Q_2 = 90^\circ + \alpha = \sphericalangle Q_3P_3S$.

Daraus folgt, dass die Dreiecke $\triangle Q_2P_2S$ und $\triangle P_3Q_3S$ ähnlich sind, da sie in zwei (und damit auch in drei) Winkeln übereinstimmen. Da die Seiten $\overline{P_3Q_3}$ und $\overline{P_2Q_2}$ gleich lang sind, sind die Dreiecke sogar kongruent und damit $|SP_3| = |SP_2|$.

Die Dreiecke MP_3S und MSP_2 sind also wegen $|MP_3| = |MP_2|$ ebenfalls kongruent und damit gilt $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$.

Aus Symmetriegründen sind alle im Achteck gebildeten Dreiecke dieser Art kon-

gruent. Es handelt sich jedoch nicht um ein regelmäßiges Achteck:
Der Achteck-Innenwinkel bei S beträgt $90^\circ + 2\alpha$, der Innenwinkel bei P_3 dagegen beträgt $180^\circ - 2\alpha$. Dabei gilt $\alpha = \arctan \frac{|MP_3|}{|MQ_2|} = \arctan \frac{1}{2} \approx 26{,}6^\circ$. Daher besitzt das Achteck die Innenwinkel $132{,}1^\circ$ und $126{,}9^\circ$. Bei einem regelmäßigen Achteck müssten jedoch alle Innenwinkel gleich sein (und damit 135° betragen).

Trugschlüsse und Paradoxien

von Hartwig Fuchs

Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

(1) $\sqrt{1-3x} - \sqrt{x^2-6x+3} = 0.$

Typischerweise löst man die Gleichung (1) so:
Aus (1) folgt nach Umstellung durch Quadrieren

$$1 - 3x = x^2 - 6x + 3$$

und daher ist

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Also sind $x = 1$ und $x = 2$ die gesuchten reellen Lösungen von (1). Falsch!

Man hat einen logischen Fehler gemacht, der zu einem Trugschluss führt: Beim Lösen von (1) hat man stillschweigend eine Voraussetzung in die Argumentationskette eingeführt, von der man nicht weiß, ob sie überhaupt zutrifft.
Man hat nämlich vorausgesetzt, dass (1) eine reelle Lösung besitzt – denn nur unter dieser Annahme sind die aus (1) folgenden Rechnungen sinnvoll.
Damit aber (1) reelle Lösungen besitzt, müssen $1 - 3x \geq 0$ und $x^2 - 6x + 3 \geq 0$ gelten. Aber bereits aus $1 - 3x \geq 0$ folgt, dass dann $x \leq \frac{1}{3}$ sein muss.
Deshalb hat (1) keine reellen Lösungen.

Der Satz von Pick und die Eulersche Polyederformel

von Laura Biroth

In Monoid 117 haben wir den Satz von Pick bewiesen, eine Formel, mit der man die Fläche A eines Gitterpolygons berechenen kann, indem man nur die Anzahl der Punkte im Inneren I und auf dem Rand R abzählt. Dann gilt nämlich:

$$A = I + \frac{R}{2} - 1$$

Davor (in Monoid 116) haben wir gezeigt, dass man jede ebene Landkarte bzw. planaren Graphen mit höchstens fünf Farben einfärben kann. Dazu haben wir die

Eulersche Polyederformel verwendet. Sie besagt, dass für jeden zusammenhängenden planaren Graphen mit E Ecken bzw. Knoten, K Kanten und F Flächen (wobei die den Graphen umgebende Fläche mitgezählt wird) gilt

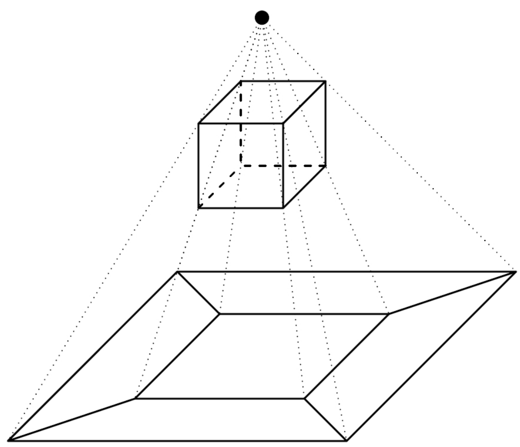
$$E - K + F = 2.$$

Diese Formel haben wir dort aber nicht bewiesen. Sie ist, wenn du sie nicht aus der Schule kennst, so zu sagen „vom Himmel gefallen“.

Tatsächlich gibt es zwischen diesen Aussagen aber einen verblüffenden Zusammenhang. Man kann die Eulersche Polyederformel nämlich (neben vielen anderen möglichen Methoden) mit dem Satz von Pick beweisen!

Die Eulersche Polyederformel heißt so, weil Euler sie ursprünglich für konvexe Polyeder (und noch nicht für allgemeine planare Graphen) formuliert hat. Auch für diese gilt, dass die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Flächen immer gleich 2 ist. Genau diesen Spezialfall wollen wir hier mit dem Satz von Pick beweisen.

Dazu stellt man sich vor, dass man eine Seite des Poyeders enfernt und den Rest so auseinanderzieht, dass man ihn flach auf den Tisch legen kann. Alternativ nimmt man ein Drahtmodell des Polyeders, hält eine Lampe ganz nahe an eine der Seiten und projiziert den Polyeder damit auf ein Blatt Karopapier.



Das entstehende Bild ist ein Graph, den wir jetzt noch so zurecht schieben können, dass alle Knoten auf den Kreuzungspunkten des Karogitters liegen.

Der Graph, den man so erhält, ist nicht nur planar, sondern hat noch ein paar weitere nützliche Eigenschaften:

1. Jede vom Graphen eingeschlossene Fläche ist ein Pick-Polygon, d.h. sie hat keine Löcher oder Stellen, an denen sie nur an einem Punkt zusammenhängt.
2. Insbesondere gilt: Jede Fläche berührt jeden Knoten höchstens einmal.
3. Auch die gesamte vom Graphen eingeschlossenen Fläche ist ein Pick-Polygon.
4. Der Graph hat insbesondere keine abstehenden Kanten.

Einen Graphen mit diesen Eigenschaften wollen wir einen *schönen* Graphen nennen. Der folgende Beweis funktioniert für jeden schönen Graphen.

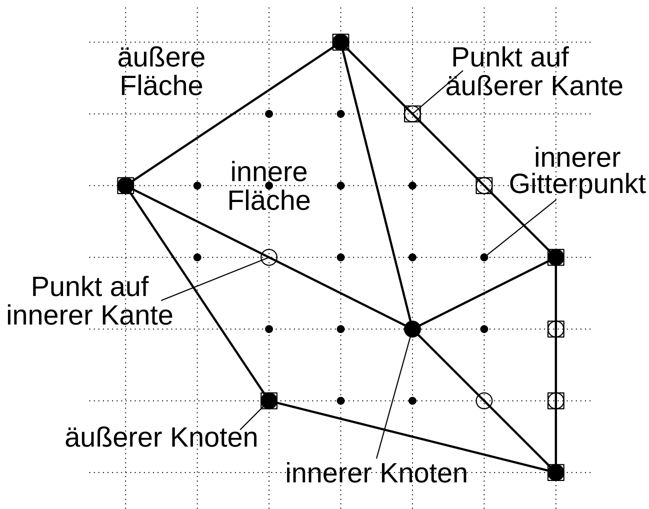
Wir berechnen jetzt die gesamte vom Graphen eingeschlossene Fläche auf zwei verschiedene Arten:

Dazu zählen wir die Gitterpunkte im Inneren und auf dem Rand der vom Graphen eingeschlossenen Fläche.

Abkürzung	**Anzahl**
u	Knoten auf dem Rand
v	Knoten im Inneren
x	Punkte auf Kanten auf dem Rand
y	Punkte auf Kanten im Inneren
z	Punkte im Inneren ohne Kanten und Knoten

Betrachtet man die gesamte vom Graphen eingeschlossene Fläche als ein Polygon, so hat dieses $v+y+z$ Gitterpunkte im Inneren und $u+x$ Punkte auf dem Rand. Der Flächeninhalt beträgt also nach dem Satz von Pick:

$$A_{ges} = (v+y+z) + \frac{u+x}{2} - 1$$



Andererseits kann man den Flächeninhalt jeder einzelnen der $F-1$ eingeschlossenen Flächen des Graphen berechnen. Sei dazu

Abkürzung	**Anzahl**
u_i	Knoten auf dem Rand des Graphen, die an die i-te Fläche grenzen
v_i	Knoten im Inneren des Graphen, die an die i-te Fläche grenzen
x_i	Punkte auf Kanten der i-ten Fläche, auf dem Rand des Graphen
y_i	Punkte auf Kanten der i-ten Fläche, im Inneren des Graphen
z_i	Punkte im Inneren der i-ten Fläche

Dann gilt für den Flächeninhalt A_i der i-ten Fläche:

$$A_i = z_i + \frac{u_i + v_i + x_i + y_i}{2} - 1$$

Die Summe aller dieser Flächen gibt den gesamten Flächeneinhalt:

$$\begin{aligned} A_{ges} &= \sum_{i=1}^{F-1} \Big(z_i + \frac{u_i + v_i + x_i + y_i}{2} - 1 \Big) \\ &= \Big(\sum z_i \Big) + \frac{\sum (u_i + v_i) + \sum x_i + \sum y_i}{2} - (F-1) \end{aligned}$$

Wie können wir jetzt diese Summen zusammenfassen?

Da jeder Gitterpunkt nur in genau einer Fläche liegen kann, ist $\sum z_i = z$. Auch jeder Punkt auf einer Kante am Rand des Graphen grenzt nur an eine innere Fläche. Also ist auch $\sum x_i = x$. Die Punkte auf Kanten im Inneren des Graphen grenzen dagegen an jeweils zwei Flächen, und werden deshalb doppelt gezählt, wenn man alle y_i addiert, d.h. $\sum y_i = 2y$.

Am kniffligsten sind die Knoten: Seien $V_1, \ldots, V_u$ die Knoten auf dem Rand des Graphen und $V_{u+1}, \ldots, V_{u+v}$ die Knoten im Inneren. Für jeden Knoten V_j sei d_j die Anzahl der Kanten, die an diesem Knoten zusammentrifft und f_j die Anzahl der angrenzenden inneren Flächen. Wegen der Eigenschaft 2 unseres Graphen gilt für die u Knoten auf dem Rand des Graphen $f_j = d_j - 1$ und für die v Knoten im Inneren $f_j = d_j$. Addiert man alle u_i und v_i so zählt man jeden Knoten V_j insgesamt f_j mal mit. Also gilt:

$$\sum_{i=1}^{F-1} (u_i + v_i) = \sum_{j=1}^{u+v} f_j = \sum_{j=1}^{u} (d_j - 1) + \sum_{j=u+1}^{u+v} d_j = \sum_{j=1}^{u+v} d_j - u = 2K - u,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, dass jede Kante an genau zwei Knoten stößt, d.h. $\sum d_j = 2K$.

Setzt man das alles oben ein, so erhält man

$$\begin{aligned} A_{ges} &= z + \frac{2K - u + x + 2y}{2} - (F-1) \\ &= K + y + z + \frac{x-u}{2} - F + 1 \end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Formeln für die vom Graphen eingeschossene Fläche gleich, so erhält man

$$\begin{aligned} & v + y + z + \frac{u+x}{2} - 1 = K + y + z + \frac{x-u}{2} - F + 1 \\ \Rightarrow \quad & v + \frac{u}{2} - 1 = K - \frac{u}{2} - F + 1 \\ \Rightarrow \quad & (u+v) - K + F = 2 \end{aligned}$$

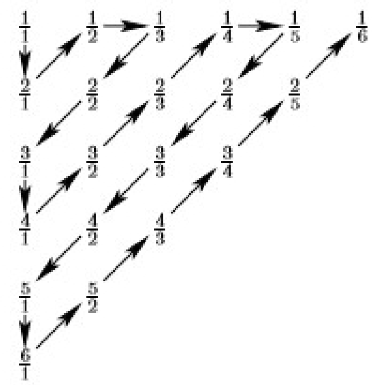
und aus der offensichtlichen Beziehung $u + v = E$ folgt die Behauptung.

Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

von Alexandra Gies

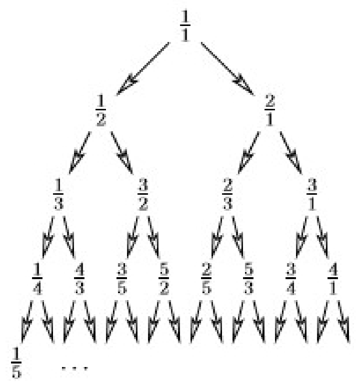
In diesem Artikel wollen wir uns mit der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen beschäftigen. Was aber ist überhaupt Abzählbarkeit einer Menge?

Eine Menge ist dann abzählbar, wenn wir die Elemente dieser Menge durchnummerieren können. Cantor hat in seinem sogenannten ersten Diagonalverfahren eine Aufzählung der positiven rationalen Zahlen angegeben, welche durch die nebenstehende Abbildung dargestellt wird. Lassen wir die Duplikate weg und verfahren analog mit den negativen Zahlen, erhalten wir somit eine Aufzählung der gesamten rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, ...\}$.



Die rationalen Zahlen sind also abzählbar. Im Laufe der Zeit haben zwei Mathematiker, Neil Calkin (Celmson University) und Herbert Wilf (University of Pennsylvania) eine „schönere" Aufzählung der positiven rationalen Zahlen gefunden, bei der keine Duplikate und keine ungekürzten Brüche auftreten.

Ihre Aufzählung wird anhand eines Baumes dargestellt, an dessen Spitze $\frac{1}{1}$ steht. Von dieser Spitze ausgehend hat jede Ecke $\frac{i}{j}$ dieses Baumes zwei „Töchter", die linke Tochter $\frac{i}{i+j}$ und die rechte Tochter $\frac{i+j}{j}$. Der Strang ganz links besteht dann aus den Stammbrüchen, der ganz rechts zählt die natürlichen Zahlen auf. Hieraus bilden wir eine Folge, indem wir die Reihen des Baumes nacheinander von oben nach unten und von links nach rechts durchlaufen:



$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \dots.$$

Untersuchen wir diese Folge nun auf einige Eigenschaften, ob sie wirklich „schöner" als die Cantorsche Aufzählung ist.

(1) Alle Brüche der Folge sind gekürzt.

Um dies zu zeigen, rufen wir uns zunächst ins Gedächtnis: Wann ist ein Bruch gekürzt? Dies ist genau dann der Fall, wenn Zähler und Nenner des Bruches relativ prim sind, sie also keinen gemeinsamen Teiler (abgesehen von der 1) besitzen. Wir können diese Eigenschaft nun leicht über Induktion zeigen: Wir wissen, der Bruch an der Spitze $\frac{1}{1}$ ist gekürzt. Wenn wir also per Induktionsvoraussetzung davon ausgehen, dass der Bruch $\frac{r}{s}$ gekürzt ist, r und s also relativ prim sind, dann sind auch r und $r+s$ sowie s und $r+s$ relativ prim, also auch die beiden Töchter gekürzt. Gilt es also für die Mutter, dann auch für die Töchter, also für alle und das wollten wir zeigen.

(2) Jeder positive gekürzte Bruch tritt in diesem Baum auf (Existenz).

Nehmen wir einmal an, diese Behauptung wäre falsch. Dann gäbe es folglich eine Menge an positiven rationalen Zahlen, die nicht in der Folge auftreten würden. Betrachte nun einen Bruch $\frac{r}{s}$ aus dieser Menge mit minimaler Summe $r+s$. Wir unterscheiden drei Fälle: $r<s$, $r>s$ und $r=s$.
Wäre $r>s$, so wüssten wir, dass der Bruch $\frac{r-s}{s}$ aufgrund der Minimalität von $\frac{r}{s}$ im Baum auftritt und somit folglich auch $\frac{r}{s}$ als rechte Tochter.
Wäre $r<s$, so käme $\frac{r}{s-r}$ im Baum vor und folglich aber auch $\frac{r}{s}$ als linke Tochter.
Bliebe also nur noch $r=s$, dann aber wäre $\frac{r}{s}=\frac{1}{1}$ und $\frac{r}{s}$ würde also ebenfalls im Baum auftreten. Unsere Annahme ist also falsch und wir haben gezeigt:
Jeder positive gekürzte Bruch tritt im Baum auf, unsere Folge eignet sich also tatsächlich zur Aufzählung der positiven rationalen Zahlen.

(3) Jeder gekürzte Bruch tritt genau einmal auf (Eindeutigkeit).

Nehmen wir auch hier wieder an, diese Behauptung wäre falsch. Dann gäbe es eine Menge an Brüchen, die mehr als einmal im Baum auftreten. Betrachten wir nun auch hier wieder einen Bruch $\frac{r}{s}$ aus dieser Menge mit minimaler Summe $r+s$ und auch hier betrachten wir die drei Fälle: $r>s$, $r<s$ und $r=s$. Wäre $r>s$, so wäre $\frac{r}{s}$ die rechte Tochter von verschiedenen Ecken, die aber laut Vorschrift alle $\frac{r-s}{s}$ wären. Dies führt also zum Widerspruch zur Minimalität von $\frac{r}{s}$. Wäre nun $r<s$, so wäre analog $\frac{r}{s}$ die linke Tochter von verschiedenen Ecken, die aber alle $\frac{r}{s-r}$ wären. Folglich ergibt sich auch hier wieder ein Widerspruch. Bleibe nur noch $r=s$, aber nach Vorschrift ist nur der Bruch an der Spitze unserer Baumes von der Form $\frac{1}{1}=1$, denn alle andere Ecken sind <1 oder >1. Unsere Annahme ist also falsch und wir wissen nun, dass diese Folge tatsächlich keine Duplikate enthält.

(4) Der Nenner des n-ten Bruches in der Folge ist der Zähler des $(n+1)$-ten.

Diese Eigenschaft stimmt nach Vorschrift sicher, wenn der n-te Bruch eine linke Tochter ist. Betrachten wir im Weiteren also nur rechte Töchter als n-te Brüche: Dann könnte unsere rechte Tochter am rechten äußeren Rand liegen. Folglich wäre also der Nenner des n-ten Bruches 1 und der $(n+1)$-te Bruch läge am linken äußeren Rand, hätte also Zähler ebenfalls 1. Bleibt also nur noch zu zeigen, dass diese Eigenschaft auch für die rechten Töchter im „Inneren" des Baumes gilt: Dies zeigen wir per Induktion über die Reihen: Für die ersten beiden Reihen gilt die Eigenschaft sicher. Sei $\frac{r}{s}$ nun der n-te Bruch und $\frac{r'}{s'}$ der $(n+1)$-te Bruch. Dann wäre $\frac{r}{s}$ die rechte Tochter von $\frac{r-s}{s}$ und $\frac{r'}{s'}$ die linke Tochter von $\frac{r'}{s'-r'}$. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir aber, dass die Eigenschaft für die Mütter gilt, also $s=r'$, was zu zeigen war.

Nun haben wir die Folge so weit untersucht, dass wir sagen können, sie bitet tatsächlich Vorteile gegenüber der Cantorschen. Da wir aber im Allgemeinen keinen riesigen Baum zeichnen möchte, um zu wissen, welcher Bruch als nächster in der Folge auftritt, fragen wir uns nun: Gibt es vielleicht eine einfache Vorschrift, mit der man aus $\frac{r}{s}$ den nächsten Bruch in der Folge ausrechnen kann? Moshe Newman konnte diese Frage im Jahr 2004 mit „Ja“ beantworten, indem er sich dazu Folgendes überlegte: Betrachten wir eine Mutter $\frac{r}{s}$ mit ihren beiden Töchtern $\frac{r}{r+s}$ und $\frac{r+s}{s}$ und ersetzen wir $\frac{r}{s}$ durch x, so sind die beiden Töchter nun $\frac{x}{x+1}$ und $x+1$. Die k-fache linke Tochter von x ist $\frac{x}{1+k\cdot x}$ und die k-fache rechte Tochter ist $x+k$. Gehen wir nun von einem beliebigen Bruch y aus, so ist $\frac{y}{y+1}+k$ die k-fache rechte Tochter der linken Tochter von y und $\frac{y+1}{1+k\cdot(y+1)}$ die k-fache linke Tochter der rechten Tochter von y. Der Nachfolger von $x=\frac{y}{1+y}+k=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ ist also $f(x)=\frac{y+1}{1+k\cdot(y+1)}=\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1-\{x\}}$. Dabei ist $\lfloor x\rfloor$ der ganze Anteil und $\{x\}$ der gebrochene Anteil von x.

Weiß beginnt, schwarz gewinnt – oder etwa nicht?

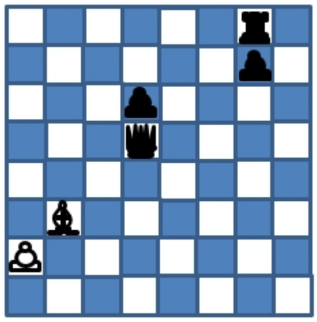
Was Schach mit Mathematik zu tun hat

von Bettina Diller

Schach ist eine Sportart. Im Mittelalter gehörte es zu den sieben ritterlichen Tugenden. Es ist eine Mischung aus verschiedenen Spielen aus verschiedenen Kulturen und hat sich mit der Zeit entwickelt. Stark beeinflusst wurde es von dem Spiel Chatrang, dem Schach in Persien um ca. 500. Sah ist persisch und bedeutet „König“. Das Spiel ähnelt der Aufstellung auf einem Kriegsfeld. Die verschiedenen Figuren haben festgelegte Gangarten und Ziel ist es, den König in eine Situation zu bringen, aus der er sich nicht mehr befreien kann. Heute kann man Schach in Vereinen spielen und es werden Weltmeisterschaften ausgetragen.

Zur Entstehung des Schachs gibt es die Weizenkornlegende. Der Brahmane Sassi erfand demnach das Schachspiel, um dem rücksichtslosen indischen Herrscher Shihram zu zeigen, dass auch Bauern ein wichtiger Bestandteil im Volk sind. Zum Dank der Erfindung des Schachspiels hatte der Brahmane bei dem Herrscher einen Wunsch frei. Er wünschte sich Weizenkörner und zwar in der Anzahl, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld ein Weizenkorn legt, auf das zweite Feld zwei Weizenkörner, auf das dritte Feld wieder die doppelte Menge usw. Dazu muss man wissen, dass Schach auf einem 8×8-Spielbrett gespielt wird und hier findet man schon die erste Rechenaufgabe. Der Herrscher dachte, er könne diesem Wunsch problemlos nachkommen, unterschätzte die Anzahl aber gewaltig: Es sind 18 446 744 073 709 551 615 Weizenkörner.

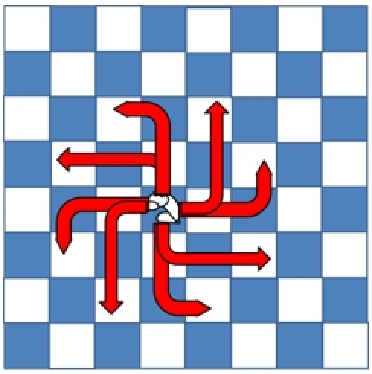
Die Schachfiguren haben unterschiedliche Wertigkeiten, diese ist abhängig von den Zugmöglichkeiten der Figur. Man hat grob festgelegt, dass der Bauer einen Punkt hat, ein Springer drei Punkte, ein Läufer drei Punkte, ein Turm fünf Punkte und die Dame neun Punkte. Damit kann man dann durch Berechnung Entscheidungen treffen, ob man zum Beispiel eine Figur schlagen oder ihr ausweichen soll.



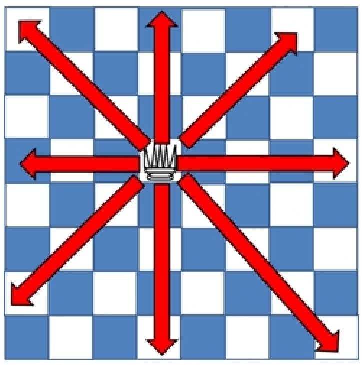
Schwarz ist am Zug. Soll man schlagen oder ausweichen?[1]

Tatsächlich gibt es den Bereich der Schachmathematik. Sie beschäftigt sich zum Beispiel mit der Frage, wie hoch die Anzahl aller theoretischen Stellungen ist oder wie hoch die Anzahl der verschiedenen Stellungen nach beispielsweise zehn Zügen ist. Auch hat Schach aufgrund der verschiedenen Muster mit Geometrie zu tun oder wegen möglichen zufälligen Zügen mit Stochastik. Beim Spielen beginnt immer „weiß". Hier stellt sich die Frage, ob weiß dadurch nicht einen Vorteil hat. Statistisch gewinnt weiß häufiger als schwarz, nämlich zu 38%, zu 32% wird unentschieden (Remis) gespielt.

Die Schachmathematik beschäftigt sich auch mit dem sogenannten „Springerproblem". Dabei sucht man nach einer Route für den Springer, bei der der Springer jedes Feld nur einmal berührt.



Gangart des Springers



Gangart der Dame

Beim „Damenproblem" sucht man nach der Anzahl der Stellungen für acht Damen, sodass diese sich nach den Schachregeln nicht schlagen können.
Findest Du die Lösung?[2]

Die Stärke eines Schachspielers wird übrigens mit der sogenannten Elo-Zahl festgelegt. Ab 2700 Elo-Punkte ist ein Schachspieler Super-Großmeister. Die Elo-Zahl lässt sich wieder mit einer mathematischen Formel berechnen. Das Elo-System wird auch für Ranglisten von Fußball- und Tischtennismannschaften angewandt.

[1] Die Dame sollte ausweichen. So nimmt der Läufer höchstens den Turm (-5), der dann von der Dame wieder genommen werden könnte ($+3$) (Dd5-a8, Lb3xg8, Da8xg8). Würde die Dame den Läufer schlagen ($+3$), würde sie anschließend vom Bauern genommen werden (-9) (Dd5xb3, a2xb3).

[2] Es gibt 92 verschiedene Möglichkeiten, die acht Damen so zu stellen, wenn man das Brett nicht dreht.

Auch die Spielstärke eines Scrabble-Spielers wird mit der Elo-Zahl gemessen. Beim Spiel Go findet das Elo-System in einer abgeleiteten Form Anwendung.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Symmetrische Summen

Zu einer mehrstelligen Zahl wird diese Zahl, aber mit umgekehrter Ziffernfolge addiert. Mit der sich ergebenden Summenzahl wird dasselbe sooft gemacht, bis die Summe ein Zahlenpalindrom ist, also eine Zahl, die von links und rechts gelesen gleich ist. Startet man zum Beispiel mit 89, so addiert man im ersten Schritt 98 und erhält 187; hierzu wird 781 addiert und so weiter.
Nach wie vielen Additionen erhält man gegebenenfalls eine symmetrische Summe (Palindrom) und wie lautet diese? (W.G.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2014 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.
Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 117

Wahr oder falsch?

Wenn man bei der folgenden 24-ziffrigen Primzahl

357 686 312 646 216 567 629 137

von links beginnend nacheinander immer wieder eine Ziffer wegstreicht, dann erhält man 23 Zahlen, die sämtlich wieder Primzahlen sind. (H.F.)

Ergebnisse

Dies ist tatsächlich wahr! Davon haben sich mit unterschiedlichen Programmen (Python, Ruby, TI-Inspire CX bzw. auch mit anderen speziellen Primzahltestprogrammen) überzeugt: Bettina Diller von der Städtischen Berufsschule für Informationstechnik in München, Robert Kowallek vom Werner-Heisenberg-Gymnasium in Neuwied, Kevin Mours und Marcel Wittmann, beide vom Karolinen-Gymnasium Frankenthal.
Am einfachsten kann man den Test mit dem CA-Programm Derive durchführen; hier genügt eine Zeile, etwa:

```
VECTOR(PRIME?(MOD(357686312646216567629137, 10^(24-n)), n, 0, 23)
```

Mit diesem Programm ist unser langjähriger MONOID-Leser Herr Dietmar Viertel der erweiterten Frage nachgegangen, ob sich durch Voranstellen einer der Ziffern 1 bis 9 vor obige Zahl wieder eine Primzahl ergibt. Das ist nicht der Fall! Er hat dann untersucht, welche Zahlen mit dieser Eigenschaft überhaupt existieren. Beginnend mit den einstelligen Primzahlen 3 und 7 (2 und 5 kommen ja nicht in Betracht) erhält er durch Voranstellen einer der Ziffern 1 bis 9 die elf zweistelligen Primzahlen 13, 23, 43, 53, 83, 17, 37, 47, 67, 97. Diesen stellt Herr Viertel wiederum eine der Ziffern 1 bis 9 voran und untersucht, in welchen Fällen eine (nunmehr dreistellige) Primzahl entsteht: Es sind 39 Primzahlen, die somit alle die Eigenschaft haben, dass beim sukzessiven Wegstreichen der jeweils führenden Ziffer immer wieder eine Primzahl entsteht. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens hat Herr Viertel eine Liste erstellt, die bei n die Stellenzahl der so erhaltenen Primzahlen und darunter deren Anzahl wiedergibt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Anzahl	4	11	39	99	192	326	429	521	545	517	448	354	276

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Anzahl	212	117	72	42	24	13	6	5	4	3	1	0

Die in der Aufgabe angegebene Zahl ist also tatsächlich die letzte ihrer Art.(E.K.)

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Jürgen Brück: „Pi mal Daumen“
Der Untertitel „Eine spannende Reise in die Welt der Mathematik“ ist Programm: Jürgen Brück unternimmt mit den Leserinnen und Lesern spannende Exkursionen in verschiedene mathematische Themengebiete.
„Pi mal Daumen“ ist kein Buch mit einer fortlaufenden Handlung, dass man am Stück liest. Vielmehr wird man immer wieder darin blättern und sich in einzelne Abschnitte vertiefen. Inhaltlich umfasst das Sachbuch Mathematik in alten Kulturen, die verschiedenen Zahlenmengen, besondere Zahlen, verschiedene Zahlensysteme, Mathematik im Alltag und bedeutende Mathemater von Archimedes über Hilbert bis zu Turing. Auch die Entwicklung moderner Computer wird auf einigen Seiten kurz gestreift.
Zielgruppe des Buches sind in erster Linie Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 und 6, aber auch ältere werden beim Durchblättern über interessante neue Inhalte stolpern. Bei der anvisierten Zielgruppe greifen manche Erklärungen – wie etwa bei den irrationalen Zahlen – zwar aufgrund mangelnder mathematischer Vorkenntnisse etwas zu kurz, doch stellt dies die Ausnahme dar und die überwiegende Mehrheit der angesprochenen Themen ist leicht verständlich.

Das Buch ist durchgängig in bunt gehalten und mit vielen Abbildungen und Fotos versehen, die das Verständnis erleichtern und vertiefen.

Fazit: Jürgen Brück ist ein sehr schönes Sachbuch gelungen, welches einerseits jüngeren Schülerinnen und Schülern einen umfassenden Einblick in viele Ideen der Mathematik gewährt und andererseits auch darauf neugierig machen kann sich mit dem einen oder anderen Thema intensiver zu beschäftigen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Brück, Jürgen: Pi mal Daumen. Eine spannende Reise in die Welt der Mathematik, Compact 2013, ISBN 978-3-8174-8872-8, gebunden 144 Seiten, 12,99 €.

Art des Buches:	Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 10 Jahren

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 118

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Teilbar durch 12

Auf wie viele Arten kannst Du an 2014 vorne und hinten je eine Ziffer anfügen, sodass das Ergebnis durch 12 teilbar ist? (WJB)

Lösung:
Eine Zahl ist genau dann durch 12 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist.
Die hinten angefügte Ziffer muss 0, 4 oder 8 sein, damit die Zahl aus den letzten beiden Ziffern und damit die gesamte Zahl durch 4 teilbar ist. Die erste Ziffer muss dann so gewählt werden, dass die Quersumme durch 3 teilbar ist. Dafür gibt es jeweils drei Möglichkeiten. Bei letzter Ziffer 0 muss vorne eine 2, 5 oder 8 angefügt werden, bei letzter Ziffer 4 eine 1, 4 oder 7 und bei letzter Ziffer 8 eine 3, 6 oder 9. Insgesamt gibt es also neun Möglichkeiten. Lässt man die führende Ziffer 0 zu, so gibt es die zehnte Möglichkeit 020148.

II. Folgenglied?

In der arithmetischen Folge 4, 71, 138, 205, ... ist die Differenz zweier benachbarter Zahlen stets gleich. Untersuche, ob die Zahl 2014 in der Folge vorkommt und wenn ja, das wievielte Element der Folge sie ist. Begründe Deine Antwort! (H.F.)

Lösung:

Es sei a das erste Element der Folge und d die Differenz zweier benachbarter Zahlen. Dann lautet die Folge a, $a+d$, $a+2d$, ... Für das n-te Element A gilt daher: $A_n = a + (n-1)d$. Wir machen nun mit $a = 4$, $d = 67$ und $A_n = 2014$ den Ansatz:

$$4 + (n-1) \cdot 67 = 2014.$$

Da unser Ansatz die ganze Zahl $n = 31$ liefert, ist 2014 ein Element der gegebenen Zahlenfolge und zwar ist es das 31-te Element.

III. Betriebsratwahl – Teil II

Im ersten Teil der Aufgabe (siehe Lösung auf Seite **??**) hatten wir gesehen, dass bei einer wörtlichen und mathematisch korrekten Anwendung des § 15 des Betriebsverfassungsgesetzes ungewollte Effekte auftreten können. Deshalb ist in der Verordnung zur Durchführung des Betriebsverfassungsgesetzes (Wahlordnung – WO) ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Mindestsitze für das Geschlecht in der Minderheit festgelegt. Statt den Anteil proportional auszurechnen (und aufzurunden) wird das d'hondtsche Höchstzahlverfahren angewendet.

Dazu werden die beiden Anzahlen der wahlberechtigten Arbeitnehmer eines jeden der beiden Geschlechter nebeneinander geschrieben. Anschließend werden die Zahlen der Reihe nach durch 1, 2, 3 und so weiter bis zur Anzahl n der zu wählenden Betriebsratmitglieder dividiert und unter die Anzahlen geschrieben. Nun werden die n größten Zahlen in diesen Reihen gesucht. Das Geschlecht in der Minderheit erhält dann so viele Betriebsräte, wie ihm nach der Verteilung der n größten Zahlen zustehen (siehe Beispiel rechts).

Div.	47 Frauen	38 Männer
1	**47**	**38**
2	**23,5**	**19,0**
3	**15,$\bar{6}$**	12,$\bar{6}$
4	11,75	9,5
5	9,4	7,6

Den Männern stehen mindestens zwei Mitglieder zu.

a) Bestimme nach dem d'hondtschen Höchstzahlverfahren die dem Geschlecht in der Minderheit zustehenden Mitgliederanzahlen im Betriebsrat bei
   - 1 Mann und 20 Frauen (drei Mitglieder)
   - 17 Männer und 33 Frauen (drei Mitglieder)
   - 49 Frauen und 50 Männer (fünf Mitglieder)

b) Entscheide kurz: Sind die Probleme die sich bei wörtlicher und mathematisch korrekter Anwendung des § 15, BetrVG, ergeben hatten, nun behoben? (MG)

Lösung:

a) Es ergeben sich:

Div.	1 Mann	20 Frauen
1	1	**20**
2	0,5	**10,0**
3	$0,\overline{3}$	$6,\overline{6}$

Unter Umständen kommen nur Frauen in den Personalrat, da den Männern kein Platz zusteht.

Div.	17 Männer	33 Frauen
1	**17**	**33**
2	8,5	**16,5**
3	$5,\overline{6}$	11

Den Männern steht mindestens ein Mitglied zu.

Div.	49 Frauen	50 Männer
1	**49**	**50**
2	**24,5**	**25,0**
3	$16,\overline{3}$	$16,\overline{6}$
4	12,25	12,5
5	9,8	10,0

Den Frauen stehen mindestens zwei Mitglieder zu.

b) Ja, nach diesem Verfahren erhält das Geschlecht in der Minderheit eine Mindestanzahl an Mitgliedern im Betriebsrat, das etwa ihrem Anteil an der Belegschaft entspricht, ohne dass Verhältnisse verkehrt werden. (Allerdings gibt es noch andere Probleme, auf die hier aber nicht eingegangen werden soll.)

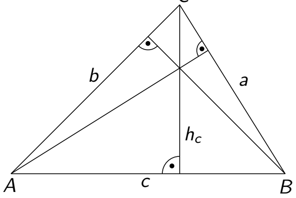
IV. Keine Quadratzahl

Zeige, dass die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen keine Quadratzahl sein kann. (WJB)

Lösung:

Für eine natürliche Zahl n gilt: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$. $4n$ ist durch 4 teilbar, 6 durch 2, aber nicht durch 4. Also ist $4n+6$ durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Wäre nun $4n+6=m^2$ für eine natürliche Zahl m, so müsste m durch 2 teilbar sein. Dann wäre aber $m^2=4n+6$ durch $2\cdot 2=4$ teilbar. Wir erhalten also einen Widerspruch und haben damit gezeigt, dass die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen keine Quadratzahl sein kann.

V. Eine Ungleichung für Dreieckshöhen



In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien a, b, c die Seitenlängen und h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen auf A, auf B, auf C.

Zeige: Aus $a<b<c$ folgt $h_a>h_b>h_c$. (H.F.)

Lösung:

Aus $a<b$ folgt $\frac{a}{b}<1$. Nun ist $|\triangle ABC|=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b$, also ist $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}<1$ und damit $h_a>h_b$. Ganz entsprechend folgt aus $b<c$, also $\frac{b}{c}<1$, dass $|\triangle ABC|=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ und somit $\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}<1\Rightarrow h_b>h_c$.

VI. Sechsundfünfzig

Untersuche, ob man die Zahl 56 so als Summe zweier Zahlen schreiben kann, dass

a) jede der beiden Zahlen durch 7 teilbar ist,

b) genau eine der beiden Zahlen durch 7 teilbar ist beziehungsweise

c) keine der beiden Zahlen durch 7 teilbar ist. (WJB)

Lösung:

a) Es ist möglich, 56 als Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen, zum Beispiel $56 = 42 + 14$, zu schreiben.

b) Wir schreiben $56 = m + n$, wobei m durch 7 teilbar ist; also ist $\frac{m}{7} =: a$ eine ganze Zahl. Dann ist $\frac{n}{7} = \frac{56-m}{7} = \frac{56}{7} - \frac{m}{7} = 8 - a$ auch eine ganze Zahl.
Es ist also nicht möglich, 56 als Summe zweier Zahlen darzustellen, sodass genau eine dieser Zahlen durch 7 teilbar ist.

c) Es ist möglich, 56 als Summe zweier nicht durch 7 teilbarer Zahlen zu schreiben, beispielsweise $56 = 41 + 15$.

VII. Matherätsel

Auf wie vielen Wegen lässt sich das Wort „MATHERÄTSEL“ in der Abbildung lesen? Beginne beim Ablesen mit dem oberen Buchstaben M und gehe dann immer schräg nach unten links oder unten rechts, bis Du zu dem ganz unten stehenden Buchstaben L gelangst. (SL)

					M					
				A		A				
			T		T		T			
		H		H		H		H		
	E		E		E		E		E	
R		R		R		R		R		R
	Ä		Ä		Ä		Ä		Ä	
		T		T		T		T		
			S		S		S			
				E		E				
					L					

Lösung:

An die Stelle jedes Buchstabens schreiben wir die Anzahl der Möglichkeiten, zu ihm zu kommen. Zu den äußeren Buchstaben der ersten sechs Zeilen, kommt man zum Beispiel nur auf eine einzige Art (immer nach unten links beziehungsweise unten rechts gehen). An allen anderen Stellen erhält man die entsprechende Zahl, indem man die beiden darüber stehenden Zahlen addiert, da zu einem Buchstaben so viele Wege führen, wie zu den beiden darüber stehenden zusammen. Man erhält einen Ausschnitt des sogenannten Pascal'schen Dreiecks:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & \\
 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & \\
 & & & 56 & & 70 & & 56 & & & \\
 & & & & 126 & & 126 & & & & \\
 & & & & & 252 & & & & &
\end{array}
$$

Das Wort „MATHERÄTSEL“ lässt sich also auf 252 verschiedenen Wegen lesen.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Heftnummer

Stelle die Heftnummer 119 als Summe aufeinanderfolgender Primzahlen dar. (MG)

II. Kolorierung einer Landkarte

Kann man die Landkarte einer Insel so in $n \geq 9$ Gebiete einteilen, dass man beim Kolorieren der Gebiete und des Meeres mit zwei Farben auskommt, wenn zwei Gebiete mit gemeinsamer Grenze so wie auch das Meer und ein angrenzendes Gebiet verschiedenfarbig sein müssen? (H.F.)

III. Asterix

Klaus liest in einem Asterix-Band die Seiten $\mathrm{XXXVIII}$ bis LI.

a) Wie viele Seiten sind das? Gib die Antwort als arabische und als römische Zahlen an.

b) Auf wie vielen Blättern sind die gelesenen Seiten gedruckt? (MG)

IV. Sonntage

a) Wenn in einem Jahr der 18. März ein Sonntag ist, wie viele Sonntage gibt es dann im Juni desselben Jahres?

b) Wenn in einem Jahr der 18. Februar ein Sonntag ist, wie viele Sonntage gibt es dann im Juni desselben Jahres? (WJB)

V. Gewinnspiel

In einer Zeitschrift findet Miriam folgendes Gewinnspiel:

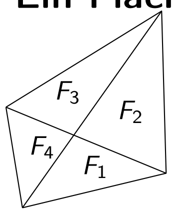
Wähle eine dreistellige Zahl aus und schreibe diese zweimal hintereinander auf. Wenn du dir beispielsweise 314 ausgesucht hast, dann sollte jetzt 314314 auf deinem Zettel stehen.
Teile diese Zahl durch die magische Zahl 13. Der Rest, der beim Teilen übrig bleibt, ist deine persönliche Glückszahl. Das wird eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 12 sein. Nun kannst du schon gewonnen haben.
Wenn du deine Zahl und deine Glückszahl (also den Rest) an die Redaktion schickst, dann bekommst du umgehend so viele 100-Euro-Scheine zugeschickt, wie deine persönliche Glückszahl angibt. Bitte Name und Anschrift nicht vergessen!

a) Miriam versucht ihr Glück mit der Zahl 217. Welchen Gewinn bekommt sie?
b) Miriam probiert ein paar weitere Zahlen aus und hat schließlich den Eindruck, dass es überhaupt nicht möglich ist, überhaupt etwas zu gewinnen. Stimmt das? (MG)

VI. Lateinisches Quadrat

Finde ein 6×6-Quadrat, dessen 36 Felder mit Ziffern gefüllt werden sollen, sodass gilt: In der obersten Zeile steht eine 6-stellige Zahl n, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht. In der zweiten Zeile steht wiederum eine 6-stellige Zahl, die aus denselben Ziffern wie n besteht, aber doppelt so groß wie n ist, also $2n$. In der dritten Zeile steht die Zahl $3n$ und so weiter. Schließlich steht in der sechsten Zeile die Zahl $6n$. Dabei sollen in jeder Zeile und jeder Spalte alle 6 Ziffern vorkommen. (Chr. Sievert)

VII. Ein Flächenverhältnis



Ein Viereck wird von seinen beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 sind. Dann gilt: $\frac{F_1 \cdot F_3}{F_2 \cdot F_4} = 1$. Zeige dies. (H.F.)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Alles, was bloß wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch."

René Descartes
1596–1650
französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1106: Wahrscheinlich sortiert

Ein gewöhnlicher Spielwürfel wird sechsmal geworfen. Sortiere begründet die folgenden Ereignisse absteigend von wahrscheinlich bis unwahrscheinlich:

a) Es wird sechsmal die 6 gewürfelt.
b) Es wird sechsmal dieselbe Zahl gewürfelt.
c) Es werden sechs unterschiedliche Zahlen geworfen.
d) Es wird sechsmal eine Primzahl gewürfelt.
e) Es wird sechsmal dieselbe Primzahl gewürfelt.
f) Es werden sechs unterschiedliche Primzahlen geworfen. (MG)

Aufgabe 1107: Die drei letzten Ziffern

Wie lauten die drei letzten Ziffern von $\left(376^{2012} + 625^{2013}\right) \cdot 2014$? (H.F.)

Aufgabe 1108: Logische Knobelei

Vier Schüler Lisa, Jacqueline, Martin und Sebastian unterhalten sich darüber, wer von ihnen den am besten bezahlten Job in den Sommerferien hatte. Um das herauszubekommen, machen sie die Aussagen:

(1) Lisa: „Ich verdiente weniger als mindestens einer von Jacqueline, Martin und Sebastian“;

(2) Jacqueline: „Sebastian verdiente am meisten“;

(3) Martin: „Die Aussage von Jacqueline ist falsch“;

(4) Sebastian: „Jacqueline verdiente am meisten“.

Leider haben drei der Schüler geschwindelt:

(5) Nur eine der Aussagen (1), (2), (3) und (4) ist wahr.

Wer hat also am meisten verdient? (H.F.)

Aufgabe 1109: Ganzzahliges Rechteck

Gibt es ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und a, a eine positive ganze Zahl, dessen Diagonalenlänge d ebenfalls ganzzahlig ist? (H.F.)

Aufgabe 1110: Wahr oder falsch?

Jasmin beschäftigt sich nun schon eine ganze Weile mit der Darstellung von Zahlen als Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und möchte nun, nachdem sie bisher solche Darstellungen gesucht hat, Zusammenhänge untersuchen. Heute geht sie folgenden Fragen nach. Entscheide jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe. (Jasmin konnte übrigens alle korrekt entscheiden!)

a) Lässt sich eine Zahl als Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch mit nur zwei.
b) Lässt sich eine Zahl als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, so auch mit vier. (MG)

Aufgabe 1111: Fragen der Teilbarkeit

Für welche Zahlen $2^n + 1$, für die n eine natürliche Zahl ist, gilt:

a) $2^n + 1$ ist durch 3 teilbar?
b) $2^n + 1$ ist durch 5 teilbar?
c) $2^n + 1$ ist durch 15 teilbar? (H.F.)

Aufgabe 1112: Zerlegung eines Dreiecks

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ und ein Punkt T auf der Seite $\overline{AB}$. Konstruiere eine Strecke $\overline{TX}$, sodass der Punkt X auf der Dreiecksseite $\overline{BC}$ liegt und die Fläche $|\triangle TBX|$ des Dreiecks $\triangle TBX$ genau $\frac{1}{n}$ der Fläche $|\triangle ABC|$ des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt, wobei n beliebig aus $2, 3, 4, \dots$ wählbar ist. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 118

Klassen 9–13

Aufgabe 1099: Pythagoras' Schüler

Auf die Frage, wie viele Schüler er habe, soll Pythagoras geantwortet haben: „Die Hälfte der Schüler studiert Mathematik und ein Viertel Musik. Außerdem gibt es noch ein Siebtel, die schweigen und drei Frauen.“ Wenn wir annehmen, dass auch die Hälfte der Schweigsamen und ein Drittel der Mathematiker und Musiker weiblich waren, wie viele Frauen waren es dann insgesamt? (WJB)

Lösung:

Ist n die Anzahl der Schüler, so ergibt sich $n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{7}n + 3$, also $n(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{7}) = 3$ und somit $n \cdot \frac{3}{28} = 3$ und $n = 28$. Darunter sind also 14 Mathematiker, 7 Musiker, 4 Schweigsame und noch 3 Frauen. Zusätzlich zu diesen dreien gibt es $\frac{4}{2} = 2$ schweigsame Frauen sowie $\frac{1}{3}(14 + 7) = 7$ Frauen unter den Studierenden der Mathematik und Musik. Das ergibt insgesamt $3 + 2 + 7 = 12$ Frauen.

Aufgabe 1100: 5-Zahlen

Eine fünfstellige Zahl, die die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 jeweils genau einmal enthält, nennen wir 5-Zahl. Wie viele 5-Zahlen sind

a) Primzahlen?
b) Quadratzahlen? (LB)

Lösung:

Jede 5-Zahl hat die Quersumme 15.

a) 15 ist durch 3 teilbar, also ist auch jede 5-Zahl durch 3 teilbar. Die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist aber 3, jedoch sind alle hier untersuchten Zahlen > 3. Also gibt es keine solche Primzahl.

b) Wir haben gesehen, dass jede 5-Zahl durch 3 teilbar ist. Angenommen, es gäbe eine 5-Zahl n, die auch Quadratzahl ist, das heißt, es ist $n = m^2$ für eine ganze Zahl m. Da n durch 3 teilbar ist, muss auch m durch 3 teilbar sein. Damit ist wiederum $n = m^2$ durch 9 teilbar. Die Quersumme 15 ist aber nicht durch 9 teilbar, also ist auch keine 5-Zahl durch 9 teilbar. Daher ist keine 5-Zahl eine Quadratzahl.

Aufgabe 1101: Zahl plus Quersumme

Bestimme alle natürlichen Zahlen, für die gilt:

(1) $n + Z(n) = 2014$.

Dabei bezeichnet $Z(n)$ die Summe der Ziffern von n. (H.F.)

Lösung:

Aus $n + Z(n) = 2014$ folgt $n < 2014$.

Dann aber ist $Z(n) \leq Z(1999) = 28$, sodass mit (1) gilt: $n \geq 2014 - 28 = 1986$.

Also ist $1986 \leq n \leq 2013$.

Für $n = 1980 + x$ mit $6 \leq x \leq 9$ ist $Z(n) = 18 + x$. Mit (1) folgt: $1980 + x + 18 + x = 2014$, sodass $x = 8$ und mithin $n = 1988$ ist.

Für $n = 1990 + x$ mit $0 \leq x \leq 9$ ist $Z(n) = 19 + x$. Mit (1) folgt: $2x = 5$. Da x nicht ganzzahlig ist, erfüllt kein n, $1990 \leq n \leq 1999$ die Bedingung (1).

Für $n = 2000 + x$ mit $0 \leq x \leq 9$ ist $Z(n) = 2 + x$. Aus (1) folgt dann $x = 6$, sodass $n = 2006$ ist.

Für $n = 2010 + x$ mit $0 \leq x \leq 3$ ist $Z(n) = 3 + x$. Aus (1) folgt $2x = 1$ und kein n erfüllt (1).

Die beiden Zahlen 1988 und 2006 sind also die einzigen Lösungen von (1).

Aufgabe 1102: Gerade oder ungerade?

Die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n sei mit $A(n)$ bezeichnet. So ist etwa $A(48) = 10$. Ist dann die Summe $S = A(1) + A(2) + ... + A(2014)$ eine gerade oder ungerade Zahl? (H.F.)

Lösung:

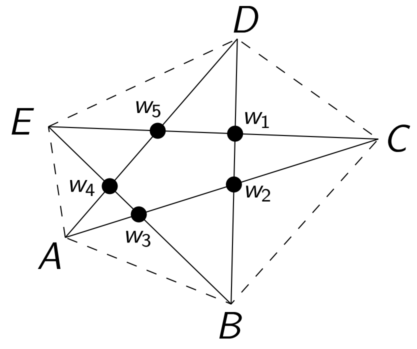
Zu jedem Teiler t einer Zahl n gibt es stets einen Komplementärteiler t', sodass $tt' = n$ ist – das gilt auch für Primzahlen n mit $t = 1$ und $t' = n$. Ist nun n keine Quadratzahl, dann treten die Teiler in Paaren (t, t') auf, wobei $t \neq t'$ ist. Folglich ist dann $A(n)$ gerade.

Ist n eine Quadratzahl, dann gilt für eines der Paare (t, t'), dass $t = t' = \sqrt{n}$ ist. Daher ist dann $A(n)$ eine ungerade Zahl.

Es sei nun $n = 2014$. Wegen $44^2 < 2014 < 45^2$ gibt es genau 44 Quadratzahlen < 2014. In der Summe $S = A(1) + A(2) + ... + A(2014)$ kommen daher 44 ungerade Summanden vor, alle anderen sind gerade – daher ist S gerade.

Aufgabe 1103: Außenwinkel eines Sterns

In einem beliebigen konvexen Fünfeck $ABCDE$ – das also keine einspringenden Ecken besitzt – verbinde man jede Ecke mit ihren beiden jeweils nicht benachbarten Ecken. Man erhält so einen fünfzackigen Stern – vergleiche die nebenstehende Figur. Bestimme die Summe der fünf Außenwinkel w_1, w_2, ..., w_5 des Sterns. (H.F.)



Lösung:

Im Innengebiet des Sterns befindet sich ein konvexes Fünfeck, das man durch zwei Diagonalen, die sich nicht schneiden, in drei Dreiecke zerlegen kann. Die Winkelsumme dieser Dreiecke zusammen beträgt $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Nun ist jeder Außenwinkel des Sterns so groß wie sein zugehöriger Innenwinkel im kleinen Fünfeck. Folglich gilt: $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 540^\circ$.

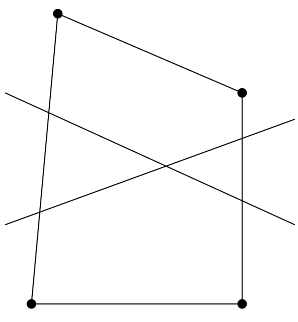
Aufgabe 1104: Zerlegung eines Vierecks

Lässt sich ein Viereck durch zwei gerade Schnitte in mehr als vier Teile zerlegen? (H.F.)

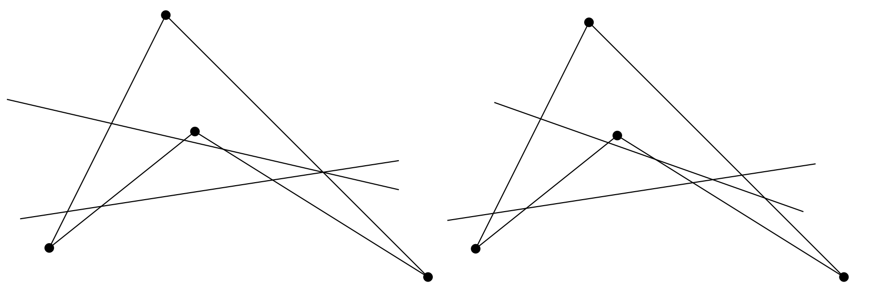
Lösung:

Vorweg: Ein n-Eck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier Punkte auf zwei verschiedenen Seiten des n-Ecks im Innengebiet des n-Ecks liegt. Verläuft sie teilweise im Außengebiet des n-Ecks, so heißt das n-Eck konkav.

Konvexe Vierecke kann man in höchstens vier Teile zerlegen, konkave dagegen in höchstens sechs Teile (wir beweisen das nicht).



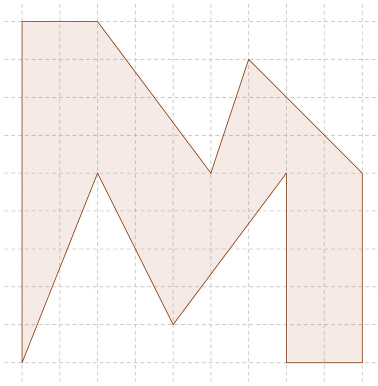
Zerlegung eines konvexen Vierecks



Zerlegung zweier konkaver Vierecke

Aufgabe 1105: Satz von Pick

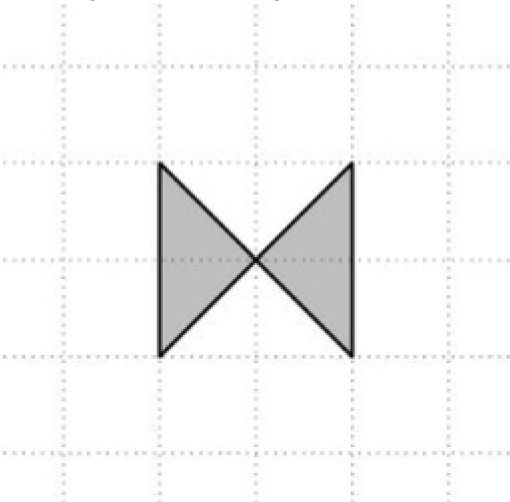
In Monoid-Heft 117 auf den Seite 16ff konntet Ihr über den Satz von Pick (samt Beweis) lesen.

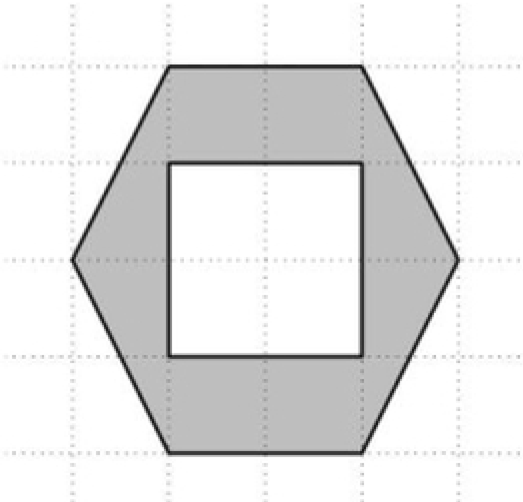


a) Berechne den Flächeninhalt der nebenstehenden Figur mithilfe des Satzes von Pick (1 Kästchen = 1 LE = 1 Längeneinheit).

b) Berechne den Flächeninhalt der nebenstehenden Figur ohne Verwendung des Satzes von Pick, sondern über Flächenzerlegung (1 Kästchen $\hat{=}$ 1 cm^2).

c) Zeige, dass der Satz von Pick für die folgenden Figuren nicht gilt.

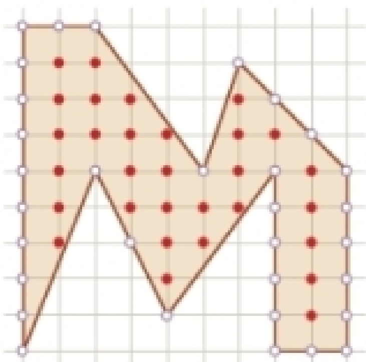




(MG)

Lösung:

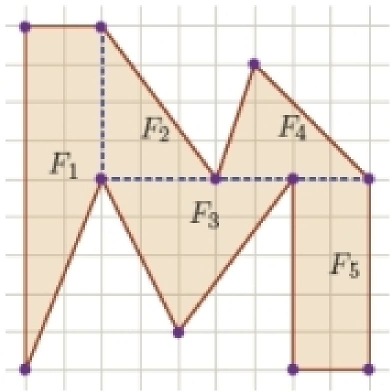
a) Wir zählen die Punkte und setzen in die Formel ein:



$$F = I + \frac{K}{2} - 1 = 30 + \frac{32}{2} - 1 = 45$$

b) Wir zerlegen die Fläche in Teilflächen und berechnen jeweils den Flächeninhalt:

$$F_1 = \frac{4+9}{2} \cdot 2 = 13 \qquad \text{(Trapez)}$$
$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \qquad \text{(Dreieck)}$$
$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10 \qquad \text{(Dreieck)}$$
$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \qquad \text{(Dreieck)}$$
$$F_5 = 2 \cdot 5 = 10 \qquad \text{(Rechteck)}$$



$$\Longrightarrow F_{\text{ges}} = 13+6+10+6+10 = 45$$

c) Für die linke Figur mit den überschneidenden Linien ist der Flächeninhalt $F = 2$, nach dem Satz von Pick ergibt sich aber $F = 0 + \frac{7}{2} - 1 = 2{,}5$.
Für die rechte Figur mit dem Loch ist der Flächeninhalt $F = 8$, nach dem Satz von Pick ergibt sich aber $F = 0 + \frac{16}{2} - 1 = 7$.

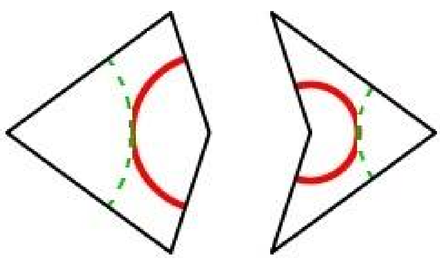
Penrose-Parkette

von Nina Metzinger

Von Parketten hat jeder schon einmal gehört, doch was bedeutet es, wenn Mathematiker von Parketten sprechen? Für sie ist ein Parkett so aus Parkettsteinen gebildet, dass es die Ebene lückenlos und überschneidungsfrei überdeckt. Wie die Parkettsteine aussehen ist dabei egal, solange sie ein Parkett bilden können. Penrose-Parkette gehören zu den sogenannten *aperiodischen* Parketten, während wir aus dem Alltag eher die periodischen gewohnt sind, wie zum Beispiel die Fliesen im Badezimmer oder der Holzfußboden. Bei all diesen Alltagsparketten kann man ein Teilparkett auswählen und durch Verschiebung dieses einen Stückes das ganze Parkett bilden. Bei den aperiodischen Parketten ist das nicht möglich.

Drachen und Pfeile

In diesem Artikel wollen wir uns mit einem Penrose-Parkett beschäftigen, das aus zwei Typen von Parkettsteinen gebildet wird, nämlich den *Drachen* und *Pfeilen*:



Diese wurden 1974 von Roger Penrose, einem bekannten englischen Mathematiker, entdeckt und er ließ sie sich sogar patentieren. Die Steine folgen einer bestimmten Legevorschrift: Sie dürfen nur so aneinandergelegt werden, dass die durchgezogene Linie nur an eine durchgezogene trifft und eine gestrichelte nur an eine gestrichelte. Diese Vorschrift ist notwendig, weil man sonst auch periodische Parkette erhalten könnte.

Lässt sich aus Drachen und Pfeilen ein Parkett bilden?

Nun muss überprüft werden, ob diese Steine mit dieser Legevorschrift tatsächlich ein Parkett bilden können. Dazu wendet man *Komposition* und *Dekomposition* der Steine an. Unter Komposition versteht man das Bilden eines größeren Steins aus den ursprünglichen. So wird ein großer Drache aus zwei kleinen Drachen und einem (eigentlich zwei halben) kleinen Pfeil gebildet und ein Pfeil aus einem Drachen und einem Pfeil (auch eigentlich zwei halben). Die Dekomposition ist umgekehrt die Zerlegung der großen Steine in die kleinen, ursprünglichen Steine.

Nun zum Beweis der Behauptung: Wir nehmen an, dass wir bereits einen Teil der Ebene mit den Steinen nach der Legevorschrift parkettiert haben. Dann nehmen wir dieses Parkett und wenden die Komposition darauf an (dass dies immer möglich ist, ist durch Fallunterscheidung zu überprüfen). Die neuen Teile überdecken dann dieselbe Fläche. Nun bilden wir mit den größeren Steinen das ursprüngliche Parkett nach und wenden dann die Dekomposition an. Wir haben nun ein Teil-Parkett, das um einiges größer ist als das anfängliche Parkett. Wenden wir nun diese Schritte beliebig oft an, können wir die Ebene beliebig weit überdecken, bis kein Punkt der Ebene mehr frei ist. $\square$

Aperiodizität der Penrose-Parkette

Jetzt wollen wir die andere bereits genannte Eigenschaft beweisen, nämlich dass die gewonnenen Penrose-Parkette aperiodisch sind. Dazu stellen wir das Verhältnis x von Drachen d zu Pfeilen p im gesamten Parkett auf: $x = \frac{d}{p}$. Da sich bei der Komposition ein Pfeil und ein Drachen zu einem großen Pfeil, und ein Pfeil und zwei Drachen zu einem großen Drachen zusammensetzen, ergibt sich nach Komposition das Verhältnis $\frac{p+2d}{p+d} = \frac{1+2x}{1+x}$. Im Limes ergibt sich: $x = \frac{1+2x}{1+x}$. Durch Umformen folgt dann $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \Phi$, wobei Φ der goldene Schnitt ist. Das Verhältnis von Drachen zu Pfeilen ist also irrational! Was bedeutet dies für die Periodizität? In einem periodischen Parkett gibt es ein Teilparkett, das durch Verschiebung das gesamte Parkett bilden kann. Deshalb muss in einem periodischen Parkett das Verhältnis der Teile zueinander stets rational sein. Somit gibt es kein Teilparkett, das das gesamte Penrose-Parkett durch Verschiebung bilden kann, und wir haben bewiesen, dass so gebildete Parkette aperiodisch sind. $\square$

Welche Eigenschaften haben aperiodische Parkette noch?

Selbstähnlichkeit

Sie haben einen hohen Grad an Selbstähnlichkeit, das heißt, dass jedes beliebige Teilparkett sich im ganzen Parkett unendlich oft wiederholt. So kann man als Betrachter eines Teilparkettes nie sagen, wo man sich im gesamten Muster befindet. Diese Teilparkette liegen sogar sehr nah beieinander: Man konnte beweisen, dass ein Teilparkett von seiner exakten Kopie nie weiter als $d\Phi^{\frac{3}{2}}$ (ungefähr $2,12d$) entfernt liegt, wobei d der Durchmesser des Kreises ist, der das Teilparkett umschließt.

Anzahl verschiedener Penrose-Parkette

Es lässt sich noch zeigen, dass es überabzählbar unendlich viele verschiedene Muster aus Drachen und Pfeilen gibt - greift doch selbst einmal zur Schere und bastelt ein paar, die Vorlage findet ihr auf der Monoid-Webseite!

Was uns so über den Weg gelaufen ist

Eine phantasievolle Darstellung der Zahl 1

von Hartwig Fuchs

Für $x = 3$ gilt $x^2 = 6 + x$ und daher ist $x = \sqrt{6 + x}$. Aus der letzten Gleichung kann man nun mit beliebig oft wiederholter Ersetzung von x durch den $\sqrt{x + 6}$ eine beliebig lange Gleichungskette konstruieren:

$$(1) \quad x = \sqrt{6+x} = \sqrt{6+\sqrt{6+x}} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}} = ...$$

Wir denken uns nun (1) ins Unendliche fortgesetzt. Für $x = 3$ hat nun jeder Wurzelterm in (1) den Wert 3. Damit erhalten wir für die Zahl 3 die Darstellungsmöglichkeit

$$3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....}}}$$

Ganz entsprechend ergibt sich für $x = 2$ aus den Gleichungen $x^2 = 6 - x$ und damit $x = \sqrt{6 - x}$ die nicht-abbrechende Gleichungskette

$$(2) \quad x = \sqrt{6-x} = \sqrt{6-\sqrt{6-x}} = \sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-x}}} = ...$$

Für $x = 2$ hat jeder Wurzelterm in (2) den Wert 2, sodass man die Zahl 2 so darstellen kann:

$$2 = \sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-....}}}$$

Wegen $1 = 3 - 2$ besitzt daher die Zahl 1 die Darstellung

$$1 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}} - \sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-....}}}$$

Eine algebraische Expedition in das Markow-Problem

von Hartwig Fuchs

Der russische Mathematiker Markow[1] gilt als bedeutender Stochastiker, der die Grundlagen der Theorie der Zufallsprozesse (Markow-Ketten) schuf. Zu Beginn seiner Karriere befasste er sich aber auch mit zahlentheoretischen Fragen. Aus dieser Zeit stammt ein schönes Problem, auf das er im Jahr 1879 stieß und das er mit ganz elementaren Mitteln lösen konnte.

Markows Problem

(1) Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Markow-Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Die Gleichung (1) gehört zur Klasse der diophantischen[2] Gleichungen – das sind Polynomialgleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Lösungen (sofern sie existieren) ganze Zahlen sind.

Die Bestimmung eventueller Lösungen solcher Gleichungen bereitet oft enorme Schwierigkeiten, weil man häufig für jedes einzelne Problem eigene Untersuchungsmethoden und Lösungsalgorithmen entwickeln muss. Man denke nur an die Fermat-Gleichungen $x^n + y^n = z^n$, mit $n = 3, 4, 5, \ldots$, bei denen man mehr als 300 Jahre brauchte, um schließlich beweisen zu können, dass keine von ihnen eine von $(0, 0, 0)$ verschiedene Lösung besitzt.

Die Besonderheit des Markow-Problem besteht nun darin, dass es einen ganz einfachen Algorithmus gibt, mit dem man seine sämtlichen Lösungen berechnen kann.

Reguläre Familien von Lösungen

Jedes Tripel (a, b, c) aus ganzen Zahlen ist eine Lösung von (1), wenn gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc.$$

Im Folgenden sei nun (a, b, c) eine Lösung von (1), deren Komponenten a, b und c sämtlich verschieden sind – ein solches Tripel heißt *regulär*. Mit (a, b, c) sind dann auch $(-a, -b, c)$, $(-a, b, -c)$ und $(a, -b, -c)$ Lösungen von (1). Aus jedem dieser vier Tripel ergeben sich durch Vertauschung der Komponenten jeweils fünf weitere Lösungstripel – zum Beispiel erhält man so aus (a, b, c) die fünf Tripel (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) und (c, b, a). Wir sagen: Diese $4 \cdot 6 = 24$ Tripel sind *verwandte, reguläre* Lösungen; sie bilden zusammen die reguläre Familie $F(a, b, c)$.

[1] Andrej A. Markow (1856–1922)

[2] Diophant von Alexandria (um 250 n.Chr.) beschrieb den nach ihm benannten Gleichungstyp ausfürhlich in seinem Buch „Arithmetica“

(2) Jede reguläre Familie $F(a,b,c)$ besteht aus einem Lösungstripel (a,b,c) von (1) mit lauter verschiedenen Komponenten und den 23 Tripeln, die mit (a,b,c) verwandt sind.
Für verwandte Tripel (a,b,c) und (a',b',c') gilt: $F(a,b,c) = F(a',b',c')$.

Singuläre Familien

Im Folgenden sei (a,b,c) eine Lösung von (1), deren Komponenten nicht alle verschieden sind; wir setzen zum Beispiel $a = b$ mit $a \geq 0$. Aus (1) folgt dann:

(3) $c^2 - 3a^2c + 2a^2 = 0$, woraus $c = \frac{1}{2}(3a^2 \pm a\sqrt{9a^2-8})$ folgt.

1. Fall: $a = 0$. Nach Voraussetzung ist $b = 0$ und wegen (3) ist $c = 0$. Das Tripel $(0,0,0)$ ist eine Lösung von (1) und da es keine weiteren von $(0,0,0)$ verschiedenen Lösungen gibt, besteht die singuläre Familie $F(0,0,0)$ nur aus dem *singulären Tripel* $(0,0,0)$.

2. Fall: $a = 1$. Aus (3) folgt dann $c = 1$ oder $c = 2$.

   Ist $c = 1$, dann hat (1) die singuläre Lösung $(1,1,1)$. Die zugehörige singuläre Familie ist $F(1,1,1) = \{(1,1,1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1)\}$ mit vier Elementen.

   Ist $c = 2$, dann folgt aus (3), dass (1) die singuläre Lösungen $(1,1,2)$ hat und die zugehörige singuläre Familie $F(1,1,2)$ hat $4 \cdot 3 = 12$ Elemente, denn es gibt vier verschiedene Vorzeichenmöglichkeiten und drei Vertauschungsmöglichkeiten für die Komponenten von $(1,1,2)$.

3. Fall: $a \geq 2$. Wegen der Ganzzahligkeit von c muss der Radikand $9a^2 - 8$ in (3) eine ganzzahlige Quadratzahl sein. Sei also $9a^2 - 8 = g^2$, wobei g eine ganze Zahl sei. Dann ist $8 = 9a^2 - g^2 = (3a+g)(3a-g) > 3a+g$, weil gilt: Beide Klammern sind positiv – denn wären sie beide negativ, so wäre $(3a+g)+(3a-g) < 0$ und daher $6a < 0$, ein Widerspruch. Aus $8 > 3a+g$ und $a \geq 2$ folgt $a = 2$ und damit ist dann $g^2 = 9 \cdot 2^2 - 8 = 28$ und g ist nicht ganzzahlig – ein Widerspruch. Es gibt daher keine Lösung (a,b,c) von (1) mit $a = b$ und $a \geq 2$.

(4) Die singulären Familien $F(0,0,0)$, $F(1,1,1)$ und $F(1,1,2)$ enthalten zusammen genau die singulären Lösungen von (1) mit zwei oder mit drei übereinstimmenden Komponenten.

Der Markow-Algorithmus

Der französische Mathematiker Viète[3] hat einen nützlichen Satz über die Beziehungen zwischen den Koeffizienten und Lösungen von Polynomialgleichungen bewiesen. Danach gelten für eine quadratische Gleichung $q(x) = x^2 + rx + s = 0$ mit den Lösungen u und v:

[3] Francois Viète (1540–1603), auch Vietà genannt, Jurist und Mathematiker

(5) $-(u+v) = r$ und $u \cdot v = s$.

Beweis: Wenn u und v Lösungen von $q(x) = 0$ sind, dann gilt $q(x) = (x-u)(x-v)$ (und umgekehrt). Danach ist $q(x) = x^2 - (u+v)x + uv = x^2 + rx + s$, woraus sich unmittelbar (5) ergibt.

Mit Hilfe der elementaren Aussage (5) hat Markow eine genial einfache Methode zur Berechnung neuer Lösungen aus einer bekannten Lösung entwickelt. Dabei beschränkt er sich auf die Konstruktion von jeweils nur den Lösungen mit positiven Komponenten einer Familie. Im Folgenden seien daher die Komponenten einer Lösung stets als positiv vorausgesetzt – jede Lösungsfamilie $\neq (0,0,0)$ besitzt solche Elemente.

Die Komponente a mit $a > 0$ einer Lösung (a,b,c) von (1) ist eine Lösung der Gleichung

$$A(x) = x^2 - 3bcx + b^2 + c^2 = 0.$$

Die Gleichung $A(x) = 0$ hat noch eine zweite Lösung $\bar{a}$ – wobei $\bar{a} = a$ sein kann – für die nach Viète gilt:

(5_1) $-(a+\bar{a}) = -3bc$ und

(5_2) $a\bar{a} = b^2 + c^2$.

Aus (5_1) und (5_2) folgt: $\bar{a} = 3bc - a$ ist ganzzahlig und $\bar{a} > 0$. Damit gilt:

(6_1) $(\bar{a}, b, c)$ mit $\bar{a} = 3bc - a$ und $\bar{a} > 0$ ist eine Lösung der Markow-Gleichung (1).

Nachweis: $\bar{a}^2 + b^2 + c^2 = (3bc - a)^2 + b^2 + c^2 = 9b^2c^2 - 3abc$ wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ und $3\bar{a}bc = 3(3bc - a)bc = 9b^2c^2 - 3abc$, was ($6_1$) beweist.

Ganz entsprechend sind b und $\bar{b} = 3ac - b$ die Lösungen der Gleichung $B(y) = y^2 - 3acy + a^2 + c^2 = 0$ sowie c und $\bar{c} = 3ab - c$ sind die Lösungen von $C(z) = z^2 - 3abz + a^2 + b^2 = 0$, woraus folgt:

(6_2) $(a, \bar{b}, c)$ mit $\bar{b} = 3ac - b$ und $\bar{b} > 0$ ist eine Lösung von (1).

(6_3) $(a, b, \bar{c})$ mit $\bar{c} = 3ab - c$ und $\bar{c} > 0$ ist eine Lösung von (1).

Schema des Markow-Algorithmus

zur Berechnung von Lösungen aus einer bekannten Lösung (a,b,c):

$$(6)\quad (a,b,c)\ \begin{array}{c} \nearrow \\[1em] \longrightarrow \\[1em] \searrow \end{array}\ \begin{array}{llcl} (6_1) & \bar{a} = 3bc - a & \longrightarrow & (\bar{a}, b, c) \\[1em] (6_2) & \bar{b} = 3ac - b & \longrightarrow & (a, \bar{b}, c) \\[1em] (6_3) & \bar{c} = 3ab - c & \longrightarrow & (a, b, \bar{c}) \end{array}$$

Beispiele:

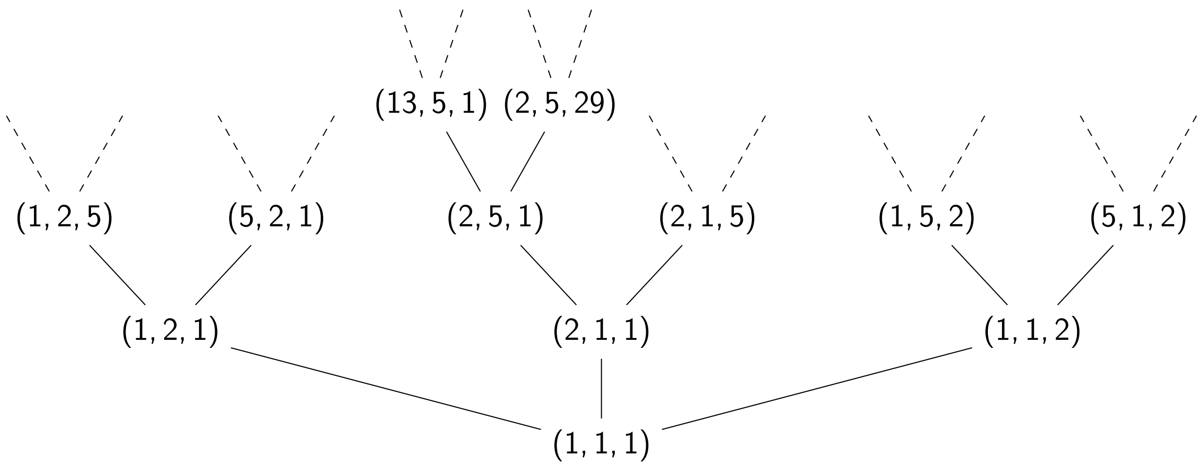
- Das Start-Tripel sei $(1, 1, 1)$. Mit (6) erhält man: Für $a = b = c = 1$ ist $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = 2$. Damit ergeben sich die neuen Lösungen $(\bar{a}, b, c) = (2, 1, 1)$, $(a, \bar{b}, c) = (1, 2, 1)$ und $(a, b, \bar{c}) = (1, 1, 2)$.

- Das Start-Tripel sei $(2, 1, 1)$. Für $a = 2$, $b = c = 1$ sind $\bar{a} = 1$ und $\bar{b} = \bar{c} = 5$. Damit sind $(\bar{a}, b, c) = (1, 1, 1)$, $(a, \bar{b}, c) = (2, 5, 1)$ und $(a, b, \bar{c}) = (2, 1, 5)$.

- Das Start-Tripel sei $(2, 5, 1)$. Für $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$ sind $\bar{a} = 13$, $\bar{b} = 1$, $\bar{c} = 29$. Also sind $(\bar{a}, b, c) = (13, 5, 1)$, $(a, \bar{b}, c) = (2, 1, 1)$ und $(a, b, \bar{c}) = (2, 5, 29)$.

Das Markow-Problem

Aus dem Tripel $(1, 1, 1)$ erzeugt der Markow-Algorithmus 3 neue Lösungen, aus diesen produziert er 3^2 Lösungen, die jedoch nicht alle neu sind, und so weiter. So ergeben sich nach und nach immer mehr Lösungen – und diese lassen sich in einer verzweigten linearen Anordnung als sogenannter Markow-Baum übersichtlich anordnen.



Dieses Anfangsstück des Markow-Baumes legt die Frage nahe: Erzeugt der Markow-Algorithmus sämtliche Lösungen von (1) mit positiven Komponenten?

Vollständige Lösung des Markow-Problems

Es sei $T = (a, b, c)$ ein reguläres Lösungstripel der Gleichung (1). Wendet man den Markow-Algorithmus auf T an, so erhält man die drei Tripel $T' = (\bar{a}, b, c)$, $T'' = (a, \bar{b}, c)$ und $T''' = (a, b, \bar{c})$ mit den in (6) angegebenen Werten von $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{c}$. Für die kleinste der Zahlen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ heißt das zugehörige der Tripel T', T'', T''' der Vorgänger von T.

Beispiel:

Das Tripel $T = (a, b, c) = (2, 5, 29)$ ist eine Lösung von (1). Aus (6) – angewendet auf T – folgt dann: $\bar{a} = 433$, $\bar{b} = 169$, $\bar{c} = 1$. Wegen $\bar{c} < \bar{b} < \bar{a}$ ist das Tripel $T''' = (a, b, \bar{c}) = (2, 5, 1)$ der Vorgänger von T.

(7) Für jedes Tripel $T = (a, b, c)$, wobei $T \neq (0, 0, 0)$ und $T \neq (1, 1, 1)$ sei, gilt: Eines der Tripel $T' = (\bar{a}, b, c)$ mit $\bar{a} = 3bc - a$, $T'' = (a, \bar{b}, c)$ mit $\bar{b} = 3ac - b$, $T''' = (a, b, \bar{c})$ mit $\bar{c} = 3ab - c$ ist Vorgänger von T.

Nachweis:

Aus $a > b$ und $a > c$ folgt: $\bar{a} < \bar{b}$ und $\bar{a} < \bar{c}$, denn $\bar{a} = 3bc - a < 3ac - b = \bar{b}$ sowie $\bar{a} = 3bc - a < 3ab - c = \bar{c}$. Daher ist $T' = (\bar{a}, b, c)$ Vorgänger von T.

Ganz entsprechend zeigt man:

Ist $b > a$ und $b > c$, dann ist $\bar{b} < \bar{a}$ und $\bar{b} < \bar{c}$, sodass $T'' = (a, \bar{b}, c)$ der Vorgänger von T ist.

Ist $c > a$ und $c > b$, dann ist $\bar{c} < \bar{a}$ und $\bar{c} < \bar{b}$, also ist $T''' = (a, b, \bar{c})$ der Vorgänger von T.

Die regulären Lösungstripel von (1), deren Komponenten natürliche Zahlen sind, können in einer Folge F: $T_1, T_2, T_3, \ldots$ so angeordnet werden, dass jedes T_n mit $n \geq 7$ in der Folge F nach seinem Vorgänger T_m kommt – es gilt dann also $m < n$. Wir legen ein Anfangsstück von F so fest:

F: $T_1 = (1, 2, 5)$, $T_2 = (1, 5, 2)$, $T_3 = (2, 1, 5)$, $T_4 = (2, 5, 1)$, $T_5 = (5, 1, 2)$, $T_6 = (5, 2, 1)$, $T_7 = (1, 5, 13), \ldots$

(8) Es sei T_n ein reguläres Lösungstripel von (1), dessen Vorgänger singulär ist. Dann ist T_n eines der Tripel $T_1, T_2, \ldots, T_6$.

Vorweg: Nach (4) hat ein singuläres Tripel mit positiven Komponenten stets zwei Komponenten 1 und eine Komponente ≤ 2. Bei einem regulären Tripel sind alle Komponenten verschieden, sodass mindestens eine von ihnen ≥ 3 ist.

Beweis von (8): Es sei $T_n = (a, b, c)$ mit $a \geq 3$. Der Vorgänger von T_n ist eines der in (7) genannten Tripel T', T'', T'''. Da T'' und T''' die Komponente a haben und $a \geq 3$ ist, können T'' und T''' nicht singulär sein. Also ist $T' = (3bc - a, b, c)$ der singuläre Vorgänger von T_n.

Wäre nun $b = c = 1$, dann wäre $T_n = (a, 1, 1)$ singulär. Daher ist $b \neq c$, also $b = 1$, $c = 2$ oder $b = 2$, $c = 1$ und somit $bc = 2$. Ferner ist $3bc - a = 1$. Daraus folgt $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$ und dann $T_n = (5, 1, 2) = T_5$ oder $a = 5$, $b = 2$, $c = 1$, sodass $T_n = (5, 2, 1) = T_6$ ist. Untersucht man auf gleiche Weise die Möglichkeiten $b \geq 3$ sowie $c \geq 3$, dann stellt sich heraus: Im ersten Fall ist $T_n = (1, 5, 2) = T_2$ oder $T_n = (2, 5, 1) = T_4$ und im zweiten Fall ist $T_n = (1, 2, 5) = T_1$ oder $T_n = (2, 1, 5) = T_3$.

Aus (8) folgt unmittelbar:

(9) Ein Lösungstripel T_n von (1) hat einen regulären Vorgänger T_m, mit $m < n$, wenn $n \geq 7$ ist.

Es sei T_{n_1} eine reguläre Lösung von (1). Ist $n_1 \leq 6$, so ist sein Vorgänger singulär nach (8). Für $n_1 \geq 7$ hat T_{n_1} einen regulären Vorgänger T_{n_2} mit $n_2 < n_1$ wegen (9). Der Vorgänger von T_{n_2} ist entweder singulär oder er ist ein reguläres Tripel T_{n_3} mit $n_3 < n_2$.

Auf diese Weise fortfahrend gelangt man stets zu einem singulären Tripel. Denn die Folge T_{n_1}, T_{n_2}, T_{n_3}, ... aus regulären Tripeln hat ein letztes reguläres Glied T_{n_k}, weil die Ungleichungskette $n_1 > n_2 > n_3 > ...$ aus natürlichen Zahlen mit einer kleinsten Zahl n_k abbrechen muss.

Hätte dann T_{n_k} einen regulären Vorgänger $T_{n_{k+1}}$, so wäre $n_{k+1} < n_k$, ein Widerspruch zur Definition von n_k. Also hat T_{n_k} einen singulären Vorgänger T^*. Da T^* nur eines der Tripel $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$ oder $(1, 1, 1)$ sein kann und weil die ersten drei Tripel alle den Vorgänger $(1, 1, 1)$ haben, gilt:

(10) Ausgehend von einer beliebigen Lösung $\neq (0, 0, 0)$ und $\neq (1, 1, 1)$ von (1) gelangt man stets durch eine Folge von Vorgängern zur Lösung $(1, 1, 1)$.

Es sei nun T ein Lösungstripel von (1) mit dem Vorgänger T^*. Dann heißt T ein Nachfolger von T^*. Aus der Aussage (10) folgt dann: Ausgehend von $(1, 1, 1)$ gelangt man durch eine Folge von Nachfolgern, die mit dem Markow-Algorithmus erzeugt sind, zu jeder Lösung $T_n = (a, b, c)$ von (1) mit positiven Komponenten. Und da man mit T_n die vollständige Lösungsfamilie $F(a, b, c)$ konstruieren kann, darf man sagen:

Satz von Markow

Mit dem Algorithmus (6) erhält man sämtliche Lösungen $\neq (0, 0, 0)$ und $\neq (1, 1, 1)$ der Gleichung (1).

Kurzer Bericht von einer weiteren algebraischen Expedition

Die Markow-Gleichung (1) nimmt unter den Polynomialgleichungen

$x^2 + y^2 + z^2 = n \cdot xyz$, mit $n = 1, 2, 3, ...$

eine Sonderstellung in zweierlei Hinsicht ein.

Zum Einen besitzt keine der Gleichungen für $n = 2, 4, 5, 6, ...$ eine von $(0, 0, 0)$ verschiedene Lösung – das haben die deutschen Mathematiker Hurwitz und Frobenius[4] bewiesen.

Zum Anderen sind für $n = 1$ alle Lösungen von $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ durch die Lösungen von (1) gegeben. Es gilt nämlich:

(11) Jedes Lösungstripel von $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ hat die Form $(3a, 3b, 3c)$, wobei (a, b, c) eine Lösung der Markow-Gleichung (1) ist.

---

[4] Adolf Hurwitz (1859–1919), Georg F. Frobenius (1849–1917)

Es sei (u, v, w) eine Lösung von $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$, sodass $u^2 + v^2 + w^2 = uvw$ gilt. Dann sind die Komponenten u, v, w Vielfache von 3. Wäre nämlich eine oder zwei der Zahlen u, v, w nicht durch 3 teilbar, dann wäre $u^2 + v^2 + w^2$ nicht durch 3 teilbar, wohl aber uvw – ein Widerspruch. Wären alle drei Zahlen u, v, w nicht durch 3 teilbar, dann setze man $u = 3a \pm 1$, $v = 3b \pm 1$, $w = 3c \pm 1$ und damit folgte, dass $u^2 + v^2 + w^2$ durch 3 teilbar wäre, während uvw es nicht ist – ein Widerspruch.
Da alle Komponenten von (u, v, w) Vielfache von 3 sind, setzen wir: $u = 3a$, $v = 3b$, $w = 3c$. Dann gilt: $(3a)^2 + (3b)^2 + (3c)^2 = 3a \cdot 3b \cdot 3c$ und daher $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$, woraus folgt, dass (a, b, c) eine Lösung der Markow-Gleichung (1) ist. Umgekehrt: Jede Lösung (a, b, c) von (1) führt zur Lösung $(3a, 3b, 3c)$ von $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$. Daraus folgt die Behauptung (11).

Mathematische Entdeckungen

Rekonstruktion einer Zahlenfolge

Die berühmte Zahlenolge von Fibonacci*

(1) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

mit den Startzahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ erfüllt die Regel

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Es sei nun x_1, x_2, x_3, ... eine von (1) verschiedene Zahlenfolge mit der Rekursionsregel (2), von der man irgend zwei Glieder x_m und x_n mit $1 \leq m < n$ kennt. Entwickle eine Formel zur Rekonstruktion der Formel. (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2014 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 117

In Heft 117 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Die Menge aller natürlichen Zahlen $\leq n$ bezeichnen wir mit M_n, $n \geq 1$. Also ist $M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
Es sei nun S eine Teilmenge von M_n, in der kein Element kleiner ist als die Anzahl der Elemente von S. Wir nennen dann S eine **starke Teilmenge** von M_n.

* Leonardo von Pisa – genannt Fibonacci (um 1170 – um 1250), bedeutender Mathematiker am Ende des Mittelalters

Beispiel:
Die Menge $M_3 = \{1, 2, 3\}$ hat 5 starke Teilmengen: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2, 3\}$ und die leere Menge $\{\}$ – sie enthält ja keine Elemente, also auch kein Element, das kleiner als 0 ist. Dagegen sind $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$ keine starken Teilmengen von M_3.

Es sei nun A_n die Anzahl der starken Teilmengen von M_n. Im Beispiel gilt für die Menge M_3, dass $A_3 = 5$ ist.

a) Bestimme die Anzahlen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und A_6.
b) Versuche eine Formel zu finden, mit deren Hilfe es möglich sein sollte, A_n für ein gegebenes n zu berechnen. (Deine vermutete Formel brauchst du aber nicht zu beweisen!) (H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt Hien Le, 10. Klasse des Gymnasiums an der Stadtmauer in Bad Kreuznach, und Kevin Mours, 10. Klasse des Karolinen-Gymnasiums Frankenthal.

a) Beide berechnen

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	3	5	8	13	21

durch Auflisten aller starken Teilmengen von M_n für $n \leq 6$, etwa für $n = 5$:

$\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$.

Man sieht: $A_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \ldots$. Hierbei steht $\binom{n}{0}$ für $\{\}$, $\binom{n}{1}$ ist die Anzahl aller einelementigen Teilmengen von M_n (diese sind alle stark), $\binom{n-1}{2}$ ist die Anzahl der zwei-elementigen Teilmengen von n (denn es dürfen zwei Zahlen aus $M_n \setminus \{1\}$ herausgegriffen werden) usw.

b) Hien und Kevin beobachten, dass A_n sich wie die Fibonacci-Folge verhält: Es gilt $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Aufgabenteil a) beweist den Induktionsanfang. Der Induktionsschritt folgt aus der Additionsformel für Binomialkoeffizienten: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$:

$$\begin{array}{rcccccccccc} & A_n & = & & 1 & + & \binom{n}{1} & + & \binom{n-1}{2} & + & \ldots \\ + & A_{n+1} & = & 1 & + & \binom{n+1}{1} & + & \binom{n}{2} & + & \binom{n-1}{3} & + \ldots \\ \hline & A_{n+2} & = & 1 & + & \binom{n+2}{1} & + & \binom{n+1}{2} & + & \binom{n}{3} & + \ldots \end{array}$$

Ein Blick hinter die Kulissen
Das Alter des Mathematiklehrers
von Hartwig Fuchs

Mathis hat einen neuen Rechentrick entdeckt, mit dem er das Alter einer Person erraten kann. Diesen Trick möchte er in der Mathematik-Stunde demonstrieren. Herr Graukopf, sein Lehrer, bietet sich als Versuchsperson an. Mathis erklärt darauf den Ablauf seines Verfahrens:

1. Schritt: Von der Zahl x der Lebensjahre (in ganzen Zahlen) wird die Quersumme von x subtrahiert und das Ergebnis Mathis mitgeteilt.

   Herr Graukopf nennt die Zahl 45.

2. Schritt: Die Ziffern der Zahl x werden vertauscht. Von der so erhaltenen neuen Zahl y wird die Quersumme von y subtrahiert und die Differenz wird Mathis mitgeteilt.

   Herr Graukopf nennt die Zahl 36.

Mit den beiden Informationen aus dem 1. und 2. Schritt kann Mathis stets das Alter x einer Person bestimmen, sofern x eine ganze Zahl mit $11 \leq x \leq 99$ ist.

Mathis kennt die beiden Zahlen 45 und 36. Aus ihnen leitet er ab, dass sein Mathematiklehrer 54 Jahre alt ist – was dieser auch bestätigt!

Wie konnte es Mathis gelingen, das richtige Alter seines Lehrers zu bestimmen? Bevor du weiterliest, solltest du versuchen, das selbst herauszubekommen.

Des Rätsels Lösung

1. Schritt: Das Alter x des Lehrers ist eine zweiziffrige Zahl; es sei daher $x = m \cdot 10 + n$. Dann ist $m + n$ die Quersumme von x und das erste Zwischenergebnis lautet: $(m \cdot 10 + n) - (m + n) = 9m$.

   Aus der Kenntnis von $9m$ kann Mathis sofort die erste Ziffer m von x bestimmen.

2. Schritt: Wenn man in der Zahl $x = m \cdot 10 + n$ die Ziffern vertauscht, dann ergibt sich die neue Zahl $y = n \cdot 10 + m$ mit der Quersumme $n + m$.

   Aus der Kenntnis der Differenz $(n \cdot 10 + m) - (n + m) = 9n$ bestimmt Mathis leicht die zweite Ziffer n von x.

Damit kennt Mathis die gesuchte Zahl $x = m \cdot 10 + n$.

Bei Mathis' Lehrer ist $9m = 45$, also $m = 5$ und $9n = 36$, also $n = 4$, sodass der Lehrer $x = 5 \cdot 10 + 4 = 54$ Jahre alt ist.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 117

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 7: Luca Bühler 72.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Janik Fritzsche 33, Timo Wolff 12;
Kl. 6: Jan Gubi 22, Maximilian Hauck 107;
Kl. 9: Victoria Fox 34, Nick Wittich 15;
Kl. 10: Katharina Rößler 40;
Kl. 13: Andreas Pitsch 46.

Bad Ems, Goethe-Gymnasium:
Kl. 11: Miriam Gerharz 73.

Bad Kreuznach, Gymnasium an der Stadtmauer
Kl. 10: Hien Le 45.

Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Gutzler)**:**
Kl. 5: Niels Bauer 5, Laura Krause 22;
Kl. 6: Bastian Elzer 2, Paul Kruse 3, Sophie Loreen Kuß 1, Stefanie Saini 1, Annalena Schimbold 3.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 13: Frank Schindler 63.

Berlin, Katholische Theresienschule:
Kl. 6: Emma Weiß 22.

Bonn, Carl-von-Ossietzky-Gymnasium: Kl. 6: Lorenzo Conti 14.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 11: Jamico Schade 51.

Calw-Stammheim, Hermann-Hesse-Gymnasium:
Kl. 8: Iolanthe Köcher 88.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium, (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Tim Reinhard 5;
Kl. 6: Annika Koch 31, Leonie Marton 4;
Kl. 10: Kevin Mours 30, Adriana Stenger 30, Marcel Wittmann 51;
Kl. 11: Tamara Fischer 20.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 8: Patrick Riebe 61.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 5: Louisa Glaum 20, Clara Schwarz 20;
Kl. 6: Antonia Glaum 19, Tobias Jedich 20, Sara Schaubert 20.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 3: Jacob Huck 5, Olivia Kern 5, Elizabeth Korzilius 5, Thies Koster 4, Lara Sachs 2;
Kl. 4: Fritz Albus 7, Ridh Choudhury 11, Merlin Kolrep 3, Ella Zwermann 30.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin: Frau Niederle):
Kl. 5: Tobias Streichhardt 9;
Kl. 6: Burak Sadic 14;
Kl. 7: Melanie Schuy 46;
Kl. 8: David Storzer 123;
Kl. 9: Marvin Weisbener 48.

Holzwickede, Clara-Schumann-Gymnasium:
Kl. 9: Niklas Gerling 7.

Kassel, Engelsburg-Gymnasium: Kl. 6: Luc Wieners 14.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Görkem Balci 2, Daria Hartwig 10, Zineb El Hhoual 8, Tabea Stamm 32, Giuliana Wustrack 7.
Kl. 6: Lukas Bonn 35, Nils Grandien 25, Nico Lick 8, Dennis Mayle 54.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:
Kl. 6: Beatrice Popescu 40;
Kl. 7: Philipp Kirschner 9.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Lea Weißenfels 20;
Kl. 6: Paula Roderer 3, Ivan Savic 3;
Kl. 7: Valentina Jung 15, Linda Thelen 5, Katharina Weber 8;
Kl. 8: Jason Beck 2, Lincoln Bui 11, Marc Hoffmann 7, Elias Röscher 8, Sebastian Trapp 8;
Kl. 11: Theresa Schöche 34.

München, Städtische Berufsschule für Informationstechnik:
Kl. 12: Bettina Diller 30.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Marius Ahlfeld 19;
Kl. 6: Duy Kha Pham 6;

Kl. 8: Jonas Ahlfeld 100, Liana Bergen 11, Lena Christmann 20, Anja Wingender 53;
Kl. 9: Matthias Bergen 46, Denise Kadri 14, Jasmin Hallyburton 43, Verena Rüsing 51;
Kl. 10: Yentl Deuster 16, Philipp Lehmann 12;
Kl. 11: Mirjam Bourgett 25, Daniel Fink 6, Alexander Göbel 30, Ella Hummel 41, Sandra Wingender 43;
Kl. 12: Ruwen Bergen 20, Janina Vogl 75;
Kl. 13: David Michel 55.

Neuwied, Wemer-Heisenberg Gymnasium: Kl. 12: Robert Kowallek 73.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 6: Jonas Blumenroth 11, Jonas Glückmann 24, Eric Paikert 7;
Kl. 7: Jonas Emmerich 13, Maximilian Göbel 52, Tobias Heinze 31, Louis Jöbstl 12, Philipp Karn 38, Fabian Liepach 50, Jara Müller-Kästner 51;
Kl. 10: Katharina Kiefer 20, Jiyune Whang 20;
Kl. 11: Heiko Kötzsche 70.

Ostfildern, Otto-Han-Gymnasium:
Kl. 7: Clara Deifel 32;

Regensburg, Albertus Magnus Gymnasium: Kl. 5: Johannes Plößl 12.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner)**:**
Kl. 6: Lukas Arends 3, Nele-Sophie Arenz 1, Johannes Bahne 1, Stella Batzella 4, Clara Hiller 1, Lara Jungheim 3, Nele Küter 3, Anna-Lisa Landsrath 22, Anna McBrien-Martin 3. Lukas Nießen 130, Franziska Schamel 2, Leona Scheibe 3, Alina Schmidt 3;
Kl. 11: Lars Horak 1;
Kl. 12: Simon Löhr 9.

St. Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:
Kl. 6: Anastasia Kaletchits 3;
Kl. 8: Alexander Rachev 1.

Schwalbach, Albert-Einstein-Schule: Kl. 7: Alexander Martin 18.

Wiesbaden, Leibnizschule:
Kl. 8: Andreas Dernier 52;
Kl. 9: Elisa Dernier 42.

Wildeshausen, Gymnasium Wildeshausen:
Kl. 7: Lara Kalbach 6;
Kl. 8: Wiebke Schneider 9;
Kl. 9: Maximilian Grohe 19.

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2014

mit der Preisvergabe
an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2013/2014
am Samstag, dem 22. November 2014, Beginn 10 Uhr,
im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Frankenstraße 17, 55232 Alzey.

Den Festvortrag wird Herr Prof. Dr. Elmar Schömer, Universität Mainz, halten.
Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.
Weitere Informationen findet Ihr demnächst auf der MONOID-Internetseite
`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`.

Mitteilung

Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag in Höhe von 10 € für das Schuljahr 2014/15 auf das MONOID-Konto, IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18, BIC: MVBMDE55, Stichwort „MONOID“, zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen).

Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.)
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus
Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe
Betreuung der Abonnements und Versand: Anita Peffer-Kohl

Jahrgang 34 | Heft 119 | September 2014

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das folgende Konto zu überweisen: IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18, BIC: MVBMDE55, Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid